ÓPTICA

Tercera edición

Eugene HECHT

Adelphi University

Traducción:

Raffaello Dal Col

Revisión técnica:

Dra. Dña. Rosa Weigand Talavera
Profesora Asociada. Departamento de Óptica. Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

Dr. D. José Manuel Guerra Pérez
Catedrático de Óptica. Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

ADDISON WESLEY

Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo • San Juan
San José • Santiago • São Paulo • Reading, Massachusetts • Harlow, England

datos de catalogación bibliográfica

Hecht, Eugene
ÓPTICA
ADDISSON WESLEY IBEROAMERICANA, Madrid, 2000

ISBN: 84-7829-025-7
Materia: Óptica, 535

Formato: 20,5 x 23,5 Páginas: 722

No está permitida la reproducción total o parcial de esta obra
ni su tratamiento o transmisión por cualquier medio o método
sin autorización escrita de la Editorial

DERECHOS RESERVADOS
© 2000 respecto a la tercera edición en español por:
ADDISON WESLEY IBEROAMERICANA, S.A.
Núñez de Balboa, 120
28006 MADRID

ISBN: 84-7829-025-7
Depósito Legal: M-35.507-2000

Traducido de:
OPTICS
Copyright © 1998 by Addison Wesley Longman, Inc.
ISBN: 0-201-30425-2

Edición en español:
Editora: *Isabel Capella*
Asistente editorial: *Ana Isabel García*
Editor de producción: *Pedro Aguado*
Cubierta: *I. C. Claroscuro*
Composición: *Infortex, S.L.*
Impreso por: *Closas-Orcoyen, S.L.*

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológico

Contenido

Prólogo IX

1 Una breve historia 1
1.1 Prólogo 1
1.2 En el comienzo 1
1.3 Desde el siglo diecisiete 2
1.4 El siglo diecinueve 4
1.5 La óptica del siglo veinte 7

2 El movimiento ondulatorio 11
2.1 Ondas unidimensionales 11
2.2 Ondas armónicas 15
2.3 Fase y velocidad de fase 18
2.4 El principio de superposición 21
2.5 La representación compleja 23
2.6 Los fasores y la adición de ondas 24
2.7 Ondas planas 26
2.8 La ecuación diferencial de onda tridimensional 29
2.9 Ondas esféricas 30
2.10 Ondas cilíndricas 33
Problemas 34

3. Teoría electromagnética, fotones y luz 37
3.1 Leyes básicas de la teoría electromagnética 38
3.2 Ondas electromagnéticas 43
3.3 Energía y momento 46
3.4 Radiación 57
3.5 La luz en la materia 66
3.6 El espectro electromagnético 73
3.7 La Teoría Cuántica de Campos 80
Problemas 82

4 La propagación de la luz 86
4.1 Introducción 86
4.2 Esparcimiento Rayleigh 86
4.3 Reflexión 96
4.4 Refracción 100
4.5 El principio de Fermat 107
4.6 El tratamiento electromagnético 111
4.7 Reflexión total interna 123
4.8 Las propiedades ópticas de los metales 129
4.9 Aspectos conocidos de la interacción de la luz y la materia 134
4.10 El tratamiento de Stokes de la reflexión y la refracción 139
4.11 Fotones, Ondas y Probabilidad 140
Problemas 144

5 Óptica geométrica 151
5.1 Introducción 151
5.2 Lentes 152
5.3 Diafragmas 176
5.4 Espejos 180
5.5 Prismas 191
5.6 Fibras ópticas 198
5.7 Los sistemas ópticos 206
5.8 Conformación del Frente de Onda 234
Problemas 241

6 Más sobre óptica geométrica 250
6.1 Lentes gruesas y sistemas de lentes 250
6.2 Trazado analítico de rayos 253
6.3 Aberraciones 260

6.4 Sistemas GRIN 280
6.5 Conclusiones 283
Problemas 286

7 La superposición de ondas 289
7.1 Suma de ondas de la misma frecuencia 290
7.2 Suma de ondas de diferente frecuencia 299
7.3 Ondas periódicas anarmónicas 304
7.4 Ondas no periódicas 309
Problemas 320

8 Polarización 324
8.1 La naturaleza de la luz polarizada 324
8.2 Polarizadores 331
8.3 Dicroísmo 332
8.4 Birrefringencia 336
8.5 Esparcimiento y polarización 344
8.6 Polarización por reflexión 347
8.7 Retardadores 352
8.8 Polarizadores circulares 357
8.9 Polarización de luz policromática 358
8.10 Actividad óptica 361
8.11 Efectos ópticos inducidos-moduladores ópticos 366
8.12 Una descripción matemática de la polarización 372
Problemas 378

9 Interferencia 384
9.1 Consideraciones Generales 385
9.2 Condiciones para la interferencia 388
9.3 Interferómetros de división del frente de onda 392
9.4 Interferómetros de división de amplitud 399
9.5 Tipos y localización de las franjas de interferencia 414
9.6 Interferencia de haces múltiples 416
9.7 Aplicaciones de películas mono y multicapa 426
9.8 Aplicaciones de la interferometría 431
Problemas 437

10 Difracción 441
10.1 Consideraciones preliminares 441
10.2 Difracción de Fraunhofer 450
10.3 Difracción de Fresnel 485
10.4 Teoría escalar de la difracción de Kirchhoff 510
10.5 Ondas de difracción en bordes 514
Problemas 516

11 Óptica de Fourier 522
11.1 Introducción 522
11.2 Transformadas de Fourier 522
11.3 Aplicaciones ópticas 532
Problemas 561

12 Las bases de la teoría de la coherencia 565
12.1 Introducción 565
12.2 Visibilidad 567
12.3 La función de coherencia mutua y el grado de coherencia 572
12.4 Interferometría estelar y coherencia 579
Problemas 584

13 Óptica moderna: láseres y otros temas 587
13.1 Láseres y Luz Láser 587
13.2 Formación de imágenes-distribución espacial de la información óptica 612
13.3 Holografía 630
13.4 Óptica no lineal 648
Problemas 654

Apéndice 1: La teoría electromagnética 659-661
Apéndice 2: La teoría de difracción de Kirchhoff 662
Tabla 1 663-667
Solución a algunos problemas 668-693
Bibliografía 695-698
Índice de materias 699-708

Prólogo

Para *Ca. b.m.l.*

Tres son los distintos objetivos a los que está supeditada esta tercera edición: perfeccionar la pedagogía, modernizar la disertación y actualizar el contenido.

Durante la última década, la utilización de la segunda edición en las clases ha permitido introducir algunas mejoras pedagógicas, pequeñas pero de gran alcance que se han ido incorporando al texto actualizado. Como siempre, se procura responder a las cambiantes necesidades de los estudiantes.

En esta edición continúa el programa de actualizar paulatinamente el tratamiento. Desde este punto de vista, hay varios objetivos, con relación al estudiante: ofrecer una apreciación del papel central del esparcimiento atómico en casi todos los aspectos de la óptica; proporcionar, cuanto antes, una visión de la perspectiva penetrante que ofrece la teoría de Fourier y aclarar, desde el comienzo, la naturaleza mecánico-cuántica subyacente de la luz.

Numerosos avances tecnológicos se han realizado en muchas áreas, desde las lentes y el láser hasta los telescopios y las fibras, mientras que el computador nos permite seguir ampliando nuestra percepción de todo ello. Esta tercera edición trata (aunque, a veces, sólo como introducción) de todos los avances tecnológicos importantes con los que los estudiantes de hoy en día deberían estar familiarizados.

El capítulo 2 (*La matemática del movimiento ondulatorio*), que constituye el fundamento teórico de la teoría de las ondas, ha sido revisado a fin de hacer más claro el material ya existente y proporcionar una base más amplia para los tratamientos futuros. La versión actualizada contiene una discusión más completa, aunque de nivel inferior, del *Principio de superposición* y una nueva sección de introducción sobre *Los fasores y la adición de ondas*. De esta forma, los estudiantes estarán más preparados para una discusión cualitativa temprana sobre el esparcimiento y la EDC [1].

[1] Electrodinámica cuántica.

En el capítulo 3 (*Teoría electromagnética, fotones y luz*) se ha añadido una nueva sección denominada *Promediando funciones armónicas* (pág. 47), en la que se lleva a cabo un análisis pormenorizado del proceso de promediar y se introduce la función *sinc* en el transcurso de la exposición. De acuerdo con el compromiso de incorporar las ideas mecánico-cuánticas a la discusión básica, las secciones *Fotones* (pág. 50) y *Recuento de fotones* (pág. 54) se analizan cualitativamente antes. Algunos resultados experimentales que se han incorporado al apartado sobre dispersión (pág. 67), realzan su calidad práctica con respecto al pasado. El capítulo finaliza con algunos comentarios sobre la Teoría cuántica de campos (pág. 80).

La propagación de la luz (capítulo 4) empieza ahora con un apartado sobre el *Esparcimiento Rayleigh* que conduce a una discusión más realista de la transmisión de la luz (pág. 86), de la reflexión y la refracción, todo ello bajo la perspectiva del esparcimiento. El capítulo termina con una discusión muy simple sobre la reflexión por medio de la Electrodinámica cuántica según Feyman (pág. 142).

El capítulo 5 —*Óptica geométrica*— contiene unos cuantos diseños nuevos (por ejemplo, figuras 5.1, 5.2, 5.16a, 5.26, 5.28, 5.32, 5.35, 5.41, 5.42, 5.86, 5.88, 5.98, 5.125, 5.127, 5.128, 5.129, 5.132 y 5.133) y algunas hermosas fotografías (por ejemplo, págs. 162 y 240). También hay unas cuantas secciones nuevas: una denominada *EDC y las lentes* (pág. 175) y otra, *Óptica capilar* (pág. 205). El estudio de los telescopios se ha ampliado (véase *Reflectores aplanáticos*, pág. 231) incluyendo, ahora, al Telescopio espacial Hubble. La sección 5.8 (*Reconstrucción del frente de onda*) contiene nuevos estudios sobre la *Óptica adaptativa* (5.8.1) y la *Conjugación de fase* (5.8.2).

La óptica geométrica sigue en el capítulo 6 en el que se ha prestado especial atención en mejorar el análisis de los *Métodos matriciales* (6.2.1). Dos secciones nuevas, *Análisis matricial de los espejos* y *Los espejos planos y la cavidad óptica plana*, real-

zan el estudio. La discusión sobre el TEH [2] y el módulo COSTAR proporciona cierto relieve a la aberración esférica (pág. 261), a lo que contribuyen también algunas hermosas figuras hechas por ordenador (figuras 6.23, 6.27, etc.). La sección 6.4 (*Los sistemas GRIN)* constituye una introducción bastante amplia a la óptica de gradiente de índice.

En el capítulo 7 (*La superposición de ondas*), se ha agilizado el estudio de las ondas estacionarias, incluyendo unos diagramas y unas fotografías (figuras 7.7, 7.8, 7.9, 7.10 y 7.12). El estudio de los conceptos de *Velocidad de grupo* (pág. 301) y *Longitud de coherencia* (pág. 313) se ha realizado más a fondo y con mayor eficacia. Las nuevas secciones, *La transformada de Fourier discreta* y el *Análisis de Fourier y la difracción* sirven para presentar cierto número de importantes ideas relacionadas con la perspectiva de frecuencia espacial mucho antes que cuando se hizo en la última edición.

No se ha llevado a cabo ningún cambio de envergadura en el capítulo 8 (*Polarización*) aunque, como en otras partes, la descripción se ha esmerado y se ha aclarado el análisis; se han añadido nuevos diagramas así como una nueva selección de problemas.

La versión actualizada del capítulo 9 (*Interferencia)* contiene una introducción a la coherencia en la sección 9.2.1 (*Coherencia espacial y temporal*) y las ideas se trasladan inmediatamente al estudio de los *Experimentos de Young* (pág. 392). A fin de recalcar la textura mecánico-cuántica de la interferencia, muchas fotografías de interferencia óptica están acompañadas por los patrones de franjas de partículas materiales equivalentes (por ejemplo, figura 9.13). Aquí, también, la *Perspectiva de Fourier* (pág. 396) se entrelaza en la discusión mucho antes que en la edición anterior.

Los capítulos 10 (*Difracción*), 11 (*Optica de Fourier*) y 12 (*Fundamentos de la teoría de la coherencia*) se han perfeccionado línea por línea pero sin introducir cambios radicales.

El capítulo 13, ahora titulado *Optica moderna: láser y otros temas* es el fruto de una amplia reestructuración y revisión. La disertación de los láseres, en la que se ha profundizado ampliamente, empieza con dos secciones nuevas sobre *Energía radiante y materia en equilibrio* (13.1.1) y *Emisión estimulada* (13.1.2).

En esta tercera edición se saca adelante la tarea de unificar el discurso todo lo posible en el ámbito de unas cuantas ideas brillantes. Así, el concepto de interferencia, que es una de las nociones principales en óptica (y, nada sorprendente en la mecánica cuántica también), se utiliza cualitativamente para entender los fenómenos de propagación mucho antes de que se estudien formalmente en el capítulo 9. Entre otras ventajas, el hecho de presentar conceptos avanzados en una forma simple al comienzo de la exposición hace que el estudiante pueda desarrollar una perspectiva de cohesión.

A petición de los usuarios, he incorporado unos 125 problemas nuevos, de los cuales la mayoría han sido concebidos para el desarrollo de las habilidades analíticas necesarias. Su nivel de dificultad es de «fácil a intermedio». Como en las ediciones anteriores, la solución completa de muchos de los problemas (aquellos que no llevan asterisco), se encuentra al final del libro.

En el curso de los años, centenares de colegas han ido mandándome comentarios, artículos y fotografías: les doy sinceramente las gracias a todos ellos. Estoy especialmente agradecido a los Profesores M.W. Coffey de la Universidad de Colorado y H. Fearn de la Universidad del Estado de California por sus numerosos consejos. Aquellos que tengan un interés por esta disciplina y que quisieran intercambiar opiniones, podrán contactarme en: Adelphy University, Physics Department, Garden City, N.Y. 11530.

Afortunadamente, la editora de la edición original en inglés ha sido Julia Berrisford, a la que le agradezco su profesionalidad, tenacidad, paciencia y su inagotable buen humor. El libro original inglés ha sido producido por HRS Electronic Text Management, que ha realizado un trabajo de composición sobresaliente. Lorraine Burke ha supervisado cada paso de este proceso con una increíble destreza; Ed Burke ha realizado un hermoso diseño del libro; Karen Mahakian ha sido una maquetista perfecta y Pat Hannagan ha hecho una labor artística incomparable. Hacia todos ellos va mi más profundo respeto y apreciación. Finalmente, le doy las gracias a mi querida amiga Carolyn Eisen Hecht por haberse encargado de una edición más de otro libro.

Freeport, Nueva York E. H.

[2] TEH: Telescopio Espacial Hubble.

1 Una breve historia

1.1 Prólogo

En los capítulos siguientes desarrollaremos un tratamiento formal de parte de la ciencia de la Óptica, con particular énfasis en los aspectos de interés contemporáneo. El tema comprende un vasto cuerpo de conocimientos acumulados durante aproximadamente tres mil años de la escena humana. Antes de embarcarnos en un estudio de la visión moderna de lo relacionado con la óptica, tracemos brevemente el camino que nos llevó hasta ahí, no siendo otra razón que la de poner todo en perspectiva.

1.2 En el comienzo

Los orígenes de la tecnología óptica se remontan a la antigüedad. En *Éxodo* 38:8 (*ca.* 1200 a.C.) se relata cómo, mientras preparaba el arca y el tabernáculo, Besalel remoldeaba «los espejos de las mujeres» en un lavabo de latón (una vasija de ceremonia). Los primeros espejos se hicieron de cobre pulido, bronce y más tarde de especulum, una aleación de cobre rica en estaño. Algunos ejemplares del antiguo Egipto han sobrevivido —un espejo en perfectas condiciones fue descubierto junto con algunas herramientas del cuartel de trabajadores cerca de la pirámide de Sesostris II (*ca.* 1900 a.C.) en el valle del Nilo—. Los filósofos griegos, Pitágoras, Demócrito, Empédocles, Platón, Aristóteles y otros desarrollaron varias teorías sobre la naturaleza de la luz (la del último mencionado era muy similar a la teoría del éter del siglo diecinueve). Se conocían tanto la propagación rectilínea de la luz (pág. 88) como la ley de la reflexión (pág. 96) enunciada por Euclides (300 a.C.) en su libro *Catóptrica*. Hero de Alejandría trató de explicar ambos fenómenos afirmando que la luz viaja por el camino más corto entre dos puntos. Aristófanes en su sátira *Las nubes* (424 a.C.) aludía al vidrio quemador (una lente positiva que se utilizaba para encender fuegos). El doblamiento aparente de los objetos parcialmente sumergidos en agua (pág. 104) se menciona en *La república* de Platón. La refracción fue estudiada por Cleomedes (50 d.C.) y más tarde por Claudio Tolomeo (130 d.C.) de Alejandría, quien tabuló medidas muy precisas de los ángulos de incidencia y refracción para varios medios (pág. 100). Está claro, según los escritos del historiador Plinio (23-79 d.C.) que los romanos también poseían vidrios quemadores. Varias esferas de vidrio y cristal han sido encontradas entre las ruinas romanas y se recuperó una lente plano-convexa en Pompeya. El filósofo romano Séneca (3 a.C.-65 d.C.) indicó que se podía usar un globo de vidrio lleno de agua como lupa. Es ciertamente posible que algunos artesanos romanos utilizaran lupas, facilitándoles así el trabajo que contenía detalles muy finos.

Después de la caída del Imperio Romano Occidental (475 d.C.), que marca aproximadamente el comienzo de la Edad Media, no se produjo prácticamente ningún progreso científico en Europa durante mucho tiempo. El dominio de la cultura greco-romano-cristiana en las tierras que abarca el Mediterráneo, pronto cedió por la conquista del régimen de Alá. El centro de estudios se trasladó al mundo árabe y la óptica se estudió y difundió, gracias sobre todo a Alhazen (*ca.* 1000 d.C.) quien trabajó en la ley de la reflexión, poniendo los ángulos de incidencia y reflexión en el mismo plano normal a la interfaz (pág. 101); estudió los espejos esféricos y parabólicos y describió detalladamente el ojo humano (pág. 207).

A finales del siglo XIII, Europa empezó a despertar de su estupor intelectual. Los trabajos de Alhazen fueron traducidos al latín y tuvieron un gran efecto en los escritos de Robert Grosseteste (1175-1253), obispo de Lincoln, y en el matemático polaco Vitello (o Witelo) quienes influyeron en la reiniciación del estudio de la óptica. Sus trabajos fueron conocidos por el franciscano Roger Bacon (1215-1294), quien es consi-

derado por muchos como el primer científico en el sentido moderno. Parece que Bacon inició la idea de usar lentes para corregir la vista, sugiriendo asimismo la posibilidad de combinar lentes para formar un telescopio. Bacon también poseía algún conocimiento de la forma en la cual los rayos atraviesan una lente. Después de su muerte, la óptica languideció de nuevo. Sin embargo, a mediados del siglo XIII, las pinturas europeas mostraban monjes con anteojos. Por su parte, los alquimistas habían logrado una amalgama líquida de estaño y mercurio que se frotaba en la parte posterior de placas de vidrio para hacer espejos. Leonardo da Vinci (1452-1519) describió la *cámara oscura* (pág. 219), más tarde popularizada por el trabajo de Giovanni Battista Della Porta (1535-1615). Porta discutió los espejos múltiples y las combinaciones de lentes positivas y negativas en su *Magia naturalis* (1589).

Esta sucesión de acontecimientos, en su mayoría modestos, constituyen lo que se podría llamar el primer período de la Óptica. Era, sin lugar a duda, un comienzo aunque humilde en el conjunto. El torbellino de logros y la excitación vendría más tarde, en el siglo XVII.

1.3 Desde el siglo diecisiete

No está claro quién inventó en realidad el telescopio refractor, pero registros en los archivos de La Haya muestran que el 2 de octubre de 1608, Hans Lippershey (1587-1619), un fabricante de anteojos holandés, solicitó una patente para tal instrumento. En Padua, Galileo Galilei (1564-1642) oyó acerca de la invención y en poco meses, tallando las lentes a mano, había construido su proprio instrumento (pág. 171). El microscopio compuesto fue inventado casi al mismo tiempo, probablemente por el holandés Zacharias Janssen (1588-1632). El ocular cóncavo del microscopio fue reemplazado por una lente convexa por Francisco Fontana (1580-1656) de Nápoles y un cambio similar en el telescopio fue llevado a cabo por Johannes Kepler (1571-1630). En 1611, Kepler publicó su *Dioptrice*. Había descubierto la reflexión total interna (pág. 121) y había llegado a la aproximación para pequeños ángulos de la ley de refracción, en cuyo caso los ángulos incidentes y transmitido son proporcionales. Siguió adelante para desarrollar un tratamiento de la óptica de primer orden para sistemas de lentes delgadas y en su libro describió el funcionamiento detallado del telescopio kepleriano (ocular positivo) y del galileano (ocular negativo). Willebrord Snell (1591-1626), profesor de

FIGURA 1.1 Johannes Kepler (1571-1630). (Pintura cedida por Burndy Library.)

Leyden, descubrió empíricamente en 1621 la *ley de la refracción* (pág. 100) que había quedado ocultada durante mucho tiempo, hecho que constituyó uno de los grandes momentos de la óptica. Al conocer exactamente cómo los rayos de la luz son redirigidos al atravesar una frontera entre dos medios, Snell de un golpe, abrió la puerta a la óptica aplicada moderna. René Descartes (1596-1650) fue el primero en publicar la formulación ahora familiar de la refracción en términos de senos. Descartes dedujo la misma ley usando un modelo en el cual la luz se visualizaba como una presión transmitida por un medio elástico; tal como se consigna en su *La Dioptrique* (1637):

FIGURA 1.2 René Descartes de Frans Hals (1596-1650). (© Musée Nationaux.)

> «[...] recordando la naturaleza que yo he atribuido a la luz, cuando dije que no es otra cosa que un cierto movimiento o una acción concebida en una materia muy sutil, la cual llena los poros de todos los otros cuerpos [...]»

El universo estaba completo. Pierre de Fermat (1601-1665), sin tomar en cuenta las suposiciones de Descartes, dedujo de nuevo la ley de la reflexión (pág. 105) a partir de su propio *Principio de tiempo mínimo* (1657).

El fenómeno de la difracción, es decir, la desviación de la propagación rectilínea que ocurre cuando la luz avanza más allá de una obstrucción (pág. 433), fue observado primero por el profesor Francesco Maria Grimaldi (1618-1663) en el colegio jesuita de Boloña. Grimaldi había observado las bandas de luz dentro de la sombra de una varilla iluminada por una pequeña fuente. Robert Hooke (1635-1703), curador conservador de experimentos para la Royal Society de Londres, observó también más tarde los efectos de la difracción. Hooke fue el primero en estudiar los patrones de interferencia coloreados (pág. 393) generados por películas delgadas (*Micrographia*, 1665). Propuso la idea de que la luz era un movimiento vibratorio rápido del medio propagándose a una gran velocidad. Además, «cada pulso o vibración del cuerpo luminoso generará una esfera» —éste era el comienzo de la teoría ondulatoria—. En el año en que murió Galileo, nació Isaac Newton (1642-1727). El empuje del esfuerzo científico de Newton se desarrollaría a través de la observación directa, evitando hipótesis especulativas. De este modo, permaneció ambivalente por mucho tiempo acerca de la naturaleza real de la luz. ¿Era corpuscular —un flujo de corpúsculos, como algunos sostenían? ¿O era la luz una onda en un medio que todo lo penetraba, el éter? A la edad de veintitrés años, comenzó sus famosos experimentos sobre la dispersión:

FIGURA 1.3 Sir Isaac Newton (1642-1727) de Sir Gofrey Kneller (1702). (Pintura cedida por National Portrait Gallery.)

> «Me procuré un prisma triangular de vidrio para probar con él el celebrado fenómeno de los colores.»

Newton concluyó que la luz blanca estaba compuesta de una mezcla de una gama completa de colores independientes (pág. 77). Sostuvo que los corpúsculos de la luz asociados con los varios colores, excitaban el éter en vibraciones características. Aunque su trabajo abarcara simultáneamente tanto la teoría ondulatoria como la de emisión (corpuscular), Newton se inclinó cada vez más hacia la última a medida que envejecía. Quizás su razón principal para rechazar la teoría ondulatoria, tal como se presentaba entonces, era el desalentador problema de explicar la propagación rectilínea en términos de ondas que se dispersaban en todas direcciones.

Después de algunos experimentos muy limitados, Newton dejó de intentar eliminar la aberración cromática de las lentes de telescopios refractores: llegando a la conclusión errónea de que no era viable y se inclinó al diseño de reflectores. El primer telescopio reflector de Sir Isaac se completó en 1668; tenía solamente seis pulgadas de largo y una pulgada de diámetro pero aumentaba alrededor de 30 veces.

Casi al mismo tiempo que Newton daba énfasis a la teoría de la emisión en Inglaterra, Christiaan Huygens (1629-1695), estaba difundiendo ampliamente la teoría ondulatoria en Europa. Al contrario que Descartes, Hooke y Newton, Huygens concluyó correctamente que la luz efectivamente disminuía la velocidad al entrar a medios más densos. Pudo deducir las leyes de la reflexión y la refracción, llegando incluso a explicar la doble refracción de la calcita (pág. 332), usando su teoría ondulatoria. Y fue precisamente cuando estaba trabajando con la calcita, que descubrió el fenómeno de la *polarización* (pág. 319).

> «Como hay dos diferentes refracciones, concebí también que hay dos diferentes emanaciones de las ondas de luz [...]»

De este modo, la luz era un chorro de corpúsculos o una rápida ondulación de materia etérea. En cualquier caso, generalmente se estaba de acuerdo en que su velocidad de propaga-

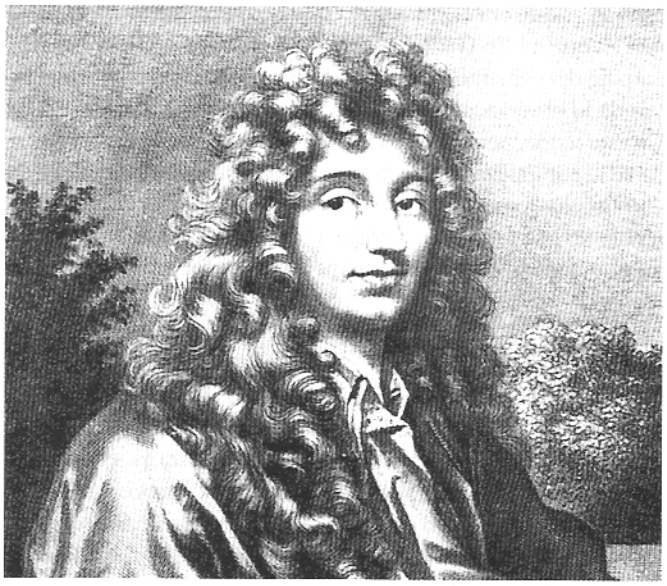


FIGURA 1.4 Christianne Huygens (1629-1695). (Rijksmuseum voor de geschiedenis der natuurwetenschappen. Pintura cedida por AIP Emilio Segré Visual Archives.)

ción era excesivamente grande. En efecto, muchos creían que la luz se propagaba simultáneamente, una noción que volvía a los tiempos de Aristóteles. El hecho de que era en efecto finito fue determinado por el danés Ole Christensen Römer (1644-1710). La luna más cercana de Júpiter, Io, tiene una órbita alrededor de este planeta que se encuentra casi en el plano de la órbita del propio Júpiter alrededor del Sol. Römer llevó a cabo un estudio esmerado de los eclipses de Io mientras pasaba entre la sombra, detrás de Júpiter. En 1676, predijo que el 9 de noviembre, Io surgiría de la oscuridad unos 10 minutos más tarde de lo que se esperaba, basándose en su movimiento medio anual. A la hora establecida, Io realizó, como estaba previsto, un fenómeno que Römer explicó correctamente como procedente de la velocidad finita de la luz. Pudo calcular que la luz tardaba unos 20 minutos en cruzar el diámetro de la órbita de la Tierra alrededor del Sol —una distancia de aproximadamente 186 millones de millas. Huygens y Newton, entre otros, estaban muy convencidos de la validez del trabajo de Römer. Evaluando de forma independiente el diámetro de la órbita de la Tierra, asignaron a c un valor equivalente de $2{,}3 \times 10^8$ m/s y $2{,}4 \times 10^8$ m/s, respectivamente [1].

[1] A. Wróblewski, *Am. J. Phys.* **53** (7), julio de 1985, pág. 620.

El gran peso de la opinión de Newton colgó como una mortaja sobre la teoría ondulatoria durante el siglo XVIII, ahogando a sus partidarios. A pesar de esto, el prominente matemático Leonhard Euler (1707-1783), era un devoto de la teoría ondulatoria aunque no fuera escuchado. Euler propuso que los efectos indeseables de color que se ven en una lente, estaban ausentes en el ojo (lo que es una suposición errónea) porque los diferentes medios presentaban una dispersión anulada. Sugirió que se podrían construir en forma similar lentes acromáticas (pág. 272). Entusiasmado por este trabajo, Samuel Klingenstjerna (1698-1765) profesor de Upsala, repitió los experimentos de Newton sobre el acromatismo y encontró que estaban equivocados. Klingenstjerna estaba en comunicación con un óptico de Londres, John Dollond (1706-1761), quien estaba observando resultados similares. Finalmente, en 1758 Dollond combinó dos elementos, uno de vidrio *crown* y otro de vidrio *flint,* para formar una lente acromática simple. Incidentalmente, la invención de Dollond fue en realidad precedida por el trabajo inédito del científico aficionado Chester Moor Hall (1703-1771), de Essex.

1.4 El siglo diecinueve

La teoría ondulatoria de la luz renació de las manos del doctor Thomas Young (1773-1829), una de las mentes verdaderamente grandes del siglo. En 1801, 1802 y 1803 leyó unos artículos ante la Royal Society exaltando la teoría ondulatoria y añadiendo a ella un nuevo concepto fundamental, el llamado *principio de interferencia* (pág. 377):

> «Cuando dos ondulaciones de diferentes orígenes coinciden perfectamente en dirección o casi coincidentes, su efecto conjunto es una combinación de los movimientos que pertenecen a cada uno.»

Young pudo explicar las franjas coloreadas de las películas delgadas y determinó las longitudes de onda de varios colores usando datos de Newton. Aunque siempre mantuvo que sus concepciones se originaron en las investigaciones de Newton, fue severamente atacado. En una serie de artículos, probablemente escritos por Lord Brougham, en la revista *Edinburgh Review*, se decía que los artículos de Young estaban «desprovistos de todo tipo de mérito».

Augustin Jean Fresnel (1778-1827), nacido en Broglie, Normandía, comenzó a revivir de manera brillante la teoría ondulatoria en Francia, ajeno a los esfuerzos hechos por Young

FIGURA 1.5 Augustin Jean Fresnel (1788-1827). (Servicios culturales de la Embajada de Francia.)

unos trece años antes. Fresnel sintetizó los conceptos de la teoría ondulatoria de Huygen y el principio de interferencia (pág. 434). El modo de propagación de una onda primaria era visto como una sucesión de onditas secundarias esféricas, que se superponían e interferían para reformar la onda primaria en su avance, tal como aparecería un instante más tarde. En las palabras de Fresnel:

> «Las vibraciones de una onda luminosa en cualquiera de sus puntos se puede considerar como la suma de los movimientos elementales que le llegan en el mismo instante, por la acción separada de todas las porciones de la onda no obstruida, considerada en cualquiera de sus posiciones anteriores.»

Se suponía que estas ondas eran longitudinales, en analogía con las ondas acústicas en el aire. Fresnel pudo calcular los patrones de difracción generados en varios obstáculos y aberturas (pág. 433) y explicó satisfactoriamente la propagación rectilínea en medios isótropos homogéneos, eliminando así la objeción principal de Newton para la teoría ondulatoria. Cuando finalmente fue informado de la prioridad de Young sobre el principio de interferencia, aunque algo desanimado, Fresnel escribió a Young diciéndole que se sentía consolado de encontrarse a sí mismo en tan buena compañía: los dos grandes hombres se hicieron aliados.

Huygens, al igual que Newton, era consciente del fenómeno de la polarización que aparece en los cristales de calcita. En efecto, en su *Opticks* declaró que:

> *«Cada rayo de luz tiene por consiguiente dos lados opuestos [...]»*

Sin embargo, no fue sino en 1808 que Étienne Louis Malus (1775-1812) descubrió que estos dos lados de la luz se hacían también evidentes bajo reflexión (pág. 342) y no eran inherentes a los medios cristalinos. Fresnel y Dominique François Arago (1786-1853) realizaron entonces una serie de experimentos para determinar el efecto de la polarización en la interferencia; sin embargo, sus resultados fueron completamente inexplicables dentro del marco de su modelo de onda longitudinal, hecho que marcó un momento particularmente difícil. Durante varios años Young, Arago y Fresnel lucharon con el problema hasta que finalmente Young sugirió que la vibración etérea podría ser *transversal* como una onda en una cuerda. Los dos lados de la luz eran entonces simplemente una manifestación de vibraciones ortogonales del éter, transversales a la dirección del rayo. Fresnel comenzó a desarrollar una descripción mecánica de las oscilaciones del éter, las que llevaron a sus fórmulas famosas para la amplitud de la luz reflejada y transmitida (pág. 111). Hacia 1825 la teoría de la emisión (o corpuscular) tenía solamente unos cuantos partidarios tenaces.

La primera determinación terrestre de la velocidad de la luz la efectuó Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) en 1849. Su aparato, que consistía en una rueda dentada giratoria y en un espejo distante (8.633 m.), se instaló en los suburbios de París, de Suresnes a Montmartre. Un pulso de luz salía de una abertura en la rueda, pegaba en el espejo y volvía. Ajustando la velocidad de rotación conocida de la rueda, se podía hacer que el pulso que volvía pasara o no a través de una abertura y que se viese o fuera obstruido por un diente. Fizeau encontró un valor de la velocidad de la luz igual a 315.300 km/s. Su colega Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) también estaba empeñado en investigar la velocidad de la luz. En 1834 Charles Wheatstone (1802-1875) había diseñado un arreglo de espejos rotatorios a fin de medir la duración de un chispazo eléctrico. Usando este plan, Arago propuso medir la velocidad de la luz en medios densos, pero nunca pudo llevar a cabo el experimento. Foucault se hizo cargo del trabajo, que más tarde le facilitaría el material para su tesis doctoral. El 6 de mayo de 1850 comunicó a la Academia de Ciencias que la velocidad de la luz en el agua era *menor* que en el aire. Este resultado, por supues-

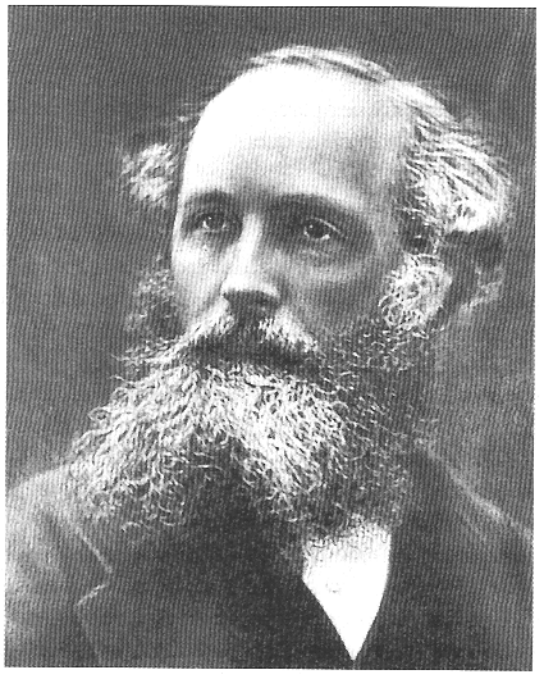


FIGURA 1.6 James Clerk Maxwell (1831-1879). (AIP Emilio Segré Visual Archives.)

to, estaba en conflicto directo con la formulación hecha por Newton sobre la teoría de la emisión y constituyó un fuerte golpe a los pocos devotos que le quedaban.

Mientras ocurría todo esto en la óptica, el estudio de la electricidad y el magnetismo estaba también dando frutos de manera independiente. En 1845, el maestro de experimentación Michael Faraday (1791-1867) estableció una correlación entre el electromagnetismo y la luz cuando encontró que la dirección de polarización de un haz puede alterarse con un campo magnético fuerte aplicado al medio. James Clerk Maxwell (1831-1879) resumió brillantemente e incluso amplió todo el conocimiento empírico que se conocía sobre el tema hasta entonces mediante un simple conjunto de ecuaciones matemáticas. Comenzando con su síntesis notablemente sucinta y muy simétrica, Maxwell pudo demostrar, en forma solamente teórica, que el medio electromagnético se podía propagar como una onda transversal en el éter luminífero (pág. 43).

Resolviendo la velocidad de la onda, llegó a una expresión en términos de propiedades eléctricas y magnéticas del medio ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$). Después de sustituir los valores conocidos y empíricamente determinados de estas cantidades, obtuvo un resultado numérico igual a la velocidad medida de la luz. La conclusión era inevitable: *la luz era «una perturbación electromagnética en forma de ondas» propagadas a través del éter.* Maxwell murió a la edad de cuarenta y ocho años, demasiado pronto para ver la confirmación experimental de sus profecías y demasiado pronto para la física. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) verificó la existencia de ondas electromagnéticas de longitud de onda larga, generándolas y detectándolas en una amplia serie de experimentos publicados en 1888.

La aceptación de la teoría ondulatoria de la luz parecía necesitar también de la aceptación de un substrato que todo lo penetraba, el éter luminífero. Si había onda, parecía obvio que debería haber un medio que la soportara. Como era de esperar, se hizo un gran esfuerzo científico para determinar la naturaleza física del éter, aunque éste poseyera algunas propiedades bastante extrañas. Debería ser tan tenue que permitiera un movimiento aparentemente no amortiguado de los cuerpos celestes. Al mismo tiempo, podía soportar las oscilaciones con frecuencia excesivamente alta ($\sim 10^{15}$ Hz) de la luz viajando a 186.00 millas/s. Esto implicaba fuerzas restauradoras notablemente fuertes dentro de la sustancia etérea. La velocidad con la cual una onda avanza a través del medio depende de las características del substrato perturbado y no de ningún movimiento de la fuente. Esto contrasta con el comportamiento de un flujo de corpúsculos cuya velocidad con respecto a la fuente es el parámetro esencial.

Ciertos aspectos de la naturaleza del éter molestan cuando se estudia la óptica de objetos en movimiento; fue precisamente este área de investigación la que, desarrollándose lentamente por cuenta propia, en última instancia produjera otro gran viraje. En 1725, James Bradley (1693-1762), entonces profesor Saviliano de Astronomía en Oxford, intentó medir la distancia a una estrella observando su orientación en dos diferentes épocas del año. La posición de la Tierra cambiaba mientras orbitaba alrededor del Sol y, por consiguiente, proporcionaba una gran línea de base para la triangulación de la estrella. Para su sorpresa, encontró que las estrellas «fijas» mostraban un movimiento sistemático aparente, relacionado con la dirección del movimiento de la tierra en su órbita y no dependía, como se había anticipado, de la posición de la tierra en el espacio. Esta es la llamada *aberración estelar* y es análoga a la bien conocida situación que se produce cuando caen gotas de lluvia. Una gota de lluvia, aunque viaje verticalmente con respecto a un observador en reposo en la tierra, aparentemente cambiará su ángulo de incidencia cuando el observador está en movimiento. De este modo, un modelo corpuscular de la luz podría explicar la aberración estelar muy fácilmente. Por otra parte, la teoría ondulatoria también brinda una

explicación satisfactoria, siempre que el *éter permanezca totalmente quieto cuando la tierra lo surca.*

En respuesta a la especulación de si el movimiento de la Tierra a través del éter podría resultar en una diferencia observable entre la luz proveniente de fuentes terrestres y extraterrestres, Arago se propuso examinar el problema experimentalmente. Encontró que dichas diferencias no existían. La luz se comportaba como si la Tierra estuviera en reposo con respecto al éter. Para explicar estos resultados, Fresnel sugirió en efecto que la luz era arrastrada parcialmente cuando viajaba en un medio transparente en movimiento. Un experimento de Fizeau, en el que unos haces de luz pasaban por columnas de agua en movimiento, y otro realizado en 1871 por Sir George Biddell Airy (1801-1892) en el que usaba un telescopio lleno de agua para examinar la aberración estelar, parecían confirmar la hipótesis del arrastre de Fresnel. Suponiendo un éter en *reposo absoluto*, Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) dedujo una teoría que encerraba las ideas de arrastre de Fresnel.

En 1879, en una carta a D. P. Todd de la U.S. Nautical Almanac Office, Mawell sugirió un sistema para medir la velocidad con la cual el sistema solar se movía con respecto al éter luminífero. El norteamericano Albert Abraham Michelson (1852-1931), entonces instructor naval, tomó la idea. Michelson, a la temprana edad de veintiséis años, había adquirido ya una reputación favorable al efectuar una determinación bastante precisa de la velocidad de la luz. Unos pocos años más tarde, comenzó un experimento para medir el efecto del movimiento de la tierra a través del éter. Ya que la velocidad de la luz en el éter es constante y la tierra, a su vez, presumiblemente se mueve en relación al éter (velocidad orbital de 67.000 millas/h), el movimiento del planeta debería afectar a la velocidad de la luz medida con respecto a la tierra. En 1881 publicó sus hallazgos. No había movimiento detectable de la tierra con respecto al éter: el éter era estacionario. Pero la firmeza de este resultado sorprendente perdió algo de brillo cuando Lorentz señaló un error en los cálculos. Años más tarde Michelson, entonces profesor de física en el Case School of Applied Science en Cleveland, Ohio, se unió al profesor Edward Williams Morley (1838-1923), un profesor muy conocido de química en Western Reserve, para volver a hacer el experimento con precisión considerablemente mayor. Sin embargo, asombrosamente, sus resultados, publicados en 1887, fueron de nuevo negativos:

> «De todo lo que precede parece razonablemente cierto que si hay un movimiento relativo entre la tierra y el éter luminífero, éste debe ser pequeño; lo suficientemente pequeño para rebatir la explicación de Fresnel de la aberración.»

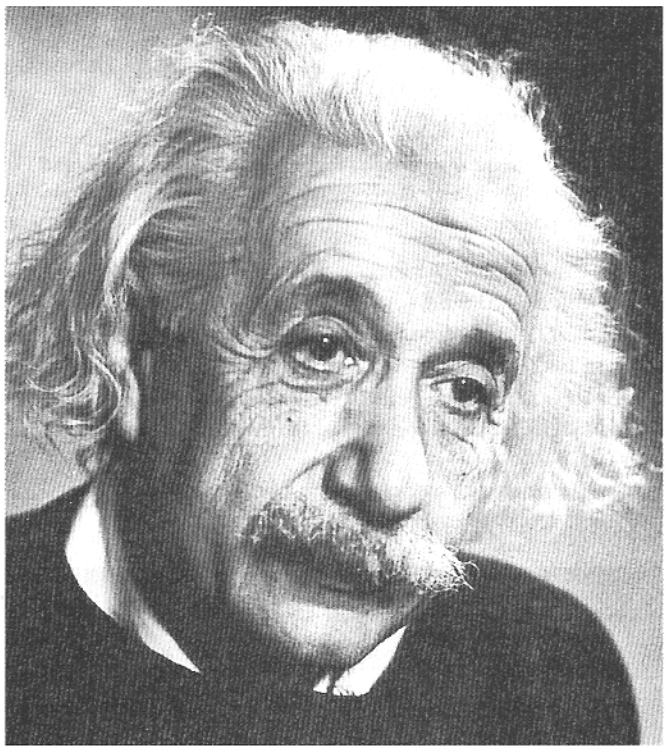


FIGURA 1.7 Albert Einstein (1879-1955).

Así, mientras que una explicación de la aberración estelar dentro del contexto de la teoría ondulatoria requería la existencia de un movimiento relativo entre la tierra y el éter, el experimento de Michelson-Morley refutaba esa posibilidad. Además, los hallazgos de Fizeau y Airy necesitaban la inclusión de un arrastre parcial de la luz debido al movimiento del medio.

1.5 La óptica del siglo veinte

Jules Henri Poincaré (1854-1912) fue quizás el primero en percatarse del significado de la incapacidad experimental para observar cualquier efecto del movimiento relativo al éter. En 1899, comenzó a dar a conocer sus opiniones y en 1900 dijo:

> «¿Nuestro éter, realmente existe? Yo no creo que observaciones más precisas nos puedan revelar algo más que desplazamientos *relativos*.»

En 1905, Albert Einstein (1879-1955) presentó su *teoría especial de la relatividad* en la cual él también, de forma bastante independiente, rechazó la hipótesis del éter:

> «La introducción de un "éter luminífero" resultará ser superflua puesto que el punto de vista que habrá de desarrollarse aquí no necesitará un "espacio estacionario absoluto".»

Además postuló que:

> «La luz siempre se propaga en el espacio con una velocidad definida c la cual es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor.»

Los experimentos de Fizeau, Airy y Michelson-Morley fueron entonces explicados, de manera muy natural, dentro del marco de la cinemática relativista de Einstein [2]. Despojados del éter, los físicos tuvieron simplemente que acostumbrarse a la idea de que las ondas electromagnéticas se podían propagar a través del espacio libre: no había otra alternativa. La luz se concebía ahora como una onda autónoma con el énfasis conceptual pasando del éter al campo. La onda electromagnética quedó como una entidad en sí misma.

El 19 de octubre de 1900, Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) leyó un artículo ante la German Physical Society en el que presentó las bases de lo que sería otra gran revolución en el pensamiento científico: *la mecánica cuántica*, una teoría que abarca los fenómenos submicroscópicos. En 1905, basándose en estas ideas, Einstein propuso una nueva forma de teoría corpuscular en la cual afirmaba que la luz consistía en globos o partículas de energía. Cada uno de tales cuantos de energía radiante o fotones [3], como se les habría de llamar, tenían una energía proporcional a su frecuencia ν, es decir $\mathscr{E} = h\nu$ donde h

[2] Véase, por ejemplo, *Special Relativity* por French, capítulo 5.

[3] La palabra *fotón* fue acuñada por G. N. Lewis, *Nature*, 18 de diciembre de 1926.

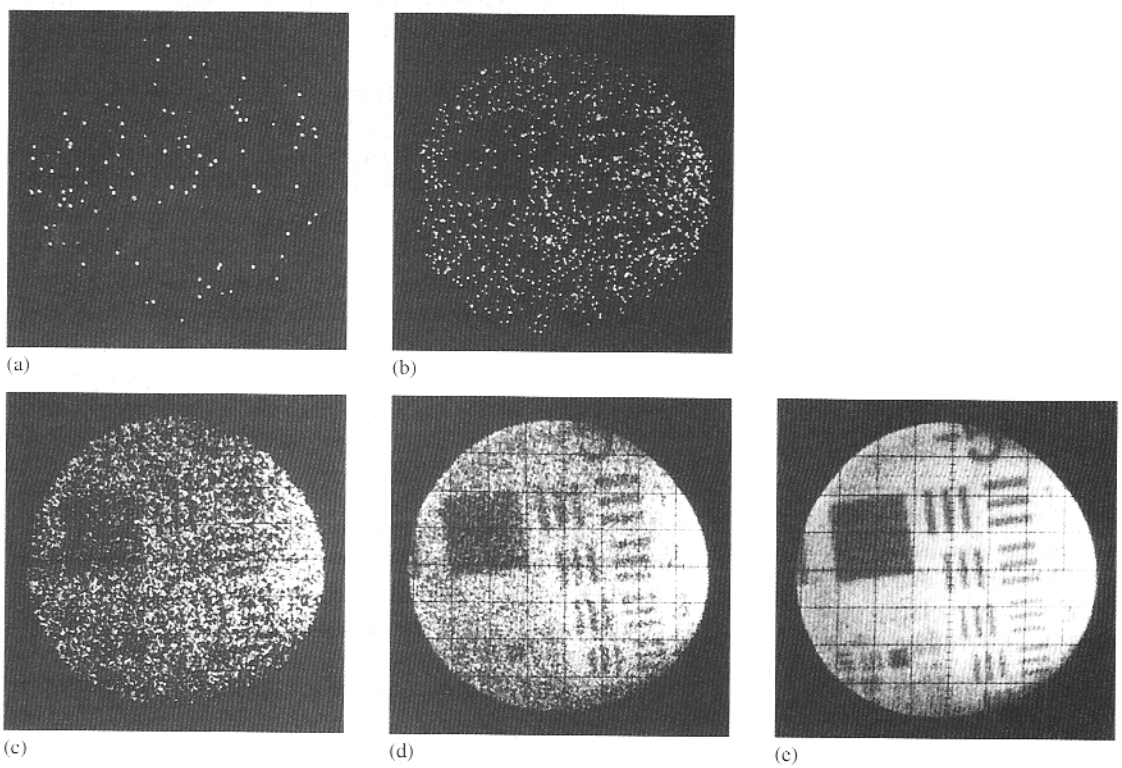


FIGURA 1.8 Un fotografía bastante concluyente de la naturaleza corpuscular de la luz. La secuencia fotográfica se realizó utilizando un tubo fotomultiplicador sensible a la posición iluminado por una imagen ($8{,}5 \times 10^3$ cuentas por segundo) de un diagrama de barras. El tiempo de exposición fue de (*a*) 8 ms, (*b*) 125 ms, (*c*) 1 s, (*d*) 10 s y (*e*) 100 s. Cada punto puede interpretarse como la llegada de un fotón individual. (Fotos cedidas por ITT Corporation, Electro-Optical Products Division, Tube and Sensor Laboratories, Fort Wayne, Indiana.)

es conocida como la constante de Planck (figura 1.8). Al final de la década de los años veinte, a través de los esfuerzos de hombres tales como Bohr, Born, Heisenberg, Schrödinger, De Broglie, Pauli, Dirac y varios otros, la mecánica cuántica quedó como una estructura bien establecida. Gradualmente se hizo evidente que los conceptos de corpúsculo y de onda, que en el mundo macroscópico parecen ser mutuamente excluyentes, deben juntarse en el dominio submicroscópico. La imagen mental de una partícula atómica (electrones, neutrones, etc.) como un trozo localizado de materia, ya no satisface. En efecto, se encontró que estos «corpúsculos» podían generar patrones de interferencia y de difracción precisamente en la misma forma que la luz (pág. 433). Entonces los fotones, los protones, los electrones, los neutrones, etc., todos ellos, tienen ambas manifestaciones como corpúsculo y como onda. Sin embargo, la cuestión no estaba resuelta en absoluto. «Cada físico cree saber lo que es un fotón», escribió Einstein. «Me he pasado la vida intentado descubrir qué es un fotón, y aún no lo sé».

La relatividad liberó la luz del éter y mostró la afinidad entre masa y energía (vía $\mathscr{E}_0 = mc^2$). Las que parecían ser dos cantidades casi antitéticas, ahora se hicieron intercambiables. La mecánica cuántica siguió adelante para establecer que un corpúsculo de momento[4] p tiene una longitud de onda asociada λ tal que $p = h/\lambda$. El neutrino, un corpúsculo neutro cuya masa en reposo es supuestamente igual a cero, fue postulado por razones teóricas en 1930 por Wolfgang Pauli (1900-1958) y verificado experimentalmente más tarde, en la década de los cincuenta. Las imágenes sencillas de trozos submicroscópicos de materia se hicieron insostenibles y la dicotomía onda-corpúsculo se disolvió en una dualidad.

La mecánica cuántica también estudia la manera en la que la luz es absorbida y emitida por los átomos (pág. 63). Supongamos que hacemos que un gas brille calentándolo o pasando una descarga eléctrica a través de él. La luz emitida es característica de la estructura de los átomos que constituyen el gas. La espectroscopia, es decir, la rama de la óptica que se encarga del análisis espectral (pág. 73), se desarrolló a partir de las investigaciones de Newton. William Hyde Woolaston (1766-1828) realizó las primeras observaciones de la líneas oscuras del espectro solar (1802). Debido a la forma de rendija de la abertura generalmente usada en los espectroscopios, la salida consistía en bandas angostas y coloreadas de luz, las llamadas *líneas espectrales*. Trabajando independientemente, Joseph Fraunhofer (1787-1826) amplió mucho el tema. Después de descubrir accidentalmente la línea doble del sodio (pág. 273), comenzó a estudiar la luz solar e hizo las primeras determinaciones de longitudes de onda usando redes de difracción (pág. 465). Gustav Robert Kirchoff (1824-1887) y Robert Wilhelm Bunsen (1811-1899), trabajando conjuntamente en Heidelberg, establecieron que cada tipo de átomo tenía su propia firma en un arreglo característico de líneas espectrales. En 1913, Niels Henrik David Bohr (1885-1962) expuso una teoría cuántica precursora del átomo de hidrógeno, que podía predecir las longitudes de onda de su espectro de emisión. Ahora se entiende que la luz emitida por un átomo se debe a sus electrones exteriores (pág. 63). El proceso pertenece a la esfera de la teoría cuántica moderna que describe los detalles más pequeños con increíble precisión y belleza.

El florecimiento de la óptica aplicada en lo que va de la segunda mitad del siglo xx, representa un renacimiento en sí mismo. En la década de los años cincuenta, varios investigadores comenzaron a mezclar la óptica con las técnicas matemáticas y los puntos de vista de la teoría de las comunicaciones. Precisamente como la idea del momento lineal proporciona otra dimensión con la cual visualizar los aspectos de la mecánica, el concepto de frecuencia espacial brinda una forma nueva y rica de apreciar una amplia gama de fenómenos ópticos. Unidos por el formalismo matemático del análisis de Fourier (pág. 304), este énfasis contemporáneo ha tenido gran trascendencia. Especialmente interesantes son las teorías de la formación y de la evaluación de imágenes (pág. 532), las *funciones de transferencia* (pág. 555) y la idea de *filtrado espacial* (pág. 318).

El advenimiento de las computadoras digitales de alta velocidad marcó un amplio adelanto en el diseño de sistemas ópticos complejos. Las lentes asféricas (pág. 152) lograron un significado práctico renovado y el sistema *limitado por la difracción* con un campo de visión apreciable, se hizo realidad. La técnica de pulido por bombardeo iónico, donde se desprende sólo un átomo cada vez, se introdujo para satisfacer la necesidad de precisión extrema en la preparación de elementos ópticos. El uso de recubrimientos con películas delgadas y múltiples (reflectoras, antirreflectoras, etc.) se hizo muy común (pág. 426). La óptica de fibras llegó a ser una herramienta práctica (pág. 198) y se estudiaron las guías de luz de películas delgadas. Se prestó mucha atención al extremo infrarrojo del espectro (sistemas de vigilancia, guía de proyectiles, etc.) lo cual a su vez estimuló el desarrollo de materiales IR. Se empezaron a usar ampliamente los plásticos en la óptica (ele-

[4] Quizás ayudaría el que simplemente los llamáramos a todos «onditículas».

mentos de lentes, réplicas de redes, fibras, lentes asféricas, etc.). Se desarrollaron nuevas clases de vidrios cerámicos, parcialmente vitrificados, con un coeficiente de expansión térmica extremadamente bajo. El resurgimiento en la construcción de observatorios astronómicos (terrestres y extraterrestres) que abarcaban todo el espectro (pág. 224), ya evidente a finales de los sesenta, siguió con empuje en los ochenta y noventa.

Después de la construcción del primer láser en 1960, los haces láser cubrieron en una década todo el rango desde el infrarrojo al ultravioleta. La disponibilidad de fuentes coherentes de alta potencia llevó al descubrimiento de nuevos efectos ópticos (generación de armónicos, mezclado de frecuencias, etc.) y desde entonces a todo un panorama de nuevos y maravillosos dispositivos. La tecnología necesaria para producir un sistema óptico práctico de comunicaciones se desarrolló rápidamente. El uso sofisticado de cristales en sistemas tales como los generadores de segundo armónico (pág. 650), moduladores electro-ópticos y acusto-ópticos y similares, estimularon una gran cantidad de investigación contemporánea en óptica de cristales. La técnica de reconstrucción de frentes de onda, conocida como *holografía* (pág. 630), de la cual se consiguen magnificas imágenes tridimensionales, encontró numerosas aplicaciones (pruebas no destructivas, almacenamiento de datos, etc.).

La orientación militar de gran parte del trabajo de desarrollo de la década de los sesenta, siguió adelante en los setenta, en los ochenta y en los noventa con nueva fuerza. Ese interés tecnológico de la óptica va desde el espectro de las «bombas inteligentes» y satélites espía hasta «rayos de la muerte» y aparatos de infrarrojo capaces de ver en la oscuridad. Sin embargo, consideraciones económicas asociadas a la necesidad de mejorar la calidad de vida han hecho que productos de esta disciplina hayan entrado en el mercado, como nunca antes lo habían hecho. Hoy en día, los láseres se utilizan por doquier: en la lectura de videodiscos en el cuarto de estar, en el corte del acero en establecimientos; en el barrido de etiquetas en los supermercados y en los quirófanos de los hospitales. Millones de sistemas de display ópticos en relojes, calculadoras y ordenadores centellean en todo el mundo. El uso casi exclusivo, durante los últimos cien años, de las señales eléctricas para el tratamiento y la transmisión de datos, está dando rápidamente el paso a técnicas ópticas más eficientes. Una revolución de gran alcance de los métodos de tratamiento y comunicación de la información se está produciendo silenciosamente, una revolución que seguirá cambiando nuestras vidas en los años venideros.

Los conceptos profundos surgen lentamente. Realmente es muy poco lo que se ha logrado en tres mil años a pesar de que cada día se acelera más el paso. En efecto, es maravilloso observar que la respuesta va cambiando sutilmente mientras que la pregunta *¿qué es la luz?* [5] continúa inmutable.

[5] Para una lectura más amplia sobre la historia de la óptica, véanse F. Cajori, *A History of Physics* y V. Ronchi, *The Nature of Light*. Extractos de varios artículos originales se pueden encontrar adecuadamente en W. F. Magie, *A Source Book in Physics*, y en M. H. Shamos, *Great Experiments in Physics*.

2 El movimiento ondulatorio

Puesto que la cuestión relativa a la verdadera naturaleza de la luz es trascendental para un tratamiento exhaustivo de la óptica, nos ocuparemos de ella a lo largo de todo este trabajo. La pregunta sencilla «¿Es la luz un fenómeno ondulatorio o corpuscular?» es mucho más complicada de lo que pudiera parecer al principio. Por ejemplo, la característica principal de un corpúsculo es su ubicación; existe en un lugar del espacio «pequeño» y bien definido. En la práctica, tendemos a escoger algo con lo que estamos familiarizados como una esfera o un guijarro, y lo reducimos en nuestra imaginación hasta que se convierta en algo tan pequeño que desaparece; esto es una partícula o, por lo menos, la base del concepto de «partícula». Sin embargo, una esfera interacciona con su entorno; tiene un campo gravitacional que interacciona con la Tierra (y la Luna, el Sol, etc.). Este campo, que se extiende en el espacio —sea lo que *fuere*— no puede separarse de la esfera; es parte inseparable de la misma como lo es de la definición de «partícula». Las verdaderas partículas interaccionan mediante los campos y, hasta cierto punto, el campo es la partícula y la partícula es el campo. Este pequeño enigma forma parte de la Teoría cuántica de campos, una disciplina sobre la que hablaremos más detenidamente después (pág. 138). De momento, basta con decir que si la luz es un flujo de partículas submicroscópicas (fotones), no se trata en absoluto de las clásicas partículas «normales» y corrientes en forma de miniesferas.

Por otra parte, la característica esencial de una onda es su falta de ubicación. *Una onda viajera clásica es una perturbación autónoma de un medio, que se mueve en el espacio transportando energía e impulso.* Nos inclinamos a imaginar la onda ideal como una entidad continua que existe en un área extendida. Sin embargo, al analizar detenidamente las ondas verdaderas (como las ondas en una cuerda), observamos fenómenos mixtos, compuestos por un elevado número de partículas que se mueven conjuntamente. El medio que soporta dichas ondas es atómico (esto es, material particulado), por lo tanto las ondas no son entidades continuas en sí ni de sí mismas. La única excepción posible sería la onda electromagnética. Conceptualmente, se supone que la onda electromagnética clásica (pág. 43) es una entidad continua, que sirve de modelo para la noción misma de onda distinta a la partícula. Sin embargo, a lo largo de este siglo, hemos descubierto que la energía de una onda electromagnética *no* está repartida de manera continua. La formulación clásica de la teoría electromagnética de la luz, por cuanto pueda ser maravillosa a nivel macroscópico, es muy deficiente a nivel microscópico. Einstein fue el primero en sugerir que la onda electromagnética, que nosotros percibimos macroscópicamente, es la manifestación estadística de un fenómeno microscópico subyacente, fundamentalmente granular (pág. 50). En el campo subatómico, el concepto clásico de una onda física es una ilusión. Sin embargo, en el plano a gran escala en el que trabajamos normalmente, las ondas electromagnéticas parecen suficientemente reales, pudiendo aplicar perfectamente la teoría clásica.

Dado que tanto el tratamiento clásico como el mecánico-cuántico de la luz utilizan la descripción matemática de las ondas, en este capítulo se trazan los fundamentos de lo que ambos formalismos necesitarán. Las ideas que vamos a desarrollar aquí, podrán aplicarse a todas las ondas físicas, desde la onda de tensión superficial en una taza de té hasta un pulso de luz que llega hasta nosotros desde alguna galaxia remota.

2.1 Ondas unidimensionales

Un aspecto trascendental de la onda progresiva es el que se trata de una perturbación autónoma del medio en el cual se propaga. Las ondas más corrientes y las que son más fáciles de visualizar (figura 2.1), son las ondas mecánicas, entre las cuales están las

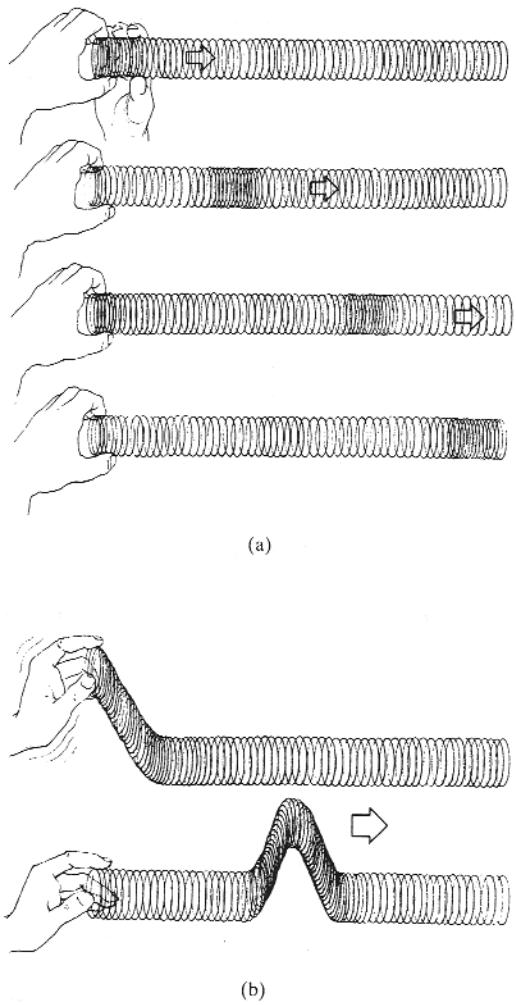


FIGURA 2.1 (*a*) Una onda longitudinal en un muelle. (*b*) Una onda transversal en un muelle.

ondas en una cuerda, las ondas superficiales en los líquidos, las ondas sonoras en el aire así como las ondas de compresión, tanto en los sólidos como en los fluidos. Las ondas sonoras son **longitudinales** —*el medio se desplaza en la dirección del movimiento de la onda*. Las ondas en una cuerda (y las electromagnéticas) son **transversales** —*el medio se desplaza en una dirección perpendicular a la del movimiento de la onda*. En todos los casos, si bien la perturbación que transporta energía avanza en el medio, los átomos individuales que participan en ello permanecen cerca de sus posiciones de equilibrio: *la perturbación avanza pero no el medio material*. Se trata de una de las características principales de una onda que la distingue de un flujo de partículas. El viento que sopla por un campo, genera unas «ondas de grano» que pasan rápidamente, aunque cada tallo solo se balancee en el sitio. Parece ser que Leonardo da Vinci fue el primero en reconocer que una onda no transporta el medio por el que viaja, siendo precisamente esta propiedad la que permite la propagación de las ondas a velocidades muy elevadas.

Imaginemos una perturbación ψ que viaja en la dirección positiva de x con una velocidad constante v. La naturaleza específica de la perturbación no es por el momento importante. Podría ser el desplazamiento vertical de la cuerda en la figura 2.2 o la magnitud de un campo eléctrico o magnético asociado con una onda electromagnética (o hasta la amplitud de probabilidad mecánico-cuántica de una onda de materia).

Dado que la perturbación está en movimiento, debe ser una función tanto de la posición como del tiempo, pudiendo, por consiguiente, escribirse como

$$\psi = f(x, t) \tag{2.1}$$

La forma de la perturbación en cualquier instante, digamos $t = 0$, se puede encontrar manteniendo constante el tiempo en ese valor. En este caso,

$$\psi(x, t)|_{t=0} = f(x, 0) = f(x) \tag{2.2}$$

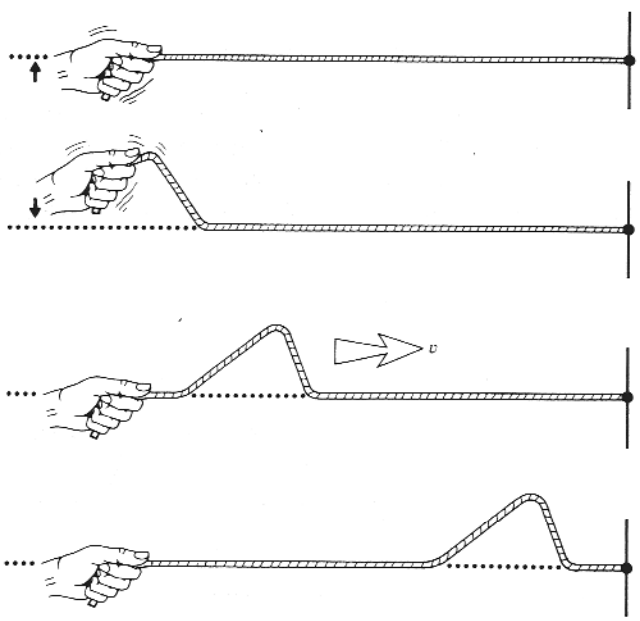


FIGURA 2.2 Una onda en una cuerda.

representa la forma o el **perfil** de la onda en ese momento. Por ejemplo, si $f(x) = e^{-ax^2}$ donde a es una constante, el perfil tendrá la forma de una campana; es decir, es una **función gaussiana**. El procedimiento es semejante a tomar una «fotografía» del pulso mientras éste se desplaza. Por el momento, nos limitaremos a una onda que *no cambia su forma* mientras avanza a través del espacio. La figura 2.3 es una «exposición doble» de tal perturbación, tomada al comienzo y al final del intervalo de tiempo t. El pulso ha realizado un desplazamiento vt a lo largo del eje x, pero en todos los otros aspectos, permanece inalterado. Ahora introducimos un sistema coordenado S' que viaja junto con el pulso a la velocidad v. En este sistema, ψ ya no es función del tiempo y al movernos junto con S', vemos un perfil constante estacionario con la misma forma funcional que la ecuación (2.2). Aquí, la coordenada es x' en lugar de x, de tal forma que

$$\psi = f(x') \tag{2.3}$$

La perturbación se ve igual para cualquier valor de t en S' como lo era en S para $t = 0$ cuando S y S' tenían un origen común. De la figura 2.3 se deduce que

$$x' = x - vt \tag{2.4}$$

de tal forma que ψ puede escribirse en términos de las variables asociadas con el sistema estacionario S como

$$\psi(x, t) = f(x - vt) \tag{2.5}$$

Entonces, esto representa la forma más general de la **función de onda** unidimensional. Para ser más específicos, solamente tenemos que escoger una forma, ecuación (2.2) y luego reemplazar $(x - vt)$ por x en $f(x)$. ***La expresión resultante describe una onda que tiene el perfil deseado y que se mueve en la dirección positiva de x con una velocidad v.*** Por lo tanto, $\psi(x, t) = e^{-a(x-vt)^2}$ es una onda con forma de campana.

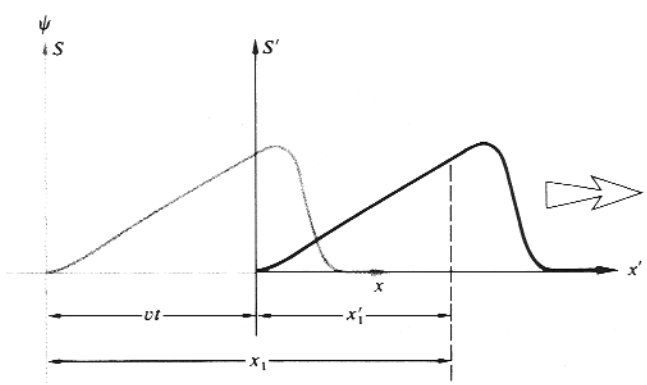


FIGURA 2.3 Sistema de referencia móvil.

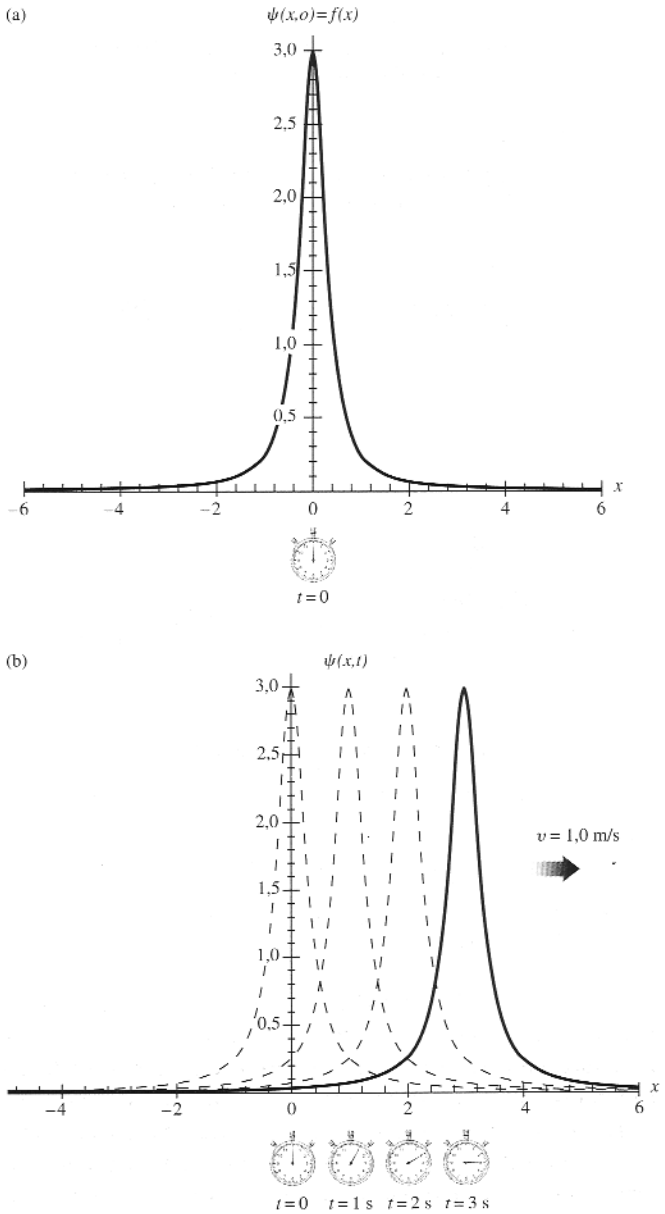


FIGURA 2.4 (*a*) Perfil de un pulso dado por la función $f(x) = 3/(10x^2 + 1)$. (*b*) El perfil que se muestra en (*a*) ahora se desplaza como una onda, $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$, a la derecha. Tiene una velocidad de 1 m/s y avanza en la dirección positiva de x.

Para ver con más detalle cómo funciona todo esto, desarrollemos el análisis para un pulso específico, por ejemplo, $\psi(x) = 3/[10x^2 + 1] = f(x)$. Ese perfil se recoge en la figura 2.4*a*; si se tratara de una onda en una cuerda, ψ sería el desplazamiento vertical que podríamos incluso reemplazar por el símbolo y. Independientemente de que ψ represente el desplazamiento, la presión o un campo eléctrico, ahora disponemos del perfil de la perturbación. Para convertir $f(x)$ en $\psi(x, t)$, es decir, para que corresponda con la descripción de una onda que se mueve en la dirección positiva de x con una velocidad v, reemplazaremos x dondequiera que aparezca en $f(x)$ por $(x - vt)$, dando así $\psi(x, t) = 3/[10(x - vt)^2 + 1]$. Si a v se le asigna un valor arbitrario de 1,0 m/s y la función se dibuja a $t = 0$, $t = 1$s, $t = 2$s y $t = 3$ s, conseguiremos la figura 2.4*b* en la que se muestra el pulso que se mueve a la derecha con una velocidad de 1,0 m/s, como de hecho tiene que hacer. Por cierto, si hubiéramos reemplazado $(x + vt)$ por x en la función del perfil, la onda resultante se desplazaría hacia la izquierda.

Si verificamos la forma de la ecuación (2.5) examinando ψ después de un incremento Δt de tiempo y un incremento correspondiente de $v\,\Delta t$ en x, encontramos

$$f[(x + v\,\Delta t) - v(t + \Delta t)] = f(x - vt)$$

y el perfil está inalterado.

De un modo parecido, si la onda estuviera viajando en la dirección negativa de x, es decir, hacia la izquierda, la ecuación (2.5) quedaría

$$\psi = f(x + vt), \quad \text{con} \quad v > 0 \tag{2.6}$$

Por consiguiente, podemos concluir que, independientemente de la forma de la perturbación, las variables x y t deben aparecer en la función como una unidad; es decir, como una variable única en la forma $(x \mp vt)$. La ecuación (2.5) se expresa a menudo, de forma equivalente, como una función de $(t - x/v)$, ya que

$$f(x - vt) = F\left(-\frac{x - vt}{v}\right) = F(t - x/v) \tag{2.7}$$

El pulso que se muestra en la figura 2.2 y la perturbación descrita por la ecuación (2.5) se definen de forma *unidimensional* puesto que las ondas pasan sobre puntos que yacen en una línea —sólo se necesita una variable espacial para especificarlos. No se dejen engañar por el hecho de que, en este caso específico, la cuerda se levanta en una segunda dimensión. Por el contrario, una onda bidimensional se propaga en una superficie como las ondas en un estanque, pudiendo describirse mediante dos variables espaciales.

2.1.1 La ecuación diferencial de onda

En 1747, Jean Le Rond d'Alembert incorporó unas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales al tratamiento matemático de la física. Ese mismo año, escribió un artículo sobre el movimiento de cuerdas vibrantes en el que aparece, por primera vez, la llamada *ecuación diferencial de ondas*. Esta ecuación diferencial en derivadas parciales, de segundo orden y lineal se utiliza normalmente para definir toda clase de onda física. Se trata de una ecuación diferencial en derivadas parciales porque la onda tiene que ser una función de varias variables independientes, es decir, las de espacio y tiempo. Una ecuación diferencial *lineal* está compuesta esencialmente por dos o más términos, cada cual hecho de una constante que multiplica a una función $\psi(x)$ o a sus derivadas. Lo importante es que cada término tiene que aparecer sólo en su primera potencia; no puede haber tampoco ningún producto cruzado de ψ con sus derivadas o de sus derivadas. Recuerden que el *orden* de una ecuación diferencial equivale al orden de la derivada más alta en aquella ecuación. Además, si una ecuación diferencial es de orden N, la solución contendrá N constantes arbitrarias. Por lo tanto, ahora podemos deducir la forma unidimensional de la ecuación de onda a sabiendas de que (pág. 15) la onda más simple que viaja con una velocidad fija necesita dos constantes (amplitud y frecuencia o longitud de onda) para especificarla, sugiriendo así derivadas segundas. De cualquier forma, tomen la derivada parcial de $\psi(x, t)$ con respecto a x, manteniendo t constante. Utilizando $x' = x \mp vt$, se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} \quad \text{ya que} \quad \frac{\partial x'}{\partial x} = 1 \tag{2.8}$$

Si mantenemos x constante, la derivada parcial con respecto al tiempo es

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \mp v\frac{\partial f}{\partial x'} \tag{2.9}$$

Combinando las ecuaciones (2.8) y (2.9), se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mp v\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{2.10}$$

Esto nos dice que la velocidad de cambio de ψ con t y con x es equivalente, dentro de una constante multiplicativa, como se muestra en la figura 2.5. Las segundas derivadas parciales de las ecuaciones (2.8) y (2.9) son

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

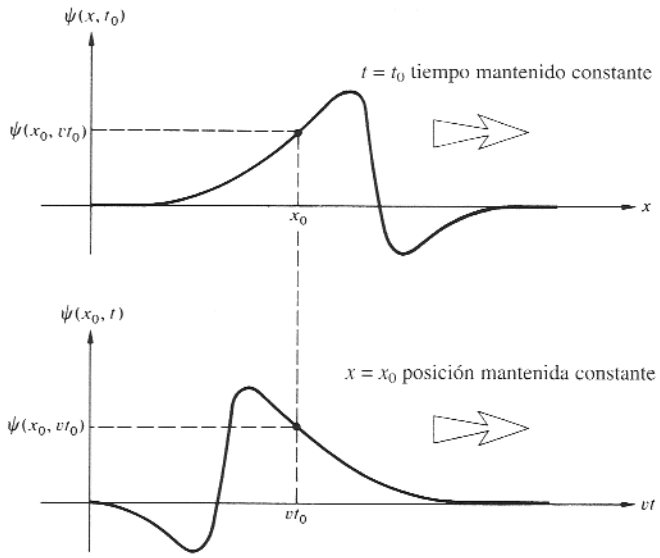


FIGURA 2.5 Variación de ψ con x y t.

y
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mp v \frac{\partial f}{\partial x'}\right) = \mp v \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$$

Como
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

utilizando la ec. (2.9) se obtiene que
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.11}$$

que es la **ecuación diferencial de onda** unidimensional deseada. Por regla general, las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales aparecen cuando el sistema que se describe es continuo. El hecho de que el tiempo sea una de las variables independientes refleja la continuidad del cambio temporal en el proceso que se está examinando. Por lo general, las teorías de campos tratan distribuciones continuas de cantidades en el espacio y en el tiempo, adquiriendo por lo tanto la forma de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. La formulación del electromagnetismo de Maxwell, que es una teoría de campos, produce una variante de la ec. (2.11) y de ahí, el concepto de la onda electromagnética surge de manera natural (pág. 44).

Empezamos esta discusión estudiando el caso especial de ondas que tienen forma constante mientras se van propagando aunque, por regla general, las ondas no mantienen un perfil fijo. Sin embargo, esa simple suposición nos ha llevado a la formulación general, la ecuación diferencial de ondas. Si una función es una solución de dicha ecuación, representa una onda. Como hemos visto será, al mismo tiempo, función de $(x \mp vt)$ —en concreto, una que es diferenciable dos veces (de manera no trivial) tanto con respecto a x como a t.

2.2 Ondas armónicas

Examinemos la forma de onda más simple, en la cual el perfil es una curva seno o coseno. Éstas se conocen de forma variada como ondas sinusoidales, ondas armónicas simples, o más sucintamente, **ondas armónicas**. En el capítulo 7 veremos que cualquier forma de onda puede sintetizarse por una superposición de ondas armónicas y, por consiguiente, éstas adquieren un significado especial.

Escojamos para el perfil la función simple
$$\psi(x, t)|_{t=0} = \psi(x) = A \operatorname{sen} kx = f(x) \tag{2.12}$$

donde k es una constante positiva conocida como el **número de onda**. Es preciso introducir la constante k sencillamente porque no podemos utilizar el seno de una cantidad que tiene unidades físicas. Puesto que el seno es la relación de dos longitudes, está desprovisto de unidades. Por consiguiente, kx está en radianes, que no es una verdadera unidad física. El seno varía de +1 a −1 de manera que el máximo valor de $\psi(x)$ es A. Este máximo de la perturbación se conoce como **amplitud** de la onda (figura 2.6). A fin de transformar la ecuación (2.12) en una *onda progresiva* que viaja con velocidad v en la dirección positiva de x, necesitamos simplemente reemplazar x por $(x - vt)$, en cuyo caso
$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) = f(x - vt) \tag{2.13}$$

Esto es claramente (véase el problema 2.14) una solución de la ecuación diferencial de onda. Si se mantiene fija bien sea x o t, se obtiene una perturbación sinusoidal de tal forma que la onda es periódica tanto en el espacio como en el tiempo. El

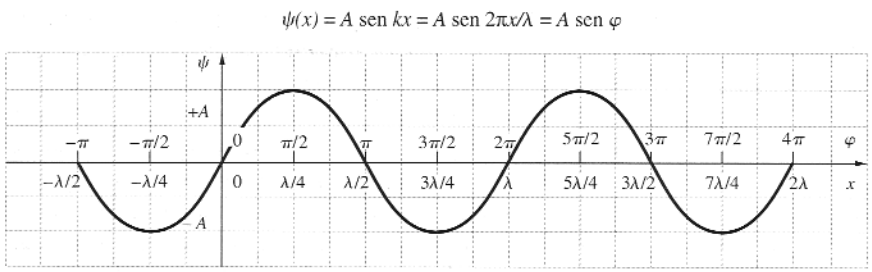


FIGURA 2.6 Una función armónica que sirve como perfil de una onda armónica. Una longitud de onda corresponde a un cambio de fase φ de 2π radianes.

período espacial se conoce como **longitud de onda** y se denota por λ. La longitud de onda es *el número de unidades de longitud por onda*. La medida normal de λ es el nanometro, donde 1 nm = 10^{-9} m; sin embargo, a menudo se utiliza el micrón (1 μm = 10^{-6} m) mientras que el angstrom, más antiguo, (1 Å = 10^{-10} m) se puede encontrar aún en la literatura. Un aumento o una disminución de x en la cantidad λ, no debería alterar ψ, es decir,

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t) \tag{2.14}$$

En el caso de una onda armónica, esto es equivalente a alterar el argumento de la función seno en $\pm 2\pi$. Por lo tanto,

$$\text{sen } k(x - vt) = \text{sen } k[(x \pm \lambda) - vt] = \text{sen } [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

y así

$$|k\lambda| = 2\pi$$

o, ya que tanto k como λ son números positivos

$$k = 2\pi/\lambda \tag{2.15}$$

La figura 2.6 muestra cómo delinear el perfil de la ecuación (2.12) en términos de λ. Aquí, φ es el argumento de la función seno, llamada también **fase**. Obsérvese que $\psi(x) = 0$ donde seno $\varphi = 0$, lo cual ocurre cuando $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, y así sucesivamente. Esto ocurre para $x = 0, \lambda/2, \lambda$, y $3\lambda/2$, respectivamente.

En forma del todo similar a la discusión anterior de λ, pasamos a examinar el **período temporal**, τ, es decir, la cantidad de tiempo que una onda completa tarda en superar a un observador estacionario. En este caso, lo interesante es el comportamiento repetitivo de la onda en el tiempo, de manera que

$$\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau) \tag{2.16}$$

y $\text{sen } k(x - vt) = \text{sen } k[x - v(t \pm \tau)] = \text{sen } [k(x - vt) \pm 2\pi]$

Por lo tanto,

$$|kv\tau| = 2\pi$$

Pero todas estas son cantidades positivas y así

$$kv\tau = 2\pi \tag{2.17}$$

o

$$\frac{2\pi}{\lambda} v\tau = 2\pi$$

de lo cual se infiere que

$$\tau = \lambda/v \tag{2.18}$$

El período es *el número de unidades de tiempo por onda* (figura 2.7), cuyo inverso es la **frecuencia temporal** ν o *el número de ondas por unidad de tiempo* (es decir, por segundo). Entonces

$$\nu \equiv 1/\tau$$

en unidades de ciclos por segundo o Herzios. La ecuación (2.18) queda por lo tanto

$$v = \nu\lambda \tag{2.19}$$

Imaginemos que estamos en reposo y que una onda armónica desfila en una cuerda. El número de ondas que pasa por segundo es igual a ν, siendo la longitud de cada una λ. En 1,0 s, la longitud total de la perturbación que desfilará delante de ustedes es igual al producto $\nu\lambda$. Si, por ejemplo, cada onda mide 2,0 m de largo y se acerca con una velocidad de 5,0 por segundo, entonces en 10 s pasarán 10 m de onda. Esto es exactamente lo que nosotros entendemos por velocidad de la onda (v) —la velocidad en m/s con la que progresa. Dicho de manera ligeramente distinta, para que una longitud de onda λ pase en un tiempo τ, su velocidad tiene que ser igual a $\lambda/\tau = \nu\lambda$. Por cierto, Newton dedujo esta relación en su obra *Principia* (1687), en el apartado denominado «Para calcular la velocidad de las ondas».

Hay otras dos cantidades que se usan a menudo en la literatura del movimiento ondulatorio: una es la **frecuencia temporal angular**

$$\omega \equiv 2\pi/\tau = 2\pi\nu \tag{2.20}$$

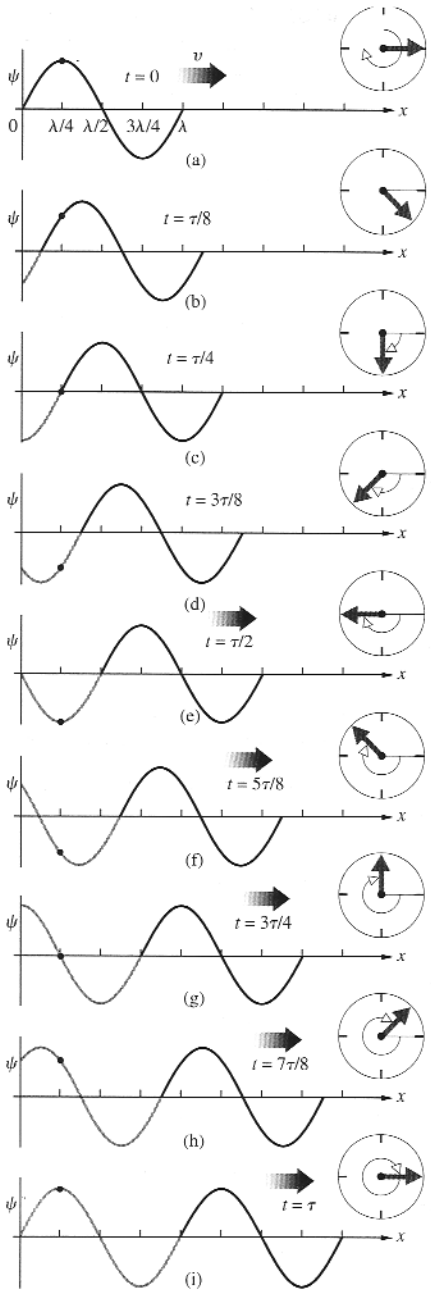


FIGURA 2.7 Una onda armónica que se desplaza a lo largo del eje x durante un tiempo de un período. Obsérvese que si ésta es la representación de una cuerda, cualquier punto en la misma se desplazará sólo verticalmente. Analizaremos el significado de la flecha rotatoria en la sección 2.6.

en unidades de radianes por segundo. La segunda, importante en espectroscopia, es el **número de onda** o **frecuencia espacial**

$$\kappa \equiv 1/\lambda \tag{2.21}$$

medida en metros inversos. Dicho de otra forma, κ es *el número de ondas por unidad de longitud* (es decir, por metro). Todas estas cantidades se aplican igualmente bien a ondas que no sean armónicas, con tal que cada una de ellas esté conformada por un único **elemento de perfil** que se repita regularmente (figura 2.8).

Utilizando las definiciones anteriores, se podrá escribir una serie de expresiones equivalentes para la onda armónica progresiva:

$$\psi = A \text{ sen } k(x \mp vt) \tag{2.13}$$

$$\psi = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{\tau}\right) \tag{2.22}$$

$$\psi = A \text{ sen } 2\pi(\kappa x \mp \nu t) \tag{2.23}$$

$$\psi = A \text{ sen } (kx \mp \omega t) \tag{2.24}$$

$$\psi = A \text{ sen } 2\pi\nu\left(\frac{x}{v} \mp t\right) \tag{2.25}$$

De todas éstas, las que se encontrarán con más frecuencia son las ecuaciones (2.13) y (2.24). Obsérvese que todas estas ondas idealizadas son de extensión infinita; es decir, para cada valor fijo de t, x no tiene limitación matemática, que varía de $-\infty$ a $+\infty$. Cada onda tiene sólo una frecuencia constante siendo, por lo tanto, **monocromática** o, mejor aún, **monoenergética**. Las ondas verdaderas no son nunca monocromáticas. Hasta un generador sinusoidal perfecto no puede haber estado funcionando ilimitadamente. Su salida contendrá, inevitablemente, una gama de frecuencias, aunque pequeña, porque la onda no se extiende a $t = -\infty$. Por consiguiente, todas las ondas incluyen una banda de frecuencias; si ésta es estrecha, se dirá que la onda es **cuasimonocromática**.

Antes de seguir, coloquemos algunos números en la ecuación (2.13) y veamos como abordar cada término. Con este propósito, supongamos arbitrariamente que $v = 1{,}0$ m/s y $\lambda = 2{,}0$ m. Entonces la función de onda

$$\psi = A \text{ sen } \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

en unidades SI pasa a ser

$$\psi = A \text{ sen } \pi\,(x - t)$$

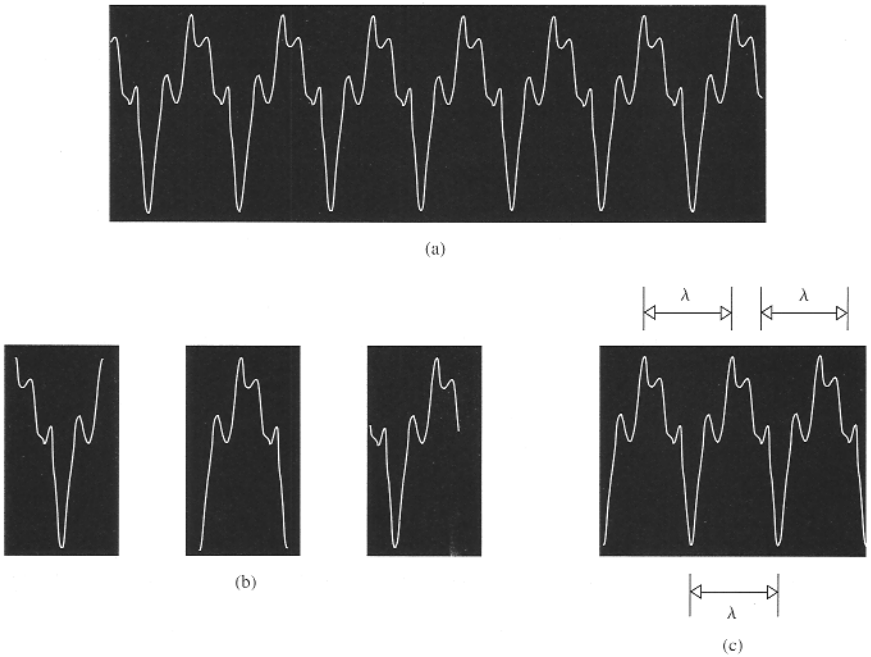


FIGURA 2.8 (*a*) Forma de onda producida por un saxofón. Imaginen un número cualquiera de elementos-perfil (*b*) que, al repetirlos, crean la forma de onda (*c*). La distancia a la que la onda se repite se denomina longitud de onda λ.

La figura 2.9 muestra cómo la onda progresa hacia la derecha con una velocidad de 1,0 m/s mientras que el tiempo pasa de $t = 0$ [con lo cual $\psi = A \text{ sen } \pi x$] a $t = 1{,}0$ s [con lo cual $\psi = A \text{ sen } \pi(x - 1{,}0)$] a $t = 2{,}0$ s [con lo cual $\psi = A \text{ sen } \pi(x - 2{,}0)$.

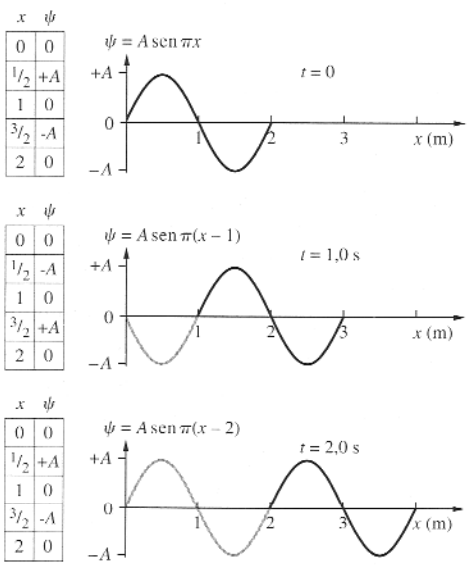


FIGURA 2.9 Una onda progresiva con forma $\psi(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt)$, que se desplaza a la derecha a una velocidad de 1 m/s.

2.3 Fase y velocidad de fase

Examinemos cualquiera de las funciones de onda armónica, tales como

$$\psi(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t) \tag{2.26}$$

El argumento completo de la función seno es la fase φ de la onda, donde

$$\varphi = (kx - \omega t) \tag{2.27}$$

Para $t = x = 0$,

$$\psi(x, t)\big|_{\substack{x=0 \\ t=0}} = \psi(0, 0) = 0$$

lo cual es ciertamente un caso especial. Con más generalidad, podemos escribir

$$\psi(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t + \varepsilon) \tag{2.28}$$

donde ε es la **fase inicial**. A fin de entender el sentido físico de ε, imagínese que deseamos producir una onda armónica progresiva en una cuerda tensa, como en la figura 2.10. Para generar ondas armónicas, la mano que sostiene la cuerda tendría que moverse de tal forma que su desplazamiento vertical y fue-

ra proporcional al valor negativo de su aceleración, es decir, el movimiento es armónico simple (véase problema 2.15). Pero en $t = 0$ y $x = 0$ la mano ciertamente no necesita estar en el eje x cuando está a punto de moverse hacia abajo como en la figura 2.10. Podría, por supuesto, comenzar su movimiento en un balanceo hacia arriba, en cuyo caso $\varepsilon = \pi$, como se indica en la figura 2.11. En este último caso

$$\psi(x, t) = y(x, t) = A \text{ sen } (kx - \omega t + \pi)$$

que equivale a

$$\psi(x, t) = A \text{ sen } (\omega t - kx) \tag{2.29}$$

o

$$\psi(x, t) = A \cos\left(\omega t - kx - \frac{\pi}{2}\right)$$

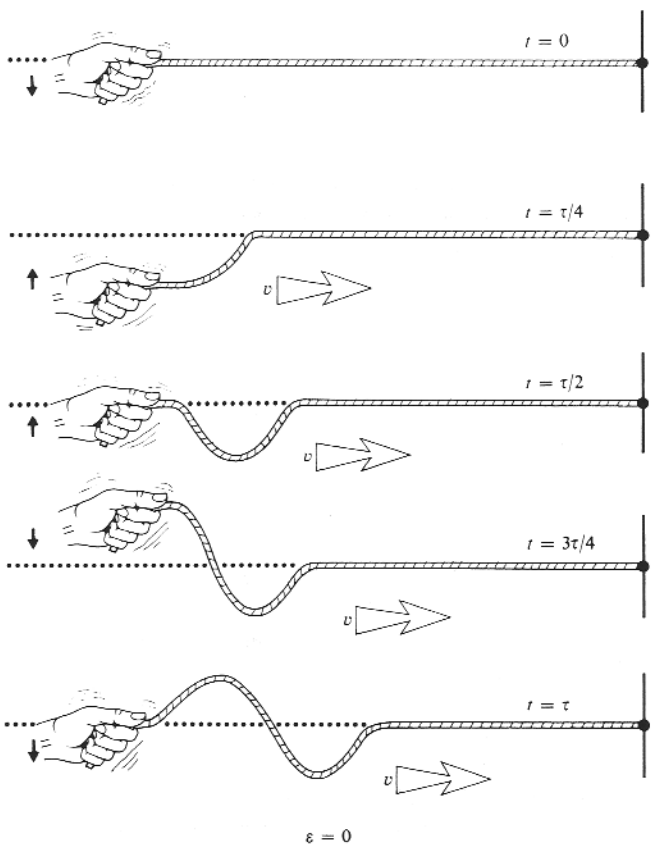


FIGURA 2.10 Con $\varepsilon = 0$ obsérvese que en $x = 0$ y $t = \tau/4 = \pi/2\omega$, $y = A$ sen $(-\pi/2) = -A$.

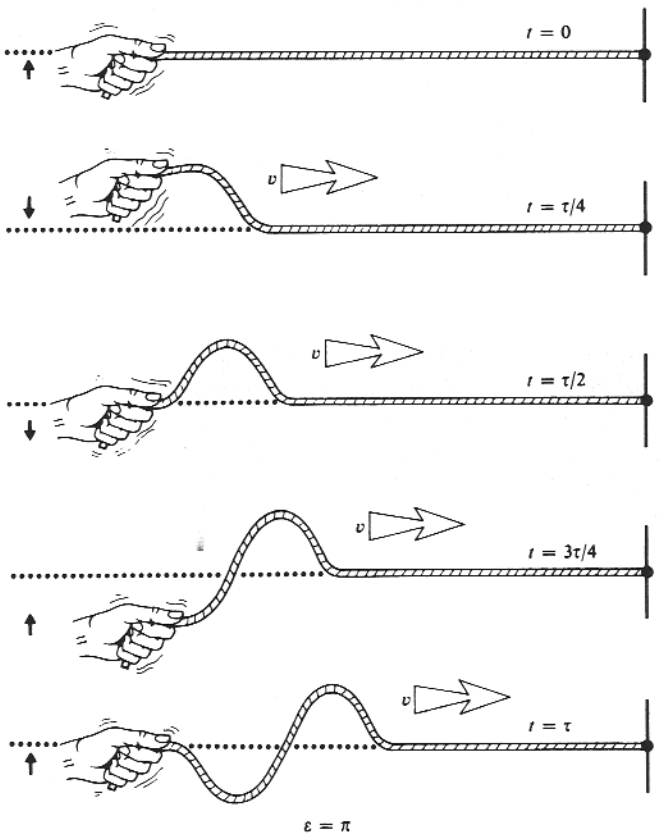


FIGURA 2.11 Con $\varepsilon = \pi$ obsérvese que en $x = 0$ y $t = \tau/4$, $y = A$ sen $(\pi/2) = A$.

El ángulo de la fase inicial es una contribución constante a la fase que se origina en el generador y es independiente del recorrido de la onda en términos de espacio y de tiempo.

La fase en la ecuación (2.26) es $(kx - \omega t)$, mientras que en la ecuación (2.29) es $(\omega t - kx)$. Sin embargo, ambas ecuaciones describen ondas capaces de moverse en la dirección positiva de x, y que son, por lo demás, idénticas con excepción de una diferencia de fase relativa de π. Como ocurre a menudo, cuando la fase inicial no tiene gran importancia en una situación específica, se podrá utilizar cualquiera de las ecuaciones (2.26) o (2.29) o, una función de coseno para representar la onda. Aún así, en alguna situación, una expresión para la fase puede resultar matemáticamente más atractiva que otra y visto que la literatura trata ambas, ambas utilizaremos.

La fase de una perturbación como $\psi(x, t)$ dada por la ecuación (2.28) es

$$\varphi(x, t) = (kx - \omega t + \varepsilon)$$

siendo, lógicamente, una función de x y de t. En efecto, la derivada parcial de φ con respecto a t, manteniendo x constante, es la *rapidez del cambio de la fase con el tiempo*, o

$$\left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_x\right| = .\omega \tag{2.30}$$

La rapidez de cambio de la fase en cualquier sitio fijo, es la frecuencia angular de la onda, el ritmo al que un punto en la cuerda de la figura 2.10 oscila hacia arriba y abajo.

Ese punto tiene que pasar por el mismo número de ciclos por segundo que la onda. Por cada ciclo, φ varía en 2π.

De manera análoga, la *rapidez del cambio de la fase con la distancia*, manteniendo t constante, es

$$\left|\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_t\right| = k \tag{2.31}$$

Estas dos expresiones deberían traer a la memoria una ecuación de la teoría de derivadas parciales, que se utiliza con frecuencia en termodinámica, es decir

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = \frac{-(\partial \varphi/\partial t)_x}{(\partial \varphi/\partial x)_t} \tag{2.32}$$

El término de la izquierda representa la *velocidad de propagación de la condición de fase constante*. Imaginemos una onda armónica y escojamos un punto cualquiera del perfil, por ejemplo, la cresta de la onda. Mientras la onda se desplaza en el espacio, el desplazamiento y de la cresta permanece constante. Ya que la única variable en la función de onda armónica es la fase, ella también debe ser constante para ese punto en movimiento. Esto es, la fase está fija en un valor tal que dé lugar a la constante y que corresponda al punto elegido. El punto se mueve junto con el perfil con velocidad v, y así también lo hace la condición de fase constante.

Tomando las derivadas parciales adecuadas de φ, como se dan, por ejemplo, en la ecuación (2.29) y sustituyéndolas en la ecuación (2.32), obtenemos

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\varphi = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \tag{2.33}$$

Esta es la *velocidad* con la cual se mueve el perfil y que se conoce comúnmente como **velocidad de fase** de la onda. La velocidad de fase lleva un signo positivo cuando la onda se mueve en la dirección en que aumenta x y negativo en la que disminuye x. Esto concuerda con nuestro desarrollo de v como magnitud de la velocidad de la onda: $v > 0$.

Consideremos la idea de la propagación de fase constante y cómo se relaciona con cualquiera de las ecuaciones de onda armónica, digamos

$$\psi = A \operatorname{sen} k(x \mp vt)$$

con

$$\varphi = k(x - vt) = \text{constante}$$

Al aumentar t, tiene que aumentar x también. Incluso si $x < 0$ tal que $\varphi < 0$, x debe aumentar (es decir, se hace menos negativo). Aquí, entonces, la condición de fase constante se mueve en la dirección en que aumenta x. Siempre que los dos términos en la fase se resten entre sí, la onda se mueve en la dirección positiva de x. Por otra parte, para

$$\varphi = k(x + vt) = \text{constante}$$

cuando t aumenta, x puede ser positiva y decreciente, o negativa volviéndose más negativa aún. En ambos casos, la condición de fase constante se mueve en la dirección en que disminuye x.

Cualquier punto en una onda armónica con una magnitud fija, se mueve de tal manera que $\varphi(x, t)$ sea constante en el tiempo; dicho de otra forma, $d\varphi(x, t)/dt = 0$, o de otra forma, $d\psi(x, t)/dt = 0$. Esto es cierto para toda clase de onda, periódica o no, llevando así (problema 2.21) a la expresión

$$\pm v = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_x \Big/ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_t \tag{2.34}$$

que puede utilizarse para proporcionar v cuando tengamos $\psi(x, t)$. Obsérvese que ya que v es siempre un número positivo, cuando la relación de la derecha se vuelve negativa, el movimiento se realiza en la dirección negativa de x.

En la figura 2.12 se muestra una fuente que produce unas ondas hipotéticas bidimensionales en la superficie de un líquido. La naturaleza esencialmente sinusoidal de la perturbación, al subir y bajar el medio, es evidente en el gráfico. Sin embargo, existe otra forma para ver lo que ocurre. *Las curvas que relacionan todos los puntos con una fase específica, forman una serie de círculos concéntricos.* Asimismo, suponiendo que A sea constante en cualquier punto a cualquier distancia de la fuente, si φ es constante en un círculo, también ψ tiene que ser constante en ese círculo. Dicho de otra forma, todos los picos y todas las bajadas correspondientes caen en círculos, así que hablamos de *ondas circulares*, cada cual expandiéndose hacia el exterior con una velocidad v.

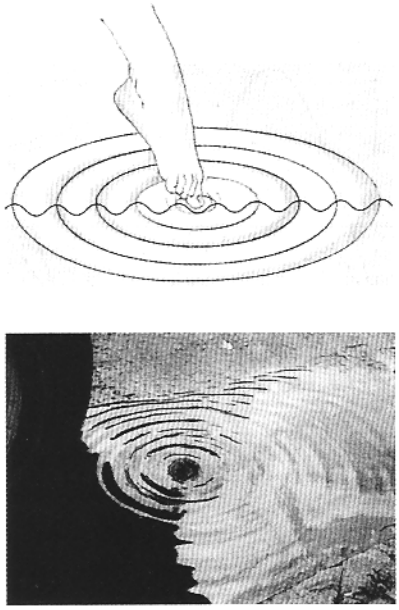


FIGURA 2.12 Ondas circulares idealizadas. (Foto de E.H.)

2.4 El principio de superposición

La forma de la ecuación diferencial de onda [ecuación (2.11)] pone de manifiesto una propiedad interesante de las ondas, que es bastante distinta al comportamiento de un flujo de partículas clásicas. Supongamos que las funciones de onda ψ_1 y ψ_2 sean soluciones separadas de la ecuación de onda; de ello se deduce que también $(\psi_1 + \psi_2)$ representa una solución. Esto se denomina **Principio de superposición** y podrá demostrarse fácilmente puesto que tiene que ser cierto que

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

Sumando estos resultados

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

por lo tanto $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\psi_1 + \psi_2)$$

que establece que efectivamente $(\psi_1 + \psi_2)$ es una solución. Esto quiere decir que cuando dos ondas separadas llegan al mismo sitio en el espacio en donde se superponen, se sumarán simplemente (o se sustraerán) sin destruir o romper ninguna de las dos ondas. ***La perturbación resultante en cada punto de la zona de superposición es la suma algebraica de las ondas constituyentes individuales en ese punto*** (figura 2.13). Una vez que hayan pasado por el área donde las ondas coexisten, cada cual saldrá y se alejará, quedando inalterada por el encuentro.

Cabe recordar que estamos hablando de una superposición *lineal* de ondas, un proceso que es ampliamente válido y, de todos, el que se encuentra más usualmente. Sin embargo, las amplitudes de onda pueden ser también lo suficientemente grandes para perturbar el medio de una manera no lineal (pág. 648). De momento, nos centraremos en la ecuación diferencial de ondas lineal que lleva al Principio de superposición lineal.

Gran parte de la Óptica prevé la superposición de ondas de una manera u otra. Hasta los procesos básicos de reflexión y refracción son manifestaciones del esparcimiento de la luz por innumerables átomos (pág. 86), un fenómeno que puede tratarse exitosamente tan sólo en términos de la superposición de ondas. Por lo tanto, se hace imprescindible que entendamos cuanto antes el proceso, por lo menos cualitativamente. Por consiguiente, examinemos detenidamente las dos ondas coexistentes en la figura 2.13. En cada punto (es decir, cada valor de kx), sumamos simplemente ψ_1 y ψ_2, pudiendo cualquiera de

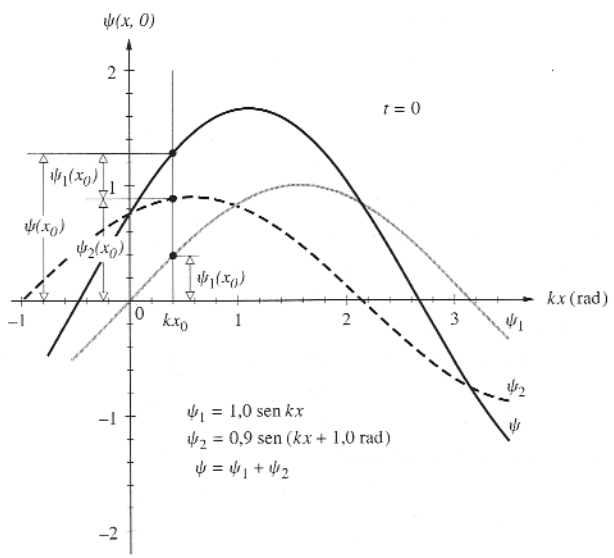
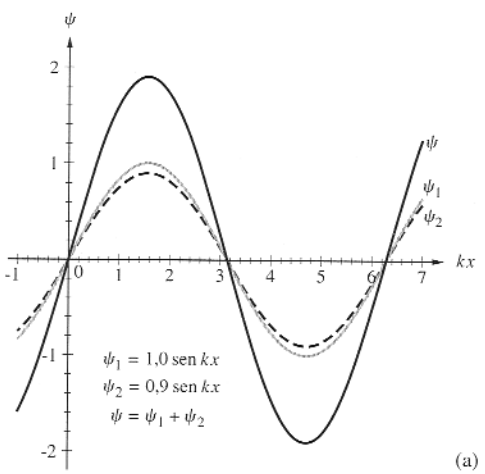
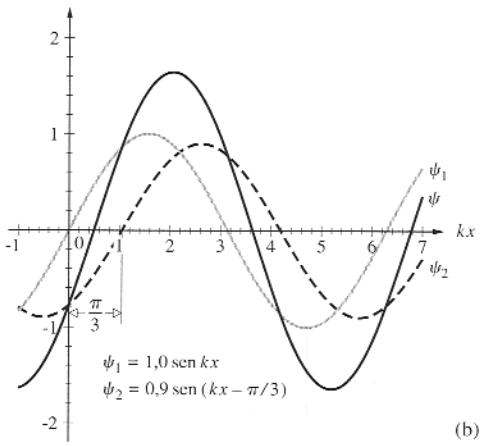


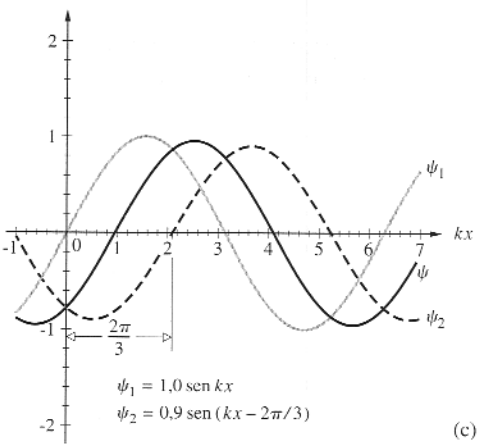
FIGURA 2.13 La superposición de dos sinusoides ψ_1 y ψ_2 de igual longitud de onda. La resultante es una sinusoide con la misma longitud de onda que en cada punto es igual a la suma algebraica de las sinusoides constitutivas. Por lo tanto en $x = x_0$, $\psi(x_0) = \psi_1(x_0) + \psi_2(x_0)$; las magnitudes se suman.

los dos ser positivo o negativo. Para llevar a cabo un control rápido, recuerden que dondequiera que una componente de la onda sea cero (por ejemplo, $\psi_1 = 0$), la perturbación resultante equivaldrá al valor de la otra componente de la onda distinto de cero ($\psi = \psi_2$) y aquellas dos curvas se cruzarán en ese punto (por ejemplo, en $kx = 0$ y $+3{,}14$ radianes). Por otra parte, $\psi = 0$ dondequiera que las dos ondas constituyentes tengan la misma magnitud y signos opuestos (por ejemplo, en $kx = +2{,}67$ rad.). Por cierto, obsérvese cómo una diferencia de fase relativa *positiva* de 1,0 rad. entre las dos curvas traslada a ψ_2 hacia la izquierda con respecto a ψ_1 en 1,0 rad.

Desarrollando la ilustración un poco más, la figura 2.14 muestra cómo el resultado de la superposición de dos ondas de amplitud casi igual depende de la *diferencia de ángulo de fase* entre ellas. En la figura 2.14*a* las dos ondas constituyentes tienen la misma fase; es decir, su diferencia de ángulo de fase es cero, por lo tanto se dice que están **en fase**; suben y bajan al paso, reforzándose recíprocamente. La onda compuesta, que tiene una amplitud considerable, es sinusoidal con la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas componentes (pág. 293). Si seguimos la secuencia de los diagramas, vemos que la amplitud resultante disminuye al aumentar la diferencia de ángulo de fase hasta que, en la figura 2.14*d*, casi desaparece al acercarse dicha diferencia a π. Se dice, por lo tanto, que las ondas están **desfasadas** en 180°. Puesto que las ondas desfasadas tienden a reducirse recíprocamente, se ha denominado **interferencia** al fenómeno entero.







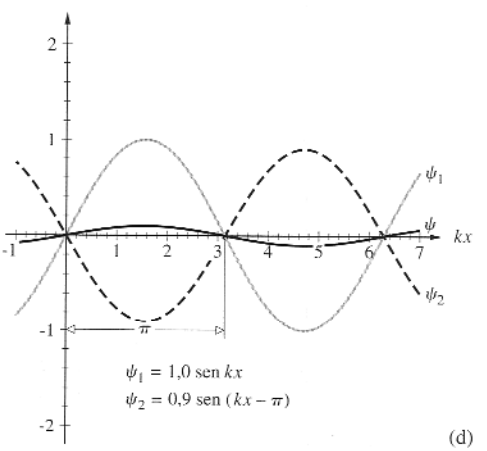


FIGURA 2.14*a*. La superposición de dos sinusoides con amplitudes de 1,0 y 0,9. En (*a*) están en fase. En (*b*) ψ_1 va por delante de ψ_2 en $\pi/3$. En (*c*) ψ_1 va por delante de ψ_2 en $2\pi/3$. En (*d*) ψ_1 y ψ_2 están desfasadas en π y casi se anulan mutuamente.

2.5 La representación compleja

Al desarrollar el análisis de los fenómenos ondulatorios, resultará evidente que las funciones seno y coseno que describen las ondas armónicas pueden resultar algo extrañas para nuestros propósitos. Las expresiones formuladas serán, a veces, más bien complicadas mientras que las manipulaciones trigonométricas que se requieren para enfrentarse con ellas, serán aún menos atractivas. La representación con números complejos ofrece una descripción alternativa que es matemáticamente más simple de trabajar. En efecto, se usan ampliamente exponenciales complejas tanto en la mecánica clásica como en la cuántica y también en óptica.

El número complejo $\tilde{z}$ tiene la forma

$$\tilde{z} = x + iy \tag{2.35}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Las partes reales e imaginarias de $\tilde{z}$ son respectivamente x e y donde ambas son números reales. Esto se ilustra gráficamente en el diagrama de Argand de la figura 2.15*a*. En términos de coordenadas polares (r, θ) tenemos

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

y

$$\tilde{z} = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

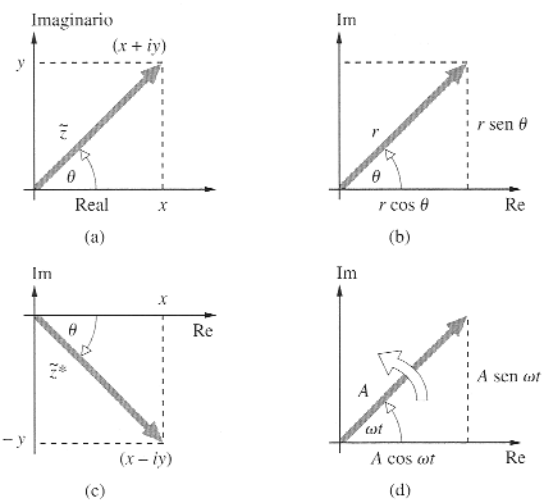


FIGURA 2.15 Un diagrama de Argand es una representación de un número complejo en términos de sus componentes real e imaginaria. Esto puede realizarse utilizando ya sea (*a*) x e y o (*b*) r y θ. Además, cuando θ es una función del tiempo que cambia de forma constante (*d*), la flecha gira a una velocidad ω.

La *fórmula de Euler* [1]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

lleva a la expresión $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta$ y sumando y substrayendo estas dos ecuaciones se llega a

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

y

$$\text{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Además, la fórmula de Euler nos permite escribir (figura 2.15*b*)

$$\tilde{z} = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\,\text{sin}\,\theta$$

donde r es la *magnitud* de $\tilde{z}$ y θ es el *ángulo de fase* de $\tilde{z}$ en radianes. A menudo la magnitud se denota por $|\tilde{z}|$ y se conoce como el *módulo* o *valor absoluto* del número complejo. El *complejo conjugado*, indicado por un asterisco (figura 2.15*c*), se encuentra reemplazando i dondequiera que aparezca, por $-i$, tal que

$$\tilde{z}^* = (x + iy)^* = (x - iy)$$

$$\tilde{z}^* = r(\cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta)$$

y

$$\tilde{z}^* = re^{-i\theta}$$

Las operaciones de adición y substracción son bastante sencillas:

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

y por lo tanto

$$\tilde{z}_1 \pm \tilde{z}_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

Obsérvese que este proceso es muy similar a la adición de vectores por componentes.

La multiplicación y la división se expresan de manera muy simple en forma polar

$$\tilde{z}_1\tilde{z}_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

[1] Si se tiene cualquier duda acerca de esta identidad, tómese el diferencial de $\tilde{z} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, donde $r = 1$. Esto da $d\tilde{z} = i\tilde{z}\,d\theta$ y la integración da $\tilde{z} = \exp(i\theta)$.

y
$$\frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

En este punto, merece la pena mencionar algunos hechos que resultarán ser útiles en los cálculos futuros. De las fórmulas de adición trigonométrica usuales (problema 2.31) se deduce fácilmente que

$$e^{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2} = e^{\tilde{z}_1} e^{\tilde{z}_2}$$

y por lo tanto, si $\tilde{z}_1 = x$ y $\tilde{z}_2 = iy$,

$$e^{\tilde{z}} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

El módulo de una cantidad compleja está dado por

$$r = |\tilde{z}| \equiv (\tilde{z}\tilde{z}^*)^{1/2}$$

y
$$|e^{\tilde{z}}| = e^x$$

Puesto que $\cos 2\pi = 1$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$,

$$e^{i2\pi} = 1$$

De manera análoga,

$$e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1 \quad \text{y} \quad e^{\pm i\pi/2} = \pm i$$

La función $e^{\tilde{z}}$ es periódica, es decir, se repite a sí misma cada $i2\pi$:

$$e^{\tilde{z}+i2\pi} = e^{\tilde{z}} e^{i2\pi} = e^{\tilde{z}}$$

Cualquier número complejo se puede representar como la suma de una parte real Re $(\tilde{z})$ y una parte imaginaria Im $(\tilde{z})$

$$\tilde{z} = \text{Re}\,(\tilde{z}) + i\,\text{Im}\,(\tilde{z})$$

tal que

$$\text{Re}\,(\tilde{z}) = \tfrac{1}{2}(\tilde{z} + \tilde{z}^*) \quad \text{y} \quad \text{Im}\,(\tilde{z}) = \frac{1}{2i}(\tilde{z} - \tilde{z}^*)$$

Ambas expresiones son la consecuencia inmediata del diagrama de Argand, figuras 2.15*a* y *c*. Por ejemplo, $\tilde{z} + \tilde{z}^* = 2x$ porque las partes imaginarias cancelan, por lo tanto Re $(\tilde{z}) = x$.

En la forma polar donde

$$\text{Re}\,(\tilde{z}) = r\cos\theta \quad \text{y} \quad \text{Im}\,(\tilde{z}) = r\,\text{sen}\,\theta$$

está claro que se puede escoger cualquier parte para describir una onda armónica. Por regla general, sin embargo, se escoge la parte real en cuyo caso una onda armónica se escribe como

$$\psi(x, t) = \text{Re}\,[Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)}] \tag{2.36}$$

la cual es, naturalmente, equivalente a

$$\psi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varepsilon)$$

De aquí en adelante, siempre que sea conveniente, escribiremos la función de onda como

$$\psi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx + \varepsilon)} = Ae^{i\varphi} \tag{2.37}$$

y utilizaremos esta forma compleja en los cálculos requeridos, a fin de sacarle partido a la facilidad de manejo de las exponenciales complejas. Sólo después de llegar a un resultado final, y solamente si deseamos representar la onda verdadera, necesitaremos tomar la parte real. Por lo tanto, se ha hecho muy común escribir $\psi(x, t)$, como en la ecuación (2.37), donde se entiende que la onda real es la parte real.

2.6 Los fasores y la adición de ondas

La flecha del diagrama de Argand (figura 2.15*d*) se pone en marcha con una frecuencia ω al dejar el ángulo igual a ωt. Esto sugiere un esquema para representar (y finalmente sumar) ondas que introduciremos aquí cualitativamente y desarrollaremos más tarde (pág. 290) cuantitativamente. La figura 2.16 representa una onda armónica con una amplitud A que se mueve hacia la izquierda. La flecha del diagrama tiene una longitud A y gira a una velocidad constante de tal forma que el ángulo cambiante que forma con el eje x de referencia es ωt. Esta flecha giratoria y su ángulo de fase asociado constituyen juntos un **fasor**, que nos dice todo lo que necesitamos saber acerca de la onda armónica correspondiente. Por regla general, un fasor se expresa en términos de su amplitud A, y fase, φ, como $A\angle\varphi$.

Para ver cómo funciona, examinemos en primer lugar cada parte de la figura 2.16 por separado. El fasor de la figura 2.16*a* tiene un ángulo de fase cero; es decir, se halla a lo largo del eje de referencia; también la función seno asociada puede servir de referencia. En la figura 2.16*b*, el fasor tiene un ángulo de fase de $+\pi/3$ rad y la curva sinusoidal se mueve hacia la izquierda en $\pi/3$ rad. Ésta alcanza su primer pico en un valor de kx más pequeño que la curva de referencia de la parte (a), por lo tanto *precede* a la referencia en $\pi/3$. En las partes (c), (d) y (e) de la figura 2.16, los ángulos de fase son $+\pi/2$ rad, $+2\pi/3$ y $+\pi$ rad, respectivamente. Toda la secuencia de curvas puede considerarse como una onda $\psi = A\,\text{sen}\,(kx + \omega t)$, que

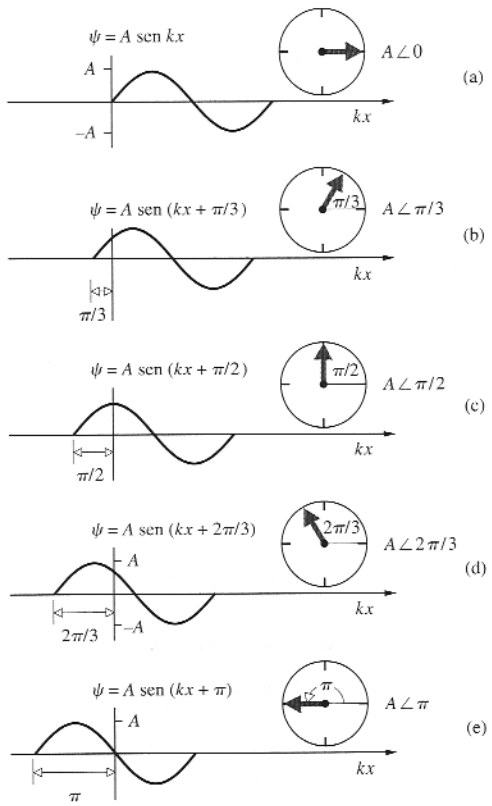


FIGURA 2.16 Una representación de la función $\psi = A \text{ sen } (kx + \omega t)$ y los diagramas de fasores correspondientes. En (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) y (*e*), los valores de ωt son 0, $\pi/3$, $\pi/2$, $2\pi/3$ y π, respectivamente.

se mueve hacia la izquierda. Se puede representar también por un fasor que gira en sentido contrario a las agujas del reloj de tal manera que, en cualquier momento, su ángulo de fase es ωt. Algo muy parecido ocurre en la figura 2.7, sólo que allí la onda progresa hacia la derecha y el fasor gira en el sentido de las agujas del reloj.

Al combinar funciones de onda, por lo general, lo que nos interesa es la amplitud y la fase resultantes. Teniendo esto presente, examínese otra vez la manera en la que las ondas se suman en la figura 2.14. Al parecer, para perturbaciones que están en fase (figura 2.14*a*), la amplitud de la onda resultante, A, es la suma de las amplitudes constituyentes: $A = A_1 + A_2 = 1{,}0 + 0{,}9 = 1{,}9$. Obtendríamos lo mismo si sumásemos dos vectores colineales orientados en la misma dirección. De forma análoga, (figura 2.14*d*), cuando las ondas componentes están defasadas de 180° $A = A_1 - A_2 = 1{,}0 - 0{,}9 = 0{,}1$, como si sumáramos dos vectores colineales orientados hacia direcciones opuestas. Aunque los fasores no son vectores, se suman de forma muy similar. Más tarde, demostraremos que dos fasores arbitrarios, $A_1\angle\varphi_1$ y $A_2\angle\varphi_2$, se combinan punta con cola, como lo harían normalmente los vectores (figura 2.17), para producir una resultante $A\angle\varphi$. Dado que los dos fasores giran juntos con una velocidad ω, podemos simplemente congelarlos en $t = 0$ y despreocuparnos de su dependencia del tiempo, de tal manera que sea bastante más fácil dibujarlos.

Los cuatro diagramas de fasores de la figura 2.18 corresponden a las cuatro combinaciones de onda que se realizan en orden secuencial en la figura 2.14. Cuando las ondas están en fase (como en la figura 2.14*a*), consideramos que tanto las fases de la onda 1 como las de la onda 2 son iguales a cero (figura 2.18*a*) y posicionamos los correspondientes fasores punta con cola a lo largo del eje de referencia de cero φ. Cuando las ondas defieren en fase en $\pi/3$ (como en la figura 2.14*b*), los fasores tienen un fase relativa (figura 2.18*b*) de $\pi/3$. La resultante, cuya amplitud está reducida apropiadamente, tiene una fase φ que está entre 0 y $\pi/3$, como puede verse tanto en la figura 2.14*b* como en la 2.18*b*. Cuando las dos ondas difieren en fase en $2\pi/3$ (como en la figura 2.14*c*), los fasores correspondientes forman casi un triángulo equilátero en la figura 2.18*c* (si no fuera porque $A_1 > A_2$), por lo tanto ahora A se encuentra entre A_1 y A_2. Finalmente, cuando la diferencia del ángulo de fase para las dos ondas (y los dos fasores) es π rad (es decir, 180°), casi se cancelan así que la amplitud resultante se reduce al mínimo. Obsérvese (en la figura 2.18*d*) que el fasor resultante está orientado a lo largo del eje de referencia, teniendo, por lo tanto, la misma fase (esto es, cero) que $A_1\angle\varphi_1$. Por lo tanto, está defasado en 180° con $A_2\angle\varphi_2$; lo mismo es válido para las correspondientes ondas de la figura 2.14*d*.

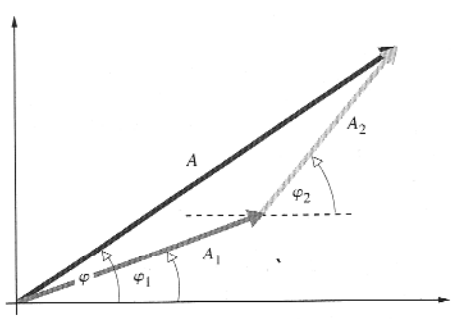


FIGURA 2.17 La suma de dos fasores $A_1\angle\varphi_1$ y $A_2\angle\varphi_2$ es igual a $A\angle\varphi$.

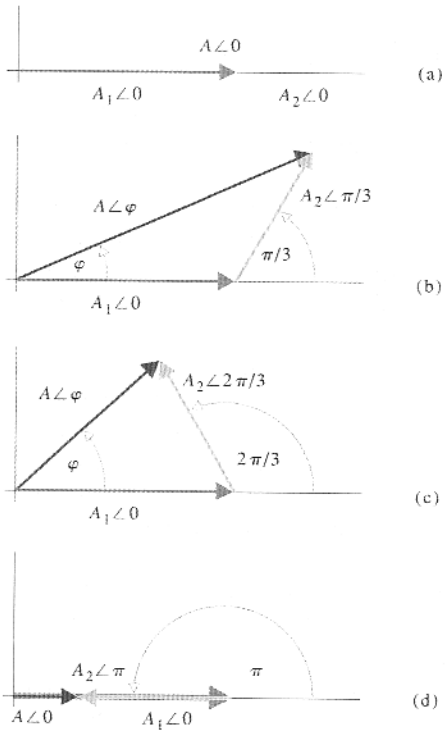


FIGURA 2.18 Suma de fasores.

2.7 ONDAS PLANAS

La onda plana es quizás el ejemplo más simple de onda tridimensional. Existe en un instante dado, cuando todas las superficies sobre las cuales una perturbación tiene fase constante, forman un conjunto de planos, cada uno generalmente perpendicular a la dirección de propagación. Hay razones prácticas para estudiar este tipo de perturbación, una de las cuales es que usando sistemas ópticos podemos producir fácilmente luz semejante a ondas planas.

La expresión matemática para un plano perpendicular a un vector dado $\mathbf{k}$ y que pasa a través de algún punto (x_0, y_0, z_0) es bastante fácil de deducir (figura 2.19). Primero escribimos el vector de posición en coordenadas cartesianas, en términos de los vectores unitarios de la base (figura 2.19*a*)

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

Comienza en algún origen arbitrario O y termina en el punto (x, y, z) que, por el momento, puede ser cualquier lugar en el espacio.

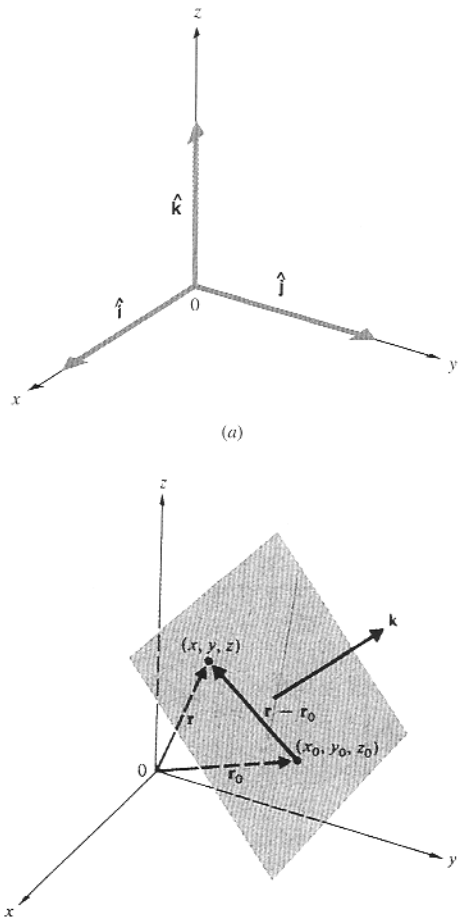


FIGURA 2.19 (*a*) Los vectores unitarios de la base cartesiana. (*b*) Una onda plana moviéndose en la dirección de $\mathbf{k}$.

De un modo parecido,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}$$

Estableciendo

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{k} = 0 \tag{2.38}$$

obligamos al vector $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ a barrer un plano perpendicular a $\mathbf{k}$, al ir adquiriendo su punto extremo (x, y, z) todos los valores permitidos.
Con

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}} \tag{2.39}$$

la ecuación (2.38) puede expresarse de la siguiente forma

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \qquad (2.40)$$

o como

$$k_x x + k_y y + k_z z = a \qquad (2.41)$$

donde

$$a = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = \text{constante} \qquad (2.42)$$

La forma más concisa de la ecuación de un plano perpendicular a **k** es entonces

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{constante} = a \qquad (2.43)$$

El plano es el lugar de todos los puntos cuyos vectores de posición tienen cada uno la misma proyección en la dirección de **k**.

Ahora podemos construir un conjunto de planos sobre los cuales $\psi(\boldsymbol{r})$ varía de manera sinusoidal en el espacio, es decir

$$\psi(\boldsymbol{r}) = A \operatorname{sen} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \qquad (2.44)$$

$$\psi(\boldsymbol{r}) = A \cos (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \qquad (2.45)$$

o

$$\psi(\boldsymbol{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \qquad (2.46)$$

Para todas estas expresiones $\psi(\boldsymbol{r})$ se mantiene constante sobre cada plano definido por $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ = constante. Como estamos analizando las funciones armónicas, deberían repetirse en el espacio después de un desplazamiento de λ en la dirección de **k**. En la figura 2.20 se representa de manera muy sencilla esta clase de expresión. Del infinito número de planos, hemos dibujado tan sólo unos pocos, cada uno con una $\psi(\boldsymbol{r})$ diferente. Los planos deberían también haberse dibujado con una extensión espacial infinita, ya que no se han puesto límites a **r**. La perturbación ocupa claramente todo el espacio.

La naturaleza repetitiva espacial de estas funciones armónicas se puede expresar por

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi\left(\boldsymbol{r} + \frac{\lambda \boldsymbol{k}}{k}\right) \qquad (2.47)$$

donde k es la magnitud de **k** y $\mathbf{k}/k$ es un vector unitario paralelo a él (figura 2.21). En la forma exponencial, esto equivale a

$$Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{k}/k)} = Ae^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}e^{i\lambda k}$$

Para que sea cierto, debemos tener

$$e^{i\lambda k} = 1 = e^{i2\pi}$$

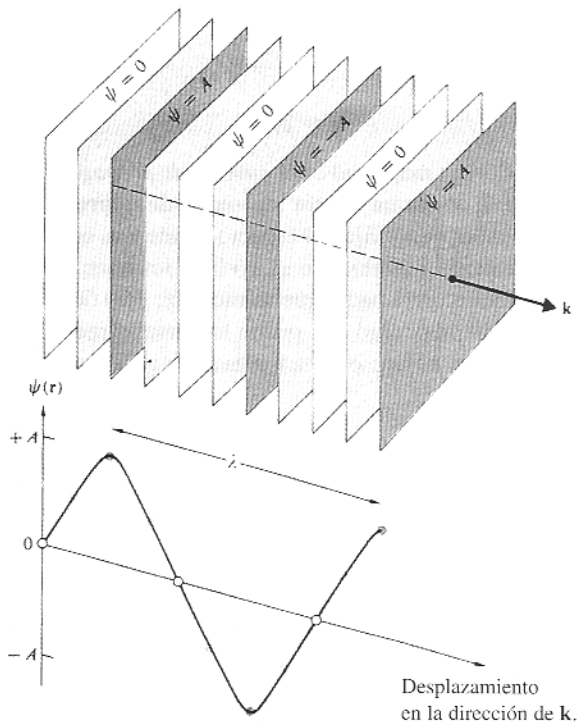


FIGURA 2.20 Frentes de onda para una onda plana armónica.

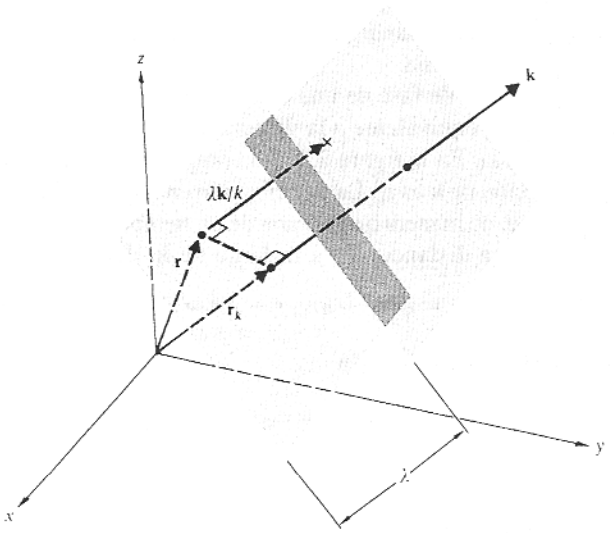


FIGURA 2.21 Ondas planas.

Por consiguiente

$$\lambda k = 2\pi$$

y

$$k = 2\pi/\lambda$$

El vector **k**, cuya magnitud es el *número de propagación k* (ya introducido), se llama **vector de onda de o propagación**.

En cualquier punto fijo del espacio donde **r** es constante, la fase es constante y también lo es $\psi(\mathbf{r})$; en resumen, los planos están inmóviles. Para hacer que se muevan, $\psi(\mathbf{r})$ debe hacerse variar en el tiempo, algo que puede lograrse introduciendo la dependencia del tiempo en una forma análoga a la de una onda unidimensional.

Aquí entonces

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)} \tag{2.48}$$

donde A, ω y k son constantes. Mientras que esta perturbación viaja a lo largo de la dirección **k**, podemos asignarle una fase correspondiente en cada punto en el espacio y en el tiempo. En cualquier instante, ***las superficies que unen todos los puntos de igual fase se conocen como*** **frentes de onda**. Obsérvese que la función de onda tendrá un valor constante sobre el frente de onda solamente si la amplitud A tiene un valor fijo en todos los puntos del frente de onda. Por lo general, A es una función de **r** y puede que no sea constante en todo el espacio o en todo un frente de onda. En este último caso, la onda se dice *inhomogénea*. Nos ocuparemos de esta clase de perturbación solo más adelante cuando analicemos los haces de láser y la reflexión total interna.

La velocidad de fase de una onda plana dada por la ecuación (2.48) es equivalente a la velocidad de propagación del frente de onda. En la figura 2.21, la componente escalar de **r** en la dirección de **k** es r_k. La perturbación en un frente de onda es constante, de manera que al cabo de un tiempo dt, si el frente recorre una distancia d_{rk} a lo largo de **k**, debemos tener

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(r_k + dr_k, t + dt) = \psi(r_k, t) \tag{2.49}$$

En forma exponencial, sería

$$Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)} = Ae^{i(kr_k + k\,dr_k \mp \omega t \mp \omega\, dt)} = Ae^{i(kr_k \mp \omega t)}$$

por consiguiente $\qquad k\,dr_k = \pm\omega\,dt$

La magnitud de la velocidad de la onda, dr_k/dt es

$$\frac{dr_k}{dt} = \pm\frac{\omega}{k} = \pm v \tag{2.50}$$

Podríamos haber anticipado este resultado girando el sistema coordenado de la figura 2.21 de tal forma que **k** fuera paralelo al eje x. Para esa orientación

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(kx\mp\omega t)}$$

ya que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kr_k = kx$. La onda ha sido reducida efectivamente de esa manera a la perturbación unidimensional de la que ya se habló.

Ahora, considérense las dos ondas de la figura 2.22; ambas tienen la misma longitud de onda λ de tal manera que $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$. La onda 1 que se propaga a lo largo del eje z puede escribirse así

$$\psi_1 = A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z - \omega t\right)$$

donde, puesto que $\mathbf{k}_1$ y **r** son paralelos, $\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} = kz = (2\pi/\lambda)z$. De forma análoga, para la onda 2, $\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} = k_z z + k_y y = (k\cos\theta)z + (k \operatorname{sen}\theta)$,

$$\psi_2 = A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta) - \omega t\right]$$

Volveremos a estas expresiones y a lo que ocurre en la zona de superposición cuando analicemos la interferencia con más detalle.

La onda armónica plana a menudo se escribe en coordenadas cartesianas como

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(k_x x + k_y y + k_z z \mp \omega t)} \tag{2.51}$$

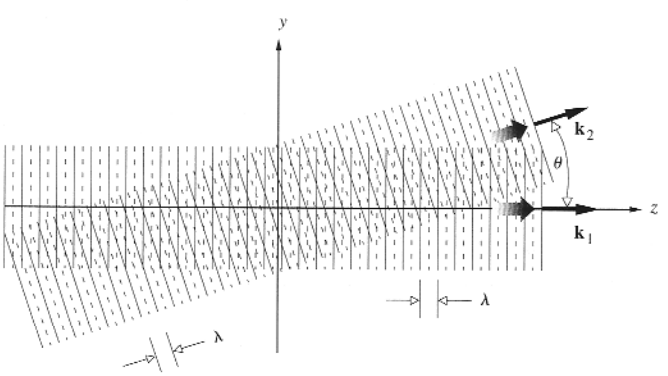


FIGURA 2.22 Dos ondas superpuestas de la misma longitud de onda moviéndose en direcciones diferentes.

o $$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i[k(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mp\omega t]} \tag{2.52}$$

donde α, β, y γ son los cosenos directores de $\mathbf{k}$ (véase problema 2.33). En términos de sus componentes, la magnitud del vector de propagación está dado por

$$|\mathbf{k}| = k = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2} \tag{2.53}$$

y por supuesto

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{2.54}$$

Hemos examinado ondas planas poniendo de relieve particularmente las funciones armónicas. El significado especial de estas ondas es doble: en primer lugar, físicamente, las ondas sinusoidales pueden generarse de manera relativamente simple, usando alguna forma de oscilador armónico; en segundo lugar, ***cualquier onda tridimensional puede expresarse como una combinación de ondas planas,*** cada una con amplitud y dirección de propagación distintas.

Podemos ciertamente imaginar una serie de ondas planas como las de la figura 2.20, donde la perturbación varía de alguna forma que no es armónica (figura 2.23). En la siguiente sección se verá que las ondas planas armónicas son, efectivamente, un caso especial de una solución más general de ondas planas.

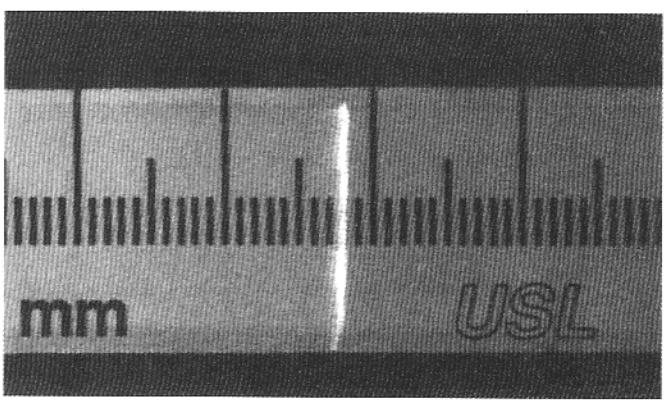


FIGURA 2.23 Imagen de un único pulso láser colimado captado mientras se desplazaba a lo largo de la superficie de una regla. Este impulso ultracorto de luz equivalía a una parte de una onda plana. Se extendía en el tiempo durante 300×10^{-15} s y medía tan sólo una fracción de milímetro de largo. (Foto cedida por J. Valdamanis y N.H. Abramson).

2.8 La ecuación diferencial de onda tridimensional

De todas las ondas tridimensionales, solamente la onda plana (armónica o no) puede moverse en el espacio sin cambiar su perfil. Está claro que la idea de una onda como una perturbación cuyo perfil *no se altera* es algo incompleta. De la misma manera, podemos definir una onda como una solución cualquiera de la ecuación diferencial de onda. Lo que necesitamos ahora es una ecuación de onda tridimensional, lo cual debería ser bastante sencillo de conseguir ya que podemos adivinar su forma generalizando la expresión unidimensional, ecuación (2.11). No hay que olvidar que en coordenadas cartesianas, las variables de posición x, y, y z tienen que aparecer simétricamente [2] en la ecuación tridimensional. La función de onda $\psi(x, y, z, t)$ dada por la ecuación (2.52) es una solución particular de la ecuación diferencial que estamos buscando. En analogía con la deducción de la ecuación (2.11), calculamos las siguientes derivadas parciales de la ecuación (2.52):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\alpha^2 k^2 \psi \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\beta^2 k^2 \psi \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -\gamma^2 k^2 \psi \tag{2.57}$$

y $$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi \tag{2.58}$$

Sumando las tres derivadas espaciales y utilizando el hecho de que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, obtenemos

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k^2\psi \tag{2.59}$$

Combinando esto con la derivada del tiempo, ecuación (2.58) y recordando que $v = \omega/k$, llegamos a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.60}$$

[2] No hay distinción característica para ninguno de los ejes en coordenadas cartesianas. Debemos por lo tanto ser capaces de cambiar los nombres de, digamos, x a z, de y a x y de z a y (manteniendo el sistema derecho) sin alterar la ecuación diferencial de onda.

la *ecuación diferencial de onda tridimensional*. Obsérvese que x, y, y z aparecen simétricamente y que la forma es precisamente la que uno esperaría de la generalización de la ecuación (2.11).

La ecuación (2.60) se escribe, por lo general, de una forma más concisa introduciendo el operador *Laplaciano*

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.61}$$

que pasa a ser simplemente

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{2.62}$$

Ahora que disponemos de esta ecuación muy importante, volvamos brevemente a la onda plana y veamos cómo se adecua al esquema de cosas. Una función de la forma

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{ik(\alpha x + \beta y + \gamma z \mp vt)} \tag{2.63}$$

es equivalente a la ecuación (2.52) y como tal, es una solución de la ecuación (2.62). Se puede también demostrar (problema 2.34) que

$$\psi(x, y, z, t) = f(\alpha x + \beta y + \gamma z - vt) \tag{2.64}$$

y

$$\psi(x, y, z, t) = g(\alpha x + \beta y + \gamma z + vt) \tag{2.65}$$

son ambas soluciones de onda plana de la ecuación diferencial de onda. Las funciones f y g, que son diferenciables dos veces, son arbitrarias y no necesitan ciertamente ser armónicas. Una combinación lineal de estas soluciones es también una solución, pudiendo escribir esto de una forma ligeramente diferente como

$$\psi(\mathbf{r}, t) = C_1 f(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}/k - vt) + C_2 g(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}/k + vt) \tag{2.66}$$

donde C_1 y C_2 son constantes.

Las coordenadas cartesianas son particularmente adecuadas para describir ondas planas. Sin embargo, cuando aparecen varias situaciones físicas, podemos frecuentemente sacar más provecho de las simetrías existentes utilizando otras representaciones coordenadas.

2.9 Ondas esféricas

Arrojemos una piedra a un depósito de agua. Las ondas superficiales que proceden del punto de impacto, se esparcen hacia afuera en ondas circulares bidimensionales. Extendiendo esta imagen a tres dimensiones, imagínese una pequeña esfera que late, rodeada de un fluido. La contracción y expansión de la fuente generan variaciones de presión que se propagan hacia afuera como ondas esféricas.

Considérese ahora una fuente puntual ideal de luz. La radiación que procede de ella fluye radialmente hacia afuera, uniformemente en todas las direcciones. Se dice que la fuente es *isótropa* y los frentes de onda resultantes son de nuevo esferas concéntricas con diámetro creciente cuando se expanden en el espacio que los rodea. La simetría obvia de los frentes de onda sugiere que podría ser más conveniente describirlos matemáticamente en términos de coordenadas esféricas polares (figura 2.24). En esta representación, el operador Laplaciano es

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \tag{2.67}$$

donde r, θ, ϕ se definen por

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

Recuérdese que estamos buscando una descripción de ondas esféricas, ondas que son simétricas esféricamente (es decir, que no dependen de θ ni de ϕ); por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \psi(r)$$

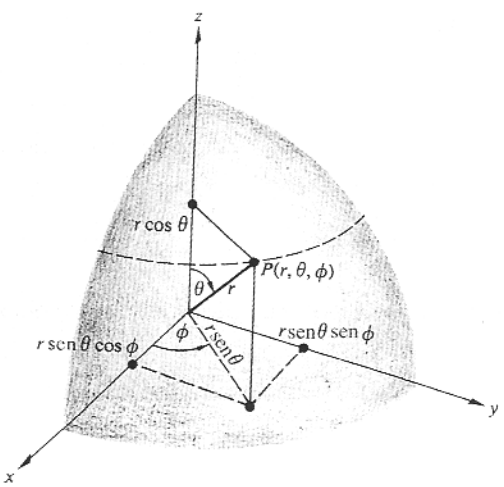


FIGURA 2.24 Geometría de coordenadas esféricas.

Entonces, el Laplaciano de $\psi(r)$ es simplemente

$$\nabla^2\psi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{2.68}$$

Este resultado se puede obtener sin conocer la ecuación (2.67). Comiéncese con la forma cartesiana del Laplaciano, ecuación (2.61), opérese sobre la función de onda $\psi(r)$ simétricamente esférica y conviértase cada término en coordenadas polares. Examinando solamente la dependencia de x, tenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

ya que

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(r)$$

Utilizando

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

tenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}(x) + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$$

y

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

Ahora teniendo $\partial^2\psi/\partial x^2$, formamos $\partial^2\psi/\partial y^2$ y $\partial^2\psi/\partial z^2$ y sumando obtenemos

$$\nabla^2\psi(r) = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

la cual es equivalente a la ecuación (2.68). Este resultado puede expresarse de forma ligeramente diferente:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) \tag{2.69}$$

La ecuación diferencial de onda puede escribirse como

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.70}$$

Multiplicando ambos lados por r, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) \tag{2.71}$$

Obsérvese que esta expresión es ahora precisamente la ecuación diferencial de onda unidimensional, ecuación (2.11), donde la variable espacial es r y la función de onda es el producto $(r\psi)$. La solución de la ecuación (2.71) es entonces simplemente

$$r\psi(r, t) = f(r - vt)$$

o

$$\psi(r, t) = \frac{f(r - vt)}{r} \tag{2.72}$$

Esto representa una onda esférica que progresa radialmente hacia afuera desde su origen, con una velocidad constante v, y que tiene una forma funcional arbitraria f. Otra solución está dada por

$$\psi(r, t) = \frac{g(r + vt)}{r}$$

y en este caso la onda está convergiendo hacia el origen [3]. El hecho de que esta expresión falla en $r = 0$ es de poca importancia práctica.

Un caso espacial de la solución general

$$\psi(r, t) = C_1\frac{f(r - vt)}{r} + C_2\frac{g(r + vt)}{r} \tag{2.73}$$

es la *onda esférica armónica*

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathscr{A}}{r}\right)\cos k(r \mp vt) \tag{2.74}$$

o

$$\psi(r, t) = \left(\frac{\mathscr{A}}{r}\right)e^{ik(r\mp vt)} \tag{2.75}$$

donde la constante $\mathscr{A}$ se denomina *intensidad de la fuente*. Para cualquier valor fijo del tiempo, esto representa una agrupación de esferas concéntricas que llenan todo el espacio. Cada frente de onda, o superficie de fase constante, está dado por

$$kr = \text{constante}$$

Obsérvese que la amplitud de cualquier onda esférica es una función de r, donde el término r^{-1} sirve como factor de atenuación. Contrariamente a la onda plana, una onda esférica disminuye en amplitud, cambiando por lo tanto su perfil, al

[3] Existen otras soluciones más complicadas cuando la onda no es esféricamente simétrica. Véase C. A. Coulson, *Waves*, capítulo 1.

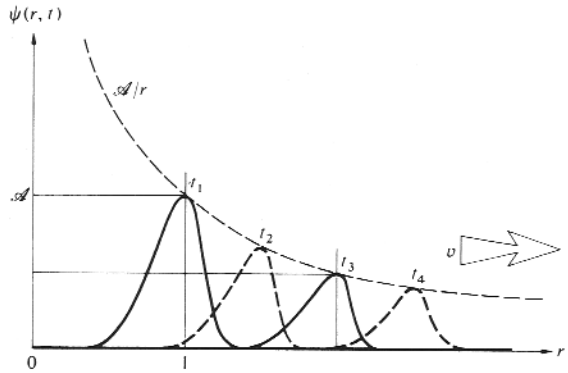


FIGURA 2.25 «Exposición cuádruple» de un pulso esférico.

expandirse y alejarse del origen [4]. La figura 2.25 ilustra este hecho gráficamente, mostrando una «exposición múltiple» de un pulso esférico en cuatro tiempos diferentes. El pulso tiene la misma extensión en el espacio en cualquier punto a lo largo de cualquier radio r, es decir, el ancho del pulso a lo largo del eje r es una constante. La figura 2.26 es un intento de relacionar la representación de $\psi(r, t)$, de la figura anterior con su forma real de onda esférica. Representa la mitad de un pulso esférico en dos tiempos diferentes, cuando la onda se expande hacia afuera. Recuérdese que estos resultados se obtienen independientemente de la dirección de r, debido a la simetría esférica. Podríamos también haber dibujado una onda simétrica, en lugar de un pulso, en las figuras 2.25 y 2.26. En este caso, la perturbación sinusoidal habría estado limitada por las curvas

$$\psi = \mathscr{A}/r \quad \text{y} \quad \psi = -\mathscr{A}/r$$

[4] El factor de atenuación es consecuencia directa de la conservación de energía. El capítulo 3 contiene una discusión de cómo se aplican estas ideas concretamente a la radiación electromagnética.

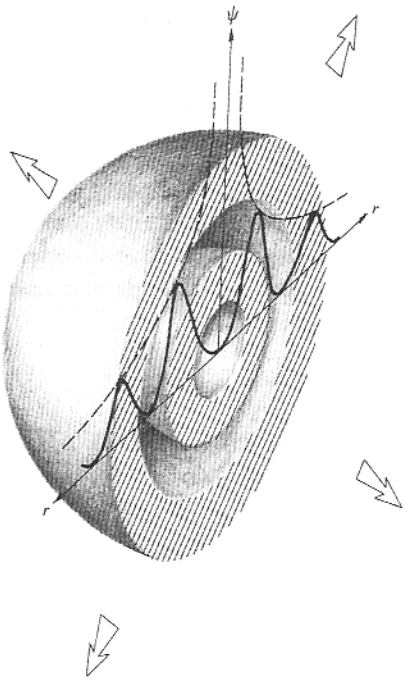


FIGURA 2.26 Frentes de onda esféricos.

La onda esférica saliente que procede de una fuente puntual y la entrante que converge hacia un punto, son idealizaciones. En realidad, la luz sólo se aproxima a ondas esféricas como también sólo se aproxima a ondas planas.

Cuando un frente de onda esférico se propaga hacia afuera, su radio aumenta. A una distancia suficiente de la fuente, una pequeña área del frente de onda se parecerá mucho a una porción de una onda plana (figura 2.27).

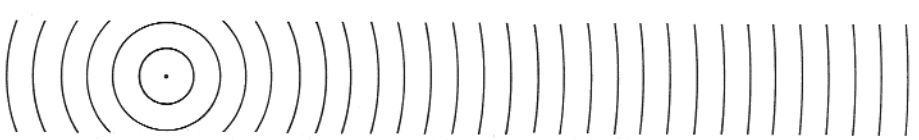


FIGURA 2.27 Aplanamiento de ondas esféricas con la distancia.

2.10 Ondas cilíndricas

Ahora examinaremos brevemente otro frente de onda idealizado, el cilindro circular infinito. Desafortunadamente, dada la complejidad del tratamiento matemático preciso, aquí nos limitaremos a trazar el procedimiento. El Laplaciano de ψ en coordenadas cilíndricas (figura 2.28) es

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{2.76}$$

donde

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{and} \quad z = z$$

El caso sencillo de simetría cilíndrica requiere que

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, z) = \psi(r)$$

La independencia en θ significa que un plano perpendicular al eje z intersecará el frente de onda en un círculo, el cual puede variar en r, para diferentes valores de z. Aparte, la independencia en z restringe además el frente de onda a un cilindro circular recto centrado en el eje z y que tiene una longitud infinita. La ecuación diferencial de onda es entonces

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{2.77}$$

Después de alguna operación en la cual la dependencia del tiempo se separa, la ecuación (2.77) se convierte en algo que se llama la ecuación de Bessel. Las soluciones de la ecuación de Bessel para grandes valores de r se aproximan gradualmente a formas trigonométricas simples. Cuando r es suficientemente grande, podemos escribir

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathscr{A}}{\sqrt{r}}\, e^{ik(r \mp vt)}$$

$$\psi(r, t) \approx \frac{\mathscr{A}}{\sqrt{r}}\cos k(r \mp vt) \tag{2.78}$$

Esto representa un conjunto de cilindros circulares coaxiales que llenan todo el espacio y que viajan hacia una fuente lineal infinita o se alejan de ella. Ahora, no se puede encontrar ninguna solución en términos de funciones arbitrarias como las había tanto para las ondas esféricas [ecuación (2.73)] como para las ondas planas [ecuación (2.66)].

Una onda plana que choca en la parte posterior de una pantalla opaca plana y que contiene una rendija delgada y larga, producirá una emisión, por esa rendija, de una perturbación parecida a una onda cilíndrica (véase figura 2.29). Esta técnica se ha utilizado ampliamente para generar ondas luminosas cilíndricas (pág. 386).

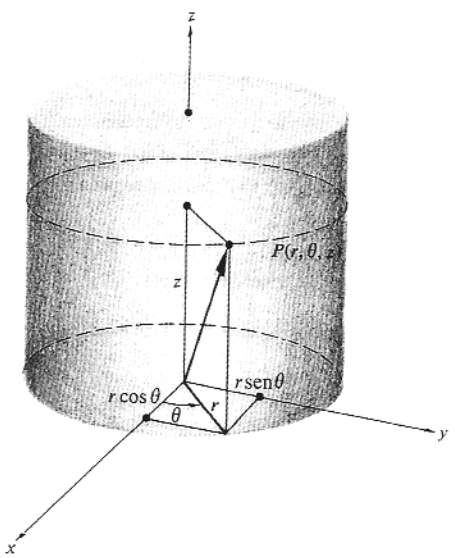


FIGURA 2.28 Geometría de coordenadas cilíndricas.

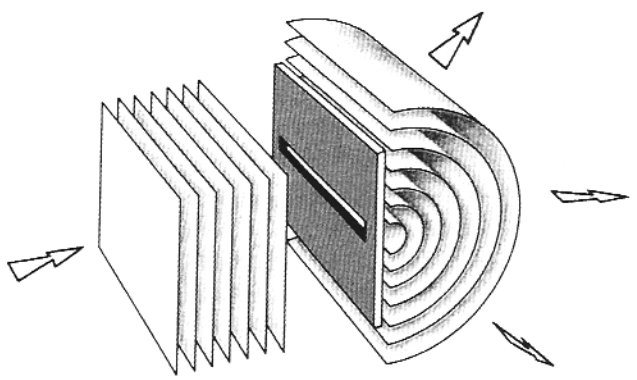


FIGURA 2.29 Ondas cilíndricas saliendo de una rendija estrecha y larga.

PROBLEMAS

2.1 ¿Cuántas ondas de luz «amarillas» ($\lambda = 580$ mm) caben en una distancia en el espacio igual al espesor de un trozo de papel (0,003 pulgadas)? ¿Hasta dónde se extenderá el mismo número de microondas ($\nu = 10^{10}$ Hz, es decir, 10 GHz, y $v = 3 \times 10^8$ m/s)?

2.2* La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente de 3×10^8 m/s. Calcule la longitud de onda de luz roja con una frecuencia de 5×10^{14} Hz. Compárela con la longitud de onda de una onda electromagnética de 60 Hz.

2.3* Es posible generar ondas ultrasónicas en cristales con longitudes de onda similares a la luz (5×10^{-5} cm) pero con frecuencias más bajas (6×10^8 Hz). Calcule la velocidad correspondiente de dicha onda.

2.4* Un joven en un barco sobre un lago está mirando las ondas que parecen una sucesión infinita de crestas idénticas, produciéndose con un intervalo de medio segundo cada una. Si cada perturbación tarda 1,5 s en cubrir la extensión del barco de 4,5 m, ¿cuál es la frecuencia, el período y la longitud de onda de las olas?

2.5* Con un martillo vibrante se golpea el extremo de una barra de metal larga de manera que una onda de compresión periódica con una longitud de onda de 4,3 m recorra todo lo largo de la barra con una velocidad de 3,5 km/s. ¿Cuál era la frecuencia de la vibración?

2.6 Durante la boda de dos buceadores, se sumerge un violín en la piscina. Dado que la velocidad de las ondas de compresión en agua pura es de 1.498 m/s, ¿cuál es la longitud de onda de una nota la, de 440 Hz que se toca en dicho instrumento?

2.7* Un pulso de onda tarda 2,0 s en recorrer 10 m a lo largo de una cuerda se genera una perturbación armónica con una longitud de onda de 0,50 m en la cuerda. ¿Cuál es su frecuencia?

2.8* Demuestre que para una onda periódica $\omega = (2\pi/\lambda)v$.

2.9* Defina una tabla con columnas para valores de θ que van de $-\pi/2$ a 2π con intervalos de $\pi/4$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de sen θ, colocando debajo los valores de cos θ y luego los valores de sen $(\theta - \pi/4)$, y haga lo mismo con las funciones sen $(\theta - \pi/2)$, sen $(\theta - 3\pi/4)$ y sen $(\theta + \pi/2)$. Trace cada función, tomando nota del efecto del cambio de fase. ¿El sen θ precede al sen $(\theta - \pi/2)$ o va detrás?; dicho de otra forma, ¿una de las funciones alcanza una magnitud particular con un valor más pequeño de θ que la otra y, por lo tanto, la precederá (como cos θ precede al sen θ)?

2.10* Defina una tabla con columnas para valores de kx que van desde $x = -\lambda/2$ hasta $x = +\lambda$ con intervalos de x de $\lambda/4$. Naturalmente, $k = 2\pi/\lambda$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de cos $(kx - \pi/4)$, y debajo los valores de cos $(kx + 3\pi/4)$. Luego, trace las funciones 15 cos $(kx - \pi/4)$ y 25 cos $(kx + 3\pi/4)$.

2.11* Defina una tabla con columnas para valores de ωt que van desde $t = -\tau/2$ hasta $t = +\tau$ con intervalos de t de $\tau/4$. Naturalmente, $\omega = 2\pi/\tau$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de sen $(\omega t + \pi/4)$ y sen $(\pi/4 - \omega t)$ y luego trace estas dos funciones.

2.12* El perfil de una onda armónica, que viaja con velocidad de 1,2 m/s en una cuerda, está dado por

$$y = (0{,}02 \text{ m}) \text{ sen } (157 \text{ m}^{-1})\, x$$

Calcule su amplitud, su longitud de onda, su frecuencia y su período.

2.13 Usando las funciones de onda

$$\psi_1 = 4 \text{ sen } 2\pi(0{,}2x - 3t)$$

y

$$\psi_2 = \frac{\text{sen } (7x + 3{,}5t)}{2{,}5}$$

determine en cada caso los valores de (a) frecuencia, (b) longitud de onda, (c) período, (d) amplitud, (e) velocidad de fase y (f) dirección del movimiento. El tiempo se expresa en segundos y x en metros.

2.14* Demuestre que

$$\psi(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt) \qquad [2.13]$$

es una solución de la ecuación diferencial de onda.

2.15 Demuestre que si el desplazamiento de la cuerda de la figura 2.7 está dado por

$$y(x, t) = A \text{ sen } [kx - \omega t + \varepsilon]$$

entonces la mano que genera la onda se debe mover verticalmente con movimiento armónico simple.

2.16 Escriba la expresión para una onda armónica de amplitud 10^3 V/m, período $2{,}2 \times 10^{-15}$ s, y velocidad 3×10^8 m/s. La onda se propaga en la dirección negativa de x y tiene un valor de 10^3 V/m en $t = 0$ y $x = 0$.

* Al final del libro se encuentran las soluciones de todos los problemas —exceptuando aquéllos con asterisco.

2.17 Considere el pulso descrito en términos de sus desplazamientos en $t = 0$ por

$$y(x, t)|_{t=0} = \frac{C}{2 + x^2}$$

donde C es una constante. Dibuje el perfil de la onda. Escriba una expresión para la onda que tiene una velocidad v en la dirección negativa de x, como función del tiempo t. Si $v = 1$ m/s, dibuje el perfil en $t = 2$ s.

2.18* Determine la magnitud de la función de onda $\psi(z, t) = A \cos [k(z + vt) + \pi]$ en el punto $z = 0$, cuando $t = \tau/2$ y cuando $t = 3\tau/4$.

2.19 ¿La siguiente función en la que A es una constante,

$$\psi(y, t) = (y - vt)A$$

representa una onda? Explique su razonamiento.

2.20* Utilice la ecuación (2.33) para calcular la velocidad de la onda cuya representación en unidades SI es

$$\psi(y, t) = A \cos \pi(3 \times 10^6 y + 9 \times 10^{14} t)$$

2.21 Empezando por el siguiente teorema: Si $z = f(x, y)$ y $x = g(t)$, y $= h(t)$, entonces

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Derive la ecuación (2.34).

2.22 Utilizando los resultados del problema anterior, demuestre que para una onda armónica con una fase $\varphi(x, t) = k(x - vt)$ podemos calcular la velocidad estableciendo $d\varphi/dt = 0$. Aplique la técnica al problema 2.20 a fin de calcular la velocidad de dicha onda.

2.23* Una onda gaussiana tiene la forma $\psi(x, t) = Ae^{-a(bx+ct)^2}$. Utilice el que $\psi(x, t) = f(x \mp vt)$ para calcular su velocidad, comprobando luego su respuesta con la ecuación (2.34).

2.24 Encuentre una expresión para el *perfil* de una onda armónica que viaja en la dirección de z cuya magnitud en $z = -\lambda/12$ es 0,866, en $z = +\lambda/6$ es 1/2 y en $z = \lambda/4$ es 0.

2.25 ¿Cuáles de las siguientes expresiones corresponden a ondas viajeras? ¿Cuál es la velocidad de cada una? Las cantidades a, b, y c son constantes positivas.

(a) $\psi(z, t) = (az - bt)^2$

(b) $\psi(x, t) = (ax + bt + c)^2$

(c) $\psi(x, t) = 1/(ax^2 + b)$

2.26* Establezca cuáles de las expresiones siguientes describen ondas viajeras:

(a) $\psi(y, t) = e^{-(a^2y^2+b^2t^2-2abty)}$

(b) $\psi(z, t) = A \text{ sen } (az^2 - bt^2)$

(c) $\psi(x, t) = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{a} + \frac{t}{b}\right)^2$

(d) $\psi(x, t) = A \cos^2 2\pi(t - x)$

Donde sea necesario, dibuje el perfil, calculando la velocidad y la dirección del movimiento.

2.27 Dada la onda viajera $\psi(x, t) = 5{,}0 \exp(-ax^2 - bt^2 - 2\sqrt{ab}\,xt)$, calcule su dirección de propagación. Calcule algunos valores de ψ y haga un bosquejo de la onda en $t = 0$, tomando $a = 25$ m^{-2} y $b = 9.0$ s^{-2}. ¿Cuál es la velocidad de la onda?

2.28* Imagine una onda sonora con una frecuencia de 1,10 kHz y que se propaga con una velocidad de 330 m/s. Calcule la diferencia de fase en radianes entre dos puntos cualquiera en la onda, separados por 10,0 cm.

2.29 Considere una onda luminosa que tiene una velocidad de fase de 3×10^8 m/s y una frecuencia de 6×10^{14} Hz. ¿Cuál es la distancia más corta a lo largo de la onda entre dos puntos cualesquiera que tienen una diferencia de fase de 30°? ¿Qué cambio de fase ocurre en un punto dado en 10^{-6} s, y cuántas ondas han pasado por ahí en ese tiempo?

2.30 Escriba una expresión para la onda que se muestra en la figura P.2.30. Calcule su longitud de onda, su velocidad, su frecuencia y su período.

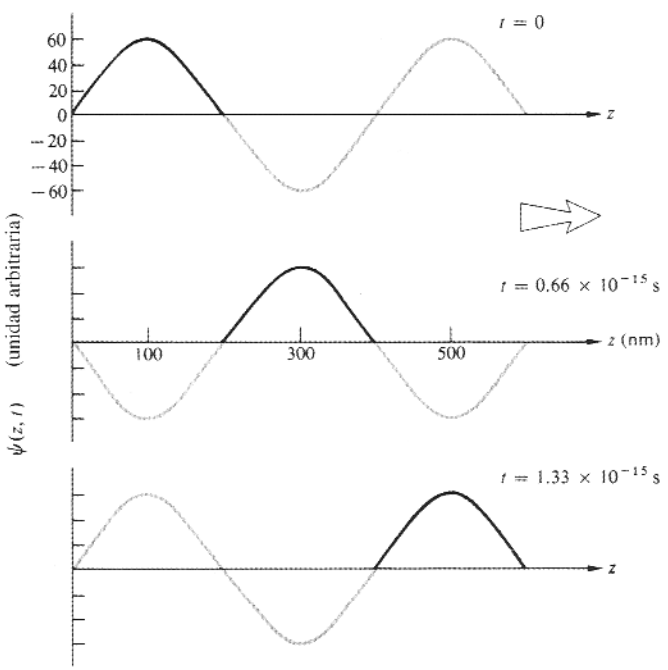


FIGURA P.2.30 Onda armónica.

2.31* Trabajando directamente con exponenciales, demuestre que la magnitud de $\psi = Ae^{i\omega t}$ es A. A continuación, vuelva a calcular el mismo resultado utilizando la fórmula de Euler. Demuestre que $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$.

2.32* Demuestre que la parte imaginaria de un número complejo z está dada por $(\tilde{z} - \tilde{z}^*)/2i$.

2.33 Empezando por la ecuación (2.51), compruebe que

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i[k(\alpha x + \beta y + \gamma z) \mp \omega t]}$$

y que $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Trace un pequeño boceto para demostrar todas las cantidades oportunas.

2.34* Demuestre que las ecuaciones (2.64) y (2.65) que son ondas planas de forma arbitraria, cumplen la ecuación diferencial de onda tridimensional.

2.35 La hipótesis de De Broglie afirma que cada partícula tiene asociada a ella una longitud de onda dada por la constante de Planck ($h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J. s), dividida por el momento de la partícula. Compare la longitud de onda de una piedra de 6,0 kg. moviéndose a una velocidad de 1,0 m/s con la de la luz.

2.36 Escriba una expresión en coordenadas cartesianas para una onda plana armónica de amplitud A y frecuencia ω, que se propaga en la dirección del vector **k**, que, a su vez, se encuentra en una línea que va desde el origen hasta el punto (4, 2, 1). *Ayuda*: primero calcule **k** y luego haga el producto escalar con **r**.

2.37* Escriba una expresión en coordenadas cartesianas para una onda plana armónica de amplitud A y frecuencia ω que se propaga en la dirección positiva de x.

2.38 Demuestre que $\psi(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}, t)$ puede representar una onda plana, donde **k** es normal al frente de onda. *Ayuda:* sean $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ vectores de posición, llevados a dos puntos cualquiera en el plano y demuestre que $\psi(\mathbf{r}_1, t) = \psi(\mathbf{r}_2, t)$.

2.39* Defina una tabla con columnas con valores de θ que van desde $-\pi/2$ hasta 2π con intervalos de $\pi/4$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de sen θ y debajo los valores de 2 sen θ. Luego súmelos, columna por columna, para calcular los valores correspondientes de la función sen θ + 2 sen θ. Trace cada una de estas tres funciones, tomando nota de sus amplitudes y fases relativas.

2.40* Defina una tabla con columnas para valores de θ que van desde $-\pi/2$ hasta 2π con intervalos de $\pi/4$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de sen θ y debajo los valores de sen $(\theta - \pi/2)$. Sucesivamente, súmelos, columna por columna, para calcular los valores correspondientes de la función sen θ + sen $(\theta - \pi/2)$. Trace cada una de estas tres funciones, tomando nota de sus amplitudes y fases relativas.

2.41* Teniendo en cuenta los últimos dos problemas, haga un boceto de las tres funciones (a) sen θ, (b) sen $(\theta - 3\pi/4)$ y (c) sen θ + sen $(\theta - 3\pi/4)$. Compare la amplitud de la función combinada (c) de este caso con la del problema anterior.

2.42* Defina una tabla con columnas para valores de kx que van desde $x = -\lambda/2$ hasta $x = +\lambda$ con intervalos de x de $\lambda/4$. En cada columna, coloque el valor correspondiente de cos kx y debajo los valores de cos $(kx + \pi)$. Luego, trace las tres funciones cos kx, cos $(kx + \pi)$ y cos kx + cos$(kx + \pi)$.

3 Teoría electromagnética, fotones y luz

El trabajo de J. Clerk Maxwell y los desarrollos posteriores desde finales del siglo XIX pusieron de manifiesto que la luz tiene, con toda seguridad, naturaleza electromagnética. La electrodinámica clásica, como veremos, conduce invariablemente a la idea de una transferencia continua de energía por medio de ondas electromagnéticas. En cambio, el punto de vista más moderno de la electrodinámica cuántica (pág. 80) describe las interacciones electromagnéticas y el transporte de energía en términos de «partículas» elementales sin masa, denominadas *fotones*. La naturaleza cuántica de la energía radiante no es siempre evidente, ni tampoco es siempre de interés práctico en óptica. Hay una gama de situaciones en las que el equipo de detección es tal que es imposible, y eso es lo deseable, distinguir cuantos individuales.

Si la longitud de onda de la luz es pequeña en comparación con el tamaño del aparato, podrían utilizarse, como primera aproximación, las técnicas de la *óptica geométrica*. Un tratamiento algo más preciso, que es aplicable también cuando las dimensiones del aparato son pequeñas, es el de la *óptica física* en la que la propiedad dominante de la luz es su naturaleza ondulatoria. Incluso es posible desarrollar la mayor parte del tratamiento sin especificar jamás el tipo de onda que se está estudiando. Ciertamente, por lo que al estudio clásico de la óptica física se refiere, será más que suficiente tratar la luz como una onda electromagnética.

Podemos imaginar la luz como la forma de materia más tenue. En efecto, uno de los principios básicos de la mecánica cuántica es que tanto la luz como las partículas materiales muestran unas propiedades similares de onda-partícula. Como Erwin C. Schrödinger (1887-1961), uno de los fundadores de la teoría cuántica, afirmó:

> «En el nuevo marco de ideas, la distinción [entre partículas y ondas] ha desaparecido, porque se descubrió que todas las partículas tienen también propiedades ondulatorias, y viceversa. No se debe desechar ninguno de los dos conceptos, sino que ambos deben amalgamarse. El aspecto que sobresalga no dependerá del objeto físico sino del dispositivo experimental usado para examinarlo». [1]

El tratamiento mecánico-cuántico asocia una ecuación de onda con una partícula, sea ésta fotón, electrón, protón, etc. En el caso de partículas materiales, los aspectos ondulatorios se introducen por medio de la ecuación de campo, conocida como ecuación de Schrödinger. Para la luz, tenemos una representación de la naturaleza ondulatoria en la forma de las ecuaciones del campo electromagnético clásico de Maxwell. Con éstas como punto de partida se puede construir una teoría mecanocuántica de fotones y su interacción con las cargas. La doble naturaleza de la luz se pone de manifiesto por el hecho de que se propaga en el espacio como lo hace una onda, demostrando, sin embargo, un comportamiento de partícula durante los procesos de emisión y absorción. La energía radiante electromagnética es creada y destruida en cuantos o fotones y no continuamente como una onda clásica. No obstante, su movimiento a través de una lente, un agujero o un conjunto de rendijas, está supeditado a sus características ondulatorias. Si no estamos acostumbrados a esta clase de comportamiento en el mundo macroscópico, es porque la longitud de onda de un objeto varía inversamente con su momento (pág. 56) y hasta un grano de arena (que apenas se mueva) tiene una longitud de onda tan pequeña que es imperceptible en cualquier experimento que se pueda concebir.

El fotón tiene masa cero y, por consiguiente, puede imaginarse que en un haz de luz hay un número sumamente grande de fotones de baja energía. Dentro de ese modelo, haces muy densos de fotones actúan en promedio para producir campos clásicos bien definidos (pág. 52). Podemos describir una analogía aproximada con el flujo de viajeros en una estación de trenes, durante

[1] Erwin C. Schrödinger, *Science Theory and Man*.

la hora punta. Presumiblemente, cada uno se comporta individualmente como un cuanto de humanidad pero todos tienen las mismas intenciones y siguen trayectorias muy semejantes. Para un observador miope y distante, hay un flujo continuo y aparentemente uniforme. El comportamiento del flujo *en masa* es previsible día tras día y así el movimiento preciso de cada viajero no es importante, al menos para el observador. La energía transportada por un gran número de fotones es, *en promedio,* equivalente a la energía transferida por una onda electromagnética clásica. Por estas razones la representación de campo de los fenómenos electromagnéticos ha sido, y continuará siendo, muy útil.

Entonces, de modo muy pragmático, podemos considerar que la luz es una onda electromagnética clásica, teniendo en cuenta el hecho de que hay situaciones para las cuales esta descripción es absolutamente inadecuada.

3.1 Leyes básicas de la teoría electromagnética

Nuestro intento en esta sección es el de revisar y desarrollar algunas de las ideas necesarias para apreciar el concepto de ondas electromagnéticas.

Sabemos por experimentos que las cargas, aunque estén separadas en el vacío, sufren una interacción mutua. Recordemos la conocida demostración electrostática en la cual una bola de médula de alguna manera detecta la presencia de una varilla cargada sin realmente tocarla. Como posible explicación, podríamos especular que cada carga emite (y absorbe) un flujo de partículas indetectables (*fotones virtuales*). El intercambio de estas partículas entre las cargas puede considerarse como el modo de interacción. Alternativamente, podemos tomar el punto de vista clásico e imaginar que cada carga está rodeada de algo llamado campo eléctrico. Entonces necesitamos suponer solamente que cada carga interacciona directamente con el campo eléctrico en el que está sumergida. Por consiguiente, si una carga puntual q experimenta una fuerza $\mathbf{F}_E$, el *campo eléctrico* $\mathbf{E}$ en la posición de la carga está definido por $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$. Además, observamos que una carga móvil puede experimentar otra fuerza $\mathbf{F}_M$ la cual es proporcional a su velocidad $\mathbf{v}$. Entonces, tenemos que definir aún otro campo, es decir, la *inducción magnética* o sencillamente el *campo magnético* $\mathbf{B}$, tal que $\mathbf{F}_M = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Si ambas fuerzas $\mathbf{F}_E$ y $\mathbf{F}_M$ se dan simultáneamente, la carga se mueve a través de una región ocupada tanto por el campo eléctrico como por el magnético, donde $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Como veremos, los campos eléctricos son generados tanto por cargas eléctricas como por *campos magnéticos variables en el tiempo.* De manera análoga, *los campos magnéticos* son generados por corrientes eléctricas y por *campos eléctricos variables en el tiempo* Esta interdependencia de $\mathbf{E}$ y de $\mathbf{B}$ es un punto clave de la descripción de la luz.

3.1.1 La ley de inducción de Faraday

Michael Faraday contribuyó considerablemente a la teoría electromagnética. Una de sus aportaciones más significativas fue descubrir que un flujo magnético variable en el tiempo, pasando a través de un circuito conductor cerrado, da como resultado la generación de una corriente alrededor de ese circuito. El flujo del campo magnético a través de un área abierta A, limitada por el circuito conductor (figura 3.1) está dada por

$$\Phi_M = \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.1}$$

La *fuerza electromotriz* inducida o *fem* producida alrededor del circuito es entonces

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_M}{dt} \tag{3.2}$$

Sin embargo, no debemos comprometernos demasiado con la imagen de alambres, corriente y fem. Nuestro interés presente son los campos eléctricos y magnéticos mismos. En

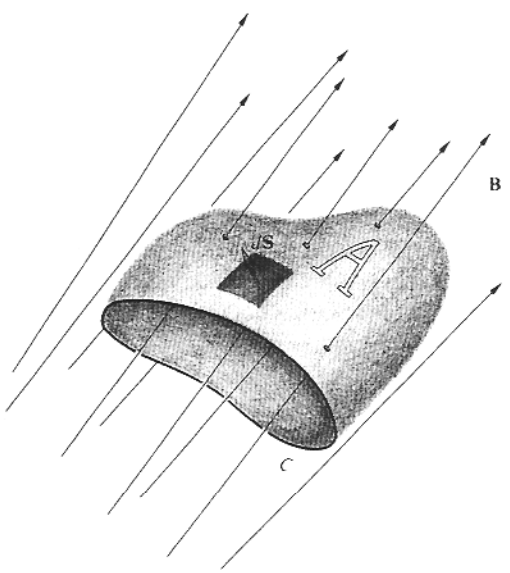


FIGURA 3.1 El campo B a través de un área abierta A.

efecto, la fem existe solamente como resultado de la presencia de un campo eléctrico dado por

$$\text{fem} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.3}$$

tomada alrededor de la curva cerrada C, que corresponde al circuito. Igualando las ecuaciones (3.2) y (3.3) y usando la ecuación (3.1) obtenemos

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.4}$$

Comenzamos este estudio examinando un circuito conductor y hemos llegado a la ecuación (3.4); esta expresión, excepto por la trayectoria C, no contiene ninguna referencia al circuito físico. En efecto, la trayectoria puede escogerse arbitrariamente y no necesita estar dentro o cerca de ningún conductor. El campo eléctrico en la ecuación (3.4) no se forma por la presencia de cargas eléctricas sino por el campo magnético variable con el tiempo. Puesto que faltan cargas que puedan servir como fuentes o sumideros, las líneas de campo se cierran en sí mismas, formando unos circuitos (figura 3.2). Para el caso en el cual la trayectoria está fija en el espacio y no cambia de forma, la *ley de inducción* (ecuación 3.4) se puede reescribir como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.5}$$

Esta es, en sí misma, una expresión bastante interesante ya que indica que ***un campo magnético variable en el tiempo estará asociado con un campo eléctrico***.

Otra manera, menos matemática, que permite comprender lo anterior, es la siguiente: una carga que cambia de sitio en un campo fijo **B**, experimentará, por lo general, una fuerza. Visto que el movimiento es relativo, también una carga estacionaria en un campo móvil (cambiante) **B** experimentará una fuerza. Sin embargo, cada vez que una carga experimenta una fuerza, tiene que estar presente un campo **E**. Por consiguiente, $\partial \mathbf{B}/\partial t$ tiene que acompañarse de un campo **E.**

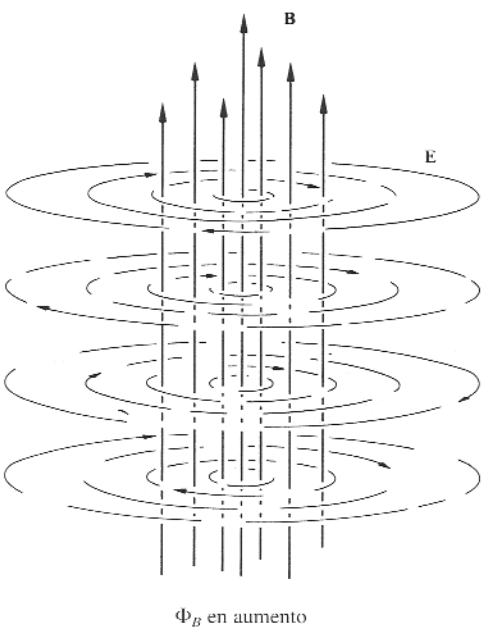


FIGURA 3.2 Un campo **B** variable en el tiempo. Al rodear los puntos donde Φ_M cambia, el campo **E** forma circuitos cerrados.

3.1.2 La ley de Gauss-Eléctrica

Otra de las leyes fundamentales del electromagnetismo recibe su nombre del matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855). En ella relaciona el flujo de la intensidad de campo eléctrico a través de una superficie cerrada A

$$\Phi_E = \oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \tag{3.6}$$

con la carga total encerrada. La integral doble lleva un círculo como recordatorio de que la superficie está cerrada**.** El vector $d\mathbf{S}$ está en la dirección de una *normal hacia afuera,* como se muestra en la figura 3.3. Si el volumen encerrado por A es V, y si dentro de ella hay una distribución continua de carga de densidad ρ, la ley de Gauss es entonces

$$\oiint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho \, dV \tag{3.7}$$

La integral a la izquierda es la diferencia entre la cantidad de flujo que entra y que sale de cualquier superficie cerrada A. Si hay una diferencia, será debida a la presencia de fuentes o sumideros del campo eléctrico dentro de A. Claramente entonces, la integral debe ser proporcional a la carga total encerrada, ya que las cargas son las fuentes (+) y los sumideros (−) del campo eléctrico.

La constante ϵ se conoce como **permitividad eléctrica** del medio. Para el caso especial del vacío, la *permitividad del espacio libre* está dada por $\epsilon_0 = 8.854\,2 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$. Lógicamente, una de las funciones de ϵ en la ecuación (3.7) es compensar las unidades, sin embargo el concepto es fundamental para la descripción del condensador de placas paralelas

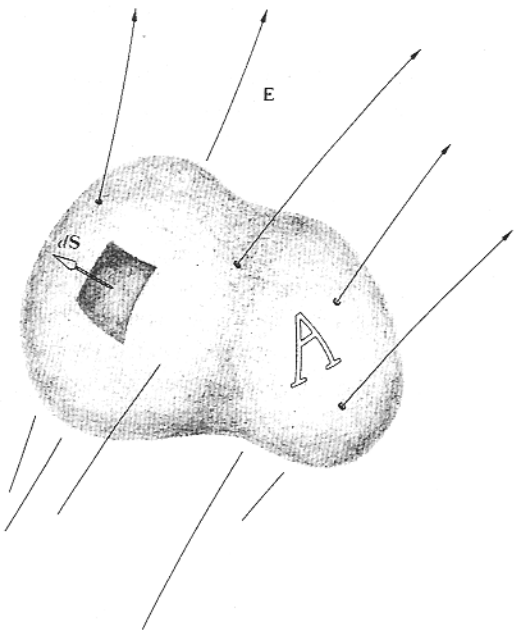


FIGURA 3.3 El campo **E** a través de un área cerrada *A*.

(véase sección 3.1.4). Allí es la constante de proporcionalidad, que depende del medio, entre la capacitancia del dispositivo y sus características geométricas. Es cierto que a menudo ϵ se mide con un procedimiento en el que el material que se está analizando, se coloca dentro de un condensador. Conceptualmente, la permitividad expresa el comportamiento eléctrico del medio: en cierto sentido, es la medición del grado de permeabilidad del material al campo eléctrico en el que se encuentra sumergido.

En los primeros tiempos de desarrollo del tema, científicos de varios campos trabajaban en sistemas de unidades diferentes, situación ésta que llevaba a ciertas dificultades lógicas. Para cada sistema diferente se necesitaban unas tablas para los valores numéricos de ϵ, lo cual, en el mejor de los casos, era una pérdida de tiempo. Cabe recordar que el mismo problema relativo a las densidades se evitó hábilmente utilizando la gravedad específica (es decir, coeficientes de densidad). Por lo tanto, era provechoso exponer en forma de tablas valores no de ϵ sino de una nueva cantidad afín que es independiente del sistema de unidades que se está utilizando. Por consiguiente, definimos K_E como ϵ/ϵ_0. Esta es la **constante dieléctrica** (o *permitividad relativa),* convenientemente sin unidad. La permitividad de un material puede expresarse en términos de ϵ_0 como

$$\epsilon = K_E \epsilon_0 \tag{3.8}$$

Nuestro interés en K_E anticipa el hecho de que la permitividad está relacionada con la velocidad de la luz en materiales dieléctricos, como el vidrio, el aire y el cuarzo.

3.1.3 La ley de Gauss-Magnética

No se conoce un equivalente magnético de la carga eléctrica, es decir, nunca se han encontrado polos magnéticos aislados, aunque se hayan llevado a cabo investigaciones extensas, incluso en muestras del suelo lunar. A diferencia del campo eléctrico, el campo magnético **B** no diverge o converge hacia alguna clase de carga magnética (una fuente o sumidero monopolar). Los campos magnéticos pueden describirse en función de distribuciones de corrientes. Realmente, podemos imaginar un imán elemental como si fuera una pequeña corriente circular donde las líneas de **B** son continuas y cerradas. Cualquier superficie cerrada en una región de campo magnético podría tener entonces un número igual de líneas de **B** entrando y saliendo de ésta (figura 3.4). Esta situación se produce por la ausencia de monopolos en el volumen cerrado. El flujo del campo magnético Φ_M a través de dicha superficie es cero: tenemos entonces el equivalente magnético de la ley de Gauss:

$$\Phi_M = \oiint_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{3.9}$$

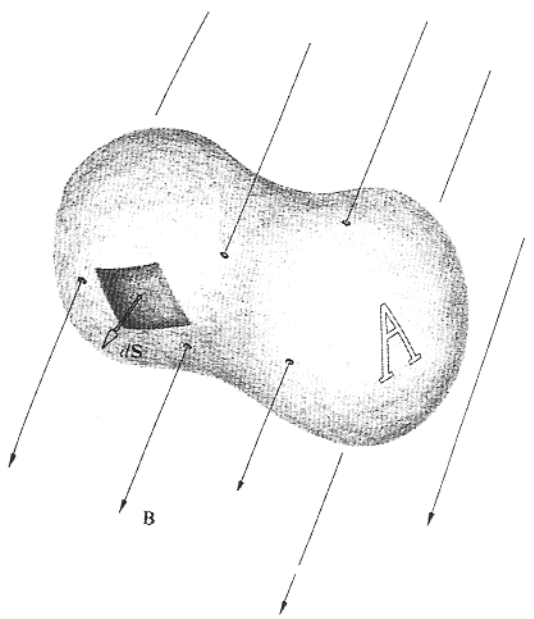


FIGURA 3.4 El campo **B** a través de un área cerrada *A*.

3.1.4 La ley circuital de Ampère

Otra ecuación que será de gran interés para nosotros se debe a André Marie Ampère (1775-1836). Denominada *ley circuital,* relaciona la integral de línea de la componente de **B** tangente a una curva cerrada C, con la corriente total i que atraviesa un área limitada por C:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \mu i \tag{3.10}$$

La superficie abierta A está limitada por C, y J es la corriente por unidad de área (figura 3.5). La cantidad μ se llama ***permeabilidad*** del medio particular. Para un vacío $\mu = \mu_0$ *(permeabilidad del espacio libre),* que se define como $4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot s^2/C^2}$. Como en la ecuación (3.8)

$$\mu = K_M \mu_0 \tag{3.11}$$

donde K_M es la *permeabilidad relativa* sin dimensiones.

La ecuación (3.10), aunque a menudo es adecuada, no corresponde totalmente a la verdad. La ley de Ampère no es exigente acerca del área que se utiliza, con tal que esté limitada por la curva C, lo cual crea un problema lógico a la hora de cargar un condensador, como se muestra en la figura 3.6*a*. Si se recurre al área plana A_1, fluirá una corriente neta i a través de ella y a lo largo de la curva C se hallará un campo **B** —el lado derecho de la ecuación (3.10) es no nulo, por lo tanto el lado izquierdo es no nulo. Pero, si se utiliza el área A_2 para ser rodeada por C, no pasará ninguna corriente neta y el campo tendrá que ser cero, aunque no se haya producido ningún cambio físico. Lógicamente, ¡hay algo que está mal!

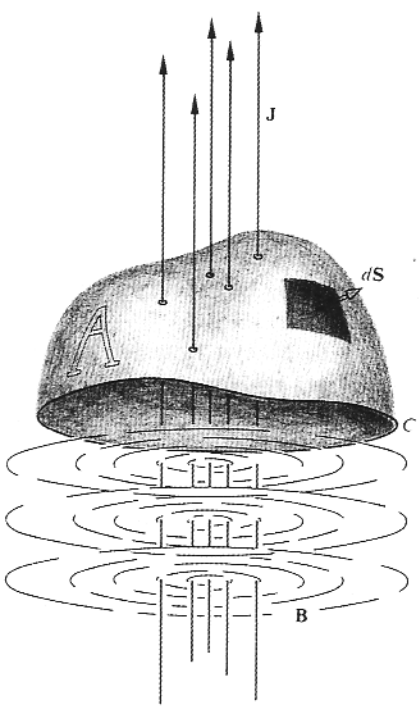


FIGURA 3.5 Densidad de corriente a través de un área abierta A.

Las cargas móviles no son la única fuente de un campo magnético. Al cargar o descargar un condensador, puede medirse un campo **B** en la región entre sus placas (figura 3.6*b*), que es indistinguible del campo que rodea los alambres, aun cuando ninguna corriente atraviese, en realidad, el condensador. Obsérvese, sin embargo, que si A es el área de cada placa y Q la carga en ella

$$E = \frac{Q}{\epsilon A}$$

Al variar la carga, el campo eléctrico cambia y tomando la derivada de ambos lados, se obtiene

$$\epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{i}{A}$$

que es efectivamente una densidad de corriente. James Clerk Maxwell supuso la existencia de tal mecanismo, al que llamó *densidad de corriente de desplazamiento* [2], definida por

$$\mathbf{J}_D \equiv \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.12}$$

La reformulación de la ley de Ampère, como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu \iint_A \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} \tag{3.13}$$

fue una de las aportaciones más significativas de Maxwell. Aclara que, incluso cuando $\mathbf{J} = 0$, ***un campo* E *variable en el tiempo estará acompañado por un campo* B** (figura 3.7).

[2] A este respecto, las propias palabras e ideas de Maxwell se analizan en un artículo escrito por A. M. Bork, *Am. J. Phys.* **31**, 854 (1963). Por cierto, Clerk se pronuncia *clark*.

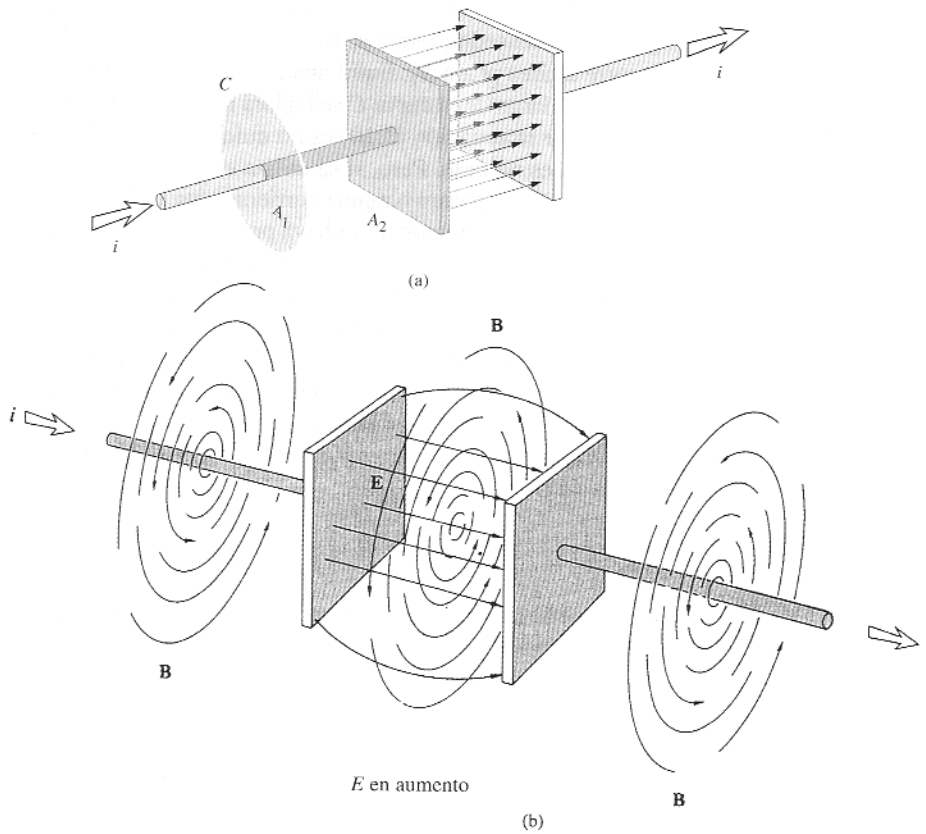


FIGURA 3.6 (*a*) Según la Ley de Ampère no es importante saber a qué área A_1 o A_2 están unidas a través del camino *C*. Sin embargo, una corriente pasa a través de A_1 y no de A_2 lo cual indica que algo no cuadra en absoluto. (*b*) El campo **B** concomitante con el campo **E** variable en el tiempo en el hueco de un condensador.

3.1.5 Las ecuaciones de Maxwell

El conjunto de expresiones integrales dadas por las ecuaciones (3.5), (3.7), (3.9) y (3.13) han llegado a conocerse como ecuaciones de Maxwell. Recuérdese que éstas son generalizaciones de resultados experimentales. La formulación más simple de las ecuaciones de Maxwell gobierna el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en el espacio libre, donde $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ y ρ y $\mathbf{J}$ son ambos cero. En este caso

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{3.14}$$

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0\epsilon_0 \iint_A \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \tag{3.15}$$

$$\oiint_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{3.16}$$

$$\oiint_A \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{3.17}$$

Obsérvese que exceptuando un escalar multiplicativo, los campos eléctricos y magnéticos aparecen en las ecuaciones con una simetría notable. De cualquier manera que **E** afecte a **B**, **B** a su vez afectará a **E**. La simetría matemática supone una gran simetría física.

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en forma diferencial, lo cual será algo más útil para nuestros propósitos. Los cálculos apropiados se llevan a cabo en el Apéndice 1, y las ecuaciones correspondientes para el *espacio libre*, en coordenadas cartesianas, son como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial t} \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial t} \qquad \text{(ii)} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial t} \qquad \text{(iii)}$$

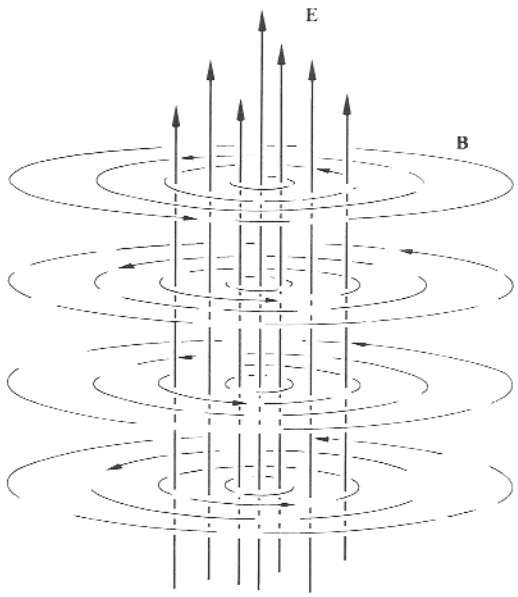


FIGURA 3.7 El campo **E** variable con el tiempo. Al rodear los puntos donde Φ_E cambia, el campo **E** forma circuitos cerrados.

$$\frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial t} \quad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial t} \quad \text{(ii)} \qquad (3.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial t} \quad \text{(iii)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{B}_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{E}_z}{\partial z} = 0 \qquad (3.21)$$

La transición se ha hecho entonces partiendo de la formulación de las ecuaciones de Maxwell en términos de integrales sobre *regiones finitas* hasta una reformulación en términos de derivadas en *puntos* en el espacio.

Ahora tenemos todo lo que se necesita para comprender el maravilloso proceso por el cual los campos eléctricos y magnéticos indisolublemente acoplados, y sosteniéndose mutuamente, se propagan en el espacio como una entidad individual, libre de cargas y corrientes, sin materia, sin éter.

3.2 Ondas electromagnéticas

Hemos dejado para el Apéndice I una deducción completa y matemáticamente elegante de la ecuación de onda electromagnética. Aquí nos centraremos en la tarea igualmente importante de desarrollar una apreciación más intuitiva de los procesos físicos involucrados. Tenemos a nuestra disposición tres observaciones, a partir de las cuales podemos construir un modelo cualitativo: la perpendicularidad general de los campos, la simetría de las ecuaciones de Maxwell y la interdependencia de **E** y **B** en esas ecuaciones.

Al estudiar la electricidad y el magnetismo, uno pronto se percata que varias relaciones se describen por productos vectoriales, o si lo desea, por reglas de la mano derecha. En otras palabras, un suceso de una clase produce una respuesta afín, dirigida perpendicularmente. De interés inmediato es el hecho de que un campo **E**, variable en el tiempo, genera un campo **B** que es en todas partes perpendicular a la dirección en la que **E** cambia (figura 3.7). De la misma manera, un campo **B** variable con el tiempo genera un campo **E** que es perpendicular en todas partes a la dirección en la que **B** cambia (fig. 3.2). Por lo tanto, podemos anticipar la naturaleza transversal general de los campos **E** y **B** en una perturbación electromagnética.

Ahora, consideremos una carga que de alguna manera *se acelera* desde el reposo. Cuando la carga está inmóvil, tiene asociada a ella un campo eléctrico uniforme radial **E** que se extiende en todas direcciones, supuestamente hasta el infinito. En el instante en el que la carga comienza a moverse, el campo **E** se altera en la proximidad de la misma y esta alteración se propaga en el espacio con velocidad finita. El campo eléctrico variable con el tiempo induce a un campo magnético por medio de la ecuación (3.15) o (3.19). Si la velocidad de la carga es constante, la velocidad de cambio del campo **E** es regular y el campo **B** resultante también es constante. Pero aquí la carga está acelerándose, $\partial \mathbf{E}/\partial t$ en sí misma no es constante y así el campo **B** inducido depende del tiempo. El campo **B** variable con el tiempo genera un campo **E**, (3.14) o (3.18), y el proceso continúa con **E** y **B** acoplados uno a otro en la forma de un pulso. A medida que un campo cambia, genera un nuevo campo que se extiende un poco más allá, y así el pulso se mueve de un punto al siguiente a través del espacio.

Podemos trazar una analogía muy mecanicista pero bastante descriptiva, si imaginamos las líneas del campo eléctrico como una densa distribución radial de cuerdas (pág. 58). Cuando de alguna manera se sacude, cada cuerda individual se distorsiona para formar un pliegue que se desplaza alejándose de la fuente. Todos los pliegues se combinan en cualquier instante para producir un pulso tridimensional que se expande en el continuo del campo eléctrico.

Los campos **E** y **B** pueden, más apropiadamente, considerarse como dos aspectos de un solo fenómeno físico, el *campo electromagnético,* cuya fuente es una carga en movimiento. La perturbación, una vez que ha sido generada en el campo electromagnético, es una onda sin atadura que se mueve más allá de su fuente e independientemente de ella. Ligados uno a otro como una sola unidad, los campos magnéticos y eléctricos variables en el tiempo se regeneran unos a otros en un ciclo sin fin. Las ondas electromagnéticas que llegan hasta nosotros desde la galaxia de Andrómeda, relativamente cercana (que puede verse a simple vista) han estado volando durante 2.200.000 años.

No hemos aún considerado la dirección de propagación de la onda con respecto a los campos que la constituyen. Obsérvese, sin embargo, que el alto grado de simetría en las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre sugiere que la perturbación se propagará en una dirección que es simétrica tanto a **E** como a **B**. Eso implica que una onda electromagnética no puede ser puramente longitudinal (es decir, mientras que **E** y **B** no sean paralelas). Pasemos ahora de la teoría a la práctica.

En el Apéndice I demostramos que las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre pueden transformarse en dos expresiones vectoriales extremadamente concisas:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \text{[A1.26]}$$

y

$$\nabla^2\mathbf{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \text{[A1.27]}$$

El Laplaciano [3], ∇^2actúa sobre cada componente de **E** y **B** de manera que las dos ecuaciones vectoriales en realidad representan un total de seis ecuaciones escalares. Dos de estas expresiones, en coordenadas cartesianas son

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad (3.23)$$

y hay cuatro ecuaciones más exactamente con la misma forma para E_z, B_x, B_y y B_z. Ecuaciones de este tipo, que relacionan las variaciones en el espacio y tiempo de alguna cantidad física, se estudiaron mucho antes de que Maxwell llevara a cabo su trabajo y sirvieron para describir los fenómenos de onda (pág. 14). Cada componente del campo electromagnético (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z) obedece a la ecuación diferencial escalar de onda

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad \text{[2.60]}$$

a condición que

$$v = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \qquad (3.24)$$

A fin de evaluar v Maxwell usó los resultados de los experimentos eléctricos llevados a cabo en 1856 en Leipzig por Wilhelm Weber (1804-1891) y Rudolph Kohlrausch (1809-1858). De manera análoga, hoy en día se le asigna a μ_0 un valor de $4\pi \times 10^{-7}$ m · kg/C^2 en unidades SI y, hasta hace poco tiempo, uno podía calcular ϵ_0 directamente de medidas simples de capacidad. En cualquier caso, en unidades modernas

$$\epsilon_0\mu_0 \approx (8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{s}^2\cdot\text{C}^2/\text{m}^3\cdot\text{kg})(4\pi \times 10^{-7}\ \text{m}\cdot\text{kg/C}^2)$$

o

$$\epsilon_0\mu_0 \approx 11{,}12 \times 10^{-18}\ \text{s}^2/\text{m}^2$$

Y ahora, el momento de la verdad: en el espacio libre, la velocidad pronosticada de todas las ondas electromagnéticas sería por lo tanto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 3 \times 10^8\ \text{m/s}$$

Este valor teórico estaba en notable acuerdo con la velocidad previamente medida de la luz (315.300 km/s) calculada por Fizeau. Los resultados de los experimentos de Fizeau, realizados en 1849 usando una rueda dentada rotatoria, estaban en manos de Maxwell, que comentó lo siguiente:

> «Esta velocidad [es decir, su predicción teórica] se acerca tanto a la de la luz que parece que tenemos mucha razón en concluir que la luz en sí misma (incluyendo al calor radiante y a otras posibles radiaciones) es una perturbación electromagnética en forma de ondas propagadas a través del campo electromagnético de acuerdo con las leyes electromagnéticas.»

[3] En coordenadas cartesianas,

$$\nabla^2\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}\nabla^2 E_x + \hat{\mathbf{j}}\nabla^2 E_y + \hat{\mathbf{k}}\nabla^2 E_z.$$

Este brillante análisis fue uno de los grandes aciertos intelectuales de todos los tiempos. Se ha hecho costumbre designar la velocidad de la luz en el vacío por el símbolo c, procedente del término latino *celer*, es decir rápido. En 1983, la decimoséptima Conférence Générale des Poids et Mesures de París adoptó una nueva definición del metro, estableciendo, por lo tanto, la velocidad de la luz en el vacío como

$$c = 2{,}997\,924\,58 \times 10^8 \text{ m/s}$$

3.2.1 Ondas transversales

El carácter transversal de la luz, verificado experimentalmente, debe ahora explicarse dentro del contexto de la teoría electromagnética. A tal fin, consideremos el caso bastante simple de una onda plana propagándose en la dirección positiva de x. La intensidad de campo eléctrico es una solución de la ec. (A.1.26) donde $\mathbf{E}$ es constante sobre cada uno de un conjunto infinito de planos perpendiculares al eje x. Es, por consiguiente, una función solamente de x y t, es decir $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$. Volvemos ahora a referirnos a las ecuaciones de Maxwell y en particular a la ecuación (3.21), la cual generalmente se lee como *la divergencia de* $\mathbf{E}$ *es igual a cero*. Ya que $\mathbf{E}$ no es una función ni de y ni de z, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{3.25}$$

Si E_x no es cero, es decir, si hay alguna componente del campo en la dirección de propagación, esta expresión nos dice que no varía con x. En cualquier momento E_x es constante para todos los valores de x, pero naturalmente, esta posibilidad no puede corresponder a una onda viajera que avanza en la dirección positiva de x. De manera análoga, de la ecuación (3.25) se deduce que para una onda $E_x = 0$, la onda electromagnética no tiene ninguna componente de campo eléctrico en la dirección de propagación. El campo $\mathbf{E}$ asociado con la onda plana es, por lo tanto, exclusivamente *transversal*.

El que el campo $\mathbf{E}$ sea transversal significa que para definir totalmente la onda, tendremos que determinar la dirección de $\mathbf{E}$ momento a momento. Dicha descripción corresponde a la **polarización** de la luz y se estudiará en el capítulo 8. Sin pérdida de generalidad, aquí analizaremos las *ondas planopolarizadas* o *linealmente polarizadas*, en cuyo caso la dirección del vector vibrante $\mathbf{E}$ es fija. Por lo tanto, orientaremos nuestros ejes coordenados de tal forma que el campo eléctrico sea paralelo al eje y, donde

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}} E_y(x, t) \tag{3.26}$$

Volviendo a la ec. (3.18), se deduce que

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{3.27}$$

Por consiguiente, B_x e B_y son constantes y, por el momento, no nos interesan. El campo $\mathbf{B}$ dependiente del tiempo puede tener solamente una componente en la dirección de z. Está claro entonces que ***en el espacio libre, la onda electromagnética plana es transversal*** (figura 3.8). Exceptuando el caso de incidencia normal, dichas ondas que se propagan a través de medios materiales reales no son, por lo general, transversales. Esta complicación surge del hecho que el medio puede ser disipador o contener cargas libres.

No hemos especificado la forma de la perturbación y solamente se ha dicho que era una onda plana. Nuestras conclusiones son, por consiguiente, muy generales aplicándose igualmente bien tanto a pulsos como a ondas continuas. Hemos subrayado ya que las funciones armónicas son de particular interés porque cualquier forma de onda puede expresarse en términos de ondas sinusoidales usando las técnicas de Fourier (pág. 304). Por consiguiente, limitaremos el tratamiento a ondas armónicas y escribiremos $E_y(x, t)$ como

$$E_y(x, t) = E_{0y} \cos [\omega(t - x/c) + \varepsilon] \tag{3.28}$$

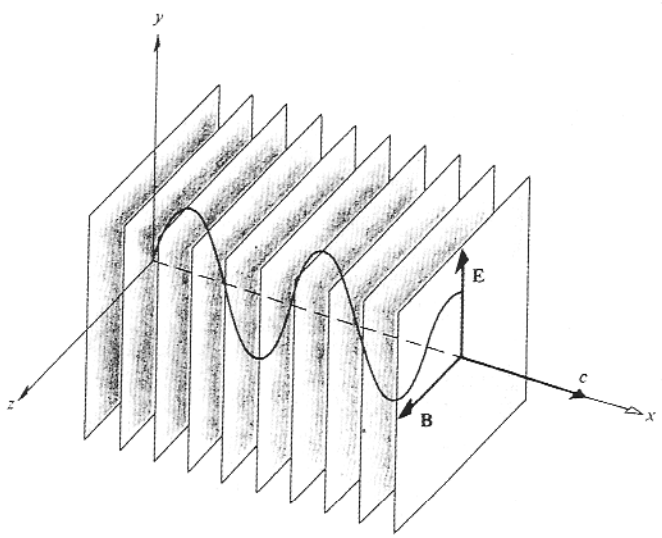


FIGURA 3.8 Configuración del campo en una onda plana electromagnética armónica plana.

siendo c la velocidad de propagación. La densidad de flujo magnético asociado puede encontrarse por integración directa de la ecuación (3.27), o sea

$$B_z = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x}\, dt$$

Usando la ecuación (3.28) obtenemos

$$B_z = -\frac{E_{0y}\omega}{c}\int \text{sen}\,[\omega(t - x/c) + \varepsilon]dt$$

o
$$B_z(x, t) = \frac{1}{c} E_{0y} \cos\,[\omega(t - x/c) + \varepsilon] \qquad (3.29)$$

Se ha omitido la constante de integración, que representa un campo independiente del tiempo. Comparando este resultado con la ec. (3.28), es evidente que

$$E_y = cB_z \qquad (3.30)$$

Ya que E_y y B_z difieren solamente en un escalar, teniendo así la misma dependencia del tiempo, **E** y **B** están *en fase* en todos los puntos en el espacio. Además, $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{j}}E_y(x, t)$ y $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}}B_z(x, t)$ son *mutuamente perpendiculares* y su producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ apunta en la dirección de propagación, $\hat{\mathbf{i}}$ (figura 3.9).

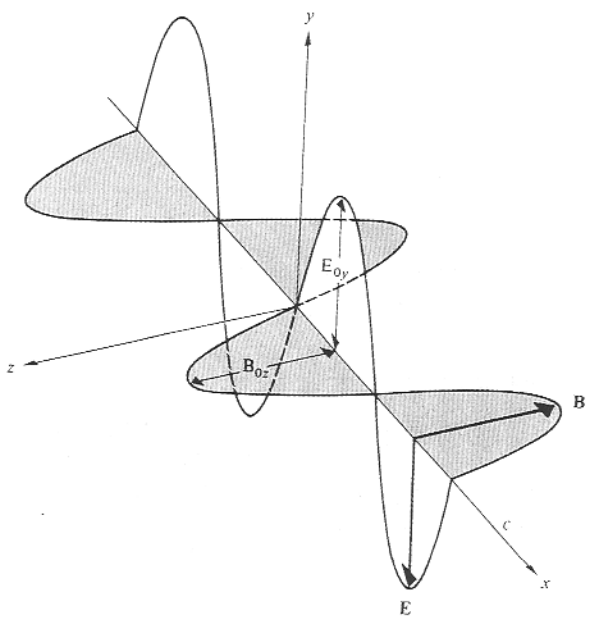


FIGURA 3.9 Campos E y B armónicos ortogonales de una onda plana polarizada.

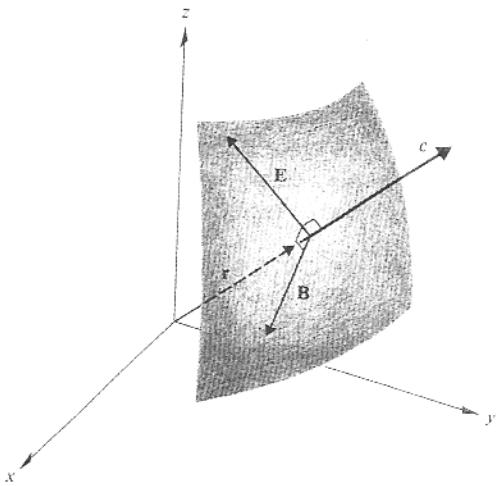


FIGURA 3.10 Parte de un frente de onda esférico lejos de la fuente.

Las ondas planas, aunque sean importantes, no son las únicas soluciones de las ecuaciones de Maxwell. Como vimos en el capítulo anterior, la ecuación diferencial de onda permite muchas soluciones, entre las cuales están las ondas esféricas y cilíndricas (figura 3.10).

3.3 Energía y momento

Una de las propiedades más significativas de la onda electromagnética es que transporta energía y momento. La luz de la estrella más cercana detrás del Sol viaja por 25 millones de millones de millas para llegar a la Tierra y aún así lleva suficiente energía para poder interaccionar con los electrones dentro de nuestro ojo.

3.3.1 El vector de Poynting

Cualquier onda electromagnética existe en alguna zona del espacio, siendo por lo tanto natural considerar la *energía radiante por unidad de volumen*, o **densidad de energía**, u. Supongamos que el campo eléctrico en sí mismo pueda almacenar energía de alguna forma. Se trata de un paso lógico muy importante puesto que le asigna al campo el atributo de realidad física; si el campo tiene energía se trata de una entidad en sí mismo. Además, puesto que el campo clásico es continuo, su energía es continua. Démoslo por sentado y veamos a dónde lleva. Pode-

mos calcular (problema 3.6) la densidad de energía del campo **E** (por ejemplo, entre las placas de un condensador cargado) como

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \tag{3.31}$$

De manera análoga, la densidad de energía de sólo el campo B (como podría calcularse con un toroide conductor) es

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{3.32}$$

La relación $E = cB$ se derivó específicamente para ondas planas; sin embargo, su aplicabilidad es bastante general. Utilizando $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ se deduce que

$$u_E = u_B \tag{3.33}$$

La energía que fluye en el espacio en forma de onda electromagnética es compartida, por igual, por los campos constituyentes, eléctricos y magnéticos. Puesto que

$$u = u_E + u_B \tag{3.34}$$

$$u = \epsilon_0 E^2 \tag{3.35}$$

o de manera equivalente,

$$u = \frac{1}{\mu_0} B^2 \tag{3.36}$$

Para representar el flujo de energía electromagnética asociado con una onda viajera, supongamos que S representa el transporte de energía por unidad de tiempo (la potencia) a través del área unidad. En el sistema SI tiene las unidades W/m^2. La figura 3.11 ilustra una onda electromagnética que viaja con una velocidad c a través de un área A. Durante un intervalo de tiempo Δt muy pequeño, tan sólo la energía contenida en el volumen cilíndrico, $u(c\,\Delta t\,A)$, cruzará A. Por lo tanto

$$S = \frac{uc\,\Delta t\,A}{\Delta t\,A} = uc \tag{3.37}$$

o, utilizando la ecuación (3.35),

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB \tag{3.38}$$

Ahora, supongamos razonablemente (para medios isótropos) que la energía fluye en la dirección de propagación de la onda. El *vector* **S** correspondiente es, entonces,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{3.39}$$

o

$$\mathbf{S} = c^2\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{3.40}$$

La magnitud de **S** es la potencia por unidad de área que cruza una superficie cuya normal es paralela a **S.** Se le conoce como el **vector de Poynting**, en honor de John Henry Poynting (1852-1914). Apliquemos ahora estas consideraciones al caso de una onda plana armónica, linealmente polarizada (las direcciones de los campos **E** y **B** son fijas) que viaja a través del espacio libre en la dirección de **k**:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{3.41}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{3.42}$$

Utilizando la ecuación (3.40), encontramos que

$$\mathbf{S} = c^2\epsilon_0 \mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0 \cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t) \tag{3.43}$$

Éste es el flujo instantáneo de energía por unidad de área por unidad de tiempo.

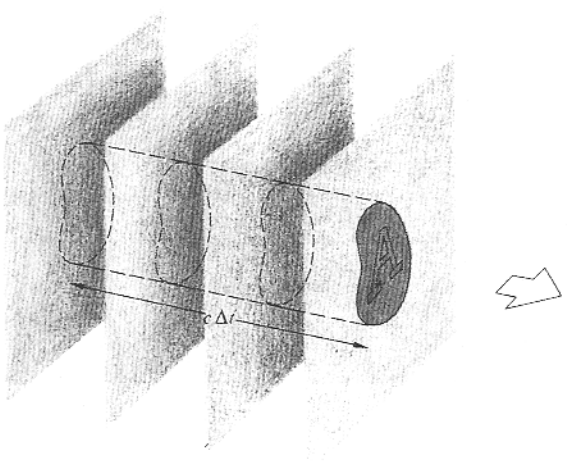


FIGURA 3.11 El flujo de energía electromagnética.

Promediando Funciones Armónicas

Es evidente que $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ oscila entre máximos y mínimos. A frecuencias ópticas ($\approx 10^{15}$ Hz), **S** es una función variable del tiempo extremadamente rápida (de hecho, es dos veces más rápida que los campos, puesto que el cuadrado del coseno tiene el doble de la frecuencia del coseno); por lo tanto, su valor instantáneo es muy poco práctico de medir. Esto sugiere que empleemos un procedimiento de promedio, es decir, que absorbamos la energía radiante durante un intervalo finito de tiempo usando, por ejemplo, una fotocélula, una película fotográfica o la retina del ojo humano.

La forma específica de la ecuación (3.43) y el papel central desempeñado por las funciones armónicas, nos sugieren que analicemos detenidamente los valores promedio de dichas funciones. El valor promedio en el tiempo de alguna función $f(t)$ en un intervalo T se escribe como $\langle f(t)\rangle_T$ y está dado por

$$\langle f(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} f(t)dt$$

El valor resultante de $\langle f(t)\rangle_T$ depende fuertemente de T. Para calcular el promedio de una función armónica, calcúlese

$$\langle e^{i\omega t}\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{i\omega t}dt = \frac{1}{i\omega T}e^{i\omega t}\Big|_{t-T/2}^{t+T/2}$$

$$\langle e^{i\omega t}\rangle_T = \frac{1}{i\omega T}(e^{i\omega(t+T/2)} - e^{i\omega(t-T/2)})$$

y

$$\langle e^{i\omega t}\rangle_T = \frac{1}{i\omega T}e^{i\omega t}(e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2})$$

El término entre paréntesis debería recordarnos (pág. 23) el seno $\omega T/2$. Por consiguiente,

$$\langle e^{i\omega t}\rangle_T = \left(\frac{\text{sen } \omega T/2}{\omega T/2}\right)e^{i\omega t}$$

La relación entre paréntesis es tan corriente y tan importante en óptica que tiene su propio nombre: (sen u)/ u se llama (sinc u). Tomando los elementos reales e imaginarios de la expresión anterior, obtenemos

$$\langle \cos \omega t\rangle_T = (\text{sinc } u)\cos \omega t$$

y

$$\langle \text{sen } \omega t\rangle_T = (\text{sinc } u)\,\text{sen } \omega t$$

El promedio del coseno es en sí mismo un coseno que oscila con la misma frecuencia pero con una amplitud de función sinc que disminuye muy rápidamente desde su valor inicial 1,0 (fig. 3.12 y tabla 1 del apéndice). Puesto que sinc $u = 0$ at $u = \omega T/2 = \pi$, lo cual ocurre cuando $T = \tau$, se deduce que el cos ωt promediado en un intervalo de tiempo T igual a un período, es igual a cero. De manera análoga, el promedio de cos ωt es cero en un número entero cualquiera de períodos, como el sen ωt. Esto es razonable puesto que cada función comprende la misma porción positiva encima del eje que negativa debajo del eje, y esto es a lo que corresponde la integral. Después de un intervalo de varios períodos, el término sinc será tan pequeño que las oscilaciones alrededor de cero serán despreciables: $\langle \cos \omega t\rangle_T$ y $\langle \text{sen } \omega t\rangle_T$ son, por lo tanto, esencialmente, cero.

En el problema 3.8 se demostrará que $\langle \cos^2 \omega t\rangle_T = \frac{1}{2}[1 + \text{sinc } \omega T \cos 2\omega t]$ que oscila aproximadamente alrededor de un valor de $1/2$ con una frecuencia de 2ω y se acerca rápidamente a $1/2$ mientras que T aumenta más allá de algunas docenas de períodos. En el caso de la luz $\tau \approx 10^{-15}$ s y por

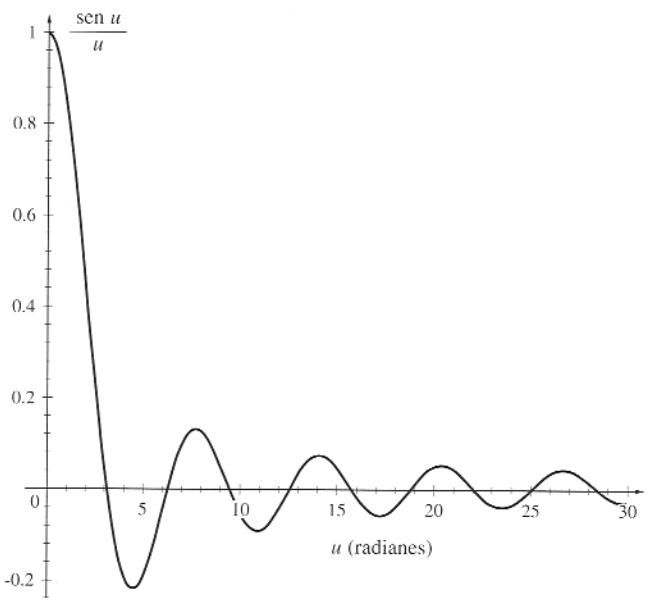


FIGURA 3.12 sinc u. Obsérvese cómo la función sinc tiene valor cero en $u = \pi$, 2π, 3π, etc.

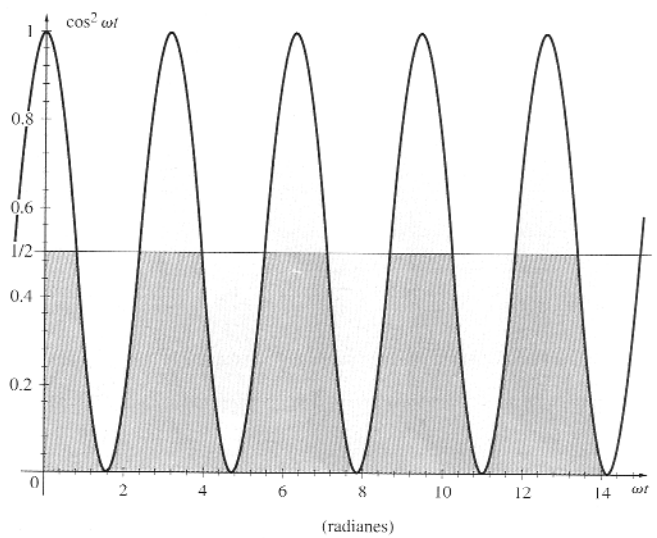


FIGURA 3.13 Utilizar los picos por encima de la línea de $\frac{1}{2}$ para llenar los huecos por debajo de la misma, parece indicar que el promedio es $\frac{1}{2}$.

tanto promediando incluso hasta un microsegundo equivale a $T \approx 10^9\tau$, más que suficiente para llevar la función sinc a algún valor totalmente despreciable, con lo cual $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = 1/2$. En la figura 3.13 se ilustra el mismo resultado; cortamos las gibas por encima de la línea de 1/2 y las utilizamos para llenar las zonas que faltan por debajo de la línea. Al cabo de un número suficiente de ciclos, el área por debajo de la curva $f(t)$ dividida por T, que es $\langle f(t) \rangle_T$ se acercará a 1/2.

3.3.2 Irradiancia

Al hablar de la «cantidad» de luz que ilumina una superficie, se hace referencia a algo que se llama **irradiancia**[4], designado por I ***—la energía media por unidad de área por unidad de tiempo—***. Cualquier clase de detectores de nivel de luz está dotado de una ventana que permite el paso de energía radiante a través de un área fija A. La dependencia del tamaño de esa ventana se elimina dividiendo la energía total recibida por A. Asimismo, puesto que la luz entrante no puede medirse instantáneamente, el detector tendrá que integrar el flujo energético durante un tiempo finito T. Si la cantidad que hay que medir es la energía *neta* por unidad de área recibida, depende de T siendo, por lo tanto, de utilidad limitada. Si otra persona llevara a cabo una medición similar bajo las mismas condiciones, podría conseguir un resultado diferente utilizando un tiempo T diferente. Sin embargo, si se divide por T, se obtendrá una cantidad sumamente práctica correspondiente a la energía media por unidad de área por unidad de tiempo, es decir I.

El valor promedio en un intervalo de tiempo ($T >> \tau$) de la magnitud del vector Poynting, simbolizado por $\langle S \rangle_T$, es una medición de I. En el caso específico de los campos armónicos y ecuación (3.43),

$$\langle S \rangle_T = c^2 \epsilon_0 |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0| \langle \cos^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle$$

Puesto que $\langle \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$ para $T >> \tau$ (véase problema 3.7)

$$\langle S \rangle_T = \frac{c^2 \epsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0|$$

o

$$I \equiv \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \tag{3.44}$$

La irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico. Dos maneras alternativas de decir lo mismo son simplemente:

$$I = \frac{c}{\mu_0} \langle B^2 \rangle_T \tag{3.45}$$

y

$$I = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle_T \tag{3.46}$$

Dentro de un dieléctrico isótropo, homogéneo y lineal, la expresión de la irradiancia pasa a ser:

$$I = \epsilon v \langle E^2 \rangle_T \tag{3.47}$$

Puesto que, como hemos aprendido, **E** es notablemente más eficaz que **B** a la hora de ejercer fuerzas y llevar a cabo operaciones en las cargas, nos referiremos a **E** con el término de **campo óptico** utilizando casi exclusivamente la ecuación (3.46).

La rapidez de flujo de la energía radiante es la potencia óptica P o flujo radiante, generalmente expresado en vatios. Si dividimos el flujo radiante que incide o sale de una superficie, por el área de la superficie, tenemos la densidad de flujo radiante (W/m^2). En el primer caso, hablamos de la *irradiancia*, en el segundo de la *exitancia* y en cualquier caso de la densidad de flujo. La irradiancia es una medida de la *concentración* de la potencia.

La Ley del inverso del cuadrado

Vimos anteriormente que la solución de onda esférica de la ecuación diferencial de onda tiene una amplitud que varía inver-

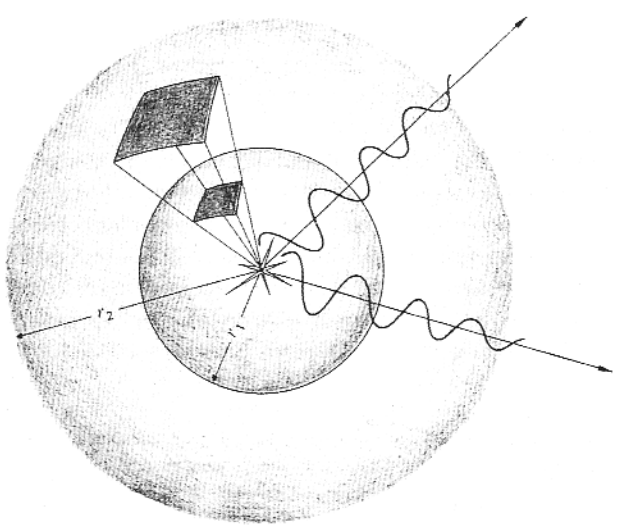


FIGURA 3.14 La geometría de la ley del inverso del cuadrado.

[4] En el pasado, los físicos acostumbraban a utilizar el término *intensidad* para referirse al flujo de *energía por unidad de área por unidad de tiempo*. Por convenio internacional, si no universal, este término está siendo reemplazado paulatinamente en óptica por el de *irradiancia*.

samente con r. Examinemos ahora esta misma característica dentro del contexto de la conservación de energía. Consideremos una fuente puntual isótropa en el espacio libre, emitiendo energía igualmente en todas las direcciones (es decir, emitiendo ondas esféricas). Rodeemos la fuente con dos superficies esféricas imaginarias de radios r_1 y r_2 como se muestra en la figura 3.14. Sean $E_0(r_1)$ y $E_0(r_2)$ las amplitudes de las ondas sobre la primera y la segunda superficie, respectivamente. Si se ha de conservar la energía, la cantidad total de energía que pasa a través de cada superficie por segundo debe ser la misma ya que no hay otras fuentes o sumideros presentes. Multiplicando I por el área de la superficie y tomando la raíz cuadrada, obtenemos

$$r_1 E_0(r_1) = r_2 E_0(r_2)$$

Puesto que r_1 y r_2 son arbitrarias, se deduce que

$$rE_0(r) = \text{constante}$$

y la amplitud debe reducirse inversamente con r. La irradiancia de una fuente puntual es proporcional a $1/r^2$. Se trata de la conocida **Ley del inverso del cuadrado** la cual se puede comprobar fácilmente usando una fuente puntual y un exposímetro fotográfico.

3.3.3. Fotones

La luz se absorbe y se emite por estallidos diminutos y discretos, en partículas de «materia» electromagnética, denominadas fotones. Esto se ha confirmado y se ha comprobado debidamente, pero, la pregunta de si la luz es «verdaderamente» un flujo de fotones está aún lejos de dilucidarse. Este tema será objeto de varios análisis en el futuro [5].

Generalmente, un haz de luz emite tantos cuantos de energía diminutos que su naturaleza granular intrínseca resulta estar completamente escondida, pudiéndose observar, macroscópicamente, un fenómeno continuo. Esto acontece regularmente en la naturaleza; las fuerzas que las moléculas de gas individuales ejercen en un viento, se mezclan en lo que parece ser una presión continua, pero que naturalmente no lo es. Volveremos dentro de poco a esta analogía entre un gas y un flujo de fotones.

[5] Por lo tanto, donde por cuestión de espacio, se use la expresión «un haz de fotones», el lector deberá recordar que aunque el modelo corpuscular de la luz se acepte ampliamente (especialmente en la física de altas energías) y sea una parte muy importante del tratamiento contemporáneo, al igual que casi cualquier tema en física, todavía no se ha comprobado con toda seguridad. Véase, por ejemplo, el artículo de R. Kidd, J. Ardini y de A. Anton, «Evolution of the modern photon», *Am. J. Phys.* **57** (1) 27 (1989).

Como dijo el ilustre físico francés Louis de Broglie, «La luz es, en pocas palabras, la forma de materia más refinada», y toda materia, incluyendo a la luz, se cuantifica. En la base se presenta en unidades elementales diminutas —quark, leptón y fotones—. Esta unidad dominante es una de las razones más atractivas para considerar el fotón como una partícula.

El fracaso de la teoría clásica

En 1900, Max Planck llevó a cabo un análisis provisional y, de alguna forma, erróneo de un proceso denominado *radiación del cuerpo negro* (pág. 575). Sin embargo, la expresión que inventó se adaptaba muy bien a todos los datos experimentales existentes, una hazaña a la que ninguna otra formulación se había acercado. Básicamente, consideraba que las ondas electromagnéticas (EM) estaban en equilibrio en el interior de una cámara isotérmica (o cavidad). Toda la radiación EM en el interior de la cavidad se emite y se absorbe por las paredes del recinto —ninguna entra del exterior—. Esto asegura que su composición espectral se ajustará a la que se emita de una superficie negra ideal. El objetivo era predecir el espectro de la radiación que surgiría de una pequeña apertura en la cavidad. Totalmente bloqueado por el problema, como último recurso, Planck se volvió hacia el análisis estadístico clásico de Maxwell y Boltzmann, que había sido desarrollado como base para la teoría cinética de los gases. Filosóficamente, se trata de un proceso totalmente determinista según el cual se puede seguir, por lo menos en principio, a cada átomo que viaja alrededor del sistema. Por consiguiente, se considera que cada átomo es reconocible, independiente y enumerable. Simplemente por razones de cálculo, Planck supuso que cada oscilador de la pared de la cámara podría absorber y emitir sólo cantidades discretas de energía proporcionales a su frecuencia oscilatoria v. Estas sacudidas de energía eran iguales a los múltiples enteros de hv, donde h que ahora se denomina **Constante de Planck**, resultó ser de $6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s. Siendo una persona más bien tradicional, Planck se agarró a la imagen clásica ondulatoria de la luz, insistiendo que solo los osciladores se cuantizaban.

Proféticamente, J. J. Thomson (1903) —el descubridor del electrón— extendió la idea, sugiriendo que las ondas electromagnéticas podrían ser radicalmente distintas a las otras; quizás, existían verdaderamente unas concentraciones locales de energía radiante. Thomson había observado que al proyectar un haz de radiación EM de alta frecuencia (rayos X) sobre un gas, sólo algunos átomos, aquí y allá, se ionizaban. Parecía como si el rayo tuviera unos «puntos calientes» en lugar de tener la energía repartida continuamente en todo el frente de la onda (figura 3.15).

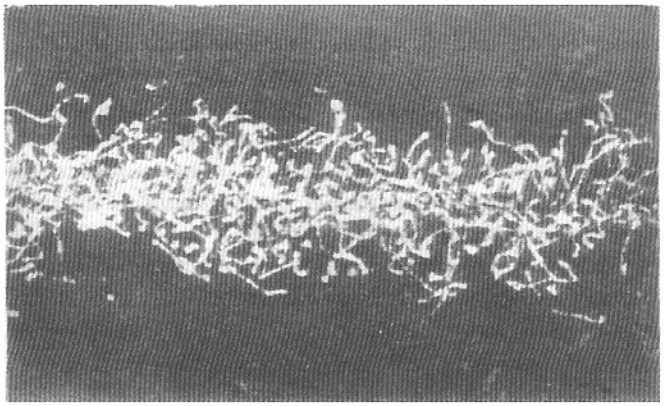


FIGURA 3.15 Un haz de rayos X penetra en una cámara de ionización a la izquierda. Las trayectorias las describen los electrones emitidos bien por el efecto fotoeléctrico (tienden a dejar trayectorias largas formando grandes ángulos con el haz) o por el efecto Compton (trayectorias cortas más hacia la dirección hacia delante). Si bien, clásicamente, la energía del haz de rayos X está distribuida uniformemente a lo largo de frentes de onda transversales, la dispersión parece discreta y al azar. (Extraído del Smithsonian Report, 1915).

El concepto del fotón en su representación moderna se remonta a 1905 gracias al brillante trabajo teórico sobre el efecto fotoeléctrico llevado a cabo por Einstein. Al sumergir un metal en radiación EM, éste emite electrones. Los detalles de ese proceso se habían estudiado durante décadas con experimentos, pero desafiaba el análisis mediante la teoría electromagnética clásica. El asombroso tratamiento de Einstein estableció que ***el mismo campo electromagnético está cuantificado***. Cada fotón componente tiene una energía que es el producto de la constante de Planck y la frecuencia del campo de la radiación:

$$\mathscr{E} = h\nu \tag{3.48}$$

Los fotones son partículas elementales sin masa, sin carga y estables que sólo existen a la velocidad c.

En 1924, Satyendra N. Bose aportó una nueva y rigurosa prueba de la ecuación del cuerpo negro de Planck, utilizando unos métodos estadísticos aplicados a los cuantos de luz. Se imaginaba llenar la cavidad con un «gas» de fotones, ***que se consideraban totalmente indistinguibles unos de otros.*** Se trataba de una característica muy importante del tratamiento mecánico-cuántico: significaba que las micropartículas eran totalmente intercambiables y esto afectó profundamente a la formulación estadística. En sentido matemático, cada partícula de este «gas» cuántico está relacionada con todas las demás, no pudiendo estadísticamente considerarse ninguna como independiente del sistema como un todo. Se trata de una concepción muy distinta a la manera independiente en la que las micropartículas clásicas se comportan en un gas normal y corriente. La función de probabilidad mecánico-cuántica que describe el comportamiento estadístico de la luz térmica se denomina distribución de Bose-Einstein. El fotón, sea lo que sea, se convirtió en una herramienta imprescindible de la física teórica.

A diferencia de los objetos comunes, los fotones no pueden verse directamente; lo que se conoce de ellos procede de los resultados de su creación o destrucción. Nunca se *ve* la luz cruzando el espacio. Un fotón se observa detectando el efecto que produce en sus alrededores, siendo su efecto observable tan sólo cuando el mismo fotón se crea o se destruye. Los fotones nacen y mueren en partículas cargadas; muy a menudo, son emitidos y absorbidos por los electrones que son, por lo general, aquellos que circulan en las nubes alrededor de los átomos. Una serie de experimentos ha podido confirmar directamente la naturaleza cuántica del proceso de emisión. Por ejemplo, imaginemos una fuente muy débil rodeada por fotodetectores idénticos colocados a la misma distancia, y capaces de medir una cantidad muy pequeña de luz. Si la emisión, *por débil que sea*, es una onda continua, como afirma la teoría clásica, todos los detectores deberían registrar el pulso emitido al mismo tiempo. Esto no ocurre; en su lugar, los detectores registran cuentas

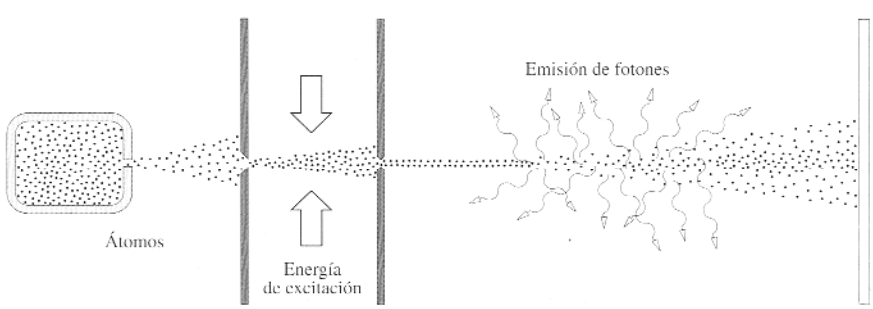


FIGURA 3.16 Cuando los denominados átomos excitados que forman un haz estrecho radian fotones, retroceden lateralmente y el haz se va extendiendo. De manera alternativa, si el haz está formado por átomos que no están excitados (es decir, se hallan en su estado fundamental), permanece estrecho durante todo el recorrido hacia la pantalla.

independientemente, uno cada vez, de acuerdo con la concepción según la cual los átomos emiten cuantos de luz localizados en direcciones al azar.

Asimismo, se ha confirmado que cuando un átomo emite luz (es decir, un fotón), retrocede en la dirección opuesta, como retrocede una pistola después de haber disparado una bala. En la figura 3.16, los átomos inflados con demasiada energía (es decir, excitados, pág. 64) dan lugar a un rayo estrecho. Pronto irradian espontáneamente fotones en todas las direcciones al azar, siendo ellos mismos empujados hacia atrás, a menudo lateralmente respecto al haz. La expansión resultante del haz es un efecto mecánico-cuántico que no concuerda con la imagen clásica de la emisión de una onda simétrica.

Un frente de fotones

Cuando se analizan fenómenos que incluyen la actividad de un número muy elevado de participantes, la única manera práctica de proceder es, a menudo, el uso de técnicas estadísticas. Además de la estadística clásica de Maxwell-Boltzmann (para partículas distinguibles), existen dos clases de estadísticas mecánico-cuánticas (para partículas indistinguibles): la de Bose-Einstein y la de Fermi-Dirac. La primera se ocupa de las partículas que no *están sujetas* al principio de exclusión de Pauli (es decir, aquéllas con espín 0 o entero). La estadística de Fermi-Dirac se ocupa de partículas que sí *están* sujetas al principio de exclusión de Pauli (es decir, aquellas cuyos espines son múltiples enteros impares de $\frac{1}{2}$). Los fotones se denominan **bosones:** son partículas de espín 1, cuya manera de reagruparse obedece a la estadística de Bose-Einstein. De manera análoga, los electrones son **fermiones**; se trata de partículas de espín $\frac{1}{2}$ que obedecen a la estadística de Fermi-Dirac.

Las micropartículas tienen unas características físicas, inmutables, que las definen, como la masa, la carga y el espín. Cuando éstas han sido especificadas, se ha definido completamente la clase de partícula que se está examinando. De manera alternativa, cualquier micropartícula tiene unas propiedades alterables que describen su condición instantánea como la energía, el momento y la orientación del espín. Cuando se disponga de todas estas cantidades alterables, se habrá especificado el **estado** particular en el que la partícula se halla temporalmente.

Los fermiones son partículas individualistas: *tan sólo un fermión puede ocupar un estado determinado*. En comparación, los bosones son partículas gregarias; *en el mismo estado puede hallarse un número cualquiera de los mismos; es más, a decir verdad ellos tienden a agruparse*. ***Cuando un número muy elevado de fotones ocupa el mismo estado, el carácter granular intrínseco del rayo de luz desaparece, siendo reemplazado por el campo electromagnético como medio continuo de una onda electromagnética***. Por lo tanto, podemos asociar una onda plana monocromática (monoenergética) con un flujo de fotones de elevada densidad, todos avanzando en el mismo estado (con la misma energía, la misma frecuencia, el mismo momento y la misma dirección). ***Ondas planas monocromáticas distintas representan distintos estados de fotones***.

Contrariamente al fotón, puesto que los electrones son fermiones, no muchos pueden agruparse estrechamente en el mismo estado y un haz monoenergético de electrones no se manifiesta en una escala macroscópica como onda clásica continua. Bajo este aspecto, la radiación EM es bastante característica.

Para un haz de luz monocromático uniforme de frecuencia ν, la cantidad $I/h\nu$ es el número medio de fotones que inciden en una unidad de área (normal al haz) por unidad de tiempo, es decir, la densidad de flujo de fotones. En términos más reales, si el haz es cuasi-monocromático (pág. 17) con una frecuencia media ν_o, su **densidad media de flujo de fotones** es $I/h\nu_o$. Puesto que un rayo incidente cuasi-monocromático tiene un área de sección transversal A, su **flujo medio de fotones** es

$$\Phi = AI/h\nu_0 = P/h\nu_0 \tag{3.49}$$

donde P es la **potencia óptica** del haz en vatios. El flujo medio de fotones es el número medio de fotones que llega en la unidad de tiempo (Tabla 3.1). Por ejemplo, un pequeño haz láser de He-Ne de 10 mW con una longitud de onda de 632,8 nm emite un flujo medio de fotones de $P/h\nu_0 = (1{,}0 \times 10^{-3}\ \text{W})/[(6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(2{,}998 \times 10^{8}\ \text{m/s})/(632{,}8 \times 10^{-9}\ \text{m})] = 3{,}2 \times 10^{15}$ fotones por segundo.

TABLA 3.1 La densidad media del flujo de fotones de una muestra de fuentes comunes

Fuente de luz	Densidad media de flujo de fotones Φ/A en unidades de (fotones/s·m^2)
Haz láser (10 mW, He-Ne, focalizado a 20 μm)	10^{26}
Haz láser (1 mW, He-Ne)	10^{21}
Luz solar brillante	10^{18}
Nivel luminoso en interiores	10^{16}
Crepúsculo	10^{14}
Luz de la luna	10^{12}
Luz de las estrellas	10^{10}

Imaginemos un haz uniforme de luz con una irradiancia constante (y, por lo tanto, un flujo medio de fotones constante) incidente en una pantalla La energía del haz se deposita sobre la pantalla como una ráfaga aleatoria de pequeños impactos. Los fotones entrantes inciden, individualmente, en puntos del plano que son completamente imprevisibles, como imprevisible es el momento de su llegada. Parece como si el rayo estuviera constituido por un flujo aleatorio de fotones; sin embargo, esta conclusión, por más atractiva que fuera, va más allá de la observación. Lo que *sí se puede* decir es que la luz emite su energía en unos impactos múltiples aleatorios en términos de espacio y de tiempo a lo largo del haz.

Imaginemos que proyectamos una luz en la pantalla; podría ser una serie de franjas de interferencias o la imagen del rostro de una mujer. El frente de fotones que constituyen la imagen es un alboroto estadístico; no podemos prever cuándo un fotón llegará a un punto cualquiera, pero podemos calcular la probabilidad de que uno o varios fotones incidan en un punto específico durante un período de tiempo considerable. ***En cualquier punto de la pantalla, el valor medido (o calculado según los parámetros clásicos) de la irradiancia es proporcional a la probabilidad de detectar un fotón en ese punto*** (pág. 140).

La figura 1.8, que es una representación de la llegada de fotones individuales, se realizó usando una clase particular de tubo fotomultiplicador. A fin de recalcar la naturaleza fotónica intrínseca de la energía radiante, recurramos a un planteamiento fotográfico totalmente distinto y más directo para registrar la incidencia de la luz. Una emulsión fotográfica contiene una distribución de cristales microscópicos de haluros de plata ($\approx 10^{-6}$ m), cada uno con aproximadamente 10^{10} átomos de Ag. Un fotón único puede interaccionar con un cristal de esta clase, rompiendo un enlace de plata-halógeno y liberando un átomo de Ag. Por lo tanto, uno o más átomos de plata sirven como centro de revelado en el cristal expuesto. La película se revela utilizando un agente químico reductor que disuelve cada uno de los cristales expuestos, depositando en ese punto todos sus átomos de Ag como un agregado único del metal.

La figura 3.17 muestra una serie de fotografías que se han tomado con una cantidad creciente de iluminación. Con una luz muy débil, de algunos millares de fotones, la primera fotografía está formada por aproximadamente un número casi equivalente de agregados de plata, conformando así un patrón en el que tan sólo se empieza a vislumbrar una imagen entera. Al ir aumentanto el número de fotones participantes (aproximadamente de un factor de 10 por cada imagen sucesiva), la imagen se hace cada vez más suave y reconocible. Cuando la imagen está constituida por unas decenas de millones de fotones, la naturaleza estadística del proceso se pierde y la fotografía adquiere un aspecto continuo familiar.

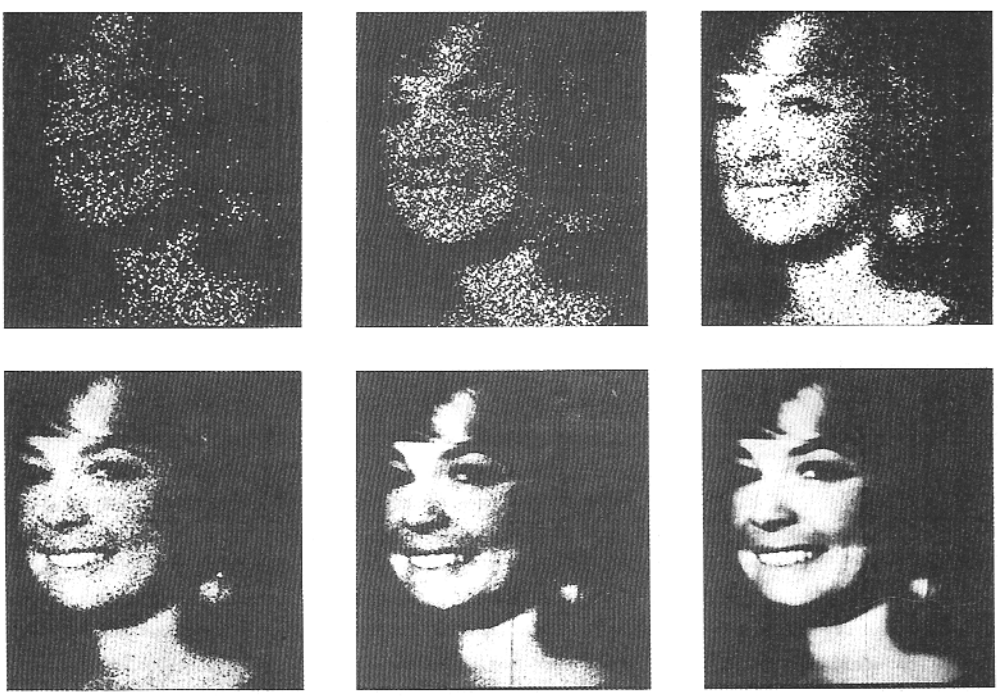


FIGURA 3.17 Estas fotografías (que se optimizaron con medios electrónicos), ilustran de manera convincente la granularidad que exhibe la luz en su interacción con la materia. Bajo iluminación excesivamente débil, la imagen (cada punto corresponde a un fotón) aparece casi al azar, pero a medida que el nivel de la luz aumenta, el carácter cuántico del proceso va obscureciéndose gradualmente. (Véase *Advances in Biological and Medical Physics* V, 1957, 211-242). (Fotos cedidas por Radio Corporation of America.)

Recuento de fotones

¿Qué se puede decir de la naturaleza estadística del frente de fotones que se emite como un haz de luz? Para poder contestar a esta pregunta, en los últimos 30 años, o casi, los investigadores han estado llevando a cabo experimentos en los que ellos contaban literalmente cada fotón individual. Descubrieron que el patrón de llegada de los fotones dependía de la clase de fuente [6].

Consideremos un haz láser ideal y continuo con *irradiancia constante*; recuerden que la irradiancia es una cantidad en un intervalo de tiempo según la ecuación (3.46). El rayo tiene una potencia óptica P constante —que también es una cantidad en un intervalo de tiempo— y, por la ecuación (3.49), un flujo medio de fotones correspondiente Φ. En la figura 3.18 se ilustra la llegada aleatoria de los fotones según una escala temporal que resulta ser corta en comparación con el intervalo durante el cual se mide el promedio de la irradiancia. Por lo tanto, la cantidad macroscópica P puede medirse como constante, aunque haya una transferencia subyacente de energía discontinua.

Ahora, pasemos el haz a través de un obturador que permanece abierto durante un tiempo de muestreo breve T (que podría oscilar entre 10 μs y 10 ms) y que cuenta el número de fotones que llegan a un fotodetector en ese intervalo. Al cabo de una breve pausa, repítase dicho procedimiento y hágase muchas veces, decenas de millares de veces más. Los resultados se presentan

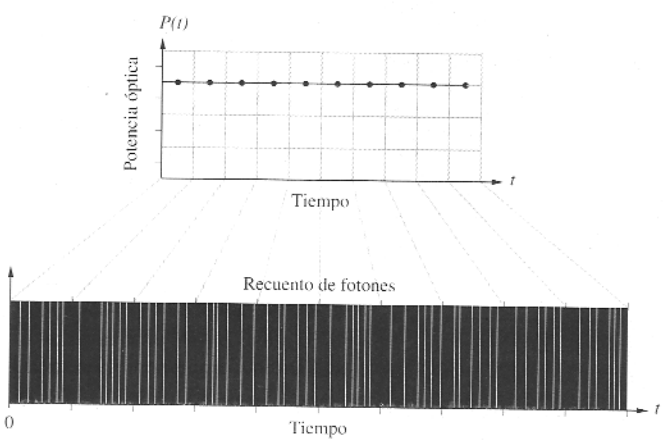


FIGURA 3.18 Una potencia óptica constante y su correspondiente serie aleatoria de recuento de fotones. La llegada de cada fotón es un suceso independiente.

[6] Véase P. Koczyk, P. Wiewior y C. Radzewicz, «Photon counting statistics-Undergraduate experiments», *Am. J. Phys.* **64** (3), 240 (1996).

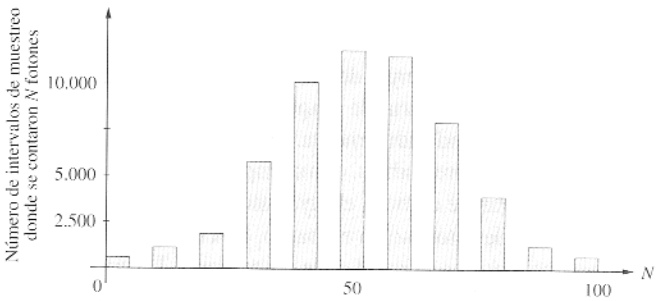


FIGURA 3.19 Histograma típico que ilustra la probabilidad o la distribución del recuento de fotones para un haz de irradiancia constante.

en un histograma (figura 3.19), en el que se representa el número de pruebas durante las cuales se contaron N fotones frente a N. En muy pocas pruebas se registran muy pocos o muchos fotones. En promedio, el número de fotones por prueba es $N_{prom} = \Phi T = PT/h\nu_0$. La forma del gráfico de los datos, que puede derivarse utilizando la teoría de la probabilidad, se acerca mucho a la conocida *distribución de Poisson*. Representa un gráfico de la probabilidad de que el detector (durante un tiempo de prueba T) registre 0 fotones, un fotón, dos fotones, etc.

La distribución de Poisson es la misma curva simétrica que se obtiene al contar bien sea el número de partículas que se emiten al azar por una muestra radioactiva de tiempo de vida largo, bien sea el número de gotas de lluvia que descienden al azar en un área en una lluvia estable. Se trata también de la curva de la probabilidad de conseguir una cara, representada frente al número de caras que se obtiene (N), lanzando una moneda más de 20 veces. Por lo tanto, con $N_{máx} = 20$ la probabilidad más elevada se da cerca del valor medio N_{prom}, es decir, a 1/2 $N_{máx}$ ó 10 y la más baja a $N = 0$ y $N = 20$. El valor más probable sería de 10 caras cada 20 lanzamientos, y la probabilidad de que no salga ninguna cara o de que salgan todas es muy pequeña. Parece ser que independientemente de cómo un láser ideal produce luz, aquél genera un flujo de fotones cuya llegada individual se produce al azar y es estadísticamente independiente. Por razones que se explicarán más tarde, un haz ideal monoenergético —una onda plana monoenergética— es la representación de lo que se conoce como **luz coherente**.

Sin que esto nos sorprenda, ***la distribución estadística del número de fotones que llega a un detector depende de la naturaleza de la fuente***; es fundamentalmente distinta para una *fuente coherente* ideal en un extremo, con respecto a una *fuente caótica* completamente incoherente e igualmente idealizada en el otro extremo. Un láser estabilizado se asemeja a una fuente coherente mientras que una fuente térmica normal como puede ser una

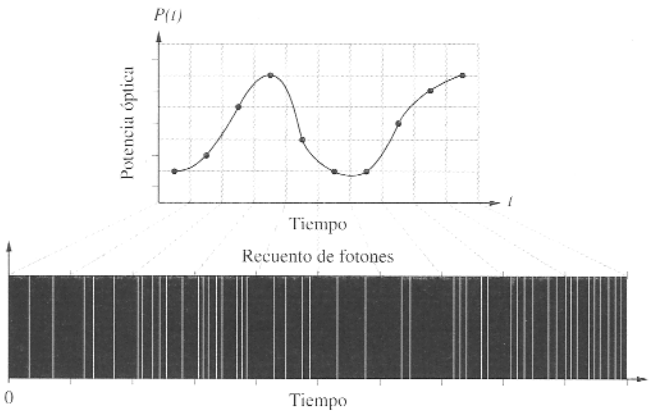


FIGURA 3.20 Una potencia óptica variable en el tiempo y su correspondiente serie aleatoria de recuento de fotones. Ahora hay fluctuaciones correlacionadas y las llegadas de los fotones ya no son independientes.

bombilla, una estrella o una lámpara de descarga de gas se parece más a una fuente caótica. En el caso de luz normal, se producen oscilaciones inherentes en la irradiancia y, por lo tanto, en la potencia óptica (pág. 49). Estas oscilaciones están correlacionadas como lo está el número asociado de fotones emitidos, aunque aleatoriamente en el tiempo (figura 3.20). Cuanto más elevada sea la potencia óptica, mayor será la densidad de número de fotones. Puesto que la llegada de los fotones a un detector no se produce por una sucesión de acontecimientos independientes, se aplica la estadística de Bose-Einstein (figura 3.21). Aquí, el número más probable de recuento por intervalo es cero, mientras que, idealmente, para la luz del láser el número más probable de fotones que se pueden medir en un intervalo de muestreo equivale al número medio registrado. Por lo tanto, si un haz de luz láser

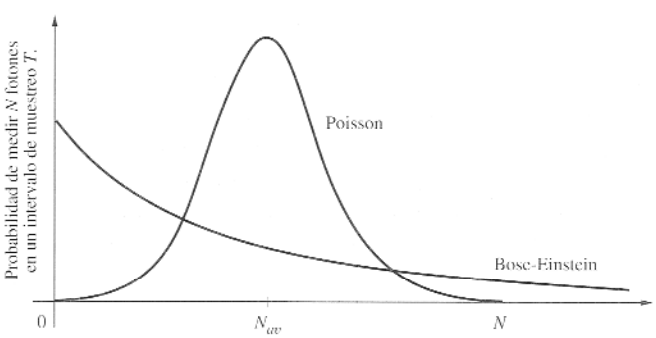


FIGURA 3.21 Distribución de recuento de fotones de Poisson y de Bose-Einstein.

y un haz de luz común tienen la misma irradiancia media y el mismo espectro de frecuencia, siguen siendo intrínsecamente distinguibles —un resultado que va más allá de la teoría clásica.

3.3.4 Momento y presión de la radiación

En 1619, Johannes Kepler sugirió que era la presión de la luz solar lo que desviaba la cola de un cometa de manera que siempre apuntaba lejos del Sol. Esta argumentación cautivó especialmente a los defensores futuros de la teoría corpuscular de la luz. Después de todo, ellos imaginaban un haz de luz como un flujo de partículas y dicho flujo ejercería, naturalmente, una fuerza al bombardear la materia. Durante un tiempo parecía como si este efecto permitiera establecer, al final, la superioridad de la teoría corpuscular sobre la ondulatoria, pero todos los experimentos que se realizaron en esa dirección no consiguieron detectar la fuerza de la radiación, así que el interés fue apagándose poco a poco.

Irónicamente, fue Maxwell en 1873 quien volvió a sacar este tema estableciendo, en teoría, que las ondas ejercen efectivamente una presión. «En un medio en el que las ondas se propagan», escribió Maxwell, «hay una presión en la dirección normal a las ondas, numéricamente igual a la energía en una unidad de volumen».

Cuando una onda electromagnética incide en la superficie de un material, interacciona con las cargas que constituyen el material masivo. Independientemente de que la onda sea absorbida parcialmente o reflejada, ejerce una fuerza sobre aquellas cargas y, por consiguiente, sobre la superficie misma. Por ejemplo, en el caso de un buen conductor, el campo eléctrico de la onda genera unas corrientes mientras que su campo magnético genera unas fuerzas sobre esas corrientes.

Es posible calcular la fuerza resultante por la Teoría electromagnética, en la que la segunda Ley de Newton (según la cual la fuerza equivale al ritmo de cambio del momento) sugiere que la *onda misma lleva un momento*. Realmente, cuando tenemos un flujo de energía, es normal pensar que haya un momento asociado —se trata de los dos aspectos relacionados de tiempo y espacio del movimiento—.

Como demostró Maxwell, la **presión de la radiación**, $\mathscr{P}$, equivale a la densidad de energía de la onda electromagnética. Por las ecuaciones (3.31) y (3.32), para un vacío, sabemos que

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad \text{y} \quad u_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Puesto que $\mathscr{P} = u = u_E + u_M$,

$$\mathscr{P} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

De manera alternativa, utilizando la ecuación (3.37), podemos expresar la presión en términos de la magnitud del vector de Poynting, es decir

$$\mathcal{P}(t) = \frac{S(t)}{c} \tag{3.50}$$

Obsérvese que esta ecuación tiene unidades de potencia divididas por área, por velocidad —o de forma equivalente, fuerza por la velocidad dividido por el área y la velocidad, o sólo fuerza dividida por el área—. Esta es la presión instantánea que se ejercería en una superficie perfectamente absorbente por un haz incidente normalmente.

Puesto que los campos **E** y **B** cambian rápidamente, $S(t)$ cambia rápidamente también, por lo tanto por razones prácticas nos ocupamos de la presión de la radiación media, es decir,

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{\mathrm{T}} = \frac{\langle S(t) \rangle_{\mathrm{T}}}{c} = \frac{I}{c} \tag{3.51}$$

expresada en newton por metro cuadrado. Esta misma presión se ejerce en una fuente que ella misma irradia energía.

Volviendo a la figura 3.11, si p es el momento, la fuerza ejercida por el rayo en una superficie absorbente es

$$A\mathcal{P} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{3.52}$$

Si p_V es el *momento por unidad de volumen de la radiación,* entonces una cantidad de momento $\Delta p = p_V(c\ \Delta t\ A)$ es transportada hacia A durante cada intervalo de tiempo Δt, y

$$A\mathcal{P} = \frac{p_V(c\ \Delta t\ A)}{\Delta t} = A\frac{S}{c}$$

Por lo tanto, la densidad de volumen del momento electromagnético es

$$p_V = \frac{S}{c^2} \tag{3.53}$$

Cuando la superficie iluminada es perfectamente reflectora, el rayo que entró con una velocidad $+c$, saldrá con una velocidad $-c$. Esto equivale a dos veces el cambio de momento que ocurre en la absorción, y por lo tanto

$$\langle \mathcal{P}(t) \rangle_{\mathrm{T}} = 2\frac{\langle S(t) \rangle_{\mathrm{T}}}{c}$$

Obsérvese, de las ecuaciones (3.50) y (3.52), que si alguna cantidad de la energía $\mathscr{E}$ es transportada por metro cuadrado por segundo, entonces habrá un momento correspondiente $\mathscr{E}/c$ que es transportado por metro cuadrado por segundo.

En la imagen del fotón, cada cuanto tiene una energía $\mathscr{E} = h\nu$. Por lo tanto, podemos pensar que un fotón lleve un momento

$$p = \frac{\mathscr{E}}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{3.54}$$

Su momento vectorial sería

$$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$$

donde **k** es el vector de onda y $\hbar \equiv h/2\pi$. Esto concuerda bien con la Relatividad especial que pone en relación la masa m, la energía y el momento de una partícula mediante

$$\mathscr{E} = [(cp)^2 + (mc^2)^2]^{1/2}$$

Para un fotón $m = 0$ y $\mathscr{E} = cp$.

Estas concepciones mecánico-cuánticas se han confirmado experimentalmente utilizando el efecto Compton, que detecta la energía y el momento que se transfiere a un electrón al interaccionar con un fotón individual de rayos X.

La densidad de flujo medio de la energía electromagnética del Sol que incide normalmente en una superficie justo en el exterior del atmósfera terrestre es de unos 1.400 W/m^2. Imaginando una absorción completa, la presión resultante sería de $4{,}7 \times 10^{-6}$ N/m^2, o $1{,}8 \times 10^{-9}$ onzas/cm^2, comparada con una presión atmosférica de aproximadamente 10^5 N/m^2. La presión de la radiación solar en la Tierra es pequeña siendo, sin embargo, responsable de una fuerza en todo el planeta de unas 10 toneladas. Hasta en la superficie misma del Sol, la presión de la radiación es relativamente pequeña (véase problema 3.25). Como podría esperarse, se vuelve apreciable dentro del cuerpo ardiente de una gran estrella luminosa, donde desempeña un papel importante en sostener la misma contra la gravedad. A pesar de la modesta densidad de flujo del Sol, puede producir unos efectos apreciables durante largo tiempo. Por ejemplo, si se hubiera despreciado la presión de la luz solar ejercida sobre el vehículo espacial Viking durante su viaje, el mismo se hubiera desviado de Marte unos 15.000 km. Los cálculos demuestran que es hasta viable utilizar la presión de la luz solar para impulsar un vehículo espacial entre los planetas más internos [7]. Algún día, vehículos con velas inmensas reflectoras accionadas por la presión de la radiación solar podrán navegar por el mar oscuro del espacio local.

La presión ejercida por la luz fue medida en 1901 por el experimentador ruso Pyotr Nikolaievich Lebedev (1866-1912) e,

[7] El flujo de partículas cargadas denominado «viento solar» es desde 1.000 hasta 100.000 veces menos eficaz en suministrar una fuerza propulsora que la luz.

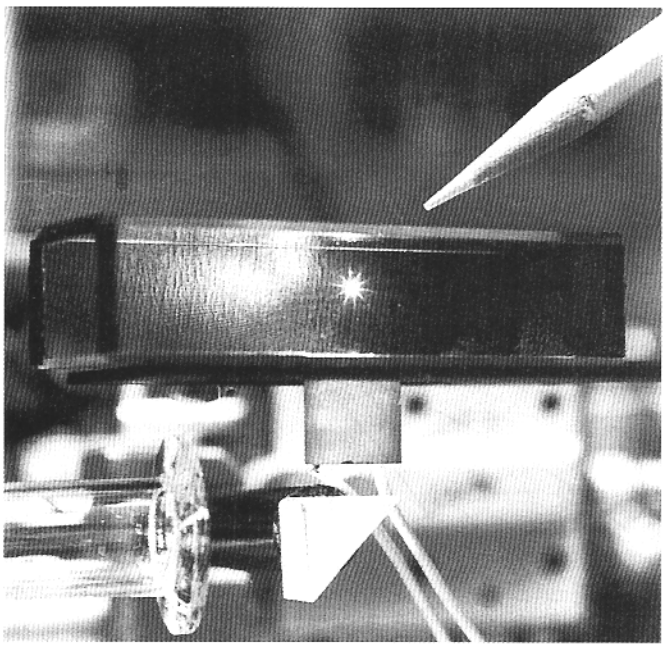


FIGURA 3.22 El pequeño punto en forma de estrella es una esfera diminuta de vidrio transparente (cuyo diámetro es de una milésima de pulgada) suspendida en el aire en un haz láser ascendente de 250 mW. (Foto cedida por Bell Laboratories.)

independientemente, por los americanos Ernest Fox Nichols (1869-1924) y Gordon Ferrie Hull (1870-1956). Sus logros fueron asombrosos si consideramos las fuentes luminosas de las que disponían en aquel entonces. Hoy en día, con la llegada del láser, la luz puede concentrarse en un punto cuyo radio se acerca a los límites de aproximadamente una longitud de onda. La irradiancia resultante y, por lo tanto, la presión, se aprecia hasta con un láser de unos pocos vatios. Por consiguiente, se ha vuelto práctico considerar la presión de la radiación para cualquier aplicación como la separación de isótopos, la aceleración de partículas y hasta la levitación óptica de pequeños objetos (figura 3.22).

La luz puede también transportar un momento angular. Sin embargo, esto conlleva varias cuestiones que se abordarán más tarde (pág. 324).

3.4 Radiación

La radiación electromagnética se presenta en una amplia gama de longitudes de onda y frecuencias, aunque en el vacío todas viajen a la misma velocidad. A pesar de que distingamos varias zonas del espectro con nombres como radioondas, microondas, infrarrojos, etc., solo existe una entidad, una esencia de la onda electromagnética. Las ecuaciones de Maxwell son independientes de la longitud de onda, por lo tanto, no aportan ninguna diferencia considerable en términos de clase. Por lo tanto, es razonable buscar un mecanismo de fuente común para toda la radiación EM. Lo que encontramos es que las distintas clases de energía radiante parecen tener el mismo origen puesto que están todas asociadas con *cargas que se mueven de manera no uniforme*. Por supuesto, nos estamos ocupando de ondas del campo electromagnético y la carga *es* lo que da lugar a un campo, por lo tanto no es tan asombroso.

Una carga estacionaria tiene un campo constante **E** y ningún campo **B**, por consiguiente no produce ninguna radiación —¿de dónde vendría la energía en el supuesto de que así lo hiciera?—. Una carga que se mueve de manera uniforme está dotada tanto del campo **E** como del **B**, pero no radia. Si viajáramos junto a la carga, la corriente desaparecería y así lo haría **B** y nosotros volveríamos al caso anterior, donde el movimiento uniforme es relativo. Esto es bastante razonable, puesto que no tendría ningún sentido si la carga dejara de radiar por la sencilla razón que Ud. ha empezado a andar a su lado. Esto nos deja con las *cargas que se mueven de manera no uniforme* que sin duda radian. En la imagen del fotón, esto se recalca por la convicción de que las interacciones fundamentales entre la materia y la energía radiante se dan entre fotones y cargas.

Por lo general, sabemos que las cargas libres (aquellas que no están enlazadas dentro de un átomo) emiten radiación electromagnética cuando se aceleran. Esto es válido para las cargas que cambian de velocidad en línea recta dentro de un acelerador lineal, que se mueven en círculos dentro de un ciclotrón o que, sencillamente, oscilan hacia adelante y hacia atrás en una antena de radio —***si una carga se mueve de manera no uniforme, radia***—. Una partícula libre cargada puede absorber o emitir espontáneamente un fotón; tanto es así que un número cada vez mayor de dispositivos importantes, desde el láser de electrones libres (1977) hasta el generador de radiación sincrotrónica recurren a este mecanismo en un plan práctico.

3.4.1 Cargas linealmente aceleradas

Consideremos una carga que se mueve a velocidad constante y que tiene ligado a ella un campo eléctrico radial inmutable y un campo magnético circular circundante. Aunque en un punto cualquiera en el espacio, el campo **E** cambie de un momento al otro, su valor puede calcularse en cualquier instante suponiendo que las líneas del campo se desplazan juntas, sujetas a la carga. Por lo tanto, el campo no se separa de la carga y no se produce radiación.

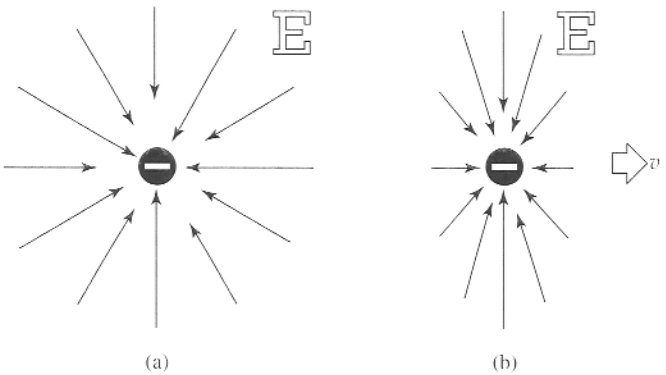


FIGURA 3.23 (*a*) Campo eléctrico de un electrón estacionario. (*b*) Campo eléctrico de un electrón en movimiento.

El campo eléctrico de una carga en reposo puede representarse como en la figura 3.23, por una distribución radial y uniforme de líneas rectas de campo. Para una carga que se mueve con velocidad constante **v,** las líneas de campo son aún radiales y rectas pero ya no están uniformemente distribuidas. La ausencia de uniformidad se hace evidente a altas velocidades y es generalmente despreciable cuando $v << c$.

En contraste, la figura 3.24 muestra las líneas de campo asociadas con un electrón acelerándose uniformemente hacia la derecha. Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son las posiciones del electrón después de intervalos iguales de tiempo. Las líneas de campo son ahora curvas y esto, como veremos, representa una diferencia significativa. Como contraste adicional, la figura 3.25 muestra el campo de un electrón en un instante arbitrario t_2. Antes de $t = 0$ la partícula estaba siempre en reposo en el punto O. Entonces, se aceleró uniformemente la carga hasta el instante t_1, alcanzando una velocidad v, que se mantuvo constante de ahí en adelante. Podemos anticipar que las líneas de campo circundantes de alguna manera llevarán la información de que el electrón se ha acelerado. Tenemos sobrada razón para suponer que esta «información» se propagará con velocidad c. Si, por ejemplo, $t_2 = 10^{-8}$ s, ningún punto más allá de los 3 m. del punto O tendrá conocimiento del hecho de que la carga siquiera se ha movido. Todas las líneas en esa región serán uniformes, rectas y centradas en O como si la carga aún estuviera ahí. En el instante t_2, el electrón está en el punto O_2 y se está moviendo con velocidad constante v. Cerca de O_2 las líneas de campo deben asemejarse a las de la figura 3.22*b*. La Ley de Gauss establece que las líneas que están fuera de la esfera de radio ct_2 se unen a las que están dentro de la esfera de radio $c(t_2 - t_1)$, ya que

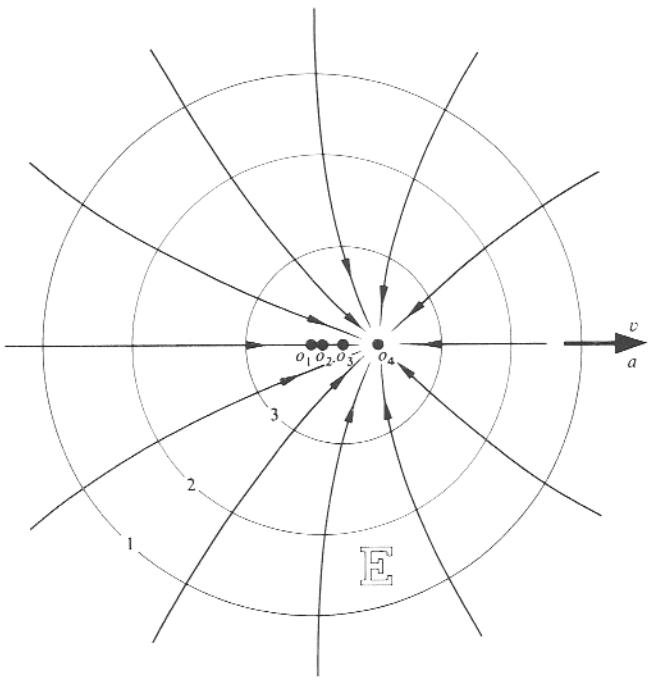


FIGURA 3.24 Campo eléctrico de un electrón con aceleración constante.

no hay cargas entre ellas. Es ahora evidente que durante el intervalo en que la partícula se aceleró, las líneas del campo se distorsionaron y apareció en ellas una discontinuidad. La forma exacta de las líneas dentro de la región de la discontinuidad es de poco interés aquí. Lo que es interesante es que ahora existe una *componente transversal* del campo eléctrico $\mathbf{E}_T$ que se propaga hacia afuera como un pulso. En algún punto en el espacio, el campo eléctrico transversal será una función del tiempo y, por consiguiente, estará acompañado de un campo magnético.

La componente radial del campo eléctrico cae como $1/r^2$, mientras que la componente va sigue como $1/r$. A distancias muy grandes de la carga, el único campo significativo será la componente $\mathbf{E}_T$ del pulso, que se conoce como *campo de radiación*[8]. Para una carga positiva que se mueve lentamente ($v << c$), se puede demostrar que los campos de radiación eléctrica y magnética son proporcionales a $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a})$ y $(\mathbf{a} \times \mathbf{r})$ respectiva-

[8] Los detalles de este cálculo, usando el método de J. J. Thomson para analizar la discontinuidad, se pueden encontrar en J. R. Tessman y J. T. Finnell, Jr., «Electric Field of an Accelerating Charge» *Am. J. Phys.* **35**, 523 (1967). Como referencia general sobre la radiación, véase, por ejemplo, Marion y Heald *Classical Electromagnetic Radiation*, capítulo 7.

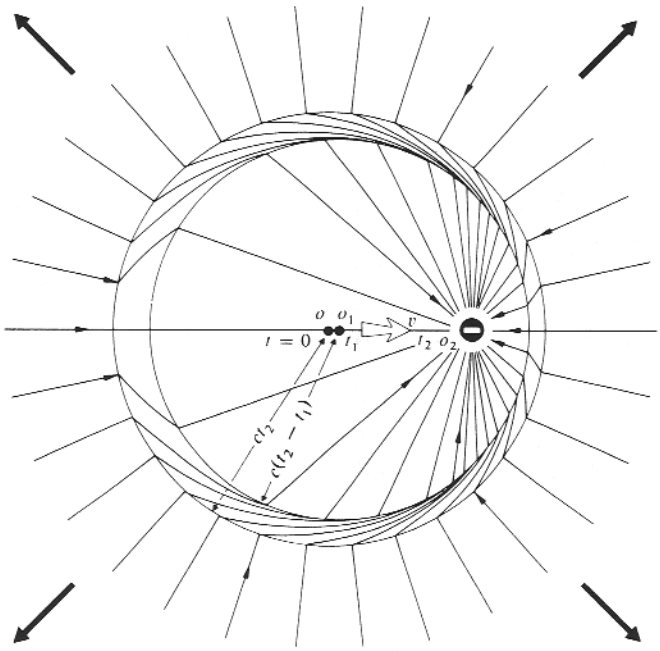


FIGURA 3.25 Discontinuidad en las líneas del campo **E**.

mente, donde **a** es la aceleración. Para una carga negativa, ellos se invierten como se muestra en la figura 3.26. Obsérvese que la irradiancia es una función de θ y que $I(0) = I(180°) = 0$ mientras que $I(90°) = I(270°)$ es un máximo.

La energía que se irradia en el espacio circundante se suministra a la carga por algún agente externo. Ese agente es el responsable de la fuerza aceleradora, la cual a su vez, actúa sobre la carga.

3.4.2 Radiación sincrotrón

Una partícula libre cargada que se mueva en cualquier línea curva se acelerará e irradiará. Esto proporciona un mecanismo potente para la producción de energía radiante, tanto de manera natural como artificial, en el laboratorio. Y esto es precisamente lo que hace el generador de radiación sincrotrón, una herramienta de investigación que fue desarrollada en la década de los setenta. Unos agregados de partículas cargadas, por lo general, electrones o positrones, que interaccionan con un campo magnético aplicado, se hacen girar alrededor de una gran pista esencialmente circular a una velocidad que se controla con precisión. La frecuencia de la órbita determina la frecuencia fundamental de emisión (que contiene también armónicos más altos) y es constantemente variable, más o menos, como se desea. Por cierto, hace falta utilizar agregados de cargas; *un circuito cerrado uniforme de corriente no produce radiación.*

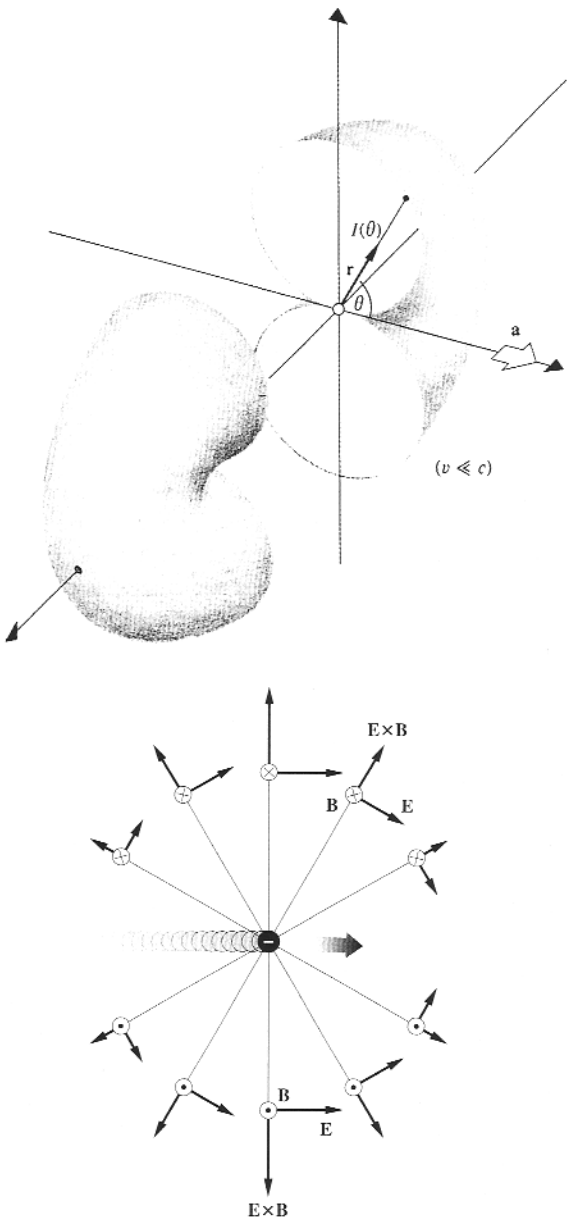


FIGURA 3.26 Distribución de radiación toroidal de una carga linealmente acelerada (cortada para enseñar la sección transversal).

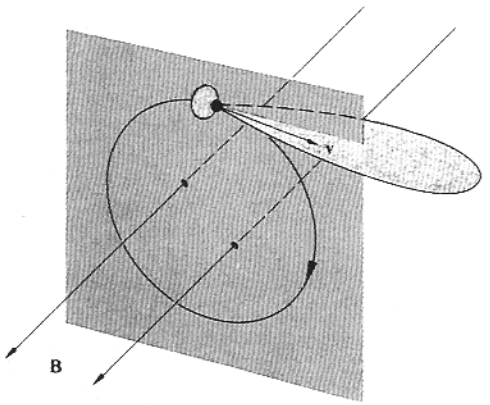


FIGURA 3.27 Distribución de radiación de una carga en órbita.

Una partícula cargada que gira lentamente en una órbita circular emite un patrón toroidal similar al que se representa en la figura 3.26. La distribución de la radiación es, una vez más, simétrica alrededor de **a,** que ahora es la aceleración centrípeta que actúa hacia el interior a lo largo del radio trazado desde el centro de la órbita circular hasta la carga. Cuanto más elevada sea la velocidad, más «verá» un observador colocado en el laboratorio encogerse el lóbulo posterior del patrón de radiación mientras que el frontal se extiende en la dirección de movimiento. A velocidades que se acercan a c, el haz de partículas (por lo general, con un diámetro comparable al de un alfiler derecho) irradia esencialmente a lo largo de un cono estrecho tangente a la órbita en la dirección instantánea de **v** (fig. 3.27). Para $v \approx c$, la radiación se polarizará enormemente en el plano de movimiento.

Esta «linterna», cuyo diámetro es a menudo inferior a unos pocos milímetros, rastrea mientras los agregados de partículas rodean la máquina, al igual que un faro de un tren al cruzar una curva. A cada revolución, el haz emite un parpadeo momentáneo (<1/2 ns) a través de una de las muchas ventanas del dispositivo. Como veremos más tarde (pág. 313), cuando la duración de una señal es corta, tiene que comprender una amplia gama de frecuencias. El resultado es una fuente tremendamente intensa que emite rápidamente radiación pulsante, sintonizable sobre una amplia gama de frecuencias, desde el infrarrojo hasta los rayos X. Cuando se utilizan imanes para que los electrones circulantes entren y salgan de sus órbitas circulares, se pueden crear impulsos de rayos X de alta frecuencia con una intensidad enorme. Estos haces son centenares de miles de veces más potentes que un rayo X dental (que es, aproximadamente, una fracción de vatio) y pueden fácilmente producir un agujero del tamaño de un dedo en una plancha de plomo con un espesor de 3 mm.

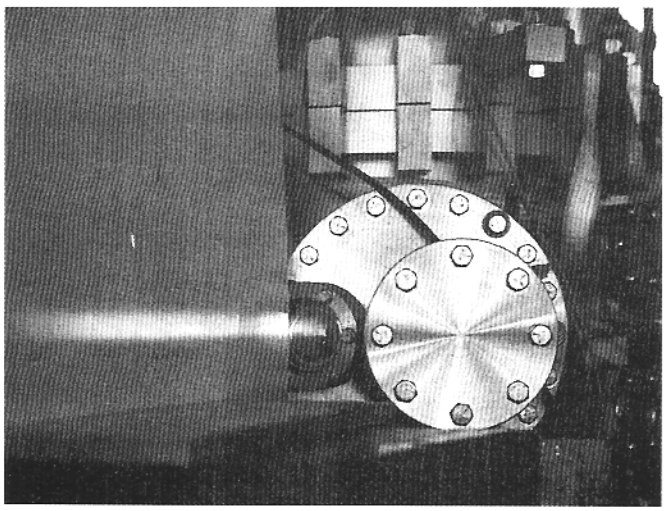


FIGURA 3.28 El primer haz de «luz» del National Synchrotron Light Source (1982) siendo emitido por su anillo de almacenamiento electrónico ultravioleta.

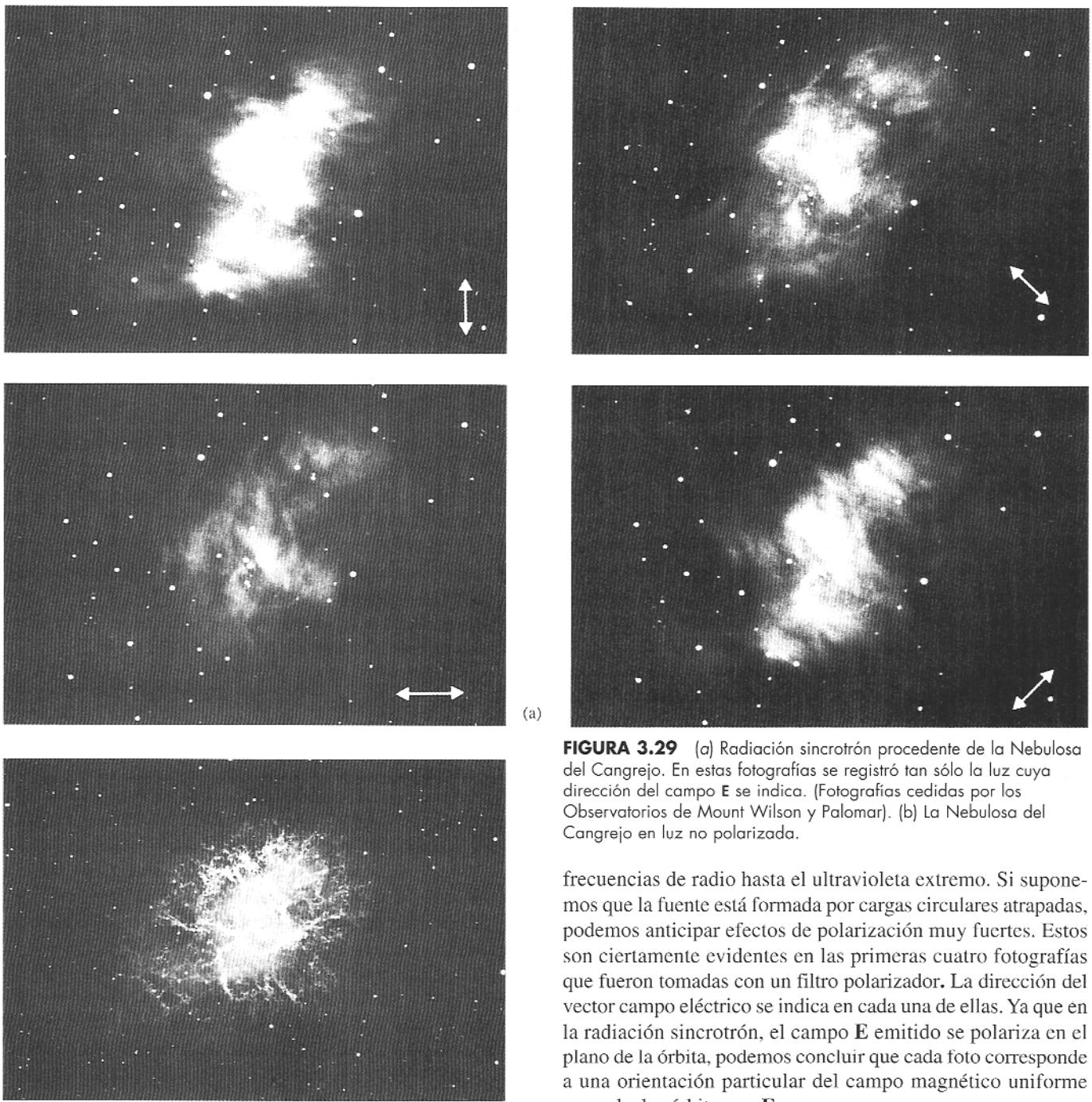
Si bien esta técnica se utilizó por primera vez en 1947 para producir luz en un sincrotrón de electrones, los responsables del acelerador tardaron unas décadas en reconocer que aquella perturbación que restaba energía según su parecer, podría ser una herramienta de investigación muy importante en sí misma (figura 3.28).

En el dominio astronómico, podemos esperar que existan regiones inmersas en campos magnéticos. Las partículas cargadas atrapadas en estos campos se moverán en órbitas circulares o helicoidales y, si sus velocidades son lo suficientemente altas, emitirán radiación sincrotrón. La figura 3.29 muestra cinco fotografías de la extragaláctica Nebulosa del Cangrejo [9]. La radiación que se desprende de la nebulosa se extiende desde las

[9] Se cree que la Nebulosa del Cangrejo está conformada por escombros en expansión que quedaron después de la muerte cataclísmica de una estrella. Basándose en su velocidad de expansión, los astrónomos calcularon que la explosión tuvo lugar en el año 1050. Esto fue corroborado más tarde cuando un estudio de viejos registros chinos (las crónicas del Observatorio de Beijing) revelaron la aparición de una estrella extremadamente brillante, en la misma región del cielo, en 1054.

> En el primer año del período Chihha, la quinta luna, el día Chichou [es decir, el 4 de julio de 1054], apareció una gran estrella... Al cabo de más de un año, se hizo paulatinamente invisible.

Hay poca duda de que la Nebulosa del Cangrejo sea lo que queda de esa supernova.



(a)

FIGURA 3.29 (a) Radiación sincrotrón procedente de la Nebulosa del Cangrejo. En estas fotografías se registró tan sólo la luz cuya dirección del campo **E** se indica. (Fotografías cedidas por los Observatorios de Mount Wilson y Palomar). (b) La Nebulosa del Cangrejo en luz no polarizada.

frecuencias de radio hasta el ultravioleta extremo. Si suponemos que la fuente está formada por cargas circulares atrapadas, podemos anticipar efectos de polarización muy fuertes. Estos son ciertamente evidentes en las primeras cuatro fotografías que fueron tomadas con un filtro polarizador. La dirección del vector campo eléctrico se indica en cada una de ellas. Ya que en la radiación sincrotrón, el campo **E** emitido se polariza en el plano de la órbita, podemos concluir que cada foto corresponde a una orientación particular del campo magnético uniforme normal a las órbitas y a **E**.

Se cree que la mayoría de las ondas de radio de baja frecuencia que llegan a la Tierra del espacio exterior tienen su ori-

gen en la radiación sincrotrón. En 1960, los radioastrónomos usaron estas emisiones de longitud de onda larga para identificar una clase de objetos conocidos como cuásares. En 1955, fueron descubiertas ráfagas de ondas de radio polarizadas que emanaban de Júpiter. Su origen se atribuye ahora a electrones moviéndose en espiral, atrapados en los cinturones de radiación que rodean al planeta.

3.4.3 Radiación dipolar eléctrica

Quizás, el mecanismo más sencillo de producción de una onda electromagnética que se puede visualizar, es el dipolo oscilante —dos cargas, una positiva y otra negativa que vibran hacia delante y hacia atrás en una línea recta—. Esta disposición es, sin duda, la más importante de todas.

Tanto la luz como la radiación ultravioleta surgen principalmente de la redistribución de los electrones exteriores más externos o débilmente enlazados en átomos y moléculas. Del análisis mecánico-cuántico se deduce que el momento dipolar eléctrico del átomo es la fuente principal de esta radiación. La razón de emisión energética de un sistema material, aunque es un proceso mecánico-cuántico, se puede visualizar en términos del dipolo eléctrico oscilante clásico. Este mecanismo es, por consiguiente, de importancia capital para comprender cómo los átomos, las moléculas o hasta los núcleos emiten y absorben ondas electromagnéticas. En la figura 3.30 se muestra esquemáticamente la distribución del campo eléctrico en la región de un dipolo eléctrico. En esta configuración simplificada, una carga positiva oscila linealmente en movimiento armónico simple alrededor de una carga positiva estacionaria igual. Si la frecuencia angular de la oscilación es ω, el momento dipolar dependiente del tiempo $\mu(t)$ tiene la forma escalar

$$\mu = \mu_0 \cos \omega t \tag{3.55}$$

Obsérvese que $\mu(t)$ podría representar el momento colectivo de la distribución de la carga oscilante a escala atómica o hasta una corriente oscilante en una antena lineal de TV.

A $t = 0, \mu = \mu_0 = qd$ donde d es la separación inicial máxima entre los centros de las dos cargas (figura 3.30*a*). El momento dipolar es, en realidad, un vector en la dirección de $-q$ a $+q$. La figura muestra una secuencia de distribuciones de líneas de campo cuando el desplazamiento, y por consiguiente, el momento dipolar disminuye, llega después a cero y finalmente invierte la dirección. Cuando las cargas se superponen efectivamente $\mu = 0$ y las líneas de campo deben cerrarse sobre sí mismas.

Muy cerca del átomo, el campo **E** tiene la forma de un dipolo eléctrico estático. Un poco más afuera, en la región donde se forman las curvas cerradas, no hay ninguna longitud de onda específica. El tratamiento detallado muestra que el campo eléctrico se compone de cinco términos diferentes y que las cosas son obviamente complicadas. Lejos del dipolo, en lo que se llama *onda o zona de radiación,* la configuración del campo es mucho más simple. En esta zona, ha sido establecida una longitud de onda determinada; **E** y **B** son transversales, mutuamente perpendiculares, y están en fase. Más concretamente,

$$E = \frac{\mu_0 k^2 \operatorname{sen} \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos (kr - \omega t)}{r} \tag{3.56}$$

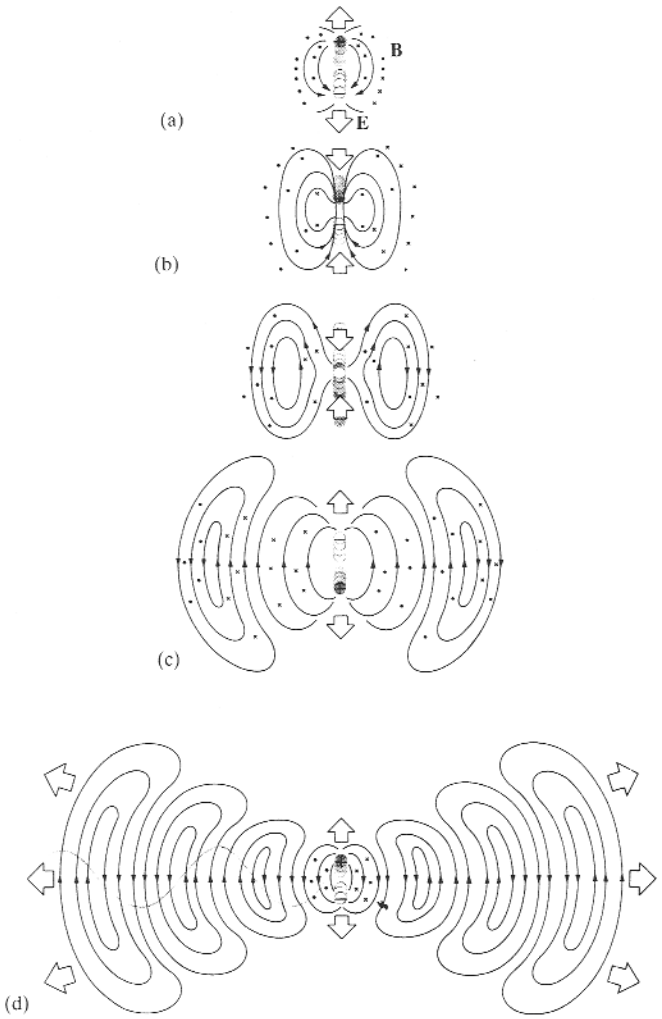
y $B = E/c$, donde los campos están orientados como en la figura 3.31. El vector de Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ siempre apunta radialmente y hacia afuera de la zona de la onda. Ahí, las líneas del campo **B** son círculos concéntricos con el eje del dipolo y en un plano perpendicular al mismo. Esto es comprensible ya que se puede considerar que **B** surge de la corriente del oscilador variable en el tiempo.

La irradiancia (emitida radialmente hacia afuera de la fuente) se deduce de la ecuación (3.44) y está dada por

$$I(\theta) = \frac{\mu_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3 \epsilon_0} \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{r^2} \tag{3.57}$$

de nuevo una dependencia con la ley del inverso del cuadrado de la distancia. La distribución de la densidad de flujo angular es toroidal, como en la figura 3.26. El eje en el que se produce la aceleración es el de simetría de la distribución de radiación. Obsérvese la dependencia de la irradiancia en ω^4, *cuanto más elevada sea la frecuencia, más intensa será la radiación*; esta característica será importante cuando analicemos el esparcimiento.

No es difícil conectar un generador de CA entre dos barras conductoras y enviar corrientes de electrones libres que oscilan arriba y abajo en esta «antena transmisora». En la figura 3.32 se muestra la distribución que se ha llevado a su conclusión lógica —una torre de radio AM bastante estándar que funcionará perfectamente si su longitud se corresponde con la longitud de onda que se está transmitiendo o, más convenientemente, con $\frac{1}{2}\lambda$. La onda emitida se forma en el dipolo en sin-



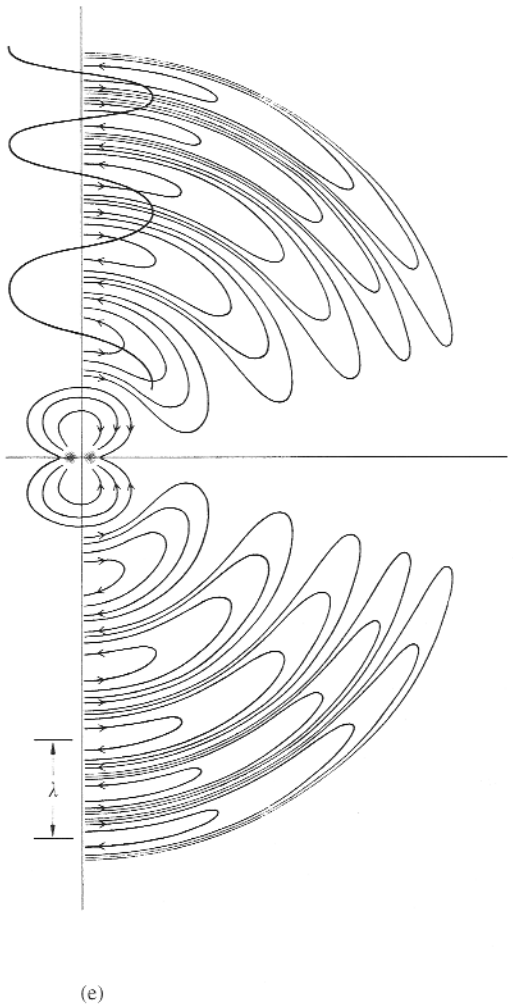


FIGURA 3.30 Campo **E** de un dipolo eléctrico oscilante.

cronización con la corriente oscilante que lo produce. Desafortunadamente, las ondas de radio AM miden cientos de metros de largo. Por consiguiente, la mitad del dipolo $\frac{1}{2}\lambda$ de la antena que se muestra en la figura está enterrado, lo cual permite ahorrar un poco de altura, de forma que el dispositivo mida solo $\frac{1}{4}\lambda$. Asimismo, este uso de la Tierra genera también lo que se denomina *onda terrestre* que abarca la superficie del planeta donde está ubicada la mayoría de las personas dotadas de radio. Una estación comercial tiene, por lo general, un rango entre 25 y 100 millas.

3.4.4 La emisión de luz por los átomos

Con toda seguridad, el mecanismo más significativo al que se debe la emisión natural y la absorción de la energía radiante —especialmente de la luz— es la *carga ligada*, es decir unos electrones que están confinados dentro de los átomos. Estas partículas negativas diminutas que rodean el núcleo positivo de cada átomo, constituyen una clase de nube cargada distante y tenue. La mayoría del comportamiento químico y óptico de la materia común está supeditada a sus electrones exteriores o de valencia. La parte restante de la nube está normalmente formada por capas «cerradas», esencialmente sin respuesta, colocadas

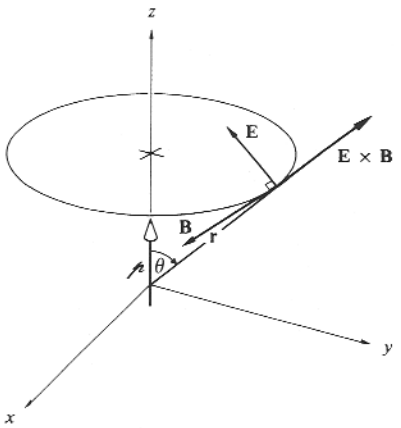


FIGURA 3.31 Orientaciones del campo para un dipolo eléctrico oscilante.

alrededor y estrechamente ligadas al núcleo. Estas capas cerradas o llenas están formadas por un número determinado de pares de electrones. Si bien no está del todo claro qué es lo que ocurre internamente cuando un átomo radia, sabemos con cierta seguridad que la luz se emite durante los reajustes en la distribución de la carga externa de la nube de electrones. Este mecanismo es, en definitiva, la fuente dominante de luz en el mundo.

Por lo general, un átomo existe con su grupo de electrones distribuidos según alguna configuración estable que se corresponde con su distribución de energía o *nivel* más bajos. Cada electrón se halla en el estado de energía más bajo que le sea permitido, y el átomo se halla en lo que conjuntamente se denomina configuración del **estado fundamental**. Es probable que se quede ahí indefinidamente si no se perturba. Cualquier mecanismo que inyecte energía dentro del átomo alterará ese estado fundamental. Por ejemplo, un choque con otro átomo, un electrón, o un fotón puede afectar inmensamente al estado energético del átomo. Un átomo puede existir con su nube de electrones tan sólo en ciertas configuraciones específicas que se corresponden con ciertos valores de energía. Además del estado fundamental, hay niveles de energía más elevados, los **estados excitados**, cada uno asociado con una configuración específica de nube y con un nivel energético bien definido. Cuando uno o más electrones pasan a ocupar un nivel más elevado que su nivel fundamental, se dice que el átomo está **excitado** —una condición intrínsecamente inestable y temporal—.

A bajas temperaturas, los átomos tienden a hallarse en su estado fundamental; a temperaturas progresivamente más elevadas, se excitarán más y más átomos mediante choques atómicos. Esta clase de mecanismo es indicativa de una clase de excitaciones relativamente suaves —descarga luminiscente, llama, chispa, etc.— que consiguen estimular tan sólo los electrones de valencia desapareados más externos. Nos centraremos inicialmente en estas transiciones de electrones externos que producen la emisión de luz y en los rayos infrarrojos y ultravioletas cercanos.

Cuando se da una cantidad suficiente de energía a un átomo (normalmente al electrón de valencia), sea cual fuere su causa, el átomo puede reaccionar pasando inmediatamente de un nivel más bajo de energía a uno más elevado (figura 3.33). El electrón dará lugar a una transición muy rápida, un **salto cuántico,** desde su configuración orbital del estado fundamental hasta uno de los estados excitados bien definidos, uno de los peldaños cuantificados de la escala energética. Por regla general, ***la cantidad de energía que se absorbe en un proceso es igual a la diferencia de energía entre los estados iniciales y***

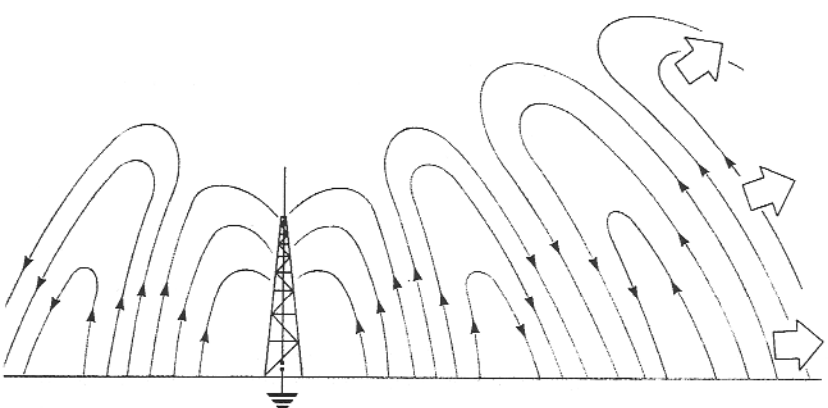


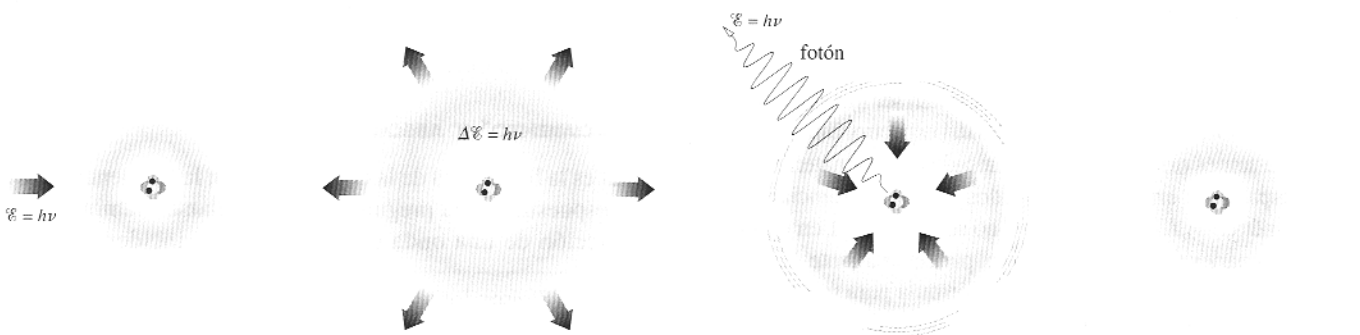
FIGURA 3.32 Ondas electromagnéticas de una torre de transmisión.

finales, y puesto que esto es específico y está bien definido, la cantidad de energía que un átomo puede absorber esté cuantificada (es decir, limitada a cantidades específicas). Este estado de excitación atómica es un fenómeno de resonancia de breve duración. Por lo general, después de aproximadamente 10^{-8} s o 10^{-9} s, el átomo excitado se relaja espontáneamente volviendo a un estado inferior, en la mayoría de los casos el estado fundamental, perdiendo energía a lo largo del camino. Este reajuste de energía puede producirse mediante emisión de luz o (especialmente en materiales densos) por conversión a energía térmica mediante choques interatómicos dentro del medio.

Si la transición atómica es acompañada de emisión de luz (como ocurre en un gas enrarecido), ***la energía del fotón se corresponderá exactamente con la reducción de energía cuantificada del átomo***. Esto equivale a una frecuencia específica, mediante $\Delta\mathscr{E} = h\nu$, una frecuencia asociada tanto con el fotón como con la transición atómica entre esos dos estados particulares. Esto se denomina **frecuencia de resonancia**, una de las muchas (cada una con su probabilidad de apariencia) en la que el átomo absorbe y emite eficazmente energía. El átomo irradia un cuanto de energía que supuestamente se crea espontáneamente, *in situ,* por el electrón móvil.

Si bien lo que acontece durante el intervalo de la transición atómica de 10^{-8} s está lejos de conocerse a ciencia cierta, puede ser útil imaginar que el electrón orbital lleva a cabo su transición energética hacia abajo mediante un movimiento oscilante gradualmente amortiguado a la frecuencia de resonancia específica. La luz emitida puede, entonces, imaginarse de manera semiclásica como si fuera emitida en un pulso direccional oscilante breve, o **tren de onda** que dura aproximadamente menos de 10^{-8} s —una imagen que concuerda con ciertas observaciones experimentales (véase sección 7.4.2, figura 7.25). Es útil poder pensar que este pulso electromagnético está asociado con el fotón de alguna manera inextricable. En cierto modo, el pulso es una representación semiclásica de la naturaleza ondulatoria manifiesta del fotón. Pero los dos *no* se equivalen bajo todos los puntos de vista: el tren de onda electromagnético es una creación clásica que describe muy bien la propagación y la distribución espacial de la luz, sin embargo su energía no está cuantificada, siendo ésta una de las características esenciales de los fotones. Por consiguiente, cuando consideramos trenes de onda de fotones, no hay que olvidar que no se trata sólo de un pulso oscilante clásico de la onda electromagnética; hay algo más. Naturalmente, la razón que nos lleva a presentar la noción de la emisión de los trenes de onda es el poder disponer de una base sobre la cual hablar de la frecuencia de la luz. Este es, quizás, el problema central de todo modelo simple de fotón: ¿Qué factor manifiesta la frecuencia?

Los espectros de emisión de los átomos individuales o gases a baja presión, cuyos átomos no interaccionan de manera perceptible, están formados por «líneas» agudas, es decir, frecuencias bastante bien definidas, típicas de los átomos. Siempre hay algo de ensanchamiento de la frecuencia de la radiación debido al movimiento atómico, a los choques, etc.; por lo tanto, no es nunca precisamente monocromática. Sin embargo, la transición atómica desde un nivel hasta otro está, por lo general, caracterizada por la emisión de una gama estrecha y bien definida de frecuencias. Por otro lado, los espectros de los sólidos y líqui-



(a) El estado fundamental está a punto de recibir un impulso de energía.

(b) Excitación del estado fundamental

(c) Desexcitación por emisión de un fotón

(d) Estado fundamental $=10^{-8}$ segundos más tarde

FIGURA 3.33 Excitación de un átomo. (*a*) Se suministra la cantidad de energía $h\nu$ al átomo. (*b*) Puesto que coincide con la energía necesaria para alcanzar un estado excitado, el átomo absorbe la energía alcanzando un nivel energético más elevado. (*c*) Con la emisión de un fotón, recae (*d*) y vuelve a su estado fundamental en unos 10^{-8} s.

dos, en los que los átomos interaccionan mutuamente, se amplían a bandas de frecuencia ancha. Cuando dos átomos se juntan, el resultado es un leve cambio en sus niveles de energía respectivos, porque actúan uno sobre el otro. Los numerosos átomos que interaccionan en un sólido, producen un número elevadísimo de estos niveles desplazados, expandiéndose de hecho desde cada uno de sus niveles originales, hasta convertirse esencialmente en bandas continuas. Los materiales de esta clase emiten y absorben sobre amplios rangos de frecuencias.

3.5 La luz en la materia

La respuesta de materiales dieléctricos o aislantes a los campos electromagnéticos interesa a la óptica especialmente. Naturalmente, nos ocuparemos de los dieléctricos transparentes que tiene forma de lentes, prismas, placas, películas, etc., sin llegar a mencionar el océano de aire que nos rodea.

El efecto neto de introducir un dieléctrico isótropo y homogéneo en una región del espacio libre es cambiar ϵ_0 por ϵ y μ_0 por μ en las ecuaciones de Maxwell. La velocidad de fase en el medio pasa a ser

$$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} \tag{3.58}$$

El cociente entre la velocidad de una onda electromagnética en el vacío y en la materia se denomina **índice de refracción absoluto** n:

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \tag{3.59}$$

En términos de permitividad y permeabilidad relativas del medio, n pasa a ser:

$$n = \sqrt{K_E K_M} \tag{3.60}$$

Existen sustancias magnéticas que resultan ser transparentes en las regiones infrarroja y de microondas del espectro. Sin embargo, nosotros estamos principalmente interesados en los materiales que son transparentes en el visible y todos estos son esencialmente «no-magnéticos». K_M generalmente no se desvía de 1 en más que unas pocas partes en 10^4 (por ejemplo, para el diamante $K_M = 1 - 2{,}2 \times 10^{-5}$). Poniendo $K_M = 1$ en la fórmula para n resulta una expresión denominada *Relación de Maxwell*, es decir

$$n = \sqrt{K_E} \tag{3.61}$$

donde K_E se supone que es la *constante dieléctrica estática*. Como se indica en la tabla 3.2, esta relación parece funcionar bien sólo para algunos gases simples. La dificultad surge porque K_E y, por lo tanto, n *dependen* realmente *de la frecuencia*. La dependencia de n con la longitud de onda (o color) de la luz es un efecto conocido con el nombre de **dispersión**. Surge a nivel microscópico, por lo tanto en las Ecuaciones de Maxwell casi no se da cuenta de ello. Hace más de trescientos años, Isaac Newton utilizó unos prismas para dispersar la luz blanca en sus colores constituyentes, y el fenómeno era ya entonces, si no bien entendido, si bien conocido.

TABLA 3.2 Relación de Maxwell

Gases a 0 °C y 1 atm

Sustancia	$\sqrt{K_E}$	n
Aire	1,000294	1,000293
Helio	1,000034	1,000036
Hidrógeno	1,000131	1,000132
Dióxido de carbono	1,00049	1,00045

Líquidos a 20 °C

Sustancia	$\sqrt{K_E}$	n
Benceno	1,51	1,501
Agua	8,96	1,333
Alcohol etílico (etanol)	5,08	1,361
Tetracloruro de carbono	4,63	1,461
Disulfuro de carbono	5,04	1,628

Sólidos a temperatura ambiente

Sustancia	$\sqrt{K_E}$	n
Diamante	4,06	2,419
Ambar	1,6	1,55
Sílice fundida	1,94	1,458
Cloruro de sodio	2,37	1,50

Los valores de K_E corresponden a las frecuencias más bajas posibles, en algunos casos de hasta 60 Hz, mientras que n se mide a aproximadamente $0{,}5 \times 10^{15}$ Hz. Se utilizó luz D de sodio ($\lambda = 589{,}29$ nm).

Esparcimiento* y absorción

¿Cuál es la base física de la dependencia en la frecuencia de n? Las respuestas a esta pregunta pueden hallarse examinando la interacción de una onda electromagnética incidente con la

* Nota del Revisor: Los términos en inglés «scattering» y «dispersion» suelen presentar problemas en su traducción. Nosotros mantendremos aquí la traducción por «esparcimiento» y «dispersión», respectivamente. No obstante es también frecuente encontrar «scattering» traducido como dispersión (p. ej. en física de partículas), lo que origina confusión entre los procesos de interacción microscópica tipo colisión y los de dependencia de la velocidad con la frecuencia o con la longitud de onda, que son propiamente los dispersivos.

serie de átomos que constituyen un material dieléctrico. Un átomo puede reaccionar a la luz entrante de dos maneras distintas, dependiendo de la frecuencia de incidencia o, de forma equivalente, de la energía del fotón entrante ($\mathscr{E} = h\nu$). Por lo general, el átomo «esparcirá» la luz, dándole otra dirección pero sin alterarla. Por otro lado, si la energía del fotón equivale a la de los estados excitados, el átomo «absorberá» la luz, realizando un salto cuántico hasta ese nivel más alto de energía. En el entorno atómico denso de gases (a presiones de alrededor 10^2 Pa y más elevadas), sólidos y líquidos normales es muy probable que esta energía excitadora se transfiera rápidamente, por colisiones, al movimiento atómico aleatorio, energía térmica, antes de que pueda emitirse un fotón. Este proceso típico (capturar un fotón y su conversión en energía térmica) se conocía comúnmente, en el pasado, como «absorción», pero hoy en día este término se utiliza más a menudo para referirse sólo al hecho de «capturar», independientemente de lo que luego ocurra con la energía. Por consiguiente, ahora se denomina **absorción disipativa**.

Contrariamente al proceso de excitación, el esparcimiento **no resonante** o del estado-fundamental tiene lugar con energía radiante entrante de otras frecuencias, es decir, más baja que las frecuencias de resonancia. Imagínese un átomo en su estado más bajo y supóngase que interacciona con un fotón cuya energía es demasiado pequeña para producir una transición hacia cualquiera de los estados excitados más altos. A pesar de esto, puede suponerse que el campo electromagnético de la luz lleve la nube de electrones a oscilar. No resulta ninguna transición atómica; el átomo permanece en su estado fundamental mientras que la nube vibra muy débilmente a la frecuencia de la luz incidente. Una vez que la nube de electrones empieza a vibrar con respecto al núcleo positivo, el sistema constituye un dipolo oscilante y, supuestamente, empezará *inmediatamente* a radiar a la misma frecuencia. La luz dispersa resultante consta de un fotón que sale disparado hacia alguna dirección llevando la misma cantidad de energía que el fotón incidente —***el esparcimiento es elástico***—. De hecho, el átomo se asemeja a un pequeño dipolo oscilante, un modelo que utilizó Hendrik Antoon Lorentz (1878) para ampliar la Teoría de Maxwell, con el tratamiento clásico, al dominio atómico. Si la luz incidente no está polarizada, los osciladores atómicos esparcen al azar.

Cuando un átomo se irradia con luz, el proceso de excitación y de emisión espontánea se repite rápidamente. De hecho, con un tiempo de vida de emisión de $\approx 10^{-8}$ s, un átomo podría emitir hasta 10^8 fotones por segundo si hubiera bastante energía para volver a excitarlo. Los átomos tienen una tendencia muy fuerte a interaccionar con la luz resonante (tienen una *sección eficaz de absorción* muy grande). Esto significa que la condición de saturación, en la que los átomos de un gas a baja presión emiten y se vuelven a excitar constantemente, se produce con un valor de irradiancia modesto ($\approx 10^2$ W/m^2). Por lo tanto, no es muy difícil conseguir que los átomos emitan fotones a un ritmo de 100 millones por segundo.

Por lo general, podemos imaginar que en un medio iluminado por un haz de luz normal, cada átomo se comporte como si fuera una «fuente» de un número muy elevado de fotones (que se dispersan tanto elásticamente como resonantemente), dirigiéndose a todas partes. Un flujo de energía como éste se parece a una onda esférica clásica. ***Por lo tanto, imaginamos un átomo (si bien se trate de una manera simplista) como fuente puntual de ondas electromagnéticas esféricas,*** a condición de que recordemos la advertencia de Einstein según la cual «la radiación saliente en forma de ondas esféricas no existe».

Cuando un material que no tiene resonancias en el visible se sumerge en luz, se produce dispersión no resonante que hará que cada átomo participante parezca una fuente diminuta de onditas esféricas. Normalmente, cuanto más cerca esté la frecuencia del rayo incidente de la resonancia atómica, más fuerte será la interacción y, en materiales densos, más energía se absorberá de manera disipativa. Es precisamente este mecanismo de *absorción selectiva* (véase sección 4.9) lo que crea gran parte de la apariencia visual de las cosas. Es el primer responsable del color del pelo, de la piel, de la vestimenta, de las hojas, de las manzanas y de la pintura.

3.5.1. Dispersión

La Teoría de Maxwell considera la materia como continua, representando sus respuestas eléctricas y magnéticas a los campos aplicados **E** y **B** en términos de constantes, ϵ y μ. Por consiguiente, K_E y K_M son también constantes mientras que n es, por lo tanto, de forma no realista, independiente de la frecuencia. Para poder analizar teóricamente la dispersión (la dependencia en la frecuencia del índice de refracción), es necesario incorporar la naturaleza atómica de la materia y aprovechar algún aspecto de la misma que depende de la frecuencia. Según H. A. Lorentz, las contribuciones de grandes números de átomos pueden promediarse para representar el comportamiento de un medio dieléctrico isótropo.

Cuando un dieléctrico está sujeto a un campo eléctrico aplicado, la distribución de la carga interna se distorsiona. Esto se

debe a la generación de momentos dipolares eléctricos que, a su vez, contribuyen al campo interno total. De manera más sencilla, el campo externo separa las cargas negativas de las positivas del medio (cada par de las cuales es un dipolo) y luego ellas aportan un componente adicional del campo. El momento dipolar resultante por unidad de volumen se denomina **polarización eléctrica P**. Para la mayoría de los materiales **P** y **E** son proporcionales y pueden relacionarse satisfactoriamente con

$$(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} = \mathbf{P} \tag{3.62}$$

La redistribución de la carga y la polarización que de ello procede puede producirse mediante los mecanismos siguientes. Existen moléculas que disponen de un momento dipolar permanente como resultado de una compartición desigual de electrones de valencia. Éstas se denominan *moléculas polares*; la molécula no lineal del agua es un ejemplo bastante típico (figura 3.34). Cada enlace hidrógeno-oxígeno es covalente polar, cuyo extremo H es positivo con respecto al extremo O. La agitación térmica hace que los dipolos moleculares se mantengan orientados al azar. Con la introducción de un campo eléctrico, los dipolos se alinean y el dieléctrico asume una **polarización orientacional**. En el caso de *moléculas no polares* y *átomos*, el campo aplicado distorsiona la nube de electrones, desplazándola respecto el núcleo y produciendo, por consiguiente, un momento dipolar. Además de esta **polarización electrónica**, existe otro proceso que se aplica precisamente a las moléculas, por ejemplo, al cristal iónico NaCl. En presencia de un campo eléctrico, los iones negativos y positivos experimentan un desplazamiento recíproco. Por tanto, los momentos dipolares se inducen, produciendo lo que se denomina **polarización atómica** o **iónica**.

Si el dieléctrico es sometido a una onda electromagnética armónica incidente, la estructura de su carga interna experimentará fuerzas y/o torsiones variables en el tiempo, proporcionales a la componente del campo eléctrico de la onda [10]. Para los fluidos que son dieléctricos polares, las moléculas son sometidas a rotaciones rápidas, alineándose con el campo $\mathbf{E}(t)$. Sin embargo, estas moléculas son relativamente grandes y tienen unos momentos de inercia apreciables. A frecuencias elevadas de excitación ω, las moléculas polares no podrán seguir

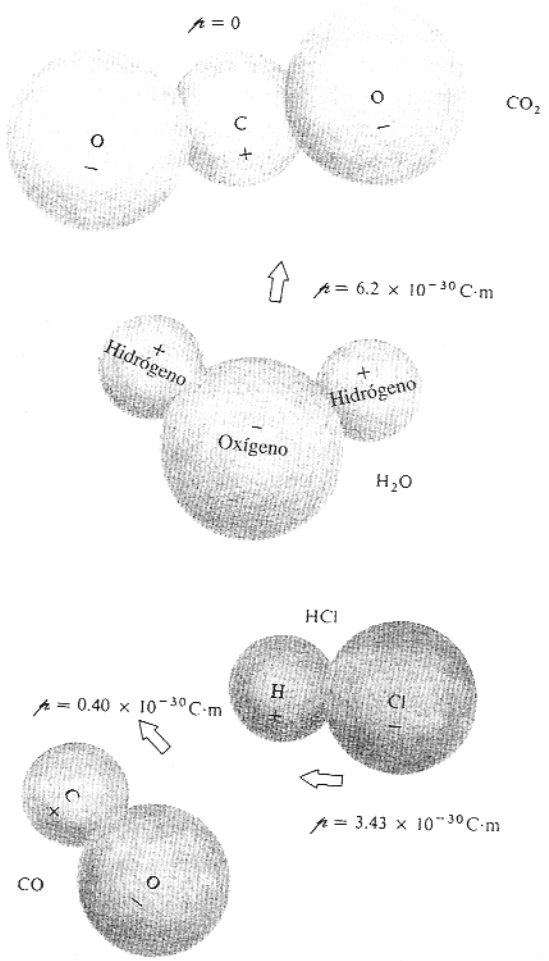


FIGURA 3.34 Moléculas variadas y sus momentos dipolares.

las alteraciones del campo; su aportación a **P** disminuirá y K_E se reducirá sensiblemente. La permitividad relativa del agua es bastante constante desde unos 80 hasta los 10^{10} Hz, bajando después bastante rápidamente.

En cambio, los electrones tienen poca inercia y pueden continuar a seguir al campo, contribuyendo a $K_E(\omega)$ hasta frecuencias ópticas (unos 5×10^{14} Hz). Por lo tanto, la dependencia de n en ω se rige por la intervención de varios mecanismos de polarización eléctrica que contribuyen a la frecuencia particular. Recordando esto, es posible derivar una expresión analítica para $n(\omega)$ en términos de lo que sucede en el medio a nivel atómico.

[10] Las fuerzas que surgen de la componente magnética del campo tienen la forma $\mathbf{F}_M = q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ en comparación con $\mathbf{F}_E = q \cdot \mathbf{E}$ para la componente eléctrica; pero v <<c, por consiguiente de la Ec. (3.30) se deduce que $\mathbf{F}_M$ es, por lo general, despreciable.

La nube electrónica del átomo está ligada al núcleo positivo por una fuerza eléctrica de atracción que la mantiene en una especie de configuración de equilibrio. Sin conocer muchos más detalles acerca de las interacciones atómicas internas, podemos anticipar que, al igual de otros sistemas mecánicos estables que no están completamente afectados por pequeñas perturbaciones, tiene que haber una fuerza neta, F para restablecer el equilibrio del sistema. Además, podemos pensar razonablemente que para desplazamientos muy pequeños, x, desde el equilibrio (donde $F = 0$), la fuerza será lineal en x. Dicho de otra forma, una representación gráfica de $F(x)$ frente a x cruzará el eje x en el punto de equilibrio ($x = 0$) y será una línea recta muy cerca a ambos lados. Por lo tanto, para pequeños desplazamientos, se puede suponer que las fuerzas de restablecimiento tienen la forma de $F = -kx$. Una vez que un electrón ligado haya sido perturbado momentáneamente de esta forma, oscilará alrededor de su posición de equilibrio con una **frecuencia de resonancia** o **natural** dada por $\omega_0 = \sqrt{k/m_e}$ donde m_e es su masa. Esta es la frecuencia oscilatoria del sistema *sin excitación*.

Un medio material se representa como una agrupación, en el vacío, de un número muy elevado de átomos polarizables, cada uno de los cuales es pequeño (con respecto a la longitud de onda de la luz) y está cerca de sus vecinos. Cuando una onda luminosa incide en dicho medio, cada átomo puede considerarse como un **oscilador forzado** clásico que está siendo excitado por un campo eléctrico variable en el tiempo $E(t)$ de la onda, que aquí se supone está aplicado en la dirección x. La figura 3.35*b* es una representación mecánica de tal oscilador en un *medio isótropo* donde la capa de carga negativa está atada a un núcleo positivo estacionario por muelles idénticos. Aún en la luz brillante del Sol, la amplitud de las oscilaciones no será mayor de unos 10^{-17} m. La fuerza (F_E) ejercida sobre un electrón de carga q_e por el campo $E(t)$ de una onda armónica de frecuencia ω tiene la forma

$$F_E = q_e E(t) = q_e E_0 \cos \omega t \tag{3.63}$$

Por consiguiente, la Segunda Ley de Newton proporciona la ecuación de movimiento; es decir, la suma de las fuerzas es igual a la masa por la aceleración

$$q_e E_0 \cos \omega t - m_e \omega_0^2 x = m_e \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3.64}$$

El primer término a la izquierda es la fuerza impulsora y el segundo es la fuerza restablecedora opuesta. Para satisfacer esta expresión, x tendrá que ser una función cuya segunda derivada no sea muy distinta a x. Además, podemos anticipar que el electrón oscilará a la misma frecuencia de $E(t)$, por lo tanto podemos «adivinar» la solución

$$x(t) = x_0 \cos \omega t$$

y reemplazarla en la ecuación para calcular la amplitud x_o. De esta manera, encontramos que

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \tag{3.65}$$

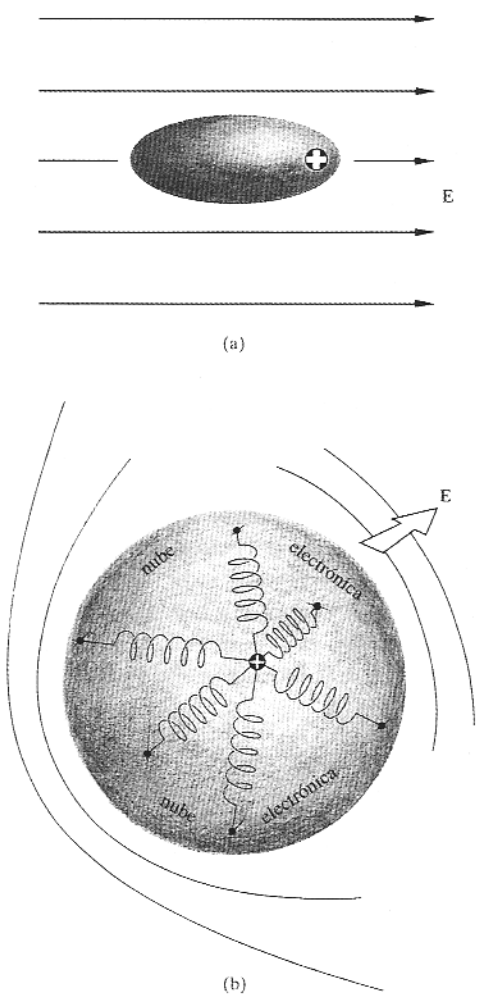


FIGURA 3.35 (*a*) Distorsión de la nube electrónica al aplicarle un campo **E**. (*b*) Modelo de oscilador mecánico para un medio isótropo —todos los muelles son iguales y el oscilador puede vibrar por igual en todas las direcciones.

o
$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \tag{3.66}$$

Este es el desplazamiento relativo entre la nube negativa y el núcleo positivo. Tradicionalmente, se deja q_e positiva y se habla del desplazamiento del oscilador. Sin una fuerza impulsora (ninguna onda incidente), el oscilador vibrará a su *frecuencia de resonancia* ω_0. En presencia de un campo cuya frecuencia sea menor que ω_0, $E(t)$ y $x(t)$ tendrán el mismo signo, lo cual significa que el oscilador puede seguir a la fuerza aplicada (es decir, está en fase con la misma). Sin embargo, cuando $\omega > \omega_0$ el desplazamiento $x(t)$ es en la dirección opuesta al de la fuerza instantánea $q_eE(t)$ y, por consiguiente, está desfasado con respecto a la misma en 180°. Recordemos que estamos hablando de dipolos oscilantes donde $\omega_0 > \omega$, el movimiento relativo de la carga *positiva* es una vibración en la dirección del campo. Por encima de la resonancia, la carga positiva está desfasada con respecto al campo en 180° y se dice que el dipolo está retardado en π rad.

El momento dipolar equivale a la carga q_e multiplicada por su desplazamiento y si existe un número de electrones N por unidad de volumen, la polarización eléctrica o densidad de los momentos dipolares es:

$$P = q_e x N \tag{3.67}$$

Por lo tanto

$$P = \frac{q_e^2 NE/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{3.68}$$

y de la ecuación (3.62)

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{P(t)}{E(t)} = \epsilon_0 + \frac{q_e^2 N/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{3.69}$$

Utilizando el hecho de que $n^2 = K_E = \epsilon/\epsilon_0$, podemos llegar a una expresión para n como función de ω, que se conoce como **ecuación de dispersión**:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{3.70}$$

A frecuencias cada vez superiores a la resonancia $(\omega_0^2 - \omega^2) < 0$, estando el oscilador sujeto a unos desplazamientos que estarán fuera de fase con respecto a la fuerza impulsora en unos 180°. La polarización eléctrica resultante estará, por lo tanto, análogamente desfasada con respecto al campo eléctrico aplicado. Por consiguiente, la constante dieléctrica y el índice de refracción serán ambos menores de 1. A frecuencias cada vez más por debajo de la resonancia $(\omega_0^2 - \omega^2) > 0$, la polarización eléctrica estará casi en fase con el campo eléctrico aplicado. La constante dieléctrica y el índice de refracción correspondiente serán ambos superiores a 1. Esta clase de comportamiento que, a decir verdad, representa sólo una parte de lo que acontece, se observa sin embargo en casi todas las clases de materiales.

Podemos comprobar la utilidad del análisis utilizando un prisma dispersivo (pág. 192) hecho con el material de la muestra que se estudia, teniendo que volver a escribir, primero, la ecuación (3.70) como en el problema 3.46:

$$(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$$

donde, puesto que $\omega = 2\pi c/\lambda$, la constante multiplicativa está dada por $C = 4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e/Nq_e^2$. En la figura 3.36 se muestra un gráfico de $(n^2 - 1)^{-1}$ frente a λ^{-2} utilizando unos datos de un experimento de un estudiante. Un prisma de vidrio de crown se iluminó con las distintas longitudes de onda de un tubo de descarga de He, midiéndose el índice de refracción de cada una (tabla 3.3). La curva resultante es realmente una línea recta; su pendiente (utilizando $y = mx + b$) equivale a $-C$, y su intersección con y corresponde a $C\lambda_0^{-2}$. De esto se deduce que la frecuencia de resonancia es $2{,}95 \times 10^{15}$ Hz, que se halla realmente en el ultravioleta.

Por lo general, cualquier sustancia se someterá a varias transiciones desde $n > 1$ hasta $n < 1$ al ir creciendo la frecuencia de iluminación. Esto significa que en lugar de una única frecuencia ω_0 en la que el sistema resuena, existen aparentemente varias de tales frecuencias. Podríamos generalizar la cuestión suponiendo que existen N moléculas por unidad de

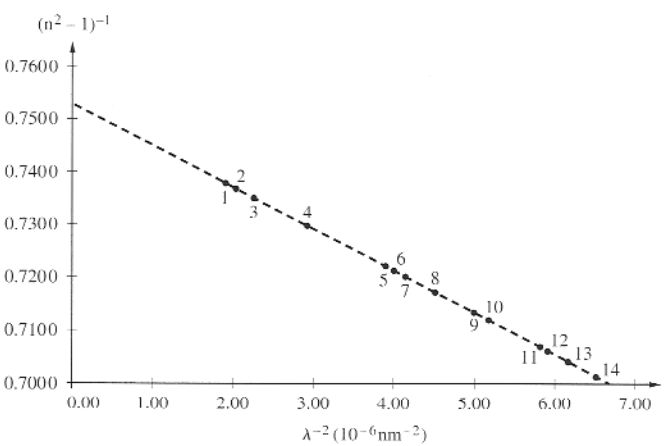


FIGURA 3.36 Gráfico de $(n^2 - 1)^{-1}$ frente a λ^{-2} para los datos recogidos en la tabla 3.3. Véase N. Gauthier, *Phys. Teach.*, **25**, 502 (1987).

TABLA 3.3 Dispersión de vidrio Crown. Las longitudes de onda son las de un tubo de descarga de He. Se midieron los índices correspondientes

	Longitud de onda λ (nm)	Índice de refracción n
1.	728,135	1,534 6
2.	706,519 706,570	1,535 2
3.	667,815	1,536 29
4.	587,562 587,587	1,539 54
5.	504,774	1,544 17
6.	501,567	1,544 73
7.	492,193	1,545 28
8.	471,314	1,546 24
9.	447,148	1,549 43
10.	438,793	1,550 26
11.	414,376	1,553 74
12.	412,086	1,554 02
13.	402,619	1,555 30
14.	388,865	1,557 67

volumen, cada una con unos osciladores f_j que tienen unas frecuencias naturales ω_{0j}, donde $j = 1, 2, 3...$ En este caso:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \left(\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \right) \qquad (3.71)$$

Se trata, básicamente, del mismo resultado que aquel procedente del estudio mecánico-cuántico, con la excepción de que es preciso volver a interpretar algunos de los términos. Por consiguiente, las cantidades ω_{0j} serían las frecuencias características a las que un átomo puede absorber o emitir energía radiante. Los términos f_j, que satisfacen el requisito de que $\Sigma_j f_j = 1$, son factores de peso denominados *fuerzas de oscilador*. Reflejan el énfasis que debería ponerse en cada uno de los modos. Puesto que miden la probabilidad de una transición atómica, los términos f_j se denominan también *probabilidades de transición*.

Una reintepretación similar de dichos términos es necesaria también para la concepción clásica, visto que para que haya acuerdo con los datos experimentales, deberían ser menores que la unidad. Esto se opone, lógicamente, a la definición de la f_j que llevó a la ecuación (3.71). Por lo tanto, se supone que una molécula dispone de muchos modos de oscilación pero que cada una de éstas tiene una frecuencia natural y una fuerza específica.

Obsérvese que cuando ω equivale a una cualquiera de las frecuencias características, n es discontinuo, contrariamente a la observación real. Esto es sencillamente el resultado de haber despreciado el término de amortiguación de la amplitud de onda que debería haber aparecido en el denominador de la suma. Por cierto, esa amortiguación de la amplitud se debe, en parte, a la energía perdida cuando los osciladores forzados vuelven a radiar. En los sólidos, líquidos y gases a alta presión ($\approx 10^3$ atm), las distancias interatómicas son, aproximadamente, 10 veces menores que las de un gas a temperatura y presión estándares. Los átomos y las moléculas que se hallan en esta proximidad relativa están sujetos a fuertes interacciones y a una fuerza resultante de «fricción». El efecto es una disminución de la amplitud de los osciladores y una disipación de su energía dentro de la substancia en forma de «calor» (movimiento molecular aleatorio).

Si hubiéramos incluido una fuerza de disminución de la amplitud proporcional a la velocidad (de la forma $m_e\gamma\, dx/dt$) en la ecuación de movimiento, la ecuación de dispersión (3.71) habría sido:

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega} \qquad (3.72)$$

Si bien esta expresión es correcta para medios enrarecidos como los gases, habrá de superarse otra dificultad si se desea aplicar la ecuación a sustancias densas. Cada átomo interacciona con el campo eléctrico local en el que está sumergido. Sin embargo, contrariamente a los átomos aislados analizados arriba, los de un material denso estarán también sujetos al campo inducido establecido por sus vecinos. Por consiguiente, además del campo aplicado $E(t)$, un átomo «ve» otro campo [11], en concreto, $P(t)/3\epsilon_0$. Sin entrar en detalles aquí, se puede demostrar que

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega} \qquad (3.73)$$

Hasta ahora hemos analizado, casi exclusivamente, osciladores electrónicos; sin embargo el mismo resultado se hubiera podido aplicar también a iones enlazados con posiciones atómicas fijas. En ese caso, m_e se reemplazaría por la masa iónica, notablemente más grande. Por lo tanto, si bien la polarización electrónica es importante en todo el espectro óptico, las contri-

[11] Este resultado que se aplica a los medios isótropos se encuentra en casi en todos los textos sobre la Teoría electromagnética.

buciones de la polarización iónica afectan considerablemente a n tan sólo en las regiones de resonancia ($\omega_{0j} = \omega$).

Las implicaciones de un índice complejo de refracción se analizarán más tarde, en la sección 4.8. Por ahora, limitamos la discusión, en su mayor parte, a las situaciones en las que la absorción es despreciable (es decir, $\omega_{0j}^2 - \omega^2 >> \gamma_j\omega$) y n es real, por lo tanto

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Nq_e^2}{3\epsilon_0 m_e} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2} \tag{3.74}$$

Las frecuencias características de los materiales incoloros y transparentes se hallan fuera de la región visible del espectro (por esta razón son, de hecho, incoloros y transparentes). En concreto, las frecuencias naturales de los vidrios está por encima de la región visible, en el ultravioleta, donde se vuelven opacos. En los casos en los que $\omega_{0j}^2 >> \omega^2$, puede despreciarse ω^2 en la ecuación (3.74), dando un índice de refracción esencialmente constante en esa región de frecuencias. Por ejemplo, las frecuencias características de los vidrios se encuentran en una longitud de onda de unos 100 nm. La mitad del rango visible es aproximadamente cinco veces más grande que ese valor, y ahí, $\omega_{0j}^2 >> \omega^2$. Obsérvese que mientras que ω va aumentando hacia ω_{0j}, $(\omega_{0j}^2 - \omega^2)$ disminuye y n *incrementa gradualmente con la frecuencia*, como se pone de manifiesto en la figura 3.37. Esto se denomina **dispersión normal**. En la región ultravioleta, al acercarse ω a una frecuencia natural, los osciladores empezarán a resonar. Sus amplitudes aumentarán considerablemente, y esto estará acompañado de amortiguación y de una fuerte absorción de energía de la onda incidente. Cuando $\omega_{0j} = \omega$ en la ecuación (3.73), el término de amortiguación se hará dominante. Las regiones que se hallan alrededor de las diferentes ω_{0j} en la figura 3.38 se denominan **bandas de absorción**. Ahí $dn/d\omega$ es negativo, y se dice que el proceso es de **dispersión anómala** (es decir, anormal). Cuando la luz blanca pasa a través de un prisma de vidrio, la componente azul tiene un índice más elevado que la roja, por lo tanto se desvía por un ángulo más grande (véase sección 5.5.1.). Por el contrario, cuando se utiliza un prisma de celda para líquidos que contenga una disolución de colorante con una banda de absorción en el rango visible, el espectro se altera considerablemente (véase problema 3.43). Todas las sustancias poseen unas bandas de absorción en algún sitio dentro del espectro de frecuencias electromagnéticas, así que el término *dispersión anómala* que se remonta a finales del siglo XIX, es con toda seguridad una denominación errónea.

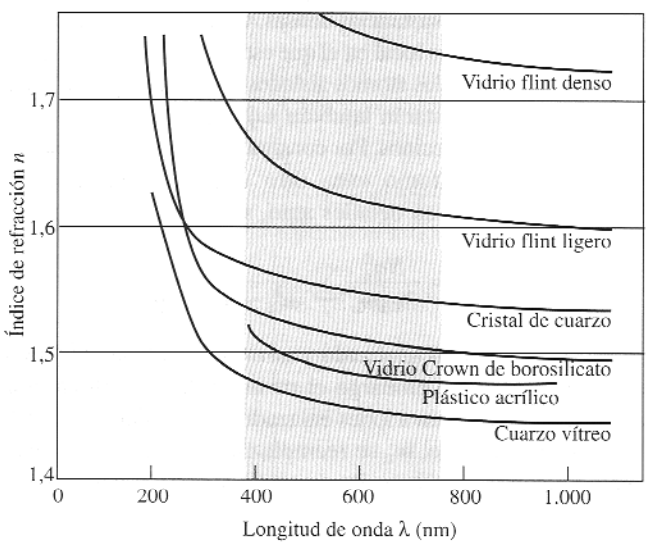


FIGURA 3.37 Dependencia con la longitud de onda del índice de refracción de varios materiales.

Como hemos visto, los átomos en una molécula pueden también vibrar cerca de sus posiciones de equilibrio. Sin embargo, los núcleos son pesados y las frecuencias de oscilación naturales son bajas en el infrarrojo. Las moléculas como H_2O y CO_2 tienen resonancias tanto en el infrarrojo como en el ultravioleta. Cuando el agua es atrapada en un trozo de vidrio durante el proceso de producción de éste, se dispone de estos osciladores moleculares y existe una banda de absorción en el infrarrojo. También la presencia de óxidos conlleva la absorción en el infrarrojo. En la figura 3.39 se muestran las curvas $n(\omega)$ (que van del ultravioleta al infrarrojo) para varios cristales ópticos importantes. Obsérvese cómo aumentan en el infrarrojo y cómo bajan en la ultravioleta. A las frecuencias aún más bajas de las ondas de radio, el vidrio se vuelve otra vez transparente. Un trozo de vidrio de color tiene lógicamente una resonancia en el visible donde absorbe un rango particular de frecuencias, transmitiendo el color complementario.

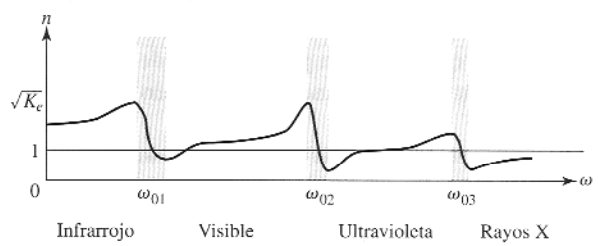


FIGURA 3.38 Índice de refracción frente a la frecuencia.

Como punto final, obsérvese que si la frecuencia impulsora es más grande que cualquiera de los términos ω_{0j}, entonces $n^2 < 1$ y $n < 1$. Esta situación puede darse si, por ejemplo, proyectamos rayos X sobre una placa de vidrio. Se trata de un resultado cuando menos curioso, puesto que lleva a $v > c$, en una contradicción aparente con la Relatividad Especial. Consideraremos este comportamiento de nuevo cuando hablemos de la velocidad de grupo (sección 7.6).

Resumiendo parcialmente, en la región visible del espectro, la polarización electrónica es el mecanismo operativo que determina $n(\omega)$. Clásicamente imaginamos que los osciladores electrónicos vibran a la frecuencia de la onda incidente. Cuando la frecuencia de ésta es sensiblemente distinta a la natural o característica, las oscilaciones son pequeñas y hay poca absorción disipativa. En la resonancia, sin embargo, las amplitudes de los osciladores aumentan y el campo desarrolla un mayor trabajo sobre las cargas. La energía electromagnética que se elimina de la onda y se convierte en energía mecánica se disipa térmicamente en la sustancia. En este caso, se habla de banda o pico de absorción. Si bien el material es esencialmente transparente a otras frecuencias, es bastante opaco a la radiación incidente en sus frecuencias características (figura 3.40).

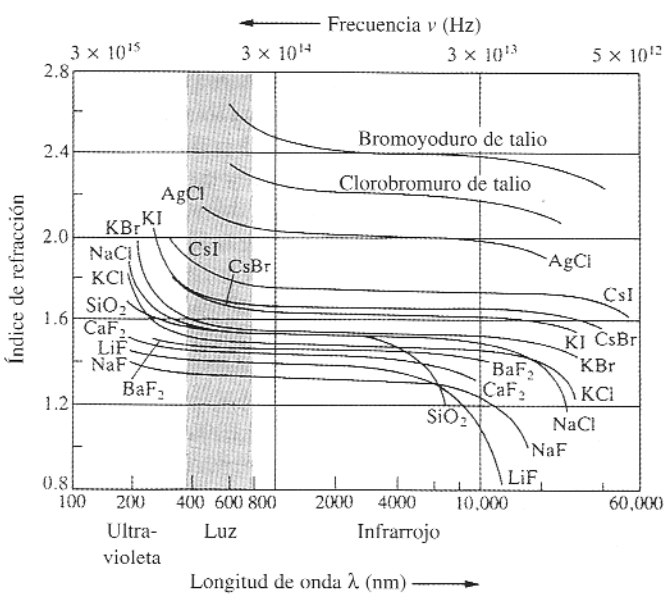


FIGURA 3.39 Índice de refracción frente a longitud de onda y frecuencia para varios cristales ópticos importantes. (Basado en los datos publicados por The Harshaw Chemical Co.)

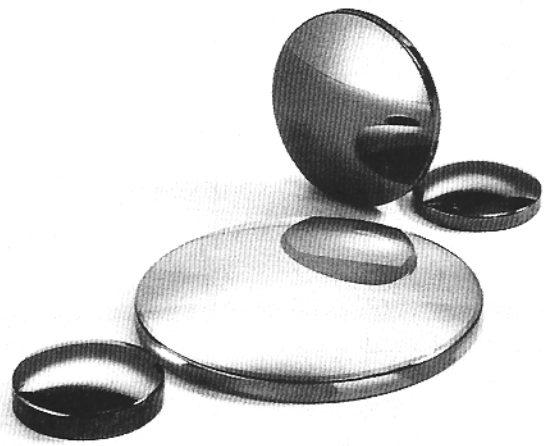


FIGURA 3.40 Grupo de lentes semiconductoras hechas de ZnSe, CdTe, GaAs y Ge. Estos materiales son especialmente útiles en el infrarrojo (de 2 μm a 30 μm) donde son muy transparentes a pesar de ser bastante opacos en la región del visible del espectro. (Foto cedida por Two-Six Incorporated.)

3.6 El espectro electromagnético

Cuando, en 1867, Maxwell publicó la primera descripción extensa de su teoría electromagnética, la banda de frecuencias que se conocía se extendía solamente desde el infrarrojo, pasando por el visible, hasta el ultravioleta. Aunque esta región es de gran importancia en óptica, es solamente un pequeño segmento del vasto espectro **electromagnético** (véase figura 3.41). En esta sección, se enumeran las categorías principales (en realidad hay alguna superposición) en las que se suele dividir el espectro.

3.6.1 Ondas de radio frecuencia

En 1887, ocho años después de la muerte de Maxwell, Heinrich Hertz, entonces profesor de física en la Technische Hochschule de Karlsruhe, Alemania, consiguió generar y detectar ondas electromagnéticas [12]. Su transmisor era esencialmente una descarga oscilante a través de un disruptor (una forma de dipolo

[12] David Hughes puede haber sido la primera persona en realizar esta hazaña, pero sus experimentos de 1879 permanecieron sin publicar y sin conocerse por muchos años.

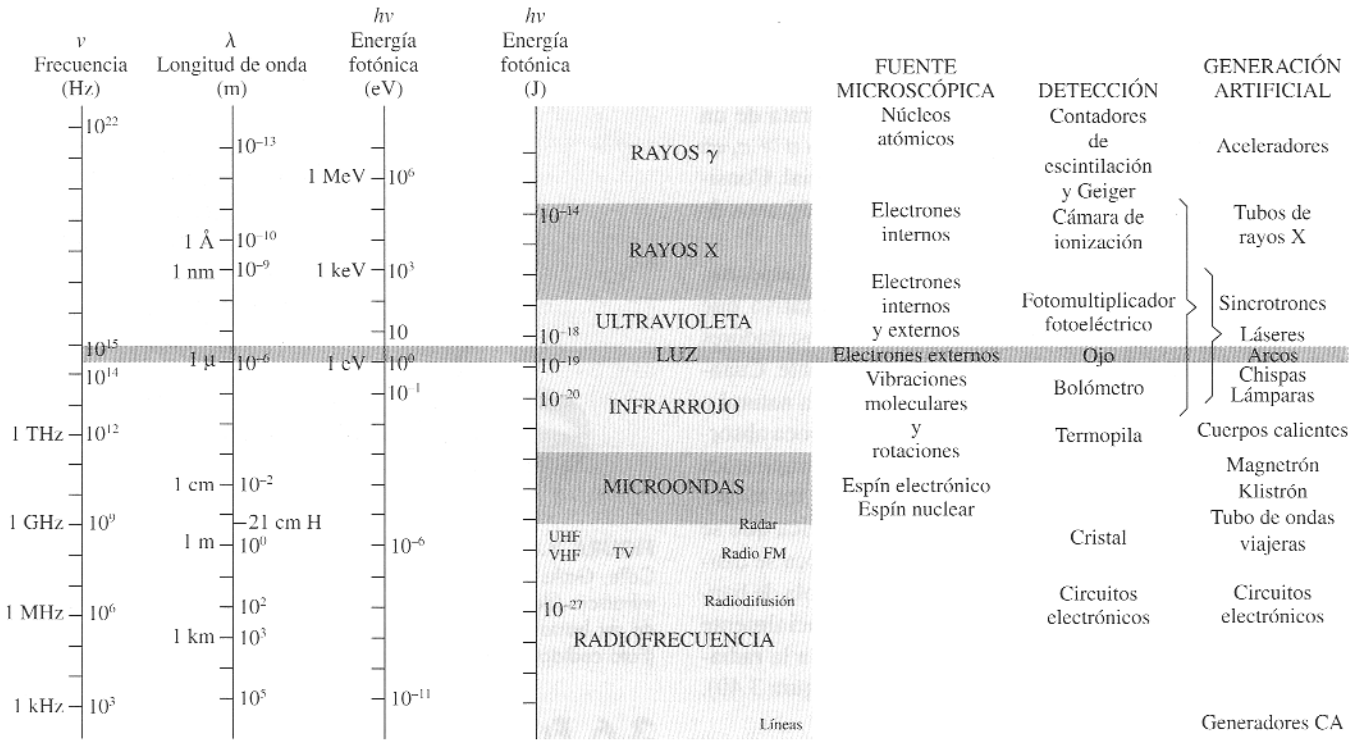


FIGURA 3.41 Espectro fotónico-electromagnético.

eléctrico oscilante). Como antena receptora, usó un circuito eléctrico abierto de alambre con una bola de latón en un extremo y una punta fina de cobre en el otro. Una pequeña chispa visible entre los dos extremos indicaba la detección de una onda electromagnética incidente. Hertz enfocó la radiación, determinó su polarización, la reflejó y la refractó, hizo que interfiriera formando ondas estacionarias y hasta midió su longitud de onda (del orden de un metro). Como él dijo:

> «He logrado producir distintos rayos de fuerza eléctrica y llevar a cabo con ellos los experimentos elementales que se hacen comúnmente con la luz y el calor radiante... Podríamos, quizás, definirlos como rayos de luz de longitud de onda muy grande. Me parece que los experimentos descritos se adapten perfectamente para despejar cualquier duda acerca de la identidad de la luz, del calor radiante y del movimiento ondulatorio electromagnético.»

Las ondas usadas por Hertz se clasifican ahora en el rango de *radiofrecuencias* que se extienden desde unos pocos Hz hasta 10^9 Hz (λ, desde varios kilómetros hasta 0,3 m aproximadamente). Éstas son emitidas generalmente por una variedad de circuitos eléctricos. Por ejemplo, la corriente alterna de 60 Hz que circula en las líneas eléctricas radia con una longitud de onda de 5×10^6 m o unas de 3×10^3 millas. No hay límite superior a la longitud de onda teórica; se podría ociosamente balancear la proverbial bola de médula cargado eléctricamente, y así producir una onda muy larga aunque no muy intensa. En realidad, se han detectado ondas de más de 18 millones de millas de longitud que llegan a la Tierra desde el espacio exterior. El extremo alta frecuencia de la banda se usa en televisión y en la radio.

A 1 MHz (10^6 Hz) un fotón de radiofrecuencia tiene una energía de $6{,}62 \times 10^{-28}$ J o 4×10^{-9} eV, una cantidad muy pequeña para medirla. La naturaleza granular de la radiación está, por lo general, oculta y sólo se observa una transferencia suave de energía.

3.6.2. Microondas

La región de microondas se extiende desde unos 10^9 Hz hasta alrededor de 3×10^{11} Hz. Las longitudes de onda correspon-

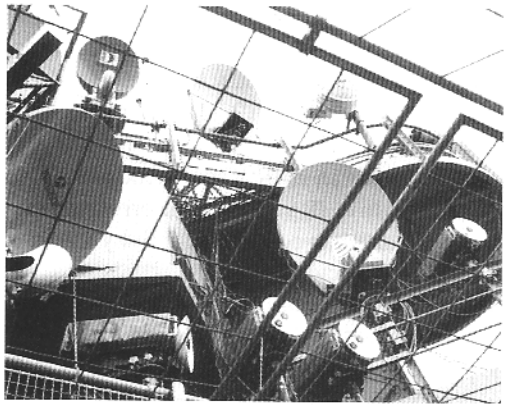


FIGURA 3.42 Antenas de microondas en lo alto de la Torre Eiffel en París.

dientes van más o menos de 30 cm a 1,0 mm. La radiación capaz de penetrar la atmósfera de la Tierra oscila entre menos de 1 cm hasta alrededor de 30 m. Las microondas tienen, por consiguiente, interés tanto para la comunicaciones de vehículos espaciales como para la radioastronomía. En concreto, los átomos de hidrógeno neutro, repartidos sobre vastas regiones del espacio emiten microondas de 21 cm (1.420 MHz). Una gran cantidad de información acerca de la estructura de nuestra galaxia y otras se ha obtenido de esta particular emisión.

Las moléculas pueden absorber y emitir energía alterando el estado de movimiento de los átomos que las constituyen – obligándolos a vibrar o girar. La energía asociada con ambos movimientos se cuantifica otra vez y las moléculas poseen niveles de energía vibracional y rotacional además de los debidos a sus electrones. Sólo las moléculas polares estarán sujetas a unas fuerzas por el campo **E** de una onda electromagnética incidente que las obligará a girar hasta alinearse. Sólo ellas podrán absorber un fotón y realizar una transición rotacional hacia un estado excitado. Puesto que las moléculas pesadas no pueden girar alrededor fácilmente, podemos adelantar que su resonancia rotacional será de baja frecuencia (IR lejano, 0,1 mm, hasta microondas, 1 cm). Por ejemplo, las moléculas del agua son polares (véase figura 3.34) y si se exponen a una onda electromagnética, se girarán, procurando permanecer alineadas con el campo alternante **E**. Esto se dará con particular fuerza a una cualquiera de las resonancias rotacionales. Por consiguiente, las moléculas de agua absorben eficaz y disipativamente la radiación de microondas a esta frecuencia o a una similar. El horno de microondas (12,2 cm, 2,45 GHz) es una aplicación bastante obvia. Por otro lado, las moléculas no polares como el dióxido de carbono, el hidrógeno, el nitrógeno, el oxígeno y el metano no pueden realizar transiciones rotacionales por absorción de fotones.

Hoy en día, las microondas se utilizan para cualquier cosa desde transmitir conversaciones telefónicas (figura 3.42) y televisión entre estaciones hasta cocinar hamburguesas, desde pilotar aviones e identificar a los automovilistas que superan el límite de velocidad (por radar) hasta estudiar los orígenes del Universo, abrir la puerta de un garaje y examinar la superficie del planeta (figura 3.43). Son también muy útiles para estudiar la óptica física con montajes experimentales de dimensiones adecuadas.

Los fotones en el extremo de baja frecuencia del espectro de las microondas tienen poca energía y se puede esperar que sus fuentes sean exclusivamente circuitos eléctricos. Emisiones de este tipo pueden, sin embargo, surgir de transiciones atómicas si los niveles

FIGURA 3.43 Fotografía de un área de 18 por 75 millas al noreste de Alaska, que tomó el satélite *Seasat* a una distancia de 800 km (500 millas) por encima de la Tierra. El aspecto general resulta algo extraño ya que es realmente una fotografía de microondas o de radar. La región gris arrugada a la derecha es Canadá. La pequeña y brillante forma de concha es Banks Island, incrustada en una franja negra de hielo marino joven que se desplaza rápidamente a lo largo de la orilla. En sus inmediaciones hay mar libre que aparece liso y gris. El área repleta de manchas gris oscuro a la izquierda es el banco de hielo principal. No hay nubes puesto que el radar «ve» a través de ellas.

de energía involucrados están muy cerca uno de otro. El estado fundamental aparente del átomo de cesio es un buen ejemplo. En realidad, consiste en un par de niveles de energía muy cercanos y las transiciones entre ellos involucran una energía de solamente $4{,}14 \times 10^{-5}$ eV. La emisión de microondas resultante tiene una frecuencia de 9.19263177×10^9 Hz. Ésta es la base para célebre reloj de cesio, actualmente el estándar de frecuencia y tiempo.

3.6.3 Infrarrojo

La región infrarroja que se extiende aproximadamente desde 3×10^{11} Hz hasta alrededor de 4×10^{14} Hz, fue detectada inicialmente por el renombrado astrónomo Sir William Herschel (1738-1822) en 1800. Como dice el nombre, esta banda de radiación EM se halla justo debajo de la luz roja. El infrarrojo, o IR, a menudo se subdivide en cuatro regiones: el *IR cercano*, es decir, cerca del visible (780-3.000 nm), el *IR intermedio* (3.000-6.000 nm), el *IR lejano* (6.000-15.000 nm) y el *IR extremo* (15.000 nm-1,0 mm). De nuevo esta es una división bastante flexible y no hay universalidad en la nomenclatura. La energía radiante en el extremo de longitudes de ondas grandes se puede generar usando bien sea osciladores de microondas o fuentes incandescentes (es decir, osciladores moleculares). En efecto, cualquier material irradiará o absorberá IR por agitación térmica de las moléculas que lo constituyen.

Las moléculas de cualquier objeto a una temperatura superior al cero absoluto (−273 °C) radiará IR aunque sólo débilmente (véase sección 13.1.1). Por otro lado, el infrarrojo se emite en gran cantidad en un espectro continuo por cuerpos calientes, como calentadores eléctricos, carbón incandescente y los radiadores de casa normales. Aproximadamente la mitad de la energía electromagnética del Sol es IR; la bombilla común radia realmente mucho más IR que luz. Al igual que cualquier ser de sangre caliente, nosotros también somos emisores de infrarrojo. El cuerpo humano emite IR bastante débilmente, empezando alrededor de unos 3.000 nm y llegando a su máximo alrededor de 10.000 nm, desvaneciéndose después hacia el IR extremo y más allá con valores despreciables. Esta emisión se utiliza en los dispositivos electrónicos para apuntar por la noche así como por algunas serpientes más bien peligrosas y sensibles al «calor» (crotálidos, víboras «pit» pertenecientes a la familia de los crotálidos y boas) que tienden a ser activas por la noche.

Además de girar, una molécula puede vibrar de varias maneras distintas con sus átomos moviéndose en distintas direcciones respecto a los demás. No es necesario que la molécula sea polar; hasta un sistema lineal como el CO_2 tiene tres modalidades de vibración básicas y cierto número de niveles de energía, cada uno de los cuales puede excitarse por fotones. La emisión vibracional asociada y los espectros de absorción están, por lo general, en el IR (1.000 nm hasta 0,1 nm). Muchas moléculas disponen tanto de resonancias vibracionales como rotacionales en el IR y son buenos absorbentes; por esta razón a menudo el IR se denomina erróneamente «ondas de calor» —permanezcan con la cara al Sol y sentirán la energía térmica que se va acumulando.

La energía radiante infrarroja se mide generalmente con un dispositivo que responde al calor generado en la absorción del infrarrojo por una superficie ennegrecida. Hay, por ejemplo, termopares, detectores neumáticos (por ejemplo, células Golay), piroeléctricos y bolométricos. Éstos, a su vez, dependen de variaciones dependientes de la temperatura del voltaje inducido, del volumen del gas, de la polarización eléctrica permanente y de la resistencia, respectivamente. El detector se puede acoplar por medio de un sistema de barrido a un tubo de rayos catódicos para producir una figura IR instantánea tipo televisión (figura 3.44), denominado termógrafo (bastante útil para llevar a cabo un diagnóstico de toda clase de problemas, desde transformadores defectuosos hasta personas defectuosas). Se dispone también

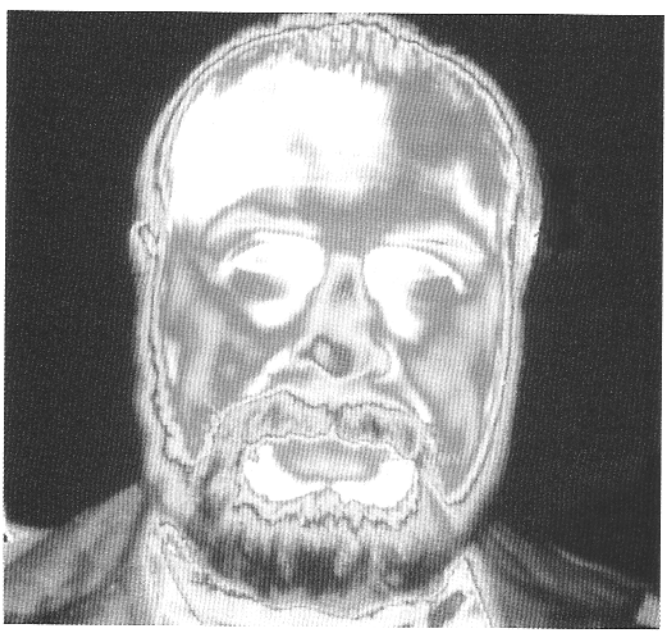


FIGURA 3.44 Termografía del autor. Obsérvese la barba fría y cómo ha retrocedido el pelo desde la primera edición de este libro. (Foto cedida por E.H.)

de películas fotográfica sensibles al IR (< 1.300 nm). Existen satélites espía IR que vigilan los lanzamientos de cohetes, satélites de recursos IR que buscan enfermedades de la cosecha y satélites astronómicos IR que exploran el espacio; existen misiles que «siguen el calor» y que son guiados por IR así como láseres y telescopios IR que apuntan al cielo.

Pequeñas diferencias de temperatura de los objetos y sus alrededores derivan en emisiones características de IR que pueden utilizarse de muchas formas, desde la detección de tumores cerebrales y cáncer de mama hasta descubrir a un ladrón furtivo. Los láseres de CO_2 se utilizan ampliamente en la industria, especialmente para realizar cortes de precisión y tratamiento de calor porque son una fuente adecuada de potencia continua a niveles apreciables de 100 W y más. Sus emisiones de IR extremos (18,3 μm–23,0 μm) son fácilmente absorbidas por el tejido humano, convirtiendo el rayo láser en un escalpelo sin derramamiento de sangre que cauteriza al cortar.

3.6.4. Luz

La luz corresponde a la radiación electromagnética en la banda estrecha de frecuencias desde $3{,}84 \times 10^{14}$ Hz hasta aproximadamente $7{,}69 \times 10^{14}$ Hz (véase tabla 3.4). Se produce generalmente por una nueva disposición de los electrones exteriores en los átomos y moléculas (no olvidemos la radiación sincrotrón que es un mecanismo diferente) [13]. En un material incandescente, en un filamento de metal incandescente o en la esfera solar, los electrones están acelerados al azar y sometidos a frecuentes colisiones. El ancho espectro de la emisión resultante se llama **radiación térmica**, y es una fuente muy importante de luz. En contraste, si llenamos un tubo con algún gas y pasamos una descarga eléctrica a través del mismo, los átomos de dentro se excitarán y radiarán. La luz emitida es característica de los niveles de energía particulares de esos átomos y está formada por una serie de bandas o líneas de frecuencias bien definidas. Tal aparato se conoce como tubo de gas de descarga. Cuando el gas utilizado es el isótopo 86 del kryptón, las líneas son particularmente estrechas (espín nuclear cero y, por consiguiente, ninguna estructura hiperfina). La línea rojo-naranja del Kr 86, cuya longitud de onda en el vacío es de 605,7802105 nm, tiene un ancho (a media altura) de solamente 0,00047 nm o alrededor de 400 MHz. Por consiguiente, hasta 1983 representaba la longitud estándar (1.650.763,73 longitudes de onda eran iguales a un metro).

Newton fue el primero en reconocer que la **luz blanca** es realmente una mezcla de todos los colores del espectro visible, que el prisma no crea color alterando la luz blanca en grados distintos, como se había pensado durante siglos, sino que sencillamente despliega luz, separándola en sus colores constitutivos. No debe sorprender que el mismo concepto de *blancura* parece depender de nuestra percepción del espectro diurno de la Tierra — una distribución amplia de frecuencias que disminuye más rápidamente en el violeta que en el rojo (figura 3.45)—. El detector ojo-cerebro humano percibe como blanca una amplia mezcla de frecuencias, normalmente con aproximadamente la misma cantidad de energía en cada parte. Esto es a lo que nos referimos cuando hablamos de «luz blanca» —la mayoría del color del espectro, sin que prevalezca ninguna región—. Sin

TABLA 3.4 Rangos de frecuencia y de longitud de onda en el vacío aproximados para los distintos colores

Color	λ_0 (nm)	ν (THz)*
Rojo	780–622	384–482
Naranja	622–597	482–503
Amarillo	597–577	503–520
Verde	577–492	520–610
Azul	492–455	610–659
Violeta	455–390	659–769

*1 terahertzio (THz) = 10^{12} Hz, 1 nanometro (nm) = 10^{-9} m.

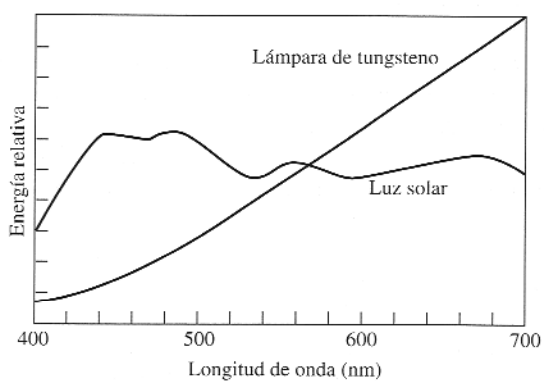


FIGURA 3.45 Gráfico de la luz solar comparado con el de la luz de una lámpara de tungsteno.

[13] No es necesario definir aquí la luz en términos de fisiología humana. Por el contrario, hay numerosas pruebas que indican que esto no sería una buena idea. Véase por ejemplo, T. J. Wang, «Visual Response of the Human Eye to X Radiation», *Am. J. Phys.* **35**, 779 (1967).

embargo, muchas distribuciones distintas aparecerán más o menos blancas. Reconocemos la blancura de un trozo de papel tanto si está en el interior, colocado debajo de una luz incandescente o en el exterior, a la luz solar, si bien esas dos clases de blancura son distintas. De hecho, existen muchos pares de haces de luz de color (por ejemplo, rojo-656 nm y azul-492 nm) que producirán esa sensación de blancura, no pudiendo el ojo distinguir siempre un blanco de otro; no puede analizar la frecuencia de la luz en sus componentes armónicos de la misma manera que un oído puede analizar el sonido (véase sección 7.3).

Los colores son las respuestas humanas fisiológicas y psicológicas, en primer lugar, a las diversas regiones de frecuencia que se extienden desde aproximadamente 384 THz para el rojo, pasando por el naranja, amarillo, verde y azul hasta el violeta de aproximadamente 769 THz (tabla 3.4). El color no es una propiedad de la luz en sí misma sino una manifestación del sistema de percepción electroquímico – ojo, nervios y cerebro. Para ser más específicos, no deberíamos decir «luz amarilla» sino más bien «luz que se ve como amarilla». Debemos resaltar que una variedad de mezclas distintas de frecuencia puede originar la misma respuesta al color por el sensor ojo-cerebro. Un rayo de luz roja (con un pico supongamos, en 430 THz) que se superpone a un rayo de luz verde (con un pico, supongamos, en 540 THz), resultará, increíblemente, en la percepción de luz *amarilla*, si bien no existe ninguna frecuencia en la denominada banda amarilla. Parece ser que el ojo-cerebro calcula el término medio de la entrada y «ve» amarillo (sección 4.9). Por esta razón, la pantalla de un televisor de color puede funcionar con sólo tres fosforescentes: rojo, verde y azul.

En un haz brillante de luz solar donde la densidad de flujo de fotones podría ser de 10^{21} fotones/m^2 s, podemos esperar que la naturaleza cuántica del transporte de energía esté completamente oscurecida. Sin embargo, en haces muy débiles, ya que los fotones en el rango visible ($h\nu \approx$ 1,6 eV hasta 3,2 eV) son lo suficientemente energéticos para producir, de manera individual, efectos bien claros, la granularidad se hace evidente. La investigación de la visión humana indica que el ojo puede detectar unos 10 fotones de luz y, quizás, posiblemente hasta uno solo.

3.6.5 Ultravioleta

Cerca de la luz y justo detrás de ella en el espectro se halla la región ultravioleta (aproximadamente de 8×10^{14} Hz hasta unos 3×10^{16} Hz), descubierta por Johann Wilhelm Ritter (1776-1810). Las energías de los fotones van de aproximadamente 3,2 eV hasta 100 eV. Los rayos ultravioleta o UV del Sol tendrán entonces energía suficiente para ionizar a los átomos en la atmósfera superior y así crear la ionosfera. Estas energías fotónicas son también del orden de magnitud de muchas reacciones químicas así que los rayos UV son importantes para desencadenar esas reacciones. Afortunadamente el ozono (O_3) absorbe en la atmósfera lo que, de otra manera, sería un haz letal de UV solar. A longitudes de onda inferiores a 290 nm, el UV es germicida (es decir, mata a los microorganismos). Los aspectos corpusculares de la energía radiante se hacen cada vez más evidentes al aumentar la frecuencia.

Los seres humanos no ven muy bien los UV, porque la córnea lo absorbe, especialmente a las longitudes de onda más cortas, mientras que el cristalino del ojo absorbe muy fuertemente después de 300 nm. Una persona a la que se le haya quitado un cristalino a raíz de una catarata puede ver el UV ($\lambda >$ 300 nm). Además de los insectos, como las abejas de la miel, un número bastante grande de otros seres pueden responder visualmente al UV. Las palomas, por ejemplo, pueden reconocer figuras iluminadas por el UV y, quizás, aprovechar esta habilidad para volar con el Sol hasta en los día nublados.

Un átomo emite un fotón UV cuando un electrón realiza un salto largo hacia abajo desde un estado muy excitado. Por ejemplo, el electrón más exterior de un átomo de sodio puede pasar a niveles cada vez más elevados de energía hasta que se libera a 5,1 eV, ionizándose. Si luego el ion se vuelve a combinar con un electrón libre, éste bajará rápidamente al estado fundamental, muy probablemente en una serie de saltos, cada uno resultante en la emisión de un fotón. Sin embargo, es posible que el electrón precipite con un único salto largo hasta el estado fundamental, radiando un único fotón de 5,1 eV UV. También pueden generarse rayos UV más energéticos cuando los electrones más internos y estrechamente entrelazados de un átomo se excitan.

Los electrones de valencia desaparecidos de los átomos aislados pueden ser una importante fuente de luz coloreada. Sin embargo, cuando estos mismos átomos se combinan para formar moléculas o sólidos, los electrones de valencia se emparejan normalmente en el proceso de creación de enlaces químicos que mantienen unido todo el conjunto. En consecuencia, a menudo los electrones están más estrechamente ligados y sus estados moleculares excitados están más arriba en el UV. Las moléculas de la atmósfera como N_2, O_2, CO_2 y H_2O tienen precisamente esta clase de resonancia electrónica en el UV.

Hoy en día, existen películas fotográficas y microscopios ultravioletas, telescopios celestes UV en órbita, fuentes sincrotrón y láseres ultravioleta (figura 3.46).

3.6.6 Rayos X

Los rayos X fueron descubiertos de manera un tanto fortuita en 1895 por Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923). Con una frecuencia que se extiende desde aproximadamente $2{,}4 \times 10^{16}$ Hz hasta 5×10^{19} Hz, su longitud de onda es extremadamente corta, las mayoría son más pequeñas que un átomo. Sus energías fotónicas (100 eV hasta 0,2 MeV) son lo suficientemente grandes para que los cuantos del rayo X puedan interaccionar con la materia de uno en uno, según una modalidad claramente corpuscular, casi como balas de energía. Uno de los mecanismos más prácticos para la producción de rayos X es la rápida deceleración de partículas cargadas a alta velocidad. La amplia frecuencia resultante *bremsstrahlung* (término alemán para «radiación de frenado») surge cuando un rayo de electrones energéticos se dispara hacia un blanco material, como una chapa de cobre. Las colisiones con los núcleos de Cu producen desviaciones del haz de electrones del rayo, que a su vez, radian fotones de rayos X.

Asimismo, los átomos del objetivo pueden ionizarse durante el bombardeo. Si esto se produjera a través de la extracción de un electrón interno estrechamente atado al núcleo, el átomo emitirá rayos X mientras la nube electrónica vuelve a su estado fundamental. Las emisiones cuantificadas resultantes son características del átomo blanco, revelan su estructura de nivel energético y, por lo tanto, se denominan radiación *característica*.

La radiografía médica tradicional produce, por lo general, poco más que simples sombras en lugar de lo que se entiende por imágenes fotográficas; no se han podido fabricar lentes útiles para rayos X. Sin embargo, los métodos modernos de focalización que utilizan espejos (véase sección 5.4) han marcado el inicio de la era del rayo X, creando imágenes detalladas de cualquier objeto, desde pastillas de fusión en implosión hasta fuentes celestes, como el Sol (figura 3.47), cuásares distantes y agujeros negros – objetos a temperaturas de millones de grados que emiten especialmente en la región de los rayos X. Los telescopios de rayos X en órbita nos han permitido mirar de otra forma al Universo. Existen microscopios de rayos X,

FIGURA 3.46 Fotografía de ultravioleta de Venus que tomó el *Mariner 10*.

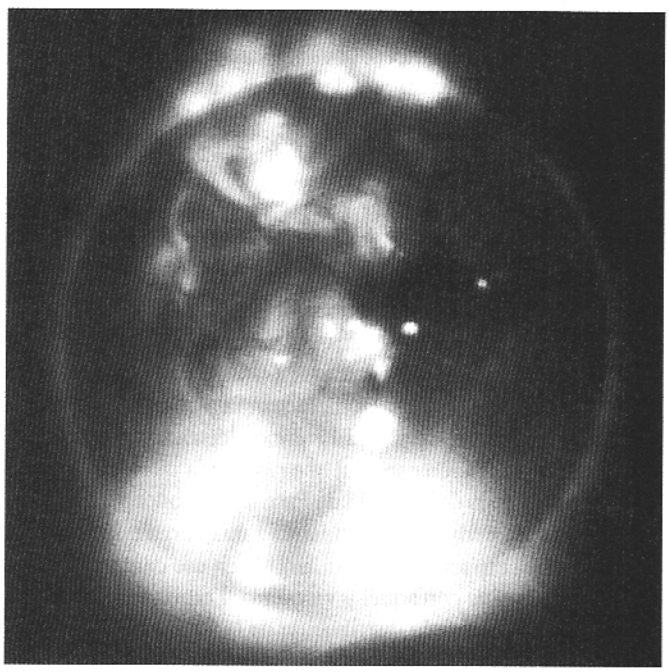


FIGURA 3.47 Fotografía de rayos X del Sol que se tomó en marzo de 1970. El limbo de la Luna es visible en la esquina sudeste. (Foto cedida por Dr. G. Vaiana y NASA.)

cámaras de traza de Rayos X de picosegundos, redes de difracción de rayos X e interferómetros mientras que la investigación sigue adelante en la holografía de los rayos X. En 1984, un grupo del Lawrence Livermore National Laboratory consiguió producir radiación láser a una longitud de onda de 20,6 nm. Aunque está más bien en el ultravioleta extremo (XUV), es lo suficientemente cercano a la región de los rayos X para denominarse el primer láser de rayos X blandos.

3.6.7 Los rayos gamma

Se trata de las radiaciones electromagnéticas con la longitud de onda más corta y la energía más elevada (10^4 eV hasta unos 10^{19} eV), emitidas por partículas que están sujetas a transiciones dentro del núcleo atómico. Un fotón individual de rayo gamma lleva tanta energía que puede detectarse con muy poca dificultad. Al mismo tiempo, su longitud de onda es tan pequeña que es extremadamente difícil observar cualquier propiedad ondulatoria.

Lo hemos analizado todo, desde la respuesta ondulatoria de la radiofrecuencia hasta el comportamiento particular de los rayos gamma. En algún sitio, no muy lejos del centro (logarítmico) del espectro, hay luz. Como con toda la radiación electromagnética, su energía está cuantificada, sin embargo, aquí en particular lo que «vemos» dependerá de cómo «miramos».

3.7 La Teoría Cuántica de Campos

Una partícula cargada ejerce fuerzas sobre otras partículas cargadas, creando una red de interacción electromagnética alrededor de sí misma que se extiende en el espacio. Esta imagen lleva al concepto de campo eléctrico, que es una representación de la manera en la que la interacción electromagnética se revela a sí misma a nivel macroscópico. El campo eléctrico estático es, en efecto, una concepción espacial que resume la interacción entre las cargas. A través de la visión de Faraday, el concepto del campo se extendió, pudiendo imaginar que una carga construye un campo **E** en el espacio y otra, sumergida en ese campo, interacciona directamente con aquél y viceversa. Lo que empezó como una representación de la distribución de la fuerza (sea cual fuere su causa) se convirtió en una entidad, en un campo que puede él mismo ejercer una fuerza. La imagen parece clara todavía aunque surjan muchas preguntas. ¿El campo estático **E** tiene una realidad física dentro y fuera de sí mismo? En caso afirmativo, ¿llena el espacio con energía? ¿Cómo lo hace? ¿Hay algo que efectivamente fluya? ¿Cómo puede un campo producir una fuerza en una carga? ¿Tarda en ejercer su influencia?

Una vez que el campo electromagnético se convirtió en una realidad, los físicos pudieron imaginar las perturbaciones de ese medio tenue que se extiende de manera tan conveniente en el espacio vacío; ***la luz era una onda electromagnética en el campo electromagnético***. Aunque se pueda imaginar fácilmente una onda que atraviesa un campo existente (pág. 57), no es tan obvio cómo un pulso localizado lanzado al espacio, como el de la figura 3.48, pueda conceptuarse. No existe ningún campo estático que llene el espacio que se extiende hacia afuera, delante del pulso; si éste avanza a través del medio del campo electromagnético, tendrá que crear en primer lugar ese medio mismo al progresar. No es del todo imposible imaginarlo en algún nivel, pero no sería precisamente lo que podría denominarse onda clásica. El punto de partida fundamental de cualquier onda tradicional es un medio en equilibrio; existe en un lugar cualquiera antes y después de que haya pasado la onda. Por lo tanto, la idea de una onda electromagnética, tan bonita matemáticamente hablando, no es tan transparente conceptualmente.

Ya en 1905, Einstein consideraba las ecuaciones clásicas de la Teoría Electromagnética como descripciones de los valores medios de las cantidades en cuestión. «Me parece absurdo»,

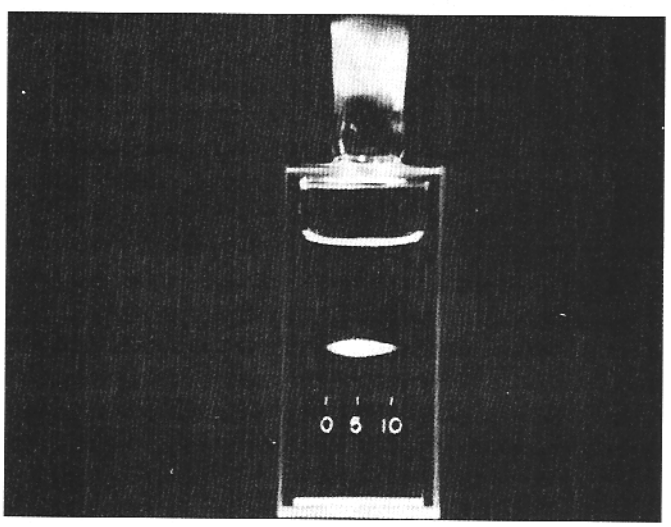


FIGURA 3.48 Pulso ultracorto de luz verde procedente de un láser de vidrio de neodimio. El pulso pasa a través de una célula de agua cuya pared está marcada en milímetros. Durante la exposición de 10 picosegundos el pulso se desplazó unos 2,2 mm. (Foto cedida por Bell Laboratories.)

escribió a Planck, «que la energía se distribuya constantemente en el espacio sin suponer la existencia de un éter.... Si bien la representación de Faraday resultó ser útil para el desarrollo de la electrodinámica, no creo que se deba seguir este punto de vista al pie de la letra». La teoría clásica explicaba muy bien cualquier cosa que se medía, pero no tenía en cuenta la estructura granular excesivamente fina del fenómeno. Recurriendo a argumentos de termodinámica, Einstein propuso que los campos magnéticos y eléctricos estaban cuantificados, que eran más bien particulados y no continuos. Después de todo, la teoría clásica evolucionó décadas antes de que el electrón fuera siquiera descubierto. Si la carga (la fuente fundamental del electromagnetismo) se cuantifica, ¿no debería la teoría reflejar esto de alguna forma?

Hoy en día, estamos guiados por la mecánica cuántica, una teoría sumamente matemática que proporciona una enorme potencia de cálculos y predicción pero que es, con todo, extraordinariamente abstracta; especialmente la subdisciplina que se ocupa de las micropartículas y sus interacciones, la Teoría Cuántica de Campos (TCC), en sus varias formas, es entre todas las teorías físicas la más esencial y la más exitosa. Los cuantos de la luz proceden de la teoría de manera muy natural, cuantificando el campo electromagnético. La implicación evidente de esto es que todas las micropartículas se forman de la misma manera en sus campos individuales: **el campo es la cosa**, por decirlo de alguna forma. Por lo tanto, el electrón es el cuanto del campo electrónico, el protón es el cuanto del campo protónico, etc. Facilitar los detalles ha sido la tarea de los teóricos del campo durante gran parte de este siglo.

Hay dos corrientes filosóficas distintas en la TCC moderna: la centrada en el campo y la otra, centrada en la partícula. Para la corriente centrada en el campo, ***los campos son las entidades fundamentales, las partículas son sólo los cuantos de los campos.*** Para la corriente centrada en la partícula, ***las partículas son las entidades fundamentales, los campos son sólo estados coherentes macroscópicos de las partículas.*** La tradición de campo se remonta a L. De Broglie (1923), E. Schrödinger, P. Jordan y W. Pauli cuyas investigaciones asentaron los cimientos de la variante mecánico-cuántica que a veces se denomina Mecánica Ondulatoria. La tradición relacionada con la partícula empezó con el trabajo de W. Heisenberg (1925), si bien su mentor espiritual fue P.A.M. Dirac que definió el programa de la partícula con su teoría del par positrón-electrón. La rama particular de la TCC que pugna por proporcionar un tratamiento mecáno-cuántico relativista de la interacción electromagnética se denomina electrodinámica cuántica (EDC). Ella también cuenta con defensores de las dos corrientes: la centrada en la partícula y la otra centrada en el campo. R.P. Feynman ha hecho accesibles en este nivel algunas de las ideas básicas de la EDC que nosotros analizaremos más adelante en este texto (pág. 137) en lo que respecta a la óptica.

Mediante la TCC, la física moderna sostiene que todos los campos están cuantificados; que cada una de las cuatro fuerzas fundamentales (gravitacional, electromagnética, fuerte y débil) está mediada por una partícula de campo muy especial. Estos *mensajeros bosónicos* son absorbidos y emitidos continuamente por las partículas materiales responsables de la interacción (electrones, protones, etc.). Este intercambio en curso *es* la interacción. La partícula mediadora del campo eléctrico es el **fotón virtual**. Este mensajero sin masa viaja a la velocidad de la luz, transportando momento y energía. Cuando dos electrones se repelen mutuamente, o un electrón y un protón se atraen, esto ocurre emitiendo o absorbiendo fotones virtuales y, por lo tanto, transfiriendo momento de uno a otro; esta transferencia es una medida de la acción de la fuerza. Las partículas del mensajero de la fuerza electromagnética se denominan fotones *virtuales* porque están ligados a la interacción. Los fotones virtuales no pueden escapar nunca a la detección directa por ningún instrumento, por más inquietante que esto pueda parecer en un plan filosófico y por más difícil que sea establecer su existencia. Realmente, los fotones virtuales (distintos de los reales) existen tan sólo como medio de la interacción. Son criaturas de la teoría cuyo estado metafísico todavía no se ha determinado [16].

A nivel macroscópico, las partículas mensajeras pueden manifestarse como un campo continuo a condición de que puedan agruparse en gran número. Las partículas fundamentales tienen un momento angular intrínseco, o *espín*, que define sus características de agrupamiento. La teoría cuántica nos dice que el comportamiento de campo deseado puede darse tan sólo si las fuerzas están mediadas por partículas mensajeras con momentos angulares iguales a múltiplos enteros de $h/2\pi$ (es decir, 0, $1h/2\pi$, $2h/2\pi$, $3h/2\pi$, etc.). El momento angular del fotón virtual es $1(h/2\pi)$; se trata de una partícula de espín 1. La importantísima clase de interacciones que tienen las mensajeras de espín 1 se denominan **fuerzas *gauge***, siendo la fuerza electromagnética el modelo de todas ellas. Hoy en día, la magia de la acción en la distancia se entiende mediante el no menos misterioso intercambio de partículas virtuales; sin embargo, ahora existe, por lo menos, una teoría matemática altamente predictiva que describe el fenómeno.

[16] Acerca de las cuestiones que se están analizando aquí, veáse H. R. Brown y R. Harré, *Philosophical Foundations of Quantum Field Theory.*

PROBLEMAS

3.1 Considere la onda electromagnética plana (en SI) dada por las expresiones $E_x = 0$, $E_y = 2\cos[2\pi \times 10^{14}(t - x/c) + \pi/2]$, y $E_z = 0$.

a) ¿Cuál es la frecuencia, la longitud de onda, la dirección de movimiento, la amplitud, la fase inicial y la polarización de la onda?

b) Escriba una expresión para la densidad de flujo magnético.

3.2 Escriba una expresión para los campos **E** y **B** que constituyen una onda armónica plana viajando en la dirección de $+z$. La onda está linealmente polarizada con su plano de vibración a 45° respecto del plano yz.

3.3* Considerando la ecuación (3.30), demuestre que la expresión

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$$

es correcta aplicándose a una onda plana cuya dirección de campo eléctrico es constante.

3.4* Una onda electromagnética se especifica (en MKS) por la siguiente función:

$$\mathbf{E} = (-3\hat{\mathbf{i}} + 3\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})(10^4\ \mathrm{V/m})e^{i[\frac{1}{2}(\sqrt{5}x + 2y)\pi \times 10^7 - 9.42 \times 10^{15}t]}$$

Calcule: a) la dirección en la que el campo oscila, b) el valor escalar de la amplitud del campo eléctrico, c) la dirección de propagación de la onda, d) el número de propagación y la longitud de onda, e) la frecuencia y la frecuencia angular y f) la velocidad.

3.5 El campo eléctrico de una onda electromagnética que viaja en la dirección positiva x está dado por:

$$\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{sen}\ \frac{\pi z}{z_0}\cos(kx - \omega t)$$

a) Describa el campo verbalmente, b) determine un expresión para k y c) calcule la velocidad de fase de la onda.

3.6* Calcule la energía de entrada necesaria para cargar un condensador de placas paralelas, transportando la carga de una placa a la otra. Suponga que la energía está almacenada en el campo entre las placas y calcule la energía por unidad de volumen, u_E, de la región, es decir, ecuación (3.31). *Pista*: puesto que el campo eléctrico aumenta durante el proceso, integre o utilice su valor medio $E/2$.

3.7 El promedio temporal de alguna función $f(t)$ tomado en un intervalo T está dado por:

$$\langle f(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(t')\,dt'$$

donde t' es sólo una variable muda. Si $\tau = 2\pi/\omega$ es el período de una función armónica, demuestre que:

$$\langle \mathrm{sen}^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\rangle = \tfrac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\rangle = \tfrac{1}{2}$$

y

$$\langle \mathrm{sen}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\rangle = 0$$

cuando $T = \tau$ y cuando $T >> \tau$.

3.8* Demuestre que una formulación más general del problema anterior da

$$\langle \cos^2\omega t\rangle_T = \tfrac{1}{2}[1 + \mathrm{sinc}\ \omega T \cos 2\omega t]$$

para cualquier intervalo T.

3.9* Con el problema anterior, demuestre que

$$\langle \mathrm{sen}^2\omega t\rangle_T = \tfrac{1}{2}[1 - \mathrm{sinc}\ \omega T \cos 2\omega t]$$

para cualquier intervalo T.

3.10* Considere una onda electromagnética plana, linealmente polarizada, viajando en la dirección $+x$ en el espacio libre y teniendo como plano de vibración al plano xy. Dada su frecuencia de 10 MHz y su amplitud $E_o = 0{,}08$ V/m,

a) encuentre el período y longitud de onda de la onda;

b) escriba una expresión para $E(t)$ y $B(t)$;

c) encuentre la densidad de flujo, $\langle S\rangle$, de la onda.

3.11 Una onda armónica plana, linealmente polarizada, con una amplitud escalar de 10 V/m se propaga a lo largo de una línea en el plano xy a 45° respecto al eje x con el plano xy como su plano de vibración. Escriba una expresión vectorial que describa la onda suponiendo que tanto k_x y k_y son positivos. Calcule la densidad de flujo considerando que la onda está en el vacío.

3.12 Un láser emite unos pulsos de UV que dura cada uno 2,00 ns y cuyo haz tiene un diámetro de 2,5 mm. Suponiendo que la potencia de cada pulso tiene una energía de 6,0 J: a) calcule la extensión espacial de cada tren de ondas, y b) calcule la energía media por unidad de volumen de tal pulso.

3.13* Un láser proporciona unos pulsos de radiación EM en el vacío con una duración de 10^{-12} s. Si la densidad de flujo radiante es de 10^{20} W/m^2, calcule la amplitud del campo eléctrico del haz.

3.14 Un láser de 1,0 mW tiene un diámetro de haz de 2 mm. Suponiendo que la divergencia del haz es despreciable, calcule la densidad de la energía en la proximidad del láser.

3.15* Una nube de langostas con una densidad de 100 insectos por metro cúbico vuela rumbo al norte con una rapidez de 6 m/min. ¿Cuál es la densidad de flujo de langostas?, es decir, ¿cuántas cruzan un área de 1 m^2 perpendicular a su trayectoria de vuelo por segundo?

3.16 Imagine que usted está parado en la trayectoria de una antena que está radiando ondas planas de frecuencia 100 MHz y densidad de flujo $19{,}88 \times 10^{-2}$ W/m^2. Calcule la densidad de flujo de los fotones, es decir, el número de fotones por unidad de tiempo por unidad de área. ¿Cuántos fotones, en promedio, se encontrarán en un metro cúbico de esta región?

3.17* ¿Cuántos fotones por segundo se emiten de una lámpara de luz amarilla de 100 W si suponemos pérdidas térmicas despreciables y una longitud de onda cuasimonocromática de 550 nm? En realidad solamente alrededor de un 2,5% de la potencia total disipada sale como radiación visible en una lámpara ordinaria de 100 W.

3.18 Una lámpara para iluminación fotográfica ordinaria de 3,0 V consume aproximadamente 0,25 A convirtiendo alrededor del 1,0% de la potencia disipada en luz ($\lambda \approx 550$ nm). Si el haz tiene inicialmente una sección transversal de 10 cm^2 y es aproximadamente cilíndrico,

a) ¿Cuántos fotones se emiten por segundo?
b) ¿Cuántos fotones ocupan cada metro del haz?
c) ¿Cuál es la densidad de flujo del haz cuando sale de la lámpara?

3.19* Una fuente puntual cuasimonocromática isótropa radia a razón de 100 W. ¿Cuál es la densidad de flujo a una distancia de 1 m? ¿Cuáles son las amplitudes de los campos **E** y **B** en ese punto?

3.20 Usando argumentos de energía, demuestre que la amplitud de una onda cilíndrica debe variar inversamente con $\sqrt{r}$. Dibuje un diagrama indicando lo que está sucediendo.

3.21* ¿Cuál es el momento de un fotón de rayos X de 10^{19} Hz?

3.22 Considere una onda electromagnética que incide en un electrón. Es sencillo de demostrar cinemáticamente que el valor medio del ritmo de cambio temporal del momento **p** del electrón es proporcional al valor medio del ritmo temporal de cambio del trabajo, W, realizado en el mismo por la onda. En concreto,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c} \left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle \hat{\mathbf{i}}$$

Por consiguiente, si este cambio de momento se imparte a un material totalmente absorbente, demuestre que la presión está dada por la ecuación (3.51).

3.23* Deduzca una expresión para la presión de radiación cuando el haz de luz que incide normalmente es totalmente reflejado. Generalice este resultado para el caso de incidencia oblicua a un ángulo θ con la normal.

3.24 Una pantalla completamente absorbente recibe 300 W de luz durante 100 s. Calcule el momento lineal total transferido a la pantalla.

3.25 La magnitud media del vector Poynting para la luz solar que llega a la parte superior de la atmósfera de la Tierra ($1{,}5 \times 10^{11}$ m del Sol) es de unos 1,4 kW/m^2.

a) Calcule la presión de radiación media que se ejerce en un reflector de metal que da la cara al Sol.
b) Calcule aproximadamente la presión de radiación media en la superficie del Sol cuyo diámetro es de $1{,}4 \times 10^9$ m.

3.26* Una superficie se coloca perpendicularmente a un rayo de luz de irradiancia constante (I). Suponga que la fracción de irradiancia absorbida por la superficie es α. Demuestre que la presión en la superficie está dada por

$$\mathscr{P} = (2 - \alpha) I/c$$

3.27 ¿Qué fuerza se ejercerá en promedio en el lado plano (40 m $\times$ 50 m) sumamente reflector de una pared de una estación espacial si mira al Sol mientras está en órbita alrededor de la Tierra?

3.28 Una antena radar parabólica con un diámetro de 2 m transmite pulsos de energía de 200 kw. Si su ritmo de repetición es de 500 pulsos por segundo, cada uno de 2 μs, calcule la fuerza de reacción media en la antena.

3.29 Considere el problema de un astronauta flotando en el espacio libre con sólo una lámpara de 10 W (con una fuente inagotable de potencia). ¿Cuánto tiempo se tardará en alcanzar una velocidad de 10 m/s usando la radiación como propulsión? Su masa total es 100 kg.

3.30 Considere la carga que se mueve uniformemente en la figura 3.23*b*. Dibuje una esfera que la rodee y demuestre, mediante el vector Poynting, que la carga no radia.

3.31* Una onda luminosa plana, armónica, polarizada linealmente tiene una intensidad de campo eléctrico dada por

$$E_z = E_0 \cos\pi\, 10^{15}\left(t - \frac{x}{0{,}65c}\right)$$

mientras viaja en un trozo de vidrio. Calcule:

a) la frecuencia de la luz;
b) su longitud de onda;
c) el índice de refracción del cristal.

3.32* ¿Cuál es la velocidad de la luz en el diamante si el índice de refracción es de 2,42?

3.33* Dada la longitud de onda de una onda luminosa en el vacío de 540 nm, ¿cuál sería en el agua donde $n = 1{,}33$?

3.34* Calcule el índice de refracción de un medio si quisiéramos reducir la velocidad de la luz en un 10% comparada con su velocidad en el vacío?

3.35 Si la velocidad de la luz (la velocidad de fase) del titanato de estroncio ($SrTiO_3$) es de $1{,}245 \times 10^8$ m/s, ¿cuál es su índice de refracción?

3.36* ¿Cuál es la distancia recorrida por la luz amarilla en el agua (donde $n = 1{,}33$) en 1,00 s?

3.37* Una onda luminosa de 500 nm en el vacío entra en una placa de vidrio con índice de 1,60, propagándose perpendicularmente en ella. ¿Cuántas ondas abarca el vidrio si el mismo tiene un espesor de 1,00 cm?

3.38* La luz amarilla de una lámpara de sodio ($\lambda_0 = 589$ nm) cruza un depósito de glicerina (con índice de 1,47) de 20,0 cm de largo, en un tiempo t_1. Si la luz tarda t_2 en cruzar el mismo depósito cuando está lleno de disulfuro de carbono (con índice 1,63), calcule el valor de $t_2 - t_1$.

3.39* Una onda luminosa viaja del punto A al punto B en el vacío. Suponga que introducimos en su camino una placa de vidrio plana ($n_v = 1{,}50$) con espesor de $L = 1{,}00$ mm. Si la longitud de onda del vacío es de 500 nm, ¿cuántas ondas recorren el espacio entre A y B teniendo la placa de cristal en su sitio y quitándola? ¿Qué desfase se introduce insertando la placa?

3.40 La permitividad relativa de baja frecuencia del agua varía de 88,00 a 0 °C hasta 55,33 a 100 °C. Explique este comportamiento. Con la misma temperatura, el índice de refracción ($\lambda = 589{,}3$) va desde aproximadamente 1,33 hasta 1,32. ¿Por qué el cambio de n es mucho más pequeño que el cambio correspondiente de K_E?

3.41 Demuestre que para sustancias de baja densidad, como los gases, que tienen una frecuencia resonante única ω_0, el índice de refracción está dado por:

$$n \approx 1 + \frac{Nq_e^2}{2\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

3.42* En el próximo capítulo, ecuación (4.47), veremos que una sustancia refleja la energía radiante de manera apreciable cuando su índice difiere mucho del índice del medio en el que se encuentra.

a) La constante dieléctrica del hielo medida a frecuencias de microondas es de aproximadamente de 1, mientras que para el agua es unas 80 veces más grande. ¿Por qué?
b) ¿Por qué un haz radar pasa fácilmente a través del hielo, pero se refleja considerablemente al encontrar una lluvia densa?

3.43* La fucsina es un colorante fuerte (anilina) la cual, en disolución con alcohol, tiene un color rojo muy intenso. Aparece roja porque absorbe la componente verde del espectro. (Como se podría esperar, las superficies de los cristales de fucsina reflejan la luz verde de manera muy fuerte.) Imagine que usted tiene un prisma hueco con paredes muy delgadas lleno con esta disolución. ¿Cómo se verá el espectro para luz blanca incidente? Por cierto, la dispersión anómala fue observada por primera vez en 1840 por Fox Talbot, y el efecto fue bautizado en 1862 por Le Roux. Su trabajo fue pronto olvidado para ser redescubierto ocho años más tarde por C. Christiansen.

3.44* Tome la ecuación (3.71) y compruebe las unidades para cerciorarse que concuerdan en ambos lados.

3.45 La frecuencia resonante de un vidrio de plomo está en el UV bastante cerca del visible, mientras que la de la sílice fundida se halla muy lejos en el UV. Utilice la ecuación de dispersión para dibujar un esbozo de n frente a ω para la región visible del espectro.

3.46* Demuestre que la ecuación (3.70) puede volverse a escribir como:

$$(n^2 - 1)^{-1} = -C\lambda^{-2} + C\lambda_0^{-2}$$

donde $C = 4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_e / N q_e^2$.

3.47 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) definió una ecuación empírica para $n(\lambda)$ para sustancias que son transparentes en el visible. Su expresión correspondía a la relación en serie de potencias

$$n = C_1 + C_2/\lambda^2 + C_3/\lambda^4 + \cdots$$

donde las Cs son todas constantes. Dada la figura 3.38, ¿Cuál es el sentido físico de C_1?

3.48 Refiriéndose al problema anterior, dése cuenta que hay una región entre cada par de bandas de absorción para la que la ecuación de Cauchy (con una nueva serie de constantes) funciona bastante bien. Examine la figura 3.37: ¿Qué puede decirse de los distintos valores de C_1 cuando ω disminuye a lo largo del espectro? Omitiendo todos los términos excepto los dos primeros, utilice la figura 3.38 para calcular los valores aproximados para C_1 y C_2 para vidrio crown de borosilicato en el visible.

3.49* El cuarzo cristalino tiene índices de refracción de 1,557 y 1,547 a longitudes de onda de 410,0 nm y 550,0 nm respectivamente. Utilizando sólo los primeros dos términos en la ecuación de Cauchi, calcule C_1 y C_2 y determine el índice de refracción del cuarzo a 610,0 nm

3.50* En 1871, Sellmeier derivó la ecuación

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{A_j \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_{0j}^2}$$

donde los términos A_j son constantes y cada λ_{0j} es la longitud de onda del vacío asociada con una frecuencia natural ν_{0j} tales que $\lambda_{0j}\nu_{0j} = c$. Esta formulación representa una mejora práctica considerable de la ecuación de Cauchy. Demuestre que donde $\lambda >> \lambda_{0j}$, la ecuación de Cauchy es una aproximación de la de Sellmeier. *Pista*: escriba la expresión anterior con tan sólo el primer término de la suma y desarróllela por el teorema binomial: tome la raíz cuadrada de n^2 y desarróllela otra vez.

3.51* Si un fotón ultravioleta va a disociar los átomos de oxígeno y carbono en la molécula de monóxido de carbono, debe proporcionar una energía de 11 eV. ¿Cuál es la frecuencia mínima de la radiación apropiada?

4 La propagación de la luz

4.1 Introducción

En este capítulo nos centraremos en los fenómenos básicos de la *transmisión* (pág. 90), *reflexión* (pág. 96) y *refracción* (pág. 100), que describiremos clásicamente de dos maneras: primero a través de las nociones generales de las ondas y los rayos, y después desde la perspectiva más específica de la Teoría Electromagnética (pág. 111). Una vez hecho esto, ofreceremos una interpretación moderna de lo que está pasando (pág. 140) mediante un tratamiento muy simplificado de la Electrodinámica Cuántica (QED).

La mayoría de los alumnos ya ha estudiado algo sobre estos fenómenos fundamentales de la propagación y considera que las leyes de reflexión y refracción son conceptos directos y sencillos. Esto es así sólo por la perspectiva macroscópica con que se abordan estos conceptos, la cual tiende a ser engañosamente superficial. Por ejemplo, la reflexión, que a primera vista parece algo tan obvio como la luz «que rebota en una superficie», es un fenómeno maravillosamente sutil que generalmente implica el comportamiento coordinado de innumerables átomos. Cuanto más profundizamos en estos procesos, más interesantes nos parecen. Al adentrarnos, surge un gran número de preguntas fascinantes: ¿Cómo se transmite la luz a través de un medio material? ¿Qué le sucede mientras se está transmitiendo? ¿Por qué la luz, al parecer, se transmite a una velocidad distinta de c si los fotones sólo pueden existir a esta velocidad?

Cada vez que la luz entra en contacto con una gran cantidad de materia, tiene lugar algo que podríamos representar como un acto de cooperación que surge cuando un flujo de fotones atraviesa e interacciona con toda una serie de átomos suspendidos (a través de campos electromagnéticos) en el vacío. Los detalles de tal viaje determinan que el cielo sea azul y la sangre roja, que la córnea sea transparente y la mano opaca, que la nieve sea blanca y la lluvia no. En esencia, este capítulo trata sobre el **esparcimiento,** concretamente sobre la absorción y rápida reemisión de la radiación electromagnética por electrones asociados con átomos y moléculas. ***Los procesos de transmisión, reflexión y refracción son manifestaciones macroscópicas del esparcimiento o dispersión que tiene lugar a un nivel submicroscópico.***

Comencemos el análisis considerando en primer lugar la propagación de la energía radiante a través de diversos medios homogéneos.

4.2 Esparcimiento* Rayleigh

Imaginemos un haz estrecho de luz solar con una amplia gama de frecuencias avanzando por el vacío. A medida que progresa, el haz se va expandiendo muy lentamente, pero, aparte de esto, toda la energía sigue avanzando a una velocidad c. Al no haber esparcimiento, no es posible ver el rayo desde un lateral. Tampoco se produce ningún desgaste o disminución de la luz. Cuando se descubrió que una estrella de una galaxia cercana a $1{,}7 \times 10^5$ años luz de distancia había explotado en 1987, el resplandor de luz que alcanzó la Tierra estuvo viajando por el espacio 170.000 años antes de llegar hasta nosotros. ***Los fotones son atemporales.***

Ahora supongamos que mezclamos un soplo de aire en el vacío —algunas moléculas de nitrógeno, oxígeno, etc.—. Estas moléculas carecen de resonancias en el visible, ninguna de ellas puede ser excitada mediante la absorción de un cuanto de luz, y por lo tanto el gas es transparente. Sin embargo, cada molécula se comporta como un pequeño oscilador cuya nube de electrones es impulsada a una vibración en el estado fundamental por un fotón que llega. Justo en el momento en que se inicia esta vibración, la molécula inicia la reemisión de la luz. El fotón es absorbido, e inmediatamente después, se emite otro fotón de la misma frecuencia (y longitud de onda); la luz *se esparce elásticamente.*

* Nota del Revisor: Ver nota en pág. 66.

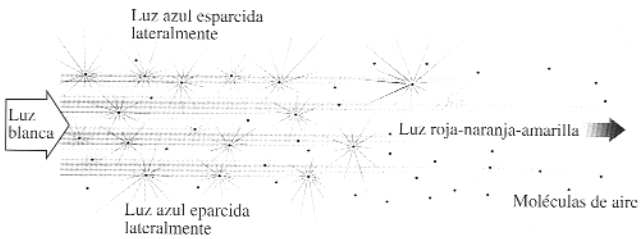


FIGURA 4.1 Luz solar atravesando una región de moléculas de aire muy espaciadas. La luz que se dispersa lateralmente es mayoritariamente azul, razón por la cual el cielo es azul. La luz que no se dispersa, que contiene mucho rojo, solo se ve cuando el Sol está bajo en el cielo, es decir durante la salida y la puesta del mismo.

Las moléculas están orientadas al azar y los fotones se esparcen en todas direcciones (figura 4.1). Incluso cuando la luz es tenue, el número de fotones es inmenso, y parece como si las moléculas estuvieran esparciendo pequeñas ondas esféricas clásicas (figura 4.2) —la energía se dispersa en todas las direcciones—. Ahora bien, dado que el proceso de esparcimiento es bastante débil y el gas tenue, el rayo de luz sufre una atenuación muy pequeña a menos que éste atraviese un tremendo volumen de aire.

Las amplitudes de estas vibraciones en el estado fundamental, y por consiguiente las amplitudes de la luz esparcida, aumentan con la frecuencia porque todas las moléculas tienen resonancias electrónicas en el ultravioleta. Cuanto más cerca esté la frecuencia impulsora de una resonancia, mayor será la respuesta del oscilador. Así pues, la luz violeta es fuertemente esparcida lateralmente fuera del haz, al igual que sucede con la luz azul aunque en menos medida, con la luz verde bastante menos, la luz amarilla aún mucho menos, y así sucesivamente. El rayo que atraviesa el gas será pues más rico en el extremo rojo del espectro, mientras que la luz esparcida (un rayo de Sol que no contenga mucho violeta) será más rica en azul. Ésta es en parte la razón por la cual el cielo es azul.

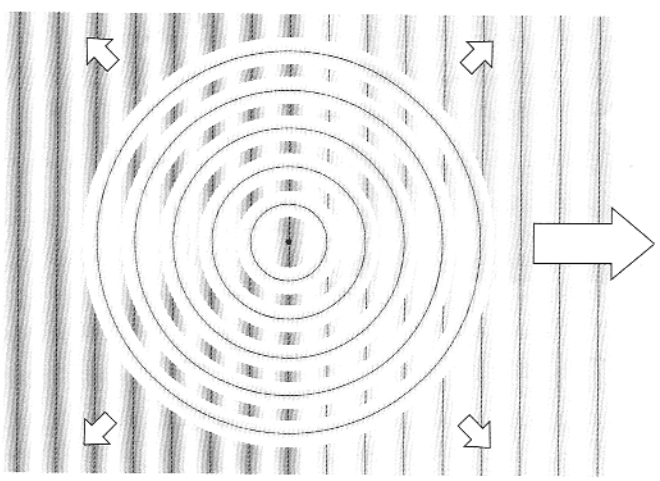


FIGURA 4.2 Una onda plana, incidente por la izquierda, atraviesa un átomo esparciendo así trenes de onda esféricas. El proceso es continuo y centenares de millones de fotones fluyen cada segundo del átomo de esparcimiento en todas las direcciones.

Mucho antes de la mecánica cuántica, Lord Rayleigh (1871) analizó el esparcimiento de la luz solar tomando como referencia los osciladores moleculares. Utilizando un argumento simple basado en el análisis dimensional (véase problema 4.1), Rayleigh llegó a la correcta conclusión de que la intensidad de la luz esparcida era proporcional a $1/\lambda^4$, aumentando por lo tanto con ν^4. Antes de conocerse este trabajo, se creía de forma generalizada que el cielo era azul por el esparcimiento por minúsculas partículas de polvo. A partir de ese momento, el esparcimiento que implica partículas más pequeñas que una longitud de onda (es decir, menos de $\lambda/15$ aproximadamente) se denomina esparcimiento Rayleigh. Los átomos y las moléculas normales reúnen las condiciones ya que su diámetro apenas alcanza unas cuantas décimas de nanómetro, mientras que la luz tiene una longitud de onda de unos 500 nm. Los ojos azules de una persona, las plumas de una urraca de América, la cola azul de cierto tipo de lagartijas o las nalgas azules de un babuino tienen este color gracias al esparcimiento Rayleigh. Es más, en el reino animal, el esparcimiento es la causa de casi todo lo azul, la mayor parte de lo verde e incluso de algo de lo morado. El esparcimiento que tiene lugar en las pequeñas células alveolares de las barbas de las plumas de la urraca, hace que éstas sean azules; el color verde de un loro es una mezcla del amarillo que surge de la absorción preferencial (pág. 136) y del azul procedente del esparcimiento.

Tal y como veremos en breves momentos, una sustancia uniforme densa no esparcirá lateralmente de forma apreciable, y esto es aplicable a la mayor parte de la baja atmósfera. Porque, si la luz azul se esparciera enérgicamente a nivel del mar, una montaña que estuviera en la lejanía nos parecería de color rojizo y esto no sucede ni siquiera a decenas de kilómetros de distancia. Incluso en las capas medias de la atmósfera, la densidad es lo suficientemente densa como para que no se produzca el fenómeno de esparcimiento Rayleigh, así que hay algo más que contribuye a que el cielo sea azul. Lo que sucede en esta región atmosférica es que el movimiento térmico del aire da lugar a unas *fluctuaciones de densidad* rápidamente

cambiantes a escala local. Estas fluctuaciones momentáneas y bastante aleatorias provocan que haya más moléculas en unos sitios que en otros, y que radien más hacia unas direcciones que hacia otras. M. Smoluchowski (1908) y A. Einstein (1910) proporcionaron de manera independiente las ideas básicas de la teoría del esparcimiento por estas fluctuaciones, cuyos resultados son parecidos a los de Rayleigh. El esparcimiento que se produce cuando la densidad no es homogénea es importante siempre que la luz recorra grandes distancias en un medio, como por ejemplo la fibra de vidrio de un enlace de comunicaciones (pág. 199).

La luz solar que entra en la atmósfera en una determinada dirección se esparce en todas direcciones. Si no existiera la atmósfera, durante el día el cielo sería tan negro como el vacío del espacio, tan negro como el cielo lunar. Cuando el Sol se encuentra bajo en el horizonte, su luz atraviesa una gran masa de aire (mucho mayor que al mediodía). Con el extremo azul sensiblemente atenuado, los rojos y los amarillos se propagan desde el Sol a lo largo de la línea visual y producen en la Tierra esas puestas de Sol de fuego que todos hemos visto alguna vez.

4.2.1 Esparcimiento e interferencia

En los medios densos, un gran número de átomos o moléculas apiñados dan lugar a un igualmente gran número de trenes de ondas electromagnéticas esparcidas. Estos trenes de ondas se solapan e interfieren de un modo que no se da en un medio menos denso. Como regla general, ***cuanto más densa es la sustancia por la que la luz avanza, menor es el esparcimiento lateral***. Para entender este principio, tenemos que analizar la interferencia que tiene lugar.

Sobre el fenómeno de la interferencia hemos hablado ya en la página 22 y retomaremos el tema con más detalle en los capítulos 7 y 9; ahora nos centraremos en lo básico. Recordemos que la interferencia es *la superposición de dos o más ondas que producen como resultado una perturbación que es la suma de las contribuciones de las ondas superpuestas.* La figura 2.14 muestra dos ondas armónicas de la misma frecuencia propagándose en la misma dirección. Cuando ambas se encuentran justamente en fase (figura 2.14*a*), la resultante en cada punto es la suma de los dos valores de la altura de la onda. Este caso extremo se denomina ***interferencia totalmente constructiva***. Cuando la diferencia de fase llega hasta 180°, las ondas tienden a anularse, y nos encontramos con el otro caso extremo, denominado ***interferencia totalmente destructiva*** (figura 2.14*d*).

La teoría del esparcimiento Rayleigh presenta una serie de moléculas independientes distribuidas aleatoriamente en el espacio, de tal modo que las fases de los trenes de ondas secundarios que se esparcen hacia los lados no tienen relación alguna entre ellos y no se mantiene ninguna distribución de interferencia. Esta situación se produce cuando la separación

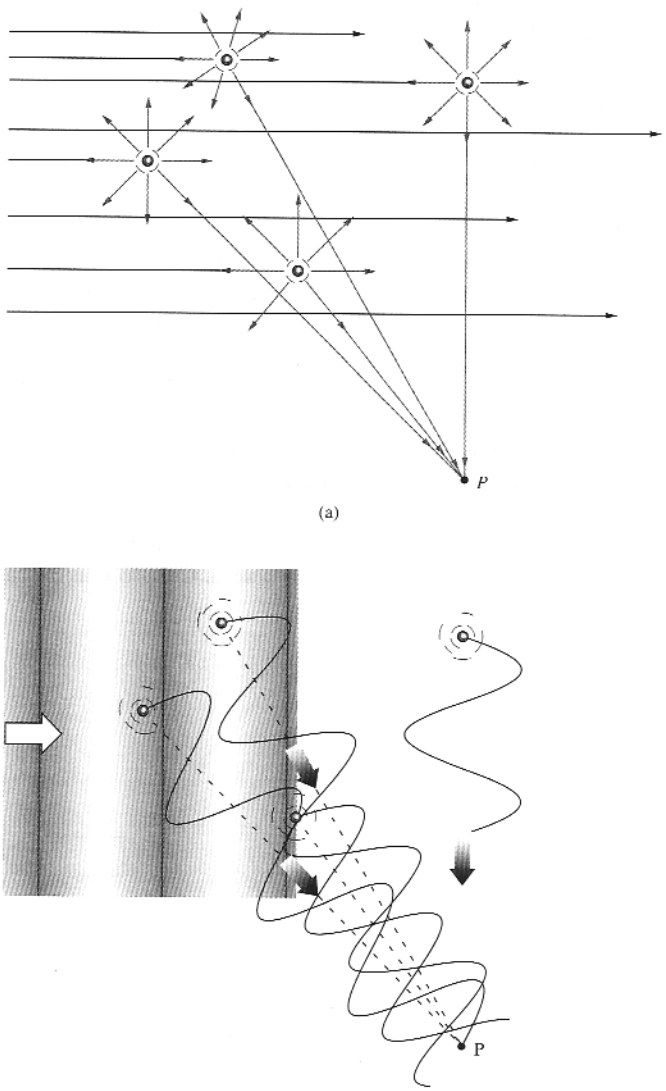


FIGURA 4.3 (*a*) Dispersión de la luz por una distribución de moléculas muy espaciadas. (*b*) Las ondas que llegan al punto *P* lateralmente, contienen muchas fases diferentes y tienden a no interferir de manera sostenida, por lo tanto, una parte importante de la luz se dispersa lateralmente.

entre los dispersores moleculares es de una longitud de onda o más, como sucede con un gas de poca densidad. En la figura 4.3*a* aparece un haz de luz paralelo incidiendo desde la izquierda. Éste, así llamado, *campo de luz primario* (en este caso compuesto de ondas planas) ilumina un grupo de moléculas muy espaciadas. Una progresión continua de frentes de onda primarios recorre y posteriormente activa y reactiva cada molécula, la cual a su vez difunde luz en todas las direcciones y, en particular, hacia un punto lateral P. Dado que las longitudes de sus trayectorias individuales hasta P son muy diferentes en comparación con λ, algunos de los trenes de ondas llegan a P antes y otros se quedan atrás unas cuantas fracciones de longitud de onda (figura 4.3*b*). Dicho de otro modo, las fases de los trenes de ondas que llegan a P son muy distintas entre sí. (Recordemos que las moléculas también se están moviendo alrededor, lo cual también modifica las fases). A cada momento, algunos trenes de ondas interfieren constructivamente, otros destructivamente y la aleatoria y cambiante mezcolanza de trenes de ondas solapados, elimina en promedio la interferencia. ***Los dispersores muy espaciados y al azar, activados por una onda primaria incidente emiten trenes de ondas, básicamente independientes unos de otros, en todas las direcciones excepto hacia delante. La luz esparcida lateralmente, no impedida por la interferencia, sale del haz de luz.*** Esto es aproximadamente lo que sucede a unas 100 millas de la Tierra, en la capa más alejada y menos densa de la atmósfera, donde tiene lugar gran parte del esparcimiento de la luz azul.

Al retomar el concepto de la radiación dipolar, vemos en seguida que la irradiancia dispersada debería depender de $1/\lambda^4$ (sección 3.4.3). Cada molécula es considerada como un oscilador de electrones impulsado a la vibración por el campo incidente. Al estar muy alejadas entre sí, se presupone que también son independientes entre sí y que cada una radia en función de la ecuación (3.56). Los campos eléctricos dispersados son básicamente independientes y no hay interferencia lateral. En consecuencia, la irradiancia neta en P es la suma algebraica de las irradiancias esparcidas por cada molécula (pág. 293). La irradiancia para un dispersor individual se obtiene mediante la ecuación (3.57), y varía con ω^4.

Con la aparición del láser, es posible observar con relativa facilidad el esparcimiento Rayleigh directamente en gases a baja presión, y los resultados obtenidos confirman la teoría.

Propagación Hacia Delante

Para entender por qué la dirección frontal es especial y por qué la onda avanza en cualquier medio, veamos la figura 4.4. Obsérvese que, para un punto frontal P, todas las diversas trayectorias que adopta la luz tienen más o menos la misma longitud; el esparcimiento apenas altera las diversas longitudes de las trayectorias. (Los trenes de ondas esparcidos llegan a P más o menos en fase e interfieren esencialmente constructivamente.) La figura 4.5 nos ofrece una descripción más detallada. En ella se representa una secuencia de tiempo que muestra dos moléculas A y B interactuando con una onda plana primaria incidente —el arco dibujado con línea continua representa el valor máximo de un tren de ondas secundario (máximo positivo); el arco dibujado con línea discontinua corresponde al fondo (máximo negativo)—. En (*a*), el frente de onda primario incide en la molécula A, y ésta empieza a difundir un tren de ondas esférico. Por el momento, supongamos que este tren de ondas esté desfasado 180° con respecto a la onda incidente. (Un oscilador forzado generalmente se encuentra fuera de fase con respecto al excitador: pág. 92). De este modo, A, al ser excitada por un valor

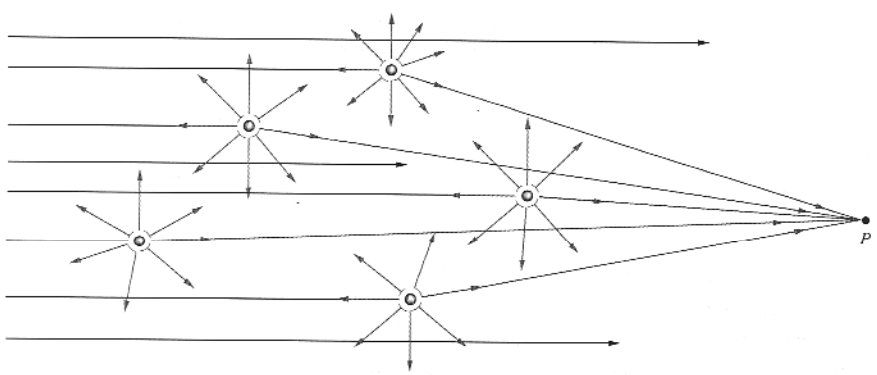


FIGURA 4.4 La dispersión hacia delante no cambia mucho las trayectorias luminosas, por lo tanto las ondas llegan hasta P bastante en fase.

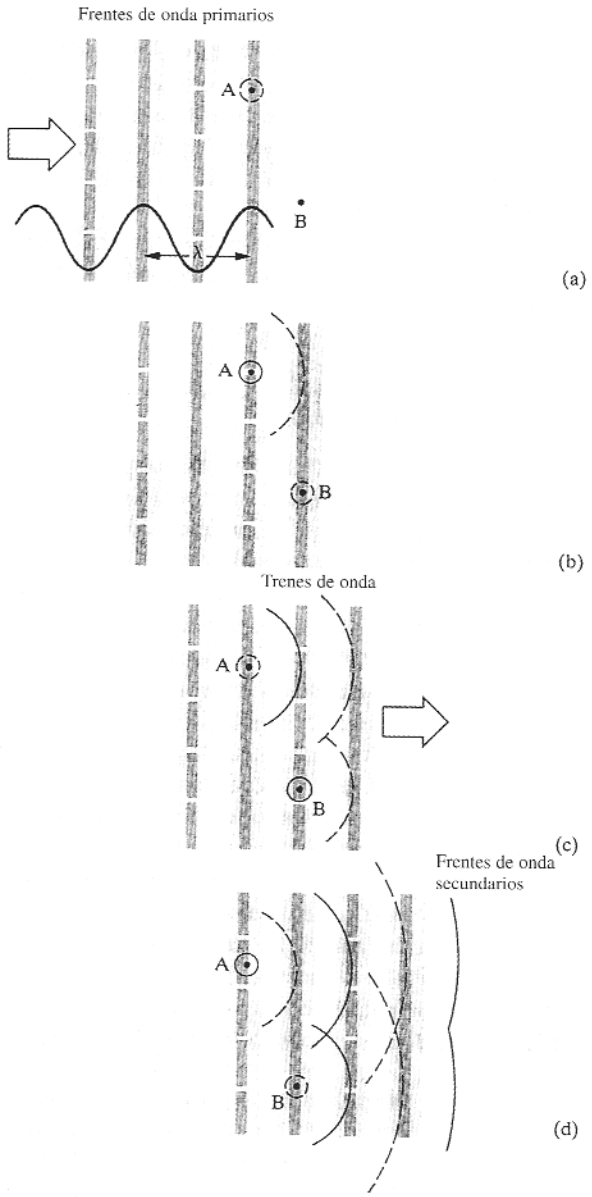


FIGURA 4.5 En la dirección frontal, los trenes de onda esparcidas llegan en fase en frentes de onda planos, fondo con fondo, pico con pico.

máximo (un campo E positivo), comienza a radiar un fondo (un campo E negativo). En la parte (b) podemos ver cómo se solapan el tren de ondas esférico y la onda plana, avanzando juntas pero no de forma sincronizada. El frente de onda incidente choca con B y ésta, a su vez, empieza de nuevo a reradiar un tren de ondas, que también estará 180° fuera de fase. En (c) y (d), vemos el sentido de todo esto, es decir, que ambos trenes de ondas avanzan frontalmente están en fase entre sí. Esta condición se da en todos los trenes de ondas de este tipo, sin importar cuántas moléculas los compongan o cómo estén distribuidas. Debido a la asimetría introducida por el propio haz, ***todos los trenes de ondas esparcidos se suman constructivamente en la dirección hacia delante.***

4.2.2 La transmisión de la luz a través de un medio denso

Supongamos ahora que la cantidad de aire en la región que nos ocupa aumenta. Es más, imaginemos que cada pequeña porción cúbica de aire, cuyo lado mide una longitud de onda, contiene un gran número de moléculas, por lo que se dice, tiene una apreciable *densidad óptica*. (Este uso deriva probablemente del hecho de que experimentos realizados en el pasado con gases indicaron que un aumento de la densidad va acompañado de un incremento proporcionado del índice de refracción.) A las longitudes de onda de la luz, la atmósfera de la Tierra, a la temperatura y presión normales, contiene unos 3 millones de moléculas por cada porción cúbica λ^3. Es imposible suponer que los trenes de ondas esparcidos ($\lambda \approx 500$ nm) que radiados por fuentes tan juntas ($\approx$3 nm) lleguen a un punto P con fases aleatorias —la interferencia influirá notablemente—. Esto mismo sucede en el caso de los líquidos y los sólidos, donde los átomos están 10 veces más juntos y en una disposición mucho más ordenada. En estos casos, el haz de luz realmente encuentra un medio uniforme sin discontinuidades que destruyan la simetría. Una vez más, el tren de ondas esparcido interfiere constructivamente en la dirección frontal (esta parte es independiente del modo en que estén dispuestas las moléculas), pero ahora predomina la interferencia destructiva en todas las demás direcciones. ***En un medio denso homogéneo, muy poca luz o nada acaba esparcida hacia los laterales o hacia atrás.***

Para ilustrar este fenómeno, en la figura 4.6 podemos ver un haz de luz moviéndose a través de una serie ordenada de dispersores muy juntos. En todos los frentes de ondas a lo largo del haz de luz, las capas moleculares se activan en fase, la radian y se vuelven activar una y otra vez a medida que la luz pasa por ellas. De este modo, una molécula A radiará esféricamente desde el haz de luz, pero debido a la disposición ordenada tan junta, habrá también otra molécula B, a una distancia de

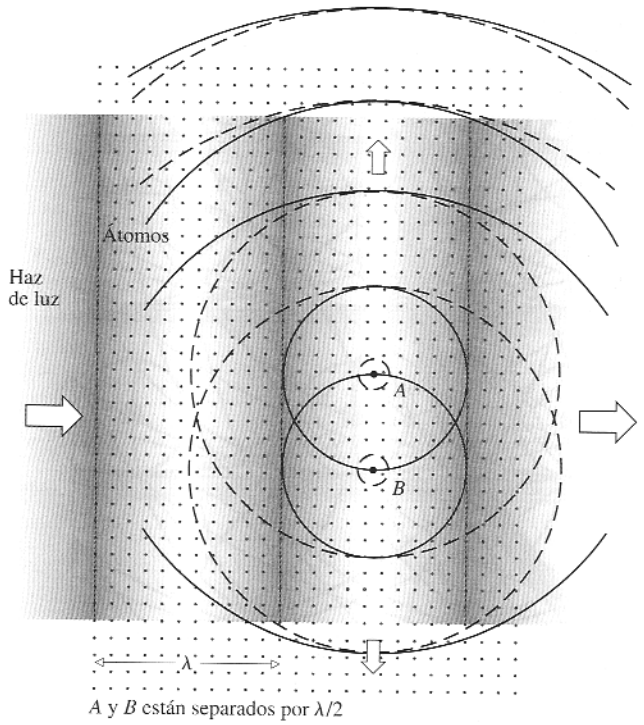


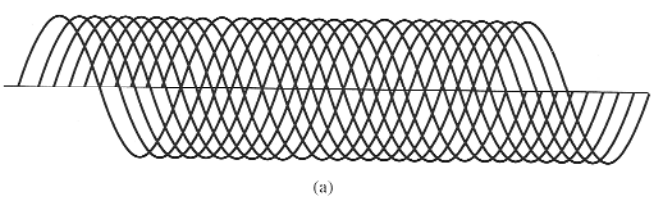
FIGURA 4.6 Una onda plana incidente por la izquierda. El medio se compone de muchos átomos muy cercanos. Entre muchos otros, un frente de onda estimula dos átomos, *A* y *B*, puestos a casi media longitud de onda de distancia. Los trenes de onda que emiten interfieren destructivamente. Los mínimos se superponen a los máximos anulándose total y mutuamente en la dirección perpendicular al haz. Este proceso se repite continuamente dispersando lateralmente poco o nada de luz.

$\approx\lambda/2$, de manera que ambos trenes de ondas se anularán en la dirección transversal. En este caso, donde λ es miles de veces mayor que los dispersores y las distancias entre ellos, es probable que siempre haya parejas de moléculas que tiendan a anular mutuamente sus trenes de ondas en cualquier dirección lateral. Incluso cuando la disposición del medio no está perfectamente ordenada, el campo eléctrico neto en un punto determinado en una dirección transversal cualquiera será la suma de un grandísimo número de *diminutos* campos esparcidos, cada uno de ellos algo desfasado con respecto al siguiente, de tal modo que la suma (que variará según el punto) siempre será una cantidad pequeña (figura 4.7). Este fenómeno cobra sentido desde la perspectiva de la conservación de la energía —no podemos tener interferencias constructivas en todas las direcciones—. ***La interferencia provoca una redistribución de la energía: la quita de las zonas donde la interferencia es destructiva y la pone en aquéllas donde es constructiva.***

Cuanto más denso, uniforme y ordenado es el medio (lo más próximo a la homogeneidad), más completa será la interferencia destructiva lateral y menor será la dispersión no frontal. De este modo, la mayor parte de la energía se canalizará en dirección frontal y el haz de luz avanzará prácticamente intacto (figura 4.8).

El esparcimiento que tiene lugar en cada molécula individualmente es muy débil. Para dispersar la mitad de su energía, un haz de luz verde tendrá que atravesar $\approx$ 150 km de atmósfera. Dado que la cantidad de moléculas que encontramos en un determinado volumen de líquido es mil veces mayor que en el mismo volumen de vapor (a la presión atmosférica), se puede prever que el esparcimiento aumente. Sin embargo, el líquido es un estado mucho más ordenado con fluctuaciones de densidad mucho menos pronunciadas, lo cual debería suprimir el esparcimiento no frontal apreciablemente. Así pues, en los líquidos podemos observar un aumento del esparcimiento por unidad de volumen, pero dicho aumento rondará más entre 5 y 50 veces que en torno a las 1.000. Molécula a molécula, los líquidos esparcen notablemente menos que los gases. Si ponemos unas cuantas gotas de leche en un depósito de agua y lo iluminamos con un destello potente de luz, una neblina azul, débil pero inconfundible, se difundirá lateralmente, y el haz de luz directa surgirá decididamente rojizo.

Los sólidos transparentes amorfos, como el vidrio o el plástico, también difundirán la luz lateralmente, si bien de manera muy débil. Los cristales buenos, tales como el cuarzo o la mica, poseen una ordenación molecular casi perfecta y por lo


(a)

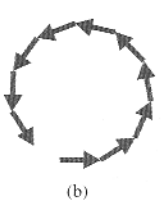

(b)

FIGURA 4.7 (*a*) Cuando un número muy elevado de ondas pequeñas ligeramente desplazadas llega a un punto en el espacio, existe la misma cantidad de campo positivo *E* que negativo, siendo la perturbación resultante casi cero. (*b*) Los pequeños fasores que representan a esas ondas conforman una figura circular muy pequeña y la resultante (cuya oscilación depende del número de ondas) no es nunca grande.

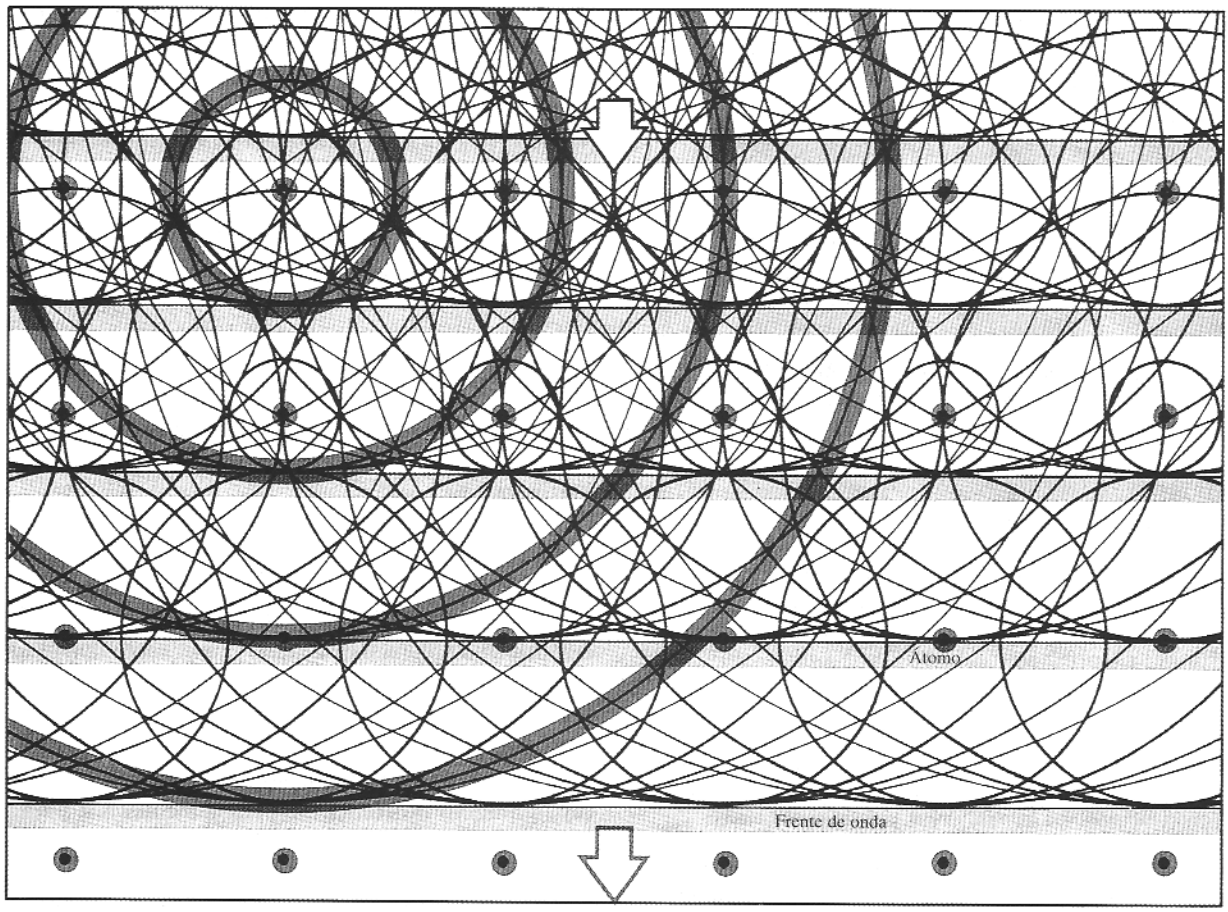


FIGURA 4.8 Una onda plana descendente incidente en una serie ordenada de átomos. Los trenes de onda se esparcen en todas las direcciones y se superponen para formar una onda plana secundaria que avanza hacia abajo.

tanto la luz se esparce aún más débilmente. Bien es verdad que cualquier tipo de imperfección (polvo y burbujas en los líquido, defectos e impurezas en los sólidos) actúa como dispersor; cuando éstos son pequeños, como en el caso de la gema piedra de luna, la luz que emerge será de color azul.

En 1869, John Tyndall investigó la dispersión que producen las partículas pequeñas. Descubrió que, a medida que el tamaño de la partícula aumenta (desde una fracción de longitud de onda), la cantidad de esparcimiento de las longitudes de onda mayores también aumenta proporcionalmente. Las nubes que vemos en el cielo dan testimonio del hecho de que las gotas de agua relativamente grandes difunden luz blanca sin ninguna coloración apreciable. Lo mismo sucede con los microscópicos glóbulos de la grasa y la proteína de la leche.

Cuando el número de moléculas que hay en una partícula es pequeño, éstas se encuentran muy juntas entre sí y actúan al unísono; sus trenes de ondas interfieren constructivamente, por lo que el esparcimiento que se produce es mayor. A medida que el tamaño de la partícula se aproxima a la longitud de onda, los átomos situados en los extremos dejan de radiar trenes de ondas que están necesariamente en fase, y el esparcimiento comienza a decrecer. Esto sucede primero en las longitudes de onda cortas (azul), y a medida que el tamaño de las partículas aumenta, crece proporcionalmente el esparcimiento del extremo rojo del espectro (cada vez más en la dirección frontal). En 1908, Gustav Mie publicó por primera vez el análisis teórico de el esparcimiento que se produce por partículas esféricas de cualquier tamaño. El esparcimiento Mie depende sólo mínimamente de la longitud de onda y es

totalmente independiente de ésta (luz blanca entrante, luz blanca saliente) cuando el tamaño de la partícula es superior a λ. Resulta bastante razonable afirmar que, con respecto al esparcimiento Mie, el esparcimiento Rayleigh es el caso límite a tamaño pequeño.

En un día nublado, el cielo parece cubierto con una neblina gris debido a las gotas de agua de gran tamaño. Del mismo modo, algunos recipientes baratos de plástico para comida, así como el plástico blanco de las bolsas de basura, aparecen en un tono pálido entre azul y blanco bajo la luz esparcida, y claramente naranjas bajo la luz transmitida. Para que las bolsas de basura sean opacas, han de contener entre un 2 a un 2,5% de esferas de TiO_2 claras ($n = 2{,}76$) en unos 200 nm de diámetro, y éstas esparcen con esparcimiento Mie en azul-blanco [1].

4.2.3 La transmisión y el índice de refracción

La transmisión de la luz a través de un medio homogéneo es un proceso continuo y repetitivo de dispersión y redispersión. Cada vez que tiene lugar, se produce un desplazamiento de fase en el campo de luz que, en última instancia, aparece como un cambio en la velocidad de fase aparente del haz de luz transmitido con respecto a su valor nominal c. Esto corresponde a un índice de refracción para el medio ($n = c/v$) que es distinto de uno, aunque los **fotones sólo existan a una velocidad** c.

Para entender este fenómeno, veamos de nuevo la figura 4.5. Recordemos que los trenes de ondas dispersos se combinan todos en fase en la dirección frontal para formar lo que podríamos denominar la *onda secundaria*. Por razones exclusivamente empíricas, podemos anticipar que la onda secundaria se combinará con lo que queda de la onda primaria para dar lugar a la única perturbación observada dentro del medio, a saber, la **onda transmitida**. *Las ondas electromagnéticas primaria y secundaria se propagan en el vacío interatómico con una velocidad c*. Sin embargo, también puede suceder que el medio posea un índice de refracción distinto a uno. La onda refractada aparecerá con una velocidad de fase inferior, igual o mayor que c. La clave de esta aparente contradicción reside en la relación de fase entre la onda secundaria y la primaria.

[1] Recientemente se ha descubierto (y fue por casualidad) que los materiales opacos no homogéneos, como la leche y la pintura blanca, pueden reducir la velocidad real de la luz hasta incluso una décima parte del valor que correspondería al medio. Véase S. John, «Localization of light». *Phys. Today* **44**, 32 (1991).

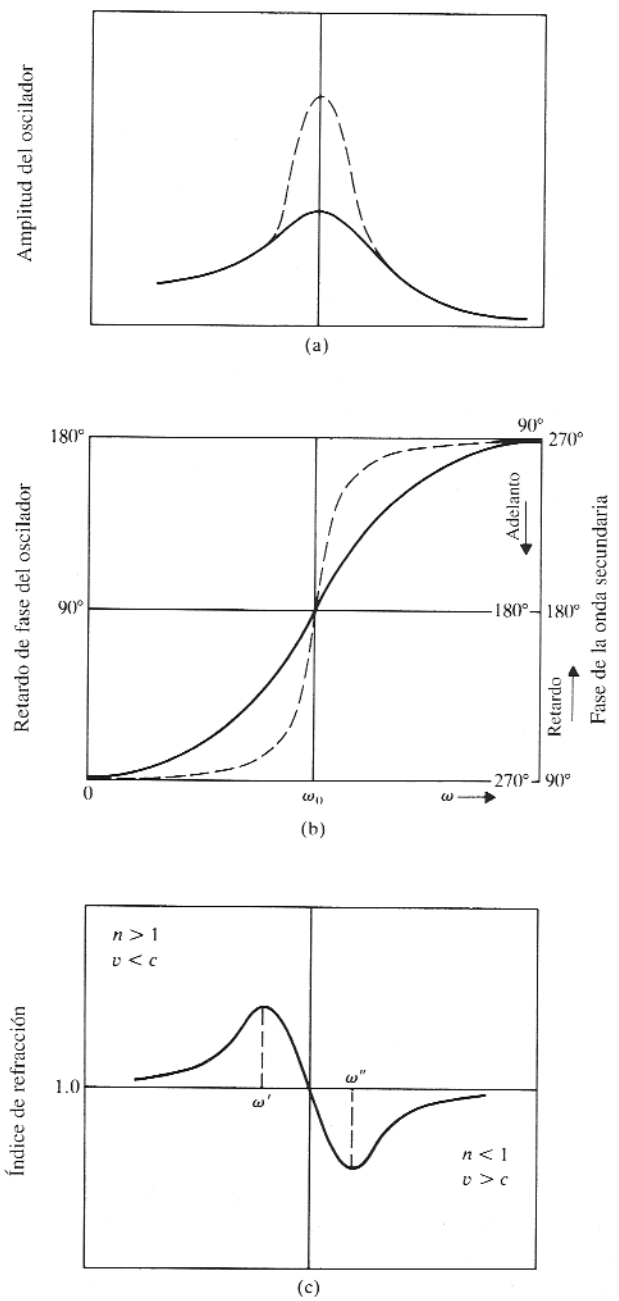


FIGURA 4.9 Representación esquemática de la amplitud (*a*) y del retardo en la fase (*b*) frente a la frecuencia excitadora para un oscilador amortiguado. Las curvas de rayas corresponden al amortiguamiento disminuido. El índice de refracción correspondiente se muestra en (*c*).

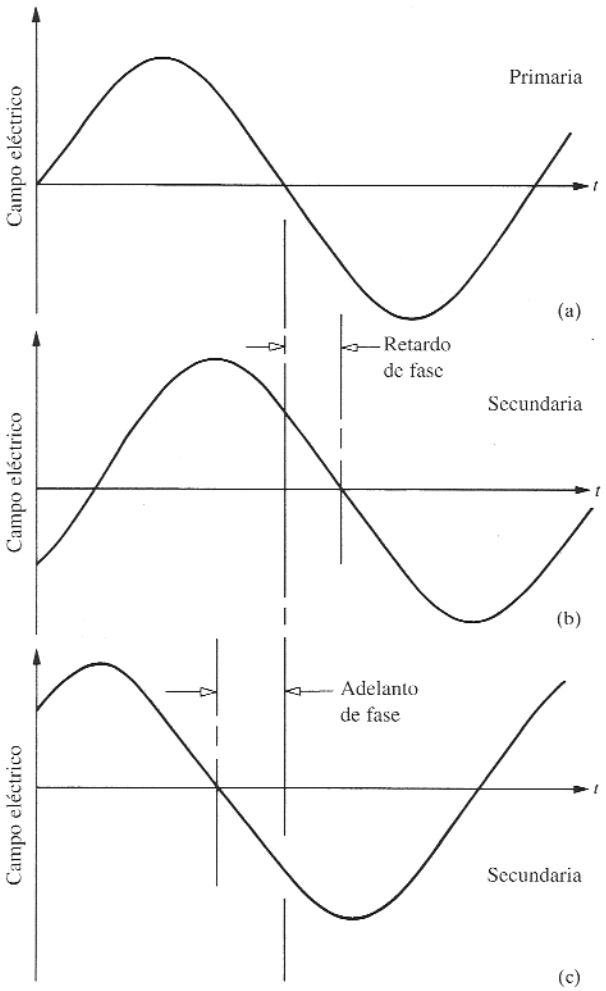


FIGURA 4.10 Una onda primaria (*a*) y dos ondas secundarias posibles. En (*b*) la secundaria se queda atrás con respecto a la primaria —se tarda más en alcanzar cualquier valor determinado—. En (*c*) la onda secundaria alcanza cualquier valor determinado antes que la primaria, es decir, la precede.

El modelo tradicional establece que, solamente a frecuencias relativamente bajas, los osciladores de electrones vibrarán casi totalmente en fase con la fuerza excitadora (es decir, la perturbación primaria). A medida que la frecuencia del campo electromagnético aumenta, los osciladores se quedan atrás, sufren proporcionalmente un mayor desfase. Un análisis detallado de este hecho revela que en resonancia el retraso en la fase alcanzará los 90°, aumentando posteriormente hasta llegar a los 180°, o a media longitud de onda, a frecuencias bastante superiores al valor

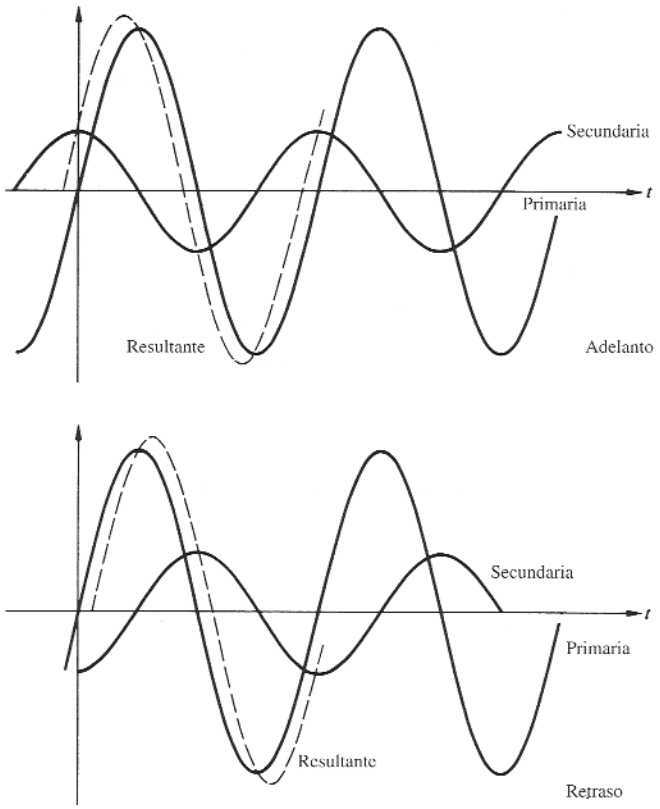


FIGURA 4.11 Si la secundaria precede a la primaria, la resultante también la precederá.

característico concreto. El problema 4.4 analiza el retraso en la fase para un oscilador forzado amortiguado, y en la figura 4.9 se resumen los resultados.

Además de estos retrasos, hay otro efecto que debemos considerar. Cuando los trenes de ondas dispersados se vuelven a combinar, la propia onda secundaria resultante [2] se retrasa 90° con respecto a los osciladores.

El efecto combinado de estos dos mecanismos es que, a frecuencias por debajo de la resonancia, la onda secundaria se retrasa con respecto a la primaria (figura 4.10) entre 90° y 180° aproximadamente; y a frecuencias por encima de la resonan-

[2] Este punto se hará más explícito cuando consideremos los postulados de la teoría Huygens-Fresnel en el capítulo sobre la difracción. Gran parte de lo publicado sobre E&M trata el problema de la radiación como una lámina de cargas oscilantes, en cuyo caso el desfase de 90° es un resultado natural (véase problema 4.5).

cia, el desfase oscila en torno a los 180° y 270°. Pero un retraso de $\delta \geq 180°$ es equivalente a un avance de fase de $360° - \delta$, [por ej.: $\cos(\theta - 270°) = \cos(\theta - 90°)$]. Esto podemos verlo a la derecha de la figura 4.9*b*.

Dentro de un medio transparente, las ondas primaria y secundaria se solapan y, dependiendo de sus amplitudes y fase relativa, generan una perturbación neta transmitida. A excepción del hecho de que se debilita al dispersarse, la onda primaria se transmite por el material del mismo modo que si estuviera atravesando el espacio libre. Comparada con esta onda del espacio libre, que es la que inicia el proceso, la onda transmitida resultante sufre un desfase que resulta crucial.

Cuando la onda secundaria se retrasa (o adelanta) con respecto a la primaria, la onda transmitida resultante también ha de retrasarse (o adelantarse) en la medida que corresponda (figura 4.11). Esta relación cualitativa satisface nuestros objetivos por el momento, si bien cabe destacar que la fase de la resultante también depende de las amplitudes de las ondas que interactúan [véase la ecuación (7.10)]. A frecuencias inferiores a ω_0, la onda transmitida se retrasa con respecto a la onda del espacio libre, mientras que a frecuencias superiores a ω_0, aquélla se adelanta respecto a ésta. En el caso concreto de que $\omega = \omega_0$, la onda primaria y secundaria se desfasan en 180°; la primera actúa en contra de la segunda, de tal modo que la onda refractada sufre una reducción considerable de amplitud, si bien su fase permanece inalterable.

A medida que la onda transmitida avanza a través del medio, el fenómeno del esparcimiento tiene lugar una y otra vez. La luz que atraviesa la sustancia se va retrasando, o adelantando progresivamente. Es evidente que, dado que la velocidad de la onda es el ritmo de avance de la condición de fase constante, cualquier cambio que se produzca en la fase provocará asimismo un cambio de velocidad.

A continuación nos gustaría demostrar que un desfase equivale a una diferencia en la velocidad de fase. En el espacio libre, podemos representar la perturbación que se produce en un punto P como

$$E_P(t) = E_0 \cos \omega t \tag{4.1}$$

Si P está rodeado por un dieléctrico, se producirá un desplazamiento de fase acumulativo ε_P, ocasionado a medida que la onda atravesaba el medio en dirección a P. A los niveles de irradiación normales, el medio se comportará de forma lineal, y la frecuencia en el dieléctrico será la misma que en el vacío, aunque la longitud de onda y la velocidad no coincidan. Aunque esta vez ocurre en el medio, la perturbación en P será, una vez más,

$$E_P(t) = E_0 \cos(\omega t - \varepsilon_P) \tag{4.2}$$

donde la sustracción de ε_P corresponde al retraso en fase. Un observador que estuviera en P tendría que esperar más tiempo en el medio material que en el vacío para que una cresta determinada llegara a él. Es decir, si imaginamos dos ondas paralelas de la misma frecuencia, una en el vacío y la otra en un medio material, la primera pasará por P en un tiempo ε_P/ω menor que la otra. Vemos pues claramente que, *un desfase de ε_P corresponde a una reducción en velocidad*, $v < c$ y $n > 1$. De manera parecida, *un adelanto de la fase da como resultado un aumento de la velocidad*, $v > c$ y $n < 1$. Una vez más, se produce un proceso de esparcimiento continuo, y el desfase acumulativo se produce a medida que la luz penetra en el medio. Dicho de otro modo, ε es una función de la longitud del dieléctrico atravesado, tal y como debe ser si v permanece constante (véase problema 4.5). En la gran mayoría de situaciones que nos encontramos en Óptica $v < c$ y $n > 1$; véase la

TABLA 4.1 Índices de refracción aproximados de varias sustancias*

Aire	1,000 29
Hielo	1,31
Agua	1,333
Alcohol etílico (C_2H_5OH)	1,36
Cuarzo fundido (SiO_2)	1,458 4
Tetracloruro de carbono (CCl_4)	1,46
Trementina	1,472
Benceno (C_6H_6)	1,501
Plexiglás	1,51
Vidrio crown	1,52
Cloruro de sodio (NaCl)	1,544
Vidrio flint ligero	1,58
Poliestireno	1,59
Disulfuro de carbono (CS_2)	1,628
Vidrio flint denso	1,66
Vidrio flint de lantano	1,80
Zircón ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1,923
Titanito de estroncio ($SrTiO_3$)	2,409
Diamante (C)	2,417
Rutilo (TiO_2)	2,907
Fosfuro de galio	3,50

*Los valores varían según las condiciones físicas - pureza, presión, etc. Estos corresponden a una longitud de onda de 589 nm.

tabla 4.1. La excepción principal es el caso de la propagación de los rayos X donde $\omega > \omega_0$, $v > c$, y n < 1.

Ahora también podemos entender la forma general de $n(\omega)$, tal y como se representa en la figura 4.9*c*. A frecuencias muy por debajo de ω_0, las amplitudes de los osciladores y, por lo tanto, de las ondas secundarias son muy pequeñas, con ángulos de fase de aproximadamente 90°. En consecuencia, la onda refractada apenas se retrasa, y n es prácticamente igual a 1. A medida que ω aumenta, las ondas secundarias alcanzan una amplitud mayor y se retrasan mayores cantidades. El resultado es una velocidad de onda cada vez menor y un valor de $n > 1$ cada vez mayor. A pesar de que las amplitudes de las ondas secundarias siguen aumentando, sus fases relativas se aproximan a los 180° a medida que ω se acerca a ω_0. Como consecuencia, disminuye su capacidad de ocasionar un nuevo aumento en el retraso de la fase resultante. El punto de inflexión ($\omega = \omega'$) donde la onda refractada comienza a experimentar un retraso en la fase decreciente y una velocidad en aumento ($dn/d\omega < 0$). Esto continúa hasta que $\omega = \omega_0$, tras lo cual la amplitud de la onda transmitida se reduce apreciablemente pero su fase y velocidad permanecen invariables. En este punto, $n = 1$, $v = c$, y más o menos nos encontramos en el centro de la banda de absorción.

Para frecuencias justo detrás de ω_0, las ondas secundarias de amplitud relativamente grande, se adelantan; la onda transmitida se adelanta en fase y su velocidad sobrepasa c (n < 1). A medida que ω aumenta, la situación se repite pero en sentido contrario (con ciertas asimetrías debido a la asimetría dependiente de la frecuencia en las amplitudes y en el esparcimiento del oscilador). A frecuencias incluso mayores, las ondas secundarias, que en este caso cuentan con una amplitud muy pequeña, se adelantan casi 90°. La onda transmitida resultante avanza ligeramente en fase, y n se aproxima paulatinamente a 1.

La forma concreta de una determinada curva $n(\omega)$ depende de la amortiguación que tenga el oscilador, así como de la cantidad de absorción que, por su parte, depende del número de osciladores que participen.

Una solución radical para el problema de la propagación se denomina *Teorema de Extinción de Ewald-Oseen*. Aunque resultaría demasiado complicado abordar aquí el formalismo matemático correspondiente, el cual incluye ecuaciones integrodiferenciales, los resultados son ciertamente interesantes. Se sabe que los osciladores electrónicos generan una onda electromagnética que posee esencialmente dos características: una es precisamente que anula la onda primaria dentro del medio. La otra, y única perturbación restante, se transmite a través del dieléctrico a una velocidad $v = c/n$ como onda transmitida [3]. ***Por consiguiente, podemos sencillamente presuponer que una onda de luz que se propague por una sustancia cualquiera, se transmite a una velocidad*** $v \neq c$.

Al parecer, cualquier modelo mecánico-cuántico que construyamos tendrá que asociar de un modo u otro una longitud de onda con el fotón. Esta operación es fácil de realizar matemáticamente mediante la expresión $p = h/\lambda$, incluso si aún no sabemos claramente qué sucede con las ondas. Sea como fuere, la naturaleza ondulatoria de la luz parece inexorable; tendrá que ser incluida de una forma u otra. Y una vez que tenemos la idea de longitud de onda del fotón, resulta natural incorporar el concepto de fase relativa. Así pues, ***el índice de refracción surge cuando el proceso de absorción y emisión adelanta o retrasa las fases de los fotones dispersados, aún cuando ellos se propagan a una velocidad*** c.

4.3 Reflexión

Cuando un rayo de luz incide en la superficie de un material transparente, como una lámina de vidrio, la onda «ve» una enorme distribución superficial de átomos muy próximos entre sí que harán que se esparza la onda. Recordemos que la onda puede medir ≈500 nm, mientras que los átomos y las separaciones entre ellos (≈0,2 nm) son miles de veces más pequeños. En el caso de la transmisión a través de un medio denso, los trenes de ondas se anulan mutuamente en todas las direcciones excepto en la frontal y solamente se mantiene el rayo que avanza hacia adelante. Pero esto sucede sólo cuando no hay discontinuidades. Este no es el caso en una interfaz entre dos medios transparentes diferentes (como el aire y el cristal), donde se produce una discontinuidad de salto. Cuando un haz de luz alcanza tal interfaz, siempre hay una parte de la luz que se esparce hacia atrás, y a este fenómeno se le denomina **reflexión**.

Si la transmisión entre dos medios es gradual —es decir, si la constante dieléctrica (o el índice de refracción) cambia de la de un medio a la del otro en una distancia de al menos una longitud de onda—, la reflexión será muy pequeña; en realidad, la interfaz se desvanece. Por otro lado, una transición de un medio a otro en una distancia de un cuarto de longitud de onda o inferior se comporta casi como si se tratara de un cambio totalmente discontinuo.

[3] Para más información sobre el teorema de Ewald-Oseen, véase *Principles of Optics*, de Born y Wolf, apartado 2.4.2, cuya lectura es bastante dura. Asimismo, véase Reali, «Reflection from dielectric materials». *Am. J. Phys.* **50**, 1133 (1982).

FIGURA 4.12 (*a*) Un haz luminoso que se propaga a través de un medio homogéneo denso como el vidrio. (*b*) Al partir y separar el bloque de vidrio, la luz se refleja hacia atrás en las dos nuevas interfaces. El haz I se refleja externamente y el haz II internamente. Idealmente, al volver a juntar los dos pedazos, los dos haces reflejados se anulan recíprocamente.

Reflexión Interna y Externa

Imaginemos que la luz viaja a través de un gran bloque homogéneo de vidrio (figura 4.12). Supongamos ahora que cortamos el bloque por la mitad en sentido perpendicular al rayo de luz. Separamos los dos segmentos mostrando las superficies planas y suaves, tal y como aparece dibujado en la figura 4.12*b*. Antes de efectuar el corte, no había ninguna onda de luz transmitiéndose hacia el lado izquierdo del vidrio —sabemos que el haz de luz sólo avanza hacia delante—. Ahora debe haber una onda (haz-I) moviéndose hacia la izquierda, que se refleja desde la superficie del bloque de la derecha. De esto se infiere que una región de dispersores sobre y bajo la superficie expuesta del bloque de la derecha, ahora aparecen «desparejados», y la radiación hacia atrás que estos dispersores emiten ya no puede ser anulada. La región de osciladores que, antes del corte, estaba pegada a éstos, se encuentra ahora en la sección izquierda del vidrio. Cuando las dos secciones estaban juntas, estos dispersores supuestamente también emitían trenes de ondas hacia atrás, los cuales estaban desfasados 180° con respecto al haz-I y lo anulaban. Ahora dan lugar al haz-II reflejado. Cada molécula esparce luz hacia atrás y, en principio, ***todas y cada una de las moléculas contribuyen a la onda reflejada.*** En la práctica, sin embargo, se trata de una fina capa ($\approx\lambda/2$ de profundidad) de osciladores atómicos desparejados cerca de la superficie que realmente hace posible la reflexión. Para una interfaz aire-vidrio, alrededor de un 4% de la energía del rayo incidente que cae perpendicular *en* el aire o *sobre* el vidrio, será reflejada directamente hacia atrás por esta capa de dispersores desparejados (pág. 91). Y esto sucede en un vidrio de 1,0 mm de grueso en el de 1.00 m.

El haz-I se refleja desde el bloque de la derecha y, dado que la luz al principio se transmitía de un medio de menor a uno de mayor densidad óptica, a este fenómeno se le denomina **reflexión externa.** Dicho de otro modo, el índice del medio incidente (n_i) es menor que el índice del medio transmisor (n_t). Esto mismo sucede a la capa desparejada de la sección que se transmitió hacia la izquierda, por lo que ésta también refleja la luz hacia atrás. Con el haz incidente perpendicularmente *en* el vidrio *sobre* el aire, un 4% será reflejado, esta vez como haz-II. A este proceso se le conoce como **reflexión interna** porque $n_i > n_t$. Si vamos aproximando lentamente entre sí las dos regiones de vidrio (de tal modo que la distancia entre ellas quede reducida a una fina película de, digamos, aire), la luz reflejada disminuirá y acabará por desaparecer cuando las dos caras se unan y ya no se puedan ver, y el bloque vuelva a ser continuo otra vez. Recordemos este ***cambio de fase relativo de 180° entre la luz reflejada interna y externamente*** (para un enfoque más profundo, véase el apartado 4.10), del cual volveremos a hablar más adelante.

Cuando hacemos el experimento con un simple espejo, vemos claramente cómo la luz blanca se refleja como blanca, y no, ciertamente, como azul. Para entender esto, recordemos primero que la capa de dispersores que hacen que se produzca la reflexión tiene un grosor real de aproximadamente $\lambda/2$ (de acuerdo con la figura 4.6). En consecuencia, cuanto mayor es la longitud de onda, más profunda será la región involucrada (generalmente capas de más de mil átomos), y mayor será el número de dispersores que actúan juntos. Esto neutraliza el hecho de que cada dispersor sea menos eficiente a medida que λ aumenta (recordemos $1/\lambda^4$). El resultado final es que ***la superficie de un medio transparente refleja todas las longitudes de onda prácticamente de la misma manera y nunca aparece en color.*** Ésta, como veremos, es la razón por la que esta página parece blanca si la ponemos debajo de una iluminación de luz blanca.

4.3.1 La ley de la reflexión

La figura 4.13 muestra un haz de luz compuesto de una serie de frentes de onda planos incidiendo con un determinado ángulo sobre la superficie, suave y plana, de un medio ópticamente denso (pongamos por caso el vidrio). Supongamos que el medio de alrededor es el vacío. Sigamos la trayectoria de un frente de onda a medida que éste va adentrándose por entre las

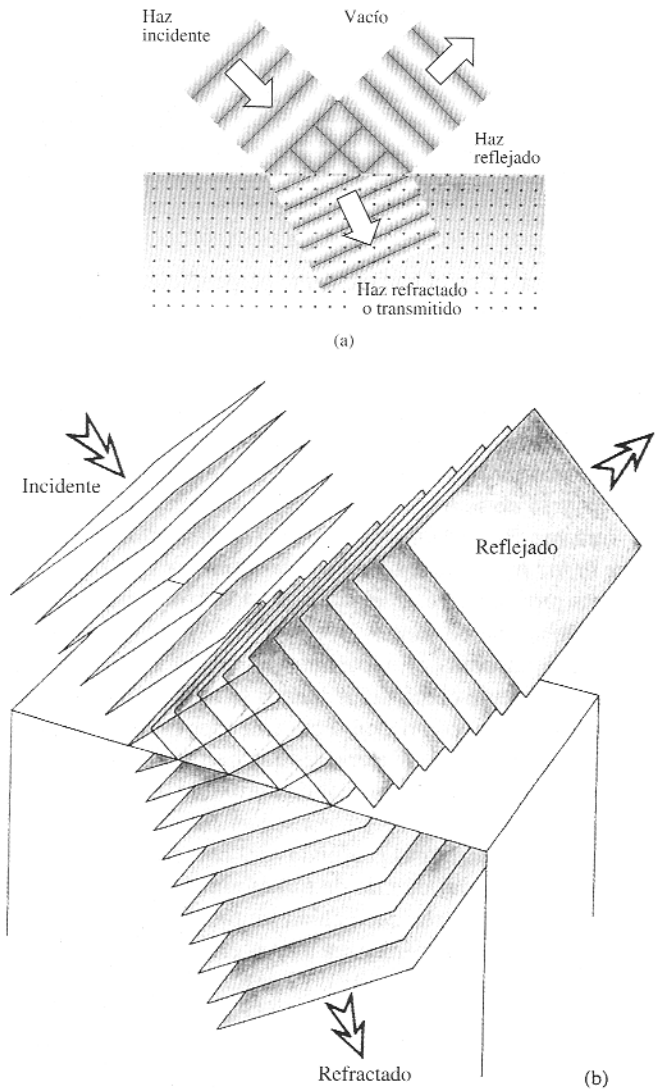


FIGURA 4.13 Un haz de ondas planas incidente en una distribución de moléculas que forman un trozo de vidrio o plástico claros. Parte de la onda incidente se refleja y parte se refracta.

moléculas de la superficie. Para simplificar las cosas, en las figuras 4.14 y 4.15 hemos omitido todo excepto una capa molecular en la interfaz. A medida que desciende el frente de onda, activa y reactiva dispersor por dispersor, cada uno de los cuales radia un flujo fotónico que podemos considerar como un tren de ondas hemisférico en el medio incidente. Debido a que la longitud de onda es mucho mayor que la separación

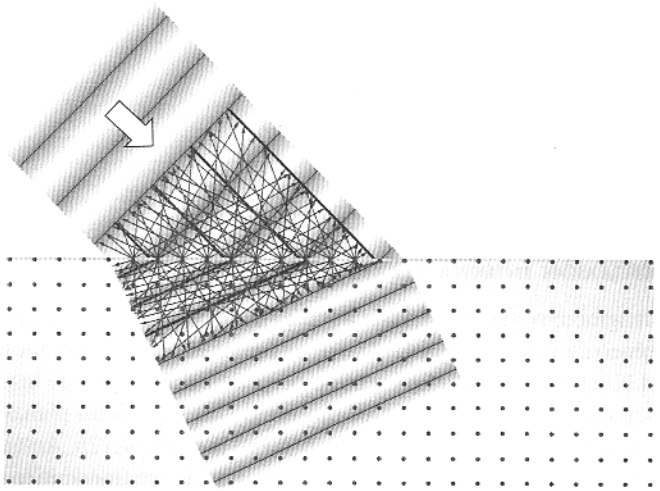


FIGURA 4.14 Una onda plana hace un barrido estimulando átomos a través de la interfaz. Éstos radian y reradian casi continuamente, por lo que dan lugar tanto a ondas reflejadas como transmitidas.

entre las moléculas, los trenes de ondas que son radiados hacia detrás al medio incidente avanzan juntos y se añaden constructivamente en una única dirección, con lo que sólo hay un haz *reflejado* bien definido. Éste no sería el caso si la radiación incidente procediera de rayos X de onda corta, en cuyo caso se producirían varios rayos reflejados. Y tampoco sería el caso si los dispersores estuvieran muy alejados comparados con λ, tal y como sucede en una red de difracción (pág. 474), en cuyo caso también se producirían varios haces reflejados. La dirección del haz reflejado viene determinada por diferencia constante de fase entre los dispersores atómicos. Ésta, a su vez, viene determinada por el ángulo que dibuja la onda incidente con la superficie, denominado **ángulo de incidencia**.

En la figura 4.16, la línea $\overline{AB}$ se extiende a lo largo de un frente de onda entrante, mientras que la línea $\overline{CD}$ lo hace sobre un frente de onda saliente —de hecho, $\overline{AB}$ se transforma en la reflexión en $\overline{CD}$—. Al observar la figura 4.15, vemos cómo el tren de ondas emitido desde A llega a C en fase con el tren de ondas que se está emitiendo desde D (a medida que B lo estimula), siempre y cuando las distancias entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sean iguales. Dicho de otro modo, si todos los trenes de ondas emitidos desde todos los dispersores de la superficie se solapan en fase y forman una única onda plana reflejada, es necesariamente porque $\overline{AC} = \overline{BD}$. De este modo, dado que los dos triángulos comparten la hipotenusa

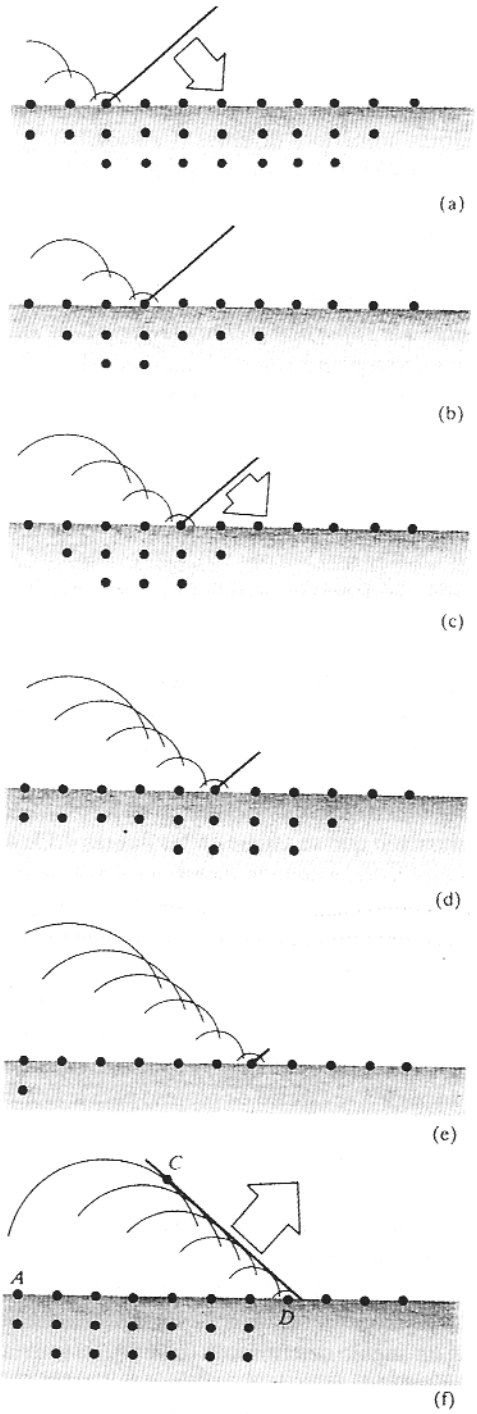


FIGURA 4.15 La reflexión de una onda como resultado del esparcimiento.

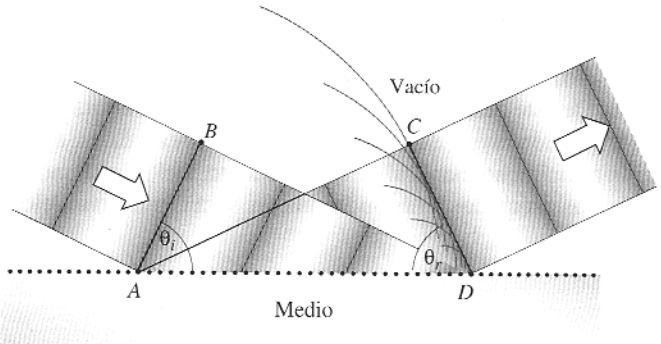


FIGURA 4.16 Las ondas planas que entran por la izquierda se reflejan hacia la derecha. El frente de onda $\overline{CD}$ consta de ondas dispersadas por los átomos en la superficie de *A* a *D*. Precisamente al llegar el primer tren de onda a *C* desde *A*, emite el átomo en *D*, por lo tanto el frente de onda a lo largo de $\overline{CD}$ se completa.

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\text{sen } \theta_r}{\overline{AC}}$$

Todas las ondas viajarán en el medio incidente con la misma velocidad v_i. De ahí que en el tiempo (Δt) que tarda el punto B del frente de onda en llegar al punto D de la superficie, el tren de ondas emitido desde A alcanze el punto C. Dicho de otro modo, $\overline{BD} = v_i \Delta t = \overline{AC}$, y, según la ecuación antes mencionada, sen θ_i = sen θ_r, lo que significa que

$$\theta_i = \theta_r \tag{4.3}$$

El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Esta ecuación es la primera parte de la **ley de la reflexión**. Apareció por primera vez en el libro *Catoptrics*, cuya autoría se atribuye a Euclides. Se dice que un rayo de luz es *incidente normalmente* cuando $\theta_i = 0°$, en cuyo caso $\theta_r = 0°$ y en un espejo, el rayo se refleja de nuevo en sí mismo. Del mismo modo, *la incidencia rasante* corresponde a $\theta_i \approx 90°$ y, forzosamente, $\theta_r \approx 90°$.

Rayos

El dibujar los frentes de onda, puede hacer no ver las cosas con claridad, así que vamos a utilizar una forma mejor de visualizar la progresión de la luz. La representación imaginaria en la antigüedad se basaba en flujos en línea recta de luz, una noción que llegó a la lengua latina como «radii» y al español como «rayos». ***Un rayo es una línea dibujada en el espacio que corresponde a la dirección del flujo de energía radiante.*** Se trata de una entidad matemática y no física. En

un medio uniforme (homogéneo), los rayos son rectos. Si el medio se comporta del mismo modo en todas las direcciones (isótropo), ***los rayos serán perpendiculares a los frentes de onda.*** De este modo, para una fuente puntual que emita ondas esféricas, los rayos, que serán perpendiculares a éstas, apuntarán radialmente hacia afuera de la fuente. Del mismo modo, los rayos asociados a las ondas planas serán todos paralelos.

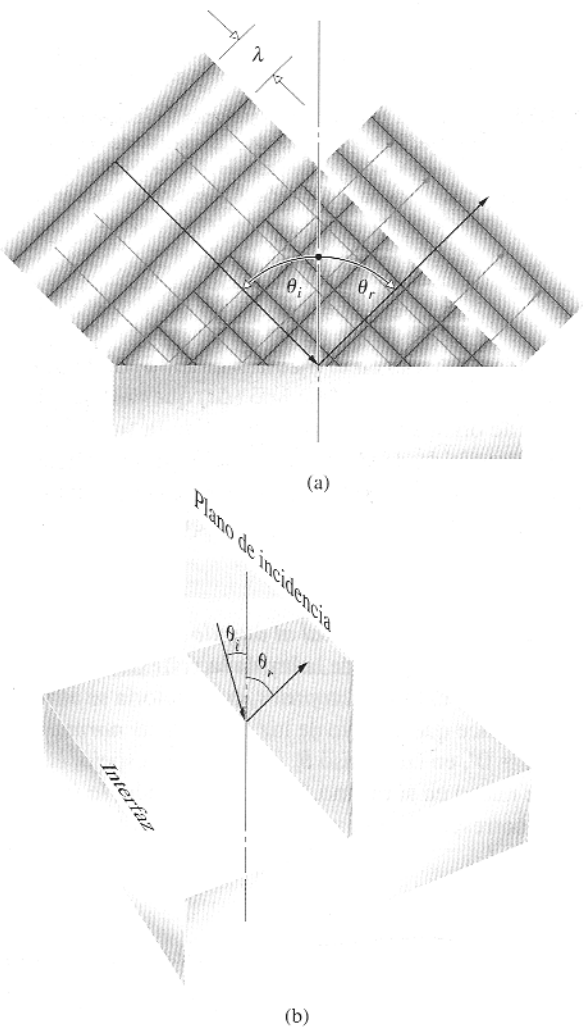


FIGURA 4.17 (*a*) Seleccionen un rayo para que represente al haz de las ondas planas. Tanto el ángulo de incidencia θ_i como el ángulo de reflexión θ_r se miden desde una perpendicular trazada en la superficie reflectora. (*b*) El rayo incidente y el reflejado determinan el *plano de incidencia* perpendicular a la superficie reflectora.

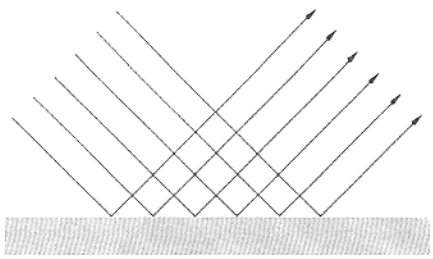
En lugar de esbozar haces de rayos, lo que podemos hacer es simplemente dibujar un rayo incidente y otro reflejado (figura 4.17*a*). *Todos los ángulos se medirán ahora desde la perpendicular (o normal) a la superficie,* y θ_i y θ_r mantendrán los mismos valores numéricos de antes (figura 4.16).

Los antiguos griegos conocían la ley de la reflexión. Se puede deducir observando el comportamiento de un espejo plano. Hoy en día, esta observación puede simplificarse con una linterna o, incluso mejor, con un láser de baja potencia. La segunda parte de la ley de la reflexión establece que ***el rayo incidente, la perpendicular a la superficie y el rayo reflejado se encuentran todos en un mismo plano*** *que se denomina:* ***plano de incidencia*** (figura 4.17*b*) —estamos hablando de un fenómeno tridimensional—. Intente enfocar a un punto determinado en una habitación reflejando en un espejo quieto la luz de una linterna: la importancia de esta segunda parte de la ley será obvia.

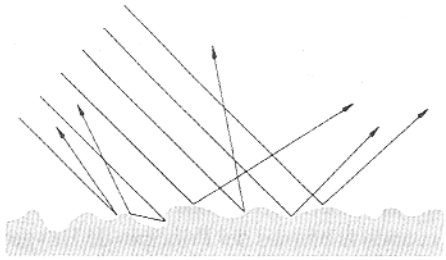
La figura 4.18*a* muestra un rayo de luz incidente sobre una superficie reflectora que sea lisa (en la que cualquier irregularidad existente sea pequeña comparada con una longitud de onda). En dicho caso, la luz reemitida por millones y millones de átomos se combinará para formar un único haz bien definido en un proceso denominado **reflexión especular** (del término *speculum*, empleado en la antigüedad para designar la aleación común del espejo). Siempre que las irregularidades de la superficie sean pequeñas comparadas con λ, los trenes de ondas dispersados seguirán llegando más o menos en fase cuando $\theta_i = \theta_r$. Esta es la situación que se asume en las figuras 4.13, 4.15, 4.16 y 4.17. Por otro lado, cuando la superficie es rugosa comparada con λ, pese a que el ángulo de incidencia será igual al ángulo de reflexión para cada rayo, el conjunto de todos ellos aparecerá por doquier, constituyendo lo que se denomina la **reflexión difusa** (figura 4.19). Estas dos condiciones son extremas; el comportamiento de reflexión de la mayoría de las superficies se encuentra en algún punto entre ambas. De este modo, aunque el papel de esta página se fabricó ex profeso para actuar como dispersor más bien difuso, la reflexión que se produce sobre la cubierta del libro está a caballo entre ser difusa y especular.

4.4. Refracción

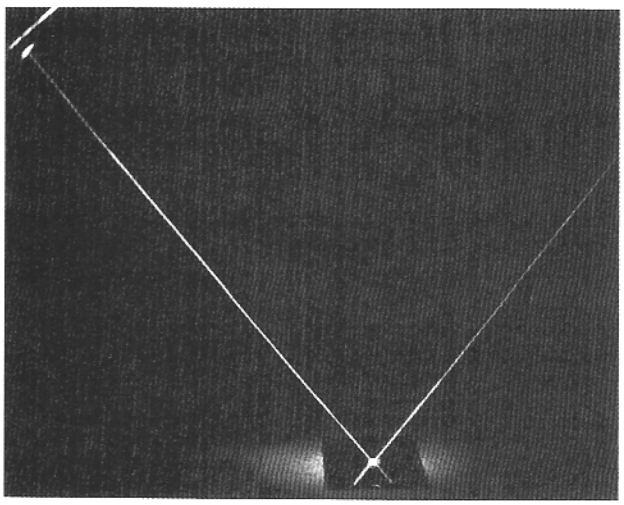
La figura 4.13 muestra un rayo de luz que incide sobre una interfaz con un ángulo determinado ($\theta_i \neq 0$). La interfaz corresponde a una acusada falta de homogeneidad, y los átomos que la componen esparcen la luz hacia detrás (como el rayo reflejado) y hacia delante (como el rayo transmitido). Al hecho de que



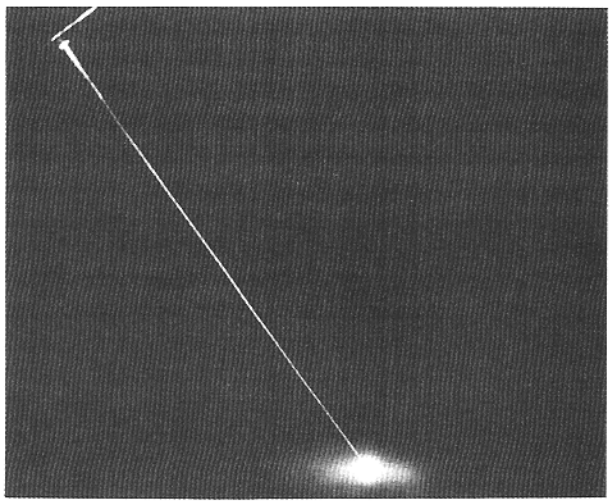
Especular



Difusa



(a)



(b)

FIGURA 4.18 (*a*) Reflexión especular. (*b*) Reflexión difusa. (Fotos cedidas por Donald Dunitz.)

los rayos incidentes se doblen o «desvíen de su camino», como lo expresó Newton, se le denomina **refracción**.

Examinemos el rayo trasmitido o refractado. Hablando clásicamente, cada molécula activada en la interfaz radia trenes de ondas en el cristal que se expanden a una velocidad c. Podemos imaginárnoslo como la combinación en una onda secundaria que a su vez se recombina con los restos no dispersados de la onda primaria con el fin de formar la onda transmitida neta. El proceso continúa una y otra vez a medida que la onda avanza en el medio de transmisión.

FIGURA 4.19 El buque de guerra *Aurora* que desempeñó un papel trascendental en la Revolución comunista (1917), atracado al muelle en San Petersburgo. Donde el agua está estancada, la reflexión es especular. La imagen se hace borrosa donde el agua se mueve y la reflexión es difusa.

Comoquiera que lo visualicemos, nada más entrar en el medio de transmisión aparece un único campo neto, una única onda neta. Tal y como hemos visto, esta onda transmitida generalmente se propaga con una velocidad efectiva de $v_t < c$. En esencia es como si los átomos de la interfaz dispersaran «trenes de ondas lentos» en el vidrio, los cuales se combinaran para formar la «onda transmitida lenta». Volveremos a estas representaciones imaginarias cuando hablemos del Principio de Huygens. Sea como fuere, dado que el fenómeno de cooperación conocido como la onda electromagnética transmitida *es* más lenta que la onda electromagnética incidente, los frentes de onda transmitidos son refractados, desplazados (desviados con respecto a los frentes de onda incidentes), por lo que el haz se dobla.

4.4.1 La ley de la refracción

La figura 4.20 retoma la situación que dejamos en las figuras 4.13 y 4.16. El diagrama representa diversos frentes de onda mostrados en un mismo instante. Recordemos que cada frente de onda es una superficie de fase constante, y que, en la medida en que la fase del campo neto queda retrasada por el medio de transmisión, cada frente de onda se queda atrás, por decirlo de algún modo. Los frentes de onda «se doblan» a medida que cruzan la frontera debido al cambio de velocidad. De forma alternativa podemos imaginar la figura 4.20 como una foto de tomas múltiples de un único frente de ondas mostrándolo tras una serie de intervalos de tiempo iguales y sucesivos. Obsérvese que en el tiempo Δt, que es el que invierte el punto B del frente de onda para llegar hasta el punto D (viajando a una velocidad v_i), la parte transmitida de ese mismo frente de onda habrá llegado al punto E (a una velocidad v_t). Si el vidrio ($n_t = 1{,}5$) se encuentra inmerso en un medio incidente como el vacío ($n_i = 1$) o el aire ($n_i = 1{,}000\,3$) o cualquier otro donde $n_t > n_i$, $v_t < v_i$ y $\overline{AE} < \overline{BD}$, el frente de onda se doblará. El frente de onda refractado se extiende de E a D formando un ángulo con la interfaz de θ_t. Como en el caso anterior, los dos triángulos ABD y AED de la figura 4.19 comparten la hipotenusa ($\overline{AD}$), de tal modo que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{\overline{AE}}$$

donde $\overline{BD} = v_i\,\Delta t$ y $\overline{AE} = v_t\,\Delta t$. Así pues,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{v_i} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t}{v_t}$$

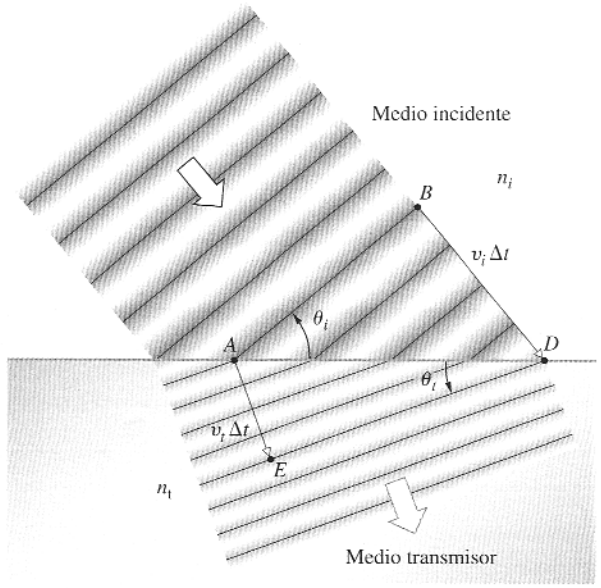


FIGURA 4.20 Refracción de ondas. Los átomos en la región superficial del medio de transmisión vuelven a emitir trenes de onda que se combinan constructivamente para formar un haz refractado.

al multiplicar ambos lados por c, y dado que $n_i = c/v_i$ y $n_t = c/v_t$

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t \tag{4.4}$$

Esta ecuación corresponde a la primera parte de la **ley de refracción**, también conocida como la **ley de Snell**, en honor a Willebrord Snel van Royen (1591-1626), el científico que la propuso. Al principio, los índices de refracción consistían en una serie de constantes del medio físico determinadas experimentalmente. Más tarde, Newton consiguió establecer la ley de Snell utilizando su propia teoría corpuscular. Por entonces ya era evidente el significado de n como medida de la velocidad de la luz. Con posterioridad se demostró que la ley de Snell era una consecuencia natural de la teoría electromagnética de Maxwell (pág. 113).

Resulta conveniente, una vez más, transformar el diagrama en una representación de rayos (figura 4.21) en la que los ángulos se medirán desde la perpendicular. De la ecuación (4.4) podemos deducir que ***los rayos incidentes, reflejados y refractados se encuentran todos en el plano de incidencia***. Dicho de otro modo, los respectivos vectores de onda unitarios $\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{k}}_r$, y $\hat{\mathbf{k}}_t$ están en el mismo plano (figura 4.22).

Cuando $n_i < n_t$ (es decir, cuando la luz está viajando inicialmente dentro del medio de menor índice de refracción), la ley de Snell establece que sen $\theta_i >$ sen θ_t, y dado que en todos los puntos la misma función es positiva entre 0° y 90°, entonces $\theta_i > \theta_t$. En lugar de ir recto, ***el rayo que entra en un medio de mayor índice de refracción se dobla hacia la normal*** (figura 4.23*a*). También se verifica el fenómeno contrario (figura 4.23*b*); es decir, ***al entrar en un medio con un índice más bajo, el rayo, en lugar de avanzar recto, se doblará alejándose de la normal*** (figura 4.24). Cabe señalar que esto implica que el itinerario de los rayos será el mismo cuando entren que cuando salgan del medio. Si dibujáramos las flechas apuntando en dirección contraria, el resultado seguiría siendo verdadero.

Podemos reescribir la ley de Snell de la siguiente manera:

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = n_{ti} \tag{4.5}$$

donde $n_{ti} \equiv n_t/n_i$ es el ***índice de refracción relativo*** de los dos medios.

De este modo, $\hat{\mathbf{u}}_n$ será un vector unitario normal a la interfaz, cuya dirección irá desde el medio incidente hacia el medio

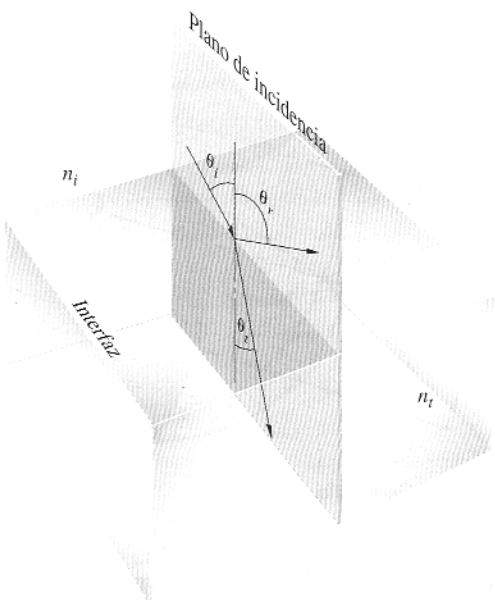


FIGURA 4.21 Los haces transmitido, reflejado e incidente se hallan en el plano de incidencia.

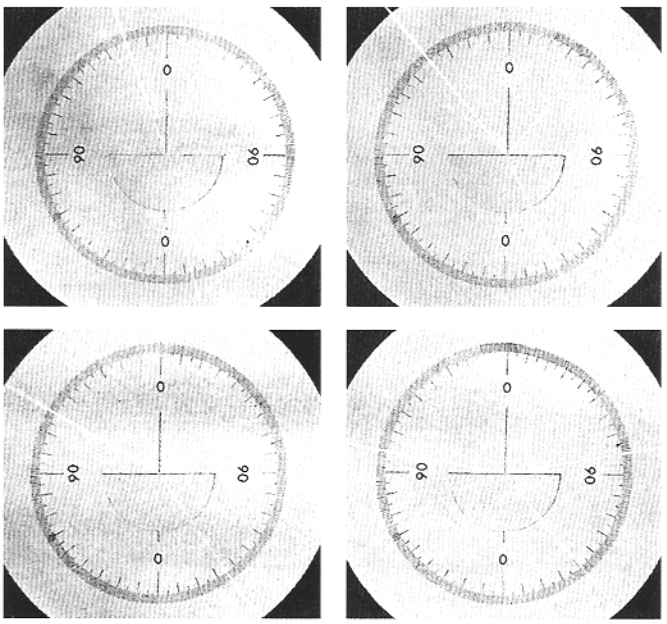


FIGURA 4.22 Refracción a varios ángulos de incidencia. Obsérvese que la superficie de la base es circular de manera que el haz transmitido dentro del vidrio se halla siempre a lo largo de un radio y, en cada caso, es normal a la superficie inferior. (Foto cedida por *PSSC College Physics*, © 1965 Education Development Center Inc.)

de transmisión (figura 4.25). Tal y como comprobaremos en el problema 4.25, el enunciado completo de la ley de refracción podemos escribirlo vectorialmente de la siguiente manera:

$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) \tag{4.6}$$

o bien,

$$n_t\hat{\mathbf{k}}_t - n_i\hat{\mathbf{k}}_i = (n_t \cos \theta_t - n_i \cos \theta_i)\,\hat{\mathbf{u}}_n \tag{4.7}$$

La figura 4.20 ilustra los tres cambios importantes que tienen lugar en el rayo que atraviesa la interfaz. (1) Cambia de dirección: debido a que la parte del frente de onda avanzada en el vidrio disminuye de velocidad, la parte que todavía está en el aire se transmite más rápidamente, y dobla la onda hacia la normal. (2) El haz de luz en el vidrio tiene una sección transversal más ancha que el haz de luz en el aire, por lo que la energía transmitida se propagará de forma más diluida. (3) La longitud de onda decrece porque la frecuencia permanece igual mientras que la velocidad disminuye; $\lambda = v/\nu = c/n\nu$ y

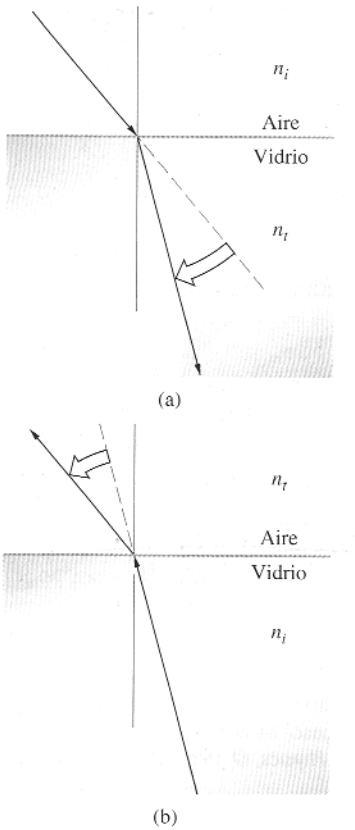


FIGURA 4.23 Curvatura de rayos en una interfaz. (*a*) Cuando un haz luminoso entra en un medio ópticamente más denso, con un índice de refracción más elevado ($n_i < n_t$), se dobla hacia la perpendicular. (*b*) Cuando un haz pasa de un medio más denso a otro menos denso ($n_i > n_t$), se dobla alejándose de la perpendicular.

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \tag{4.8}$$

Este último concepto sugiere que es mejor asociar el color de la luz con su frecuencia (o energía $\mathscr{E} = h\nu$) que con su longitud de onda, ya que la longitud de onda cambia con el medio por el que la luz se transmite. El color es un fenómeno de índole tan fisio-psicológica (pág. 134) que es necesario tratarlo con mucha cautela. Sin embargo, aunque resulte un poco simplista, es útil recordar que los fotones azules son más energéticos que los rojos. Al hablar de longitudes de onda y colores, nos tendremos siempre que referir a **longitudes de onda en el vacío** (que será representada como λ_0).

FIGURA 4.24 Los rayos procedentes de la parte sumergida del lápiz se doblan al salir del agua al subir hacia el observador. Véase problema 4.16.

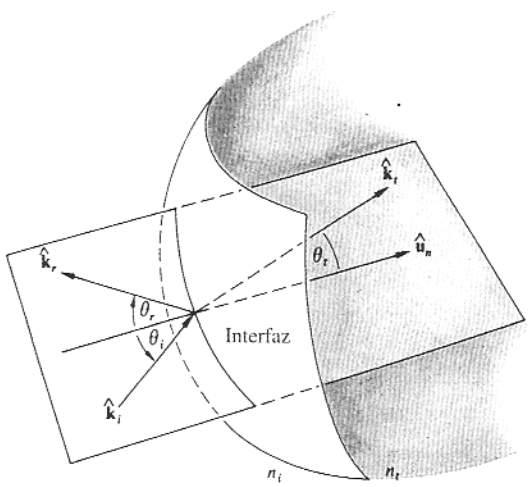


FIGURA 4.25 Geometría de rayos.

En todas las situaciones abordadas hasta el momento, hemos dado por supuesto que los haces de luz reflejados y refractados tenían siempre la misma frecuencia que el rayo incidente, lo cual es un presupuesto bastante razonable. La luz de frecuencia ν incide en un medio y presumiblemente impulsa a las molécu-

las a un movimiento armónico simple. Este es, sin duda, el caso cuando la amplitud de la vibración es bastante pequeña, como lo es cuando el campo eléctrico que impulsa las moléculas es pequeño. El campo E para la luz solar intensa es sólo de 1.000 V/m (mientras que el campo B es menor que la décima parte del campo de la superficie de la Tierra). Esta magnitud no es muy grande comparada con los campos que mantienen un cristal unido, que están en el orden de 10^{11} V/m —más o menos la misma magnitud que el campo de cohesión que sujeta el electrón en el átomo—. Por lo general, es esperable que los osciladores vibren en un movimiento simple y armónico, por lo que la frecuencia permanecerá constante —normalmente el medio responderá en forma lineal—. Pero éste no será el caso si el rayo incidente posee un campo E de amplitud excesivamente grande, como puede suceder con un láser de gran potencia. Así impulsado, a una frecuencia ν, el medio puede comportarse en un modo no lineal, y dar como resultado la reflexión y refracción de los armónicos (2ν, 3ν etc.), además de ν. Hoy en día ya se comercializan los generadores de segundo armónico (pág. 665). Si alumbramos con una luz roja (694,3 nm) sobre un cristal no lineal transparente y adecuadamente orientado (por ejemplo, un cristal de dihidrógeno fosfato de potasio, KDP, o de dihidrógeno fosfato amónico, ADP), el rayo saliente que obtendremos será ultravioleta (347,15 nm).

Hay un aspecto de todo lo tratado hasta el momento que merece una mayor atención por nuestra parte. Dimos por supuesto, en buena lógica, que cada uno de los puntos de la interfaz mostrada en la figura 4.13 coincide con un punto particular de cada una de las ondas incidente, reflejada y transmitida. Dicho de otra manera: existe una relación de fase fija entre las ondas en cada uno de los puntos de la interfaz. A medida que el frente incidente va pasando por la interfaz, cada uno de los puntos que entra en contacto con la interfaz forma parte asimismo del frente reflejado y del frente transmitido correspondientes. A esta situación se la conoce como **continuidad del frente de onda**, y la justificaremos con más rigor desde el punto de vista matemático en la sección 4.6.1. Resulta interesante la demostración de Sommerfeld [3] en relación con las leyes de reflexión y refracción (sea cual sea el tipo de onda que nos ocupe): Sommerfeld afirma que dichas leyes pueden deducirse directamente de las condiciones que requiere la continuidad del frente de onda. La solución del problema 4.22 demuestra esta afirmación.

[3] A. Sommerfeld, *Optics*, pág. 151. Véase también J.J. Sein, *Am. J. Phys.* 50, 180 (1982).

4.4.2 El Principio de Huygens

Supongamos que la luz pasa a través de una lámina de vidrio no uniforme, como en la figura 4.26, de tal forma que el frente de onda Σ es distorsionado. ¿Cómo podemos determinar la nueva forma de Σ'? O lo que es lo mismo, ¿cómo se verá Σ' después de un tiempo si se le permite de ahí en adelante continuar sin obstáculos?

Un paso preliminar hacia la solución de este problema se dio en 1690 mediante la publicación de un trabajo titulado *Traité de la Lumière*, que había sido escrito doce años antes por el físico holandés Christiaan Huygens. Fue en ese momento cuando se enunció lo que a partir de entonces se conocería como el **Principio de Huygens**, el cual reza de la siguiente manera: ***cada punto en un frente de onda en propagación sirve como fuente de trenes de ondas esféricas secundarias de tal modo que, al cabo de cierto tiempo, el frente de onda será la envolvente de estos trenes de ondas.***

Por otro lado, ***si la onda que se propaga tiene una frecuencia ν, y se transmite por el medio a una velocidad v_t, entonces los trenes de ondas secundarios tendrán la misma frecuencia y velocidad.*** Huygens era un científico brillante y su ley constituye la base de una teoría del esparcimiento bastante ingenua pero increíblemente perspicaz. Se trata de una teoría muy temprana y naturalmente tiene algunos fallos, como por ejemplo el no incluir en ningún momento el concepto de interferencia y, en consecuencia, tampoco trata el esparcimiento lateral. Por otro lado, la idea de que los trenes de ondas secundarias se propagan a una velocidad determinada por el medio (velocidad que incluso puede ser anisótropa, p.

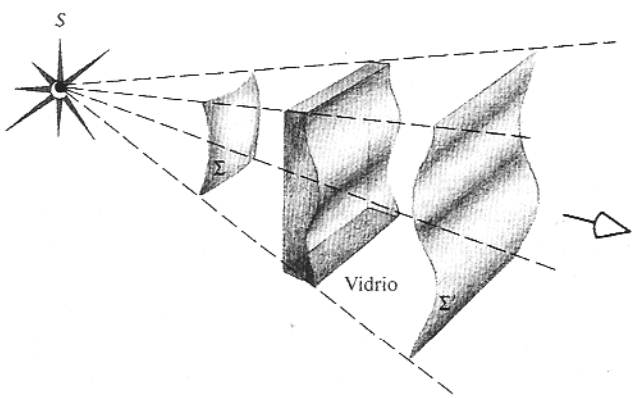


FIGURA 4.26 Distorsión de una parte de un frente de onda al pasar a través de un material de espesor no uniforme.

ej., pág. 337) constituye un simple acierto afortunado. No obstante, el Principio de Huygens resulta útil para llegar hasta la ley de Snell de forma similar al planteamiento que nos llevaba hasta la ecuación (4.4). Lo mejor es probablemente no entrar en muchos detalles físicos (como la manera de razonar la propagación en el vacío) y simplemente utilizar el principio como una herramienta —una utilísima ficción que funciona—. Después de todo, si Einstein está en lo cierto, solamente existen fotones dispersados ya que los mismos trenes de ondas no son más que una invención teórica.

Si el medio es homogéneo, los trenes de ondas pueden construirse con *radios finitos*, mientras que si no lo es, tendrán radios infinitesimales. La figura 4.27 contribuye a esclarecer todos estos conceptos: en ella se muestra un plano del frente de onda Σ, así como una serie de trenes de ondas esféricas secundarias, que, después de un tiempo t, se han propagado hasta un radio de vt. Se dice entonces que la envolvente de todos estos trenes de ondas corresponde con la onda avanzada Σ'. Es fácil visualizar este proceso desde el punto de vista de vibraciones mecánicas de un medio elástico. En efecto, es así como Huygens lo visualizó dentro del contexto del éter que todo lo invade, tal y como se desprende de este comentario hecho por él mismo:

> «Al estudiar la dispersión de estas ondas, hemos de considerar aún que toda partícula de materia por la cual avanza la onda, no solamente comunica su movimiento a la partícula siguiente, la cual está en la línea recta trazada desde el punto luminoso, sino que también confiere necesariamente movimiento a todas las otras que la tocan y que se oponen a su movimiento. El resultado es que, alrededor de cada partícula, aparece una onda en cuyo centro estará la partícula.»

En el siglo XIX, Fresnel introdujo acertadamente una serie de modificaciones matemáticas en el Principio de Huygens, y añadió el concepto de la interferencia. Un poco más tarde, Kirchhoff demostró que el *principio de Huygens-Fresnel* era una consecuencia directa de la ecuación diferencial de onda [ecuación (2.60)], y de este modo le confirió una sólida base matemática. La figura 4.27 pone en evidencia la necesidad que había de reformular el principio. En ella aparentemente sólo dibujamos trenes de ondas hemisféricas [4]. Si las hubiéramos dibujado como esferas, se habría originado una *retro onda* moviéndose hacia la fuente —algo que no se percibe—. Dado que Fresnel y Kirchhoff ya tomaron en cuenta teóricamente esta dificultad, nosotros no vamos a preocuparnos más por ella.

[4] Véase E. Hecht, *Phys. Teach.* 18, 149 (1980).

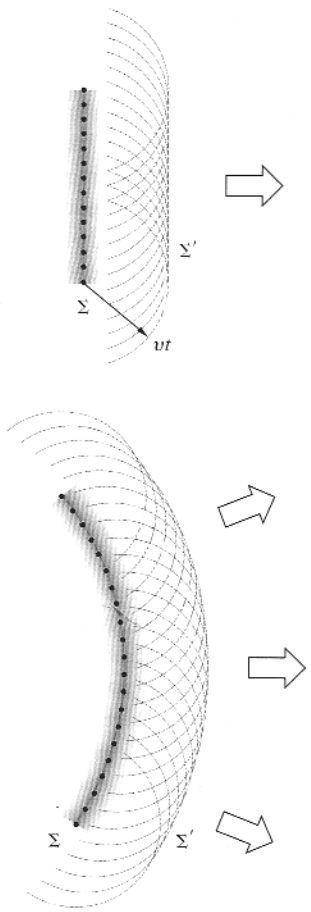


FIGURA 4.27 Según el principio de Huygens, una onda se propaga como si el frente de onda estuviera formado por una serie de fuentes puntuales, cada una emitiendo una onda esférica.

4.4.3 Los rayos de luz y la congruencia normal

En la práctica, podemos fabricar finos *haces* o *lápices* de luz (como por ejemplo, un haz de láser) y podríamos imaginar que un rayo es el límite inalcanzable en la estrechez de tal haz. Recordemos que en un *medio isótropo*, es decir, uno cuyas propiedades sean las mismas en todas direcciones, ***los rayos son trayectorias ortogonales de los frentes de onda***. Dicho de otro modo, *son líneas normales a los frentes de onda en cada punto de intersección*. Evidentemente, *en un medio así, un rayo es paralelo al vector de onda* **k**. Como podría sospecharse, esto no

sucede en sustancias *anisótropas*, de las cuales hablaremos más adelante con mayor detenimiento (véase sección 8.4.1). *Dentro de los materiales isótropos homogéneos, los rayos serán líneas rectas* ya que, por simetría, no pueden curvarse en ninguna dirección prioritaria, puesto que no hay ninguna. Además, debido a que la velocidad de propagación es idéntica en todas las direcciones dentro de un medio determinado, la separación espacial entre dos frentes de onda, medida a lo largo de los rayos, deberá ser la misma en todas las partes [5]. Los puntos donde un único rayo se cruza con un conjunto de frentes de onda se llaman *puntos correspondientes*, como por ejemplo A, A' y A'' en la figura 4.28. *Evidentemente, la separación en tiempo entre dos puntos correspondientes cualquiera sobre dos frentes de ondas secuenciales cualquiera, es idéntica.* Si el frente de onda Σ se transforma en Σ'' después de un tiempo t'', la distancia entre puntos correspondientes sobre todos y cada uno de los rayos será recorrida en ese mismo tiempo t''. Esto será obviamente cierto aún cuando los frentes de onda pasen de un medio isótropo homogéneo a otro. Lo único que esto significa es que podemos imaginar cada punto en Σ como si siguiera la trayectoria de un rayo para llegar a Σ'' en el tiempo t''.

Si un grupo de rayos es tal que podemos encontrar una superficie que sea ortogonal a todos y cada uno de ellos, se dice entonces que forman una **congruencia normal**. Por ejemplo, los rayos que emanan de una fuente puntual son perpendiculares a una esfera situada en el centro de la fuente y consecuentemente forman una congruencia normal.

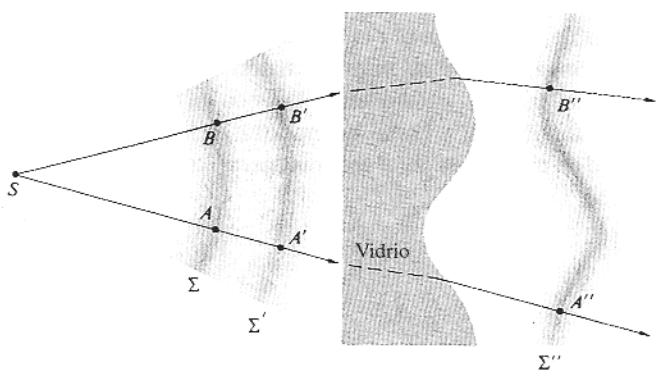


FIGURA 4.28 Frentes de onda y rayos.

[5] Cuando el material no sea homogéneo o cuando haya más de un medio implicado, será la *longitud del camino óptico*.

Podemos ahora considerar brevemente un planteamiento alternativo que nos permitirá seguir asimismo la evolución de la luz a través de varios medios isótropos. La base para este método es el ***Teorema de Malus y Dupin*** (presentado en 1808 por E. Malus y modificado en 1816 por C. Dupin), según el cual ***un grupo de rayos preservará su congruencia normal después de cualquier número de reflexiones y refracciones*** (como sucede en la figura 4.28). Desde nuestro actual y ventajoso punto de vista de la teoría ondulatoria, este teorema es igual que afirmar que los rayos permanecen ortogonales a los frentes de onda a través de todos los procesos de propagación de medios isótropos. Como se muestra en el problema 4.24, el teorema se puede usar para deducir la ley de la reflexión así como la ley de Snell. Con frecuencia resulta más conveniente llevar a cabo un trazado de rayos a través de un sistema óptico y entonces reconstruir los frentes de onda utilizando la noción de tiempos de tránsito iguales entre puntos correspondientes y la ortogonalidad de los rayos y frentes de onda.

4.5 El principio de Fermat

Las leyes de la reflexión y la refracción, e incluso la manera en que la luz se propaga en general, pueden considerarse desde un punto de vista totalmente distinto pero muy interesante que llega hasta nosotros mediante el **Principio de Fermat**. Las ideas que desarrollaremos a continuación han ejercido una tremenda influencia en el desarrollo del pensamiento físico dentro del estudio de la óptica clásica y aún fuera de ella.

Hero de Alejandría, que vivió entre los años 150 a.C. y 250 d.C., fue el primero en establecer lo que desde entonces se ha conocido como *principio variacional*. En su formulación de la ley de la reflexión, Hero afirmó que *la trayectoria tomada por la luz para ir de un punto S a un punto P a través de una superficie reflectora, era la más corta posible.* Esto puede verse muy fácilmente en la figura 4.29 que muestra una fuente puntiforme S emitiendo una serie de rayos que son «reflejados» hacia P. Es de suponer que solamente una de estas trayectorias tendrá alguna realidad física. Si simplemente dibujamos los rayos como si emanaran de S' (la imagen de S), ninguna de las distancias a P se habrá alterado (es decir $SAP = S'AP$, $SBP = S'BP$, etc.). Pero obviamente la trayectoria en línea recta $S'BP$, que corresponde a $\theta_i = \theta_r$, es la más corta posible. El mismo tipo de razonamiento (problema 4.27) pone de manifiesto que los puntos S, B y P deben caer en lo que previamente se ha definido como el plano de incidencia. Durante más de 1.500 años la curiosa observación de Hero permaneció olvidada hasta que, en 1657, Fermat pro-

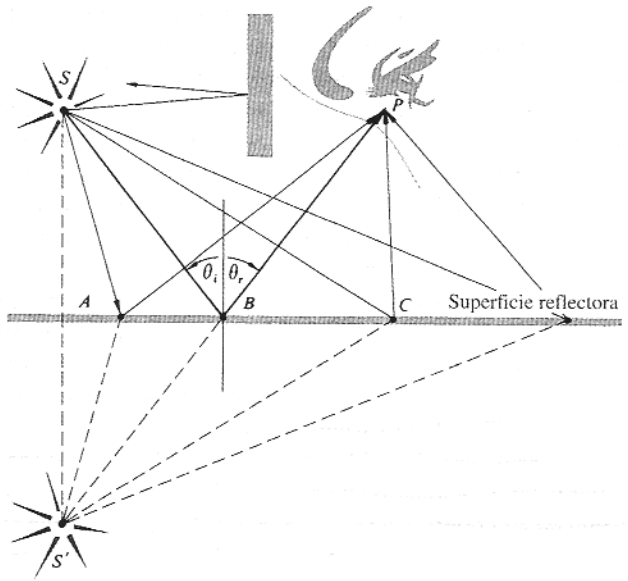


FIGURA 4.29 Recorrido mínimo desde la fuente *S* hasta el ojo del observador en *P*.

puso su célebre *Principio del Tiempo Mínimo,* el cual incluía tanto la reflexión como la refracción. Un haz de luz que atraviese una interfaz no sigue una línea recta, *o trayectoria espacial mínima,* entre un punto del medio de incidencia y otro del medio de transmisión. Como consecuencia, Fermat reformuló la afirmación de Hero de la siguiente manera: *la trayectoria real que adopta un haz de luz entre dos puntos es aquella recorrida en el tiempo mínimo.* Como veremos más adelante, esta forma de formular el principio sigue resultando incompleta y un tanto equívoca. Por el momento, aceptémosla pero sin mucho entusiasmo.

Como ejemplo de la aplicación del principio para el caso de la refracción, nos remitiremos a la figura 4.30, donde reduciremos al mínimo *t,* el tiempo de tránsito de *S* a *P*, con respecto a la variable *x*. Dicho de otro modo, cambiando *x* movemos el punto *O* y afectamos por consiguiente al rayo que va de *S* a *P*. De este modo, el tiempo de tránsito menor coincidirá supuestamente con la trayectoria real. Por lo tanto

$$t = \frac{\overline{SO}}{v_i} + \frac{\overline{OP}}{v_t}$$

o bien $$t = \frac{(h^2 + x^2)^{1/2}}{v_i} + \frac{[b^2 + (a - x)^2]^{1/2}}{v_t}$$

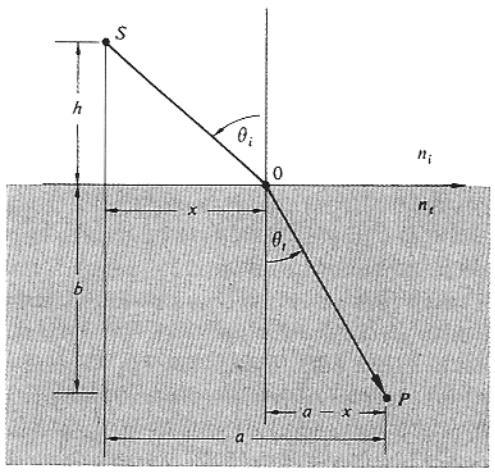


FIGURA 4.30 El principio de Fermat aplicado a la refracción.

Para minimizar *t(x)* con respecto a las variaciones en *x*, establecemos que *dt/dx = 0,* es decir,

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i(h^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{-(a - x)}{v_t[b^2 + (a - x)^2]^{1/2}} = 0$$

Usando el diagrama, podemos reescribir esta expresión como

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{v_i} = \frac{\text{sen } \theta_t}{v_t}$$

lo cual es, nada más y nada menos, que la ley de Snell (ecuación 4.4). Si un haz de luz debe ir de *S* a *P* en el mínimo tiempo posible, deberá cumplir la ley de la refracción.

Supongamos que tenemos un material estratificado compuesto de *m* capas, cada una de ellas con un índice de refracción diferente, tal y como se muestra en la figura 4.31. El tiempo de tránsito de *S* a *P* será entonces

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \cdots + \frac{s_m}{v_m}$$

o bien $$t = \sum_{i=1}^{m} s_i/v_i$$

donde s_i y v_i serán respectivamente las longitudes de la trayectoria y las velocidades asociadas con la contribución *i*ésima. Así pues:

$$t = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{m} n_i s_i \qquad (4.9)$$

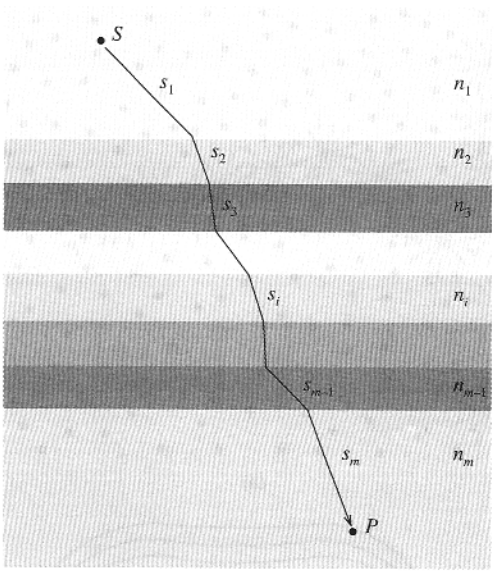


FIGURA 4.31 Un rayo que se propaga a través de un material estratificado.

en donde la suma se conoce como la **longitud de camino óptico** (*LCO*) atravesada por el rayo, en contraste con la longitud de la trayectoria espacial $\sum_{i=1}^{m} s_i$. Es evidente que para un medio no homogéneo donde n sea una función de posición, la suma deberá cambiarse por una integral.

$$OPL = \int_S^P n(s)\, ds \qquad (4.10)$$

La longitud de camino óptico corresponde a la distancia en el vacío equivalente a la distancia recorrida (s) en el medio de índice n. Es decir, ambas distancias corresponderán al mismo número de longitudes de onda, $(OPL)/\lambda_0 = s/\lambda$, y el mismo cambio de fase a medida que la luz avanza.

Teniendo en cuenta que $t = (LCO)/c$, podemos reformular el principio de Fermat de la siguiente manera: *la luz, al ir desde el punto S hasta el punto P, sigue la ruta que tiene la longitud de camino óptico menor.* Por consiguiente, cuando los rayos solares atraviesan la atmósfera no homogénea de la Tierra, tal y como se muestra en la figura 4.32 *a*, dichos rayos se curvan a fin de atravesar, lo más súbitamente posible, las regiones más bajas y más densas, y de este modo minimizar la *LCO*. Por esta razón, podemos aún ver el Sol después de que en realidad ha pasado por debajo del horizonte. Del mismo modo, una carretera vista bajo un ángulo rasante, como en la figura 4.32*b*, parecerá que refleja el entorno como si estuviera cubierta por una película de agua. El aire próximo a la carretera está más caliente y es menos denso que el que está más lejos de ella. Los rayos se desviarán hacia arriba tomando el camino óptico más corto y al hacerlo, parecerá como si se estuvieran reflejando en una superficie pulida. El efecto es particularmente fácil de apreciar en las largas autopistas modernas. El único requisito es mirar la carretera bajo un ángulo de incidencia casi rasante, ya que los rayos se curvan muy gradualmente.

El enunciado original del *Principio del Tiempo Mínimo* de Fermat tiene algunos fallos graves y es necesario, como veremos, cambiar en él algunas cosas. A este fin, recordemos que si tenemos una función, digamos $f(x)$, podemos determinar el valor específico de la variable x que hace que $f(x)$ tenga un valor *estacionario* al establecer que $df/dx = 0$ y resolviendo en x. Por valor estacionario queremos decir uno en el que la pendiente de $f(x)$ frente a x es cero o, equivalentemente, donde la función tenga un máximo, un mínimo o un punto de inflexión con tangente horizontal.

El principio de Fermat en su forma moderna establece lo siguiente: ***Cuando un rayo de luz se transmite de un punto S a un punto P, deberá recorrer una longitud de camino óptico***

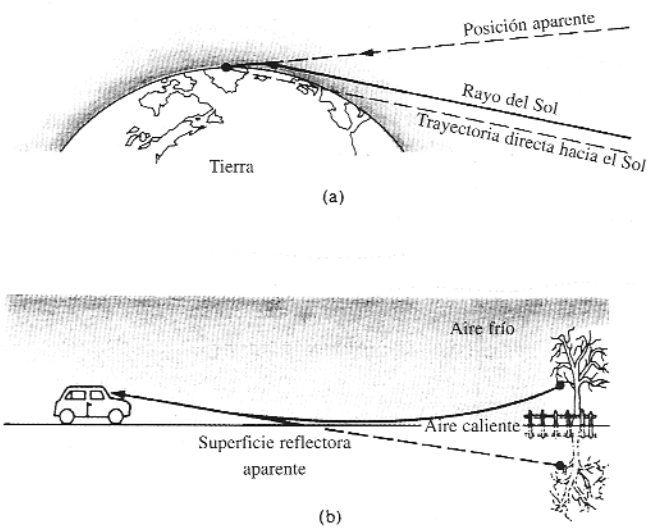


FIGURA 4.32 Curvatura de los rayos en un medio no homogéneo. (*a*) A causa de la curvatura de los rayos al atravesar la atmósfera, el Sol aparece más alto en el cielo. (*b*) A ángulos muy pequeños, los rayos parecen proceder de por debajo de la carretera como si se reflejaran en un charco. (*c*) Podrá comprenderse el efecto por medio de las ondas sonoras donde la velocidad y, por lo tanto, la longitud de onda, aumenta en el medio menos denso, curvando los frentes de onda y los rayos.

que será estacionaria con respecto a las variaciones de dicho camino. Básicamente, lo que este principio significa es que la curva de la *LCO* frente a *x* contará con una región ligeramente aplanada cerca del punto en el que la pendiente es cero. Este punto de pendiente cero corresponde a la verdadera trayectoria adoptada. Dicho de otro modo, la *LCO* para la trayectoria verdadera será igual, en primera aproximación, a la *LCO* de las trayectorias inmediatamente adyacentes a ella [6]. Por ejemplo, en una situación donde la *LCO* es un valor mínimo, como en la refracción que se ilustra en la figura 4.30, la curva de la *LCO* será algo parecido a la que se muestra en la figura 4.33. Cualquier cambio pequeño en *x* en las proximidades de *O* apenas afectará la *LCO*, pero un cambio similar en *x* en cualquier punto alejado de *O* dará lugar a un importante cambio en la *LCO*. De este modo, habrá muchas trayectorias próximas a la verdadera que requerirán casi el mismo tiempo para que la luz las recorra. Este último punto nos permite empezar a comprender cómo se las arregla la luz para ser tan lista y sortear los obstáculos de su camino.

Supongamos que tenemos un haz de luz avanzando a través de un medio isótropo homogéneo (figura 4.34) de tal modo que un rayo de luz pasa del punto *S* al punto *P*. Los átomos dentro del material serán activados por la perturbación incidente y volverán a reradiar en todas las direcciones. En general, los trenes de ondas que avanzan en la vecindad inmediata de una trayectoria estacionaria en línea recta, llegarán a *P* por rutas que difieren sólo ligeramente en la *LCO*. Por consiguiente, llegarán casi en fase y se reforzarán unos a otros. Los trenes de ondas que tomen otros caminos llegarán a *P* claramente fuera de fase y por consiguiente tenderán a anularse entre sí. En este caso, la energía se propagará con efectividad a lo largo del rayo que va de *S* a *P* cumpliendo el principio de Fermat. Y esto es así tanto en el caso de ondas electromagnéticas interferentes como de amplitudes de probabilidad de fotones (pág. 140).

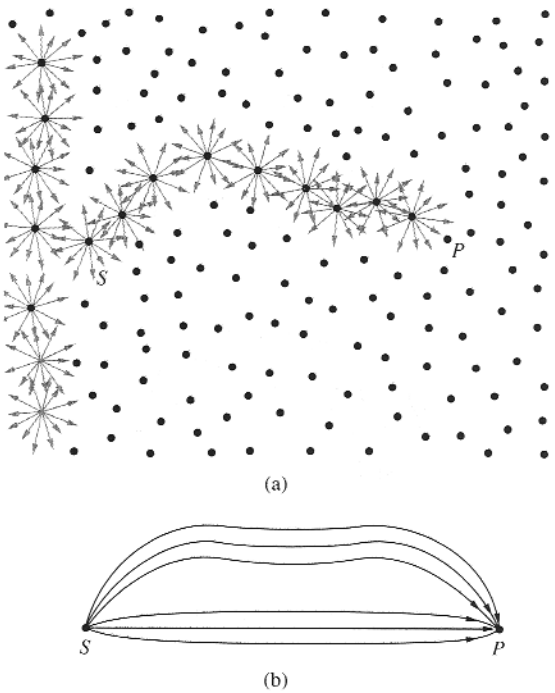


FIGURA 4.34 (*a*) Supuestamente, la luz puede escoger un número cualquiera de recorridos desde *S* hasta *P* si bien, al parecer, sólo escoge aquel que corresponde a una *LCO* estacionaria. En efecto, todas las demás trayectorias se anulan. (*b*) Por ejemplo, si algún flujo luminoso escoge cada uno de lo tres caminos superiores del diagrama, llegará a *P* teniendo tres fases muy diferentes e interferirá de manera más o menos destructiva.

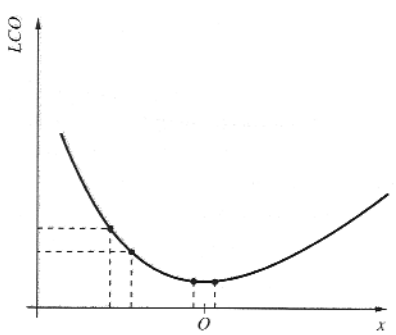


FIGURA 4.33 En la situación presentada en la Figura 4.30, la posición real del punto O corresponde a un recorrido mínimo de *LCO*.

A fin de demostrar que la *LCO* para un rayo no siempre necesita ser un mínimo, examinemos la figura 4.35, en la que se muestra un segmento de un espejo elipsoidal tridimensional hueco. Si la fuente *S* y el observador *P* se encuentran ubicados en los focos del elipsoide, entonces, por definición, la longitud *SQP* será constante, independientemente de la posición que tenga *Q* sobre el perímetro. Es también una propiedad geométrica de la elipse que $\theta_i = \theta_r$ para cualquier ubicación de *Q*. Todos los caminos ópticos que van de *S* a *P* a través de una reflexión son, por lo tanto, iguales: ninguno de ellos corresponde a un mínimo, y la *LCO* será claramente estacionaria con res-

[6] La primera derivada de la *L.C.O.* se anula en su desarrollo en serie de Taylor ya que la trayectoria es estacionaria.

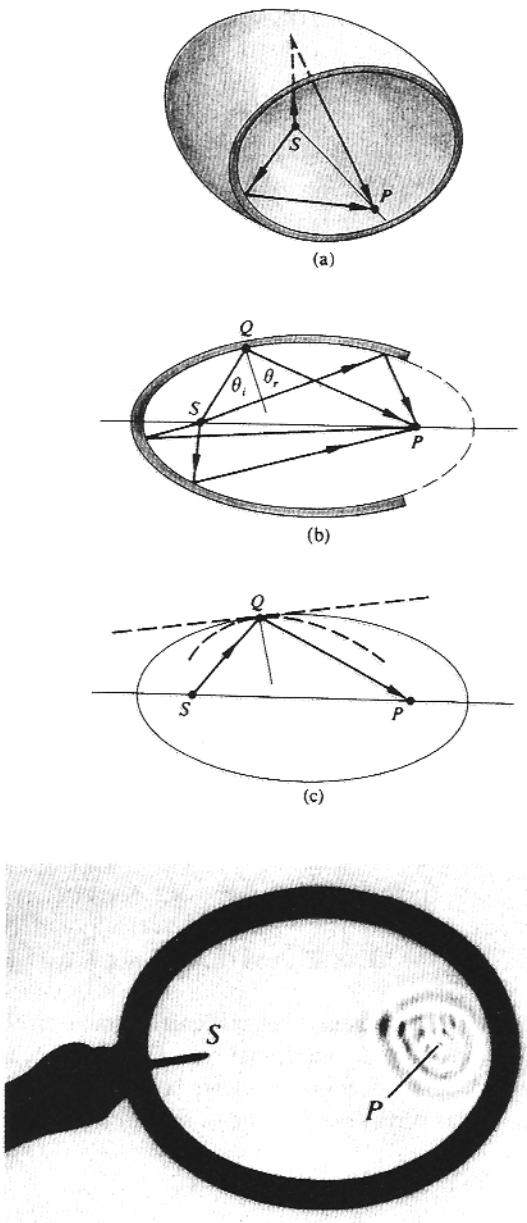


FIGURA 4.35 Reflexión en una superficie elipsoidal. Obsérvese la reflexión de ondas usando una sartén llena de agua. Aunque éstas son circulares por lo general, merece la pena entretenerse con ellas. (Foto cedida por *PSSC College Physics*, © Education Development Center Inc.)

pecto a las variaciones. Los rayos que salen de S e inciden en el espejo llegarán al foco P. Desde otro punto de vista podemos afirmar que la energía radiante emitida por S será esparcida por electrones de la superficie del espejo de modo que los trenes de ondas se reforzarán sustancialmente unos a otros solamente en P, hasta donde además habrán recorrido la misma distancia y tendrán la misma fase. En cualquier caso, si hubiera un espejo plano tangente a la elipse en Q, una trayectoria exacta SQP recorrida por el rayo sería entonces un mínimo relativo. En el otro extremo, si la superficie pulida tuviera el perfil de una curva dentro de la elipse, como la mostrada en forma rayada, el mismo rayo que recorre SQP tendría ahora un máximo relativo de la LCO. Esto es así aunque otras trayectorias no utilizadas (donde $\theta_i \neq \theta_r$) fueran en realidad más cortas (es decir, aparte de trayectorias curvas inadmisibles). Vemos pues cómo en todos los casos, los rayos recorren una LCO estacionaria de acuerdo con el principio de Fermat reformulado. Obsérvese que, puesto que el principio habla solamente del camino y no de la dirección de éste, un rayo que vaya de P a S, trazará la misma ruta que uno que vaya de S a P. A este concepto, de gran utilidad, se le denomina *Principio de la Reversibilidad.*

Esta conquista de Fermat estimuló la aparición de innumerables iniciativas destinadas a hacer avanzar las leyes de la mecánica de Newton con una formulación variacional similar. El trabajo de muchos científicos, principalmente el de Pierre de Maupertuis (1698-1759) y de Leonhard Euler, finalmente condujo a la mecánica de Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y por consiguiente al *Principio de Acción Mínima*, formulado por William Rowan Hamilton (1805-1865). La sorprendente similitud entre los principios de Fermat y Hamilton jugó un importante papel en el desarrollo de la mecánica cuántica por parte de Schrödinger. En 1942 Richard Phillips Feynman (1918-1988) demostró que la mecánica cuántica puede ser configurada en una forma alternativa si se aplica un enfoque variacional. La continua evolución de los principios variacionales nos trae de nuevo al campo de la óptica a través del formalismo moderno de la óptica cuántica.

El Principio de Fermat no es tanto un sistema de cálculo cuanto una manera concisa de reflexionar acerca de la propagación de la luz. Es una afirmación sobre el grandioso orden de las cosas sin ninguna preocupación por los mecanismos que intervienen y, como tal, arrojará luz en infinidad de circunstancias.

4.6 El tratamiento electromagnético

Hasta ahora hemos estudiado las leyes de reflexión y refracción desde el punto de vista de la teoría del esparcimiento, el teorema de Malus y Dupin y el principio de Fermat. Pero existe una cuar-

ta perspectiva, incluso más poderosa todavía, proporcionada por la teoría electromagnética de la luz. Al contrario de las técnicas anteriores que no dicen nada sobre las densidades de flujo radiante incidente, reflejado y transmitido (es decir I_i, I_r I_t, respectivamente), la teoría electromagnética trata estas densidades dentro del marco de una descripción bastante más completa.

4.6.1 Ondas en una interfaz

Supongamos que la onda de luz monocromática incidente es plana y tiene por lo tanto la forma

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \exp\,[i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)] \tag{4.11}$$

o, expresado más sencillamente,

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} \cos\,(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t) \tag{4.12}$$

Supongamos que $\mathbf{E}_{0i}$ sea constante en el tiempo, es decir que la onda es linealmente polarizada o polarizada en un plano. En el capítulo 8 veremos que cualquier forma de luz puede representarse mediante dos ondas polarizadas linealmente ortogonales, por lo que esto realmente no representa ninguna restricción. Observemos que así como el origen de tiempos, $t = 0$, es arbitrario, también lo es el origen O en el espacio, donde $\mathbf{r} = 0$. Por lo tanto, sin hacer suposiciones acerca de sus direcciones, frecuencias, longitudes de onda, fases o amplitudes, podemos formular las ondas reflejada y transmitidas como

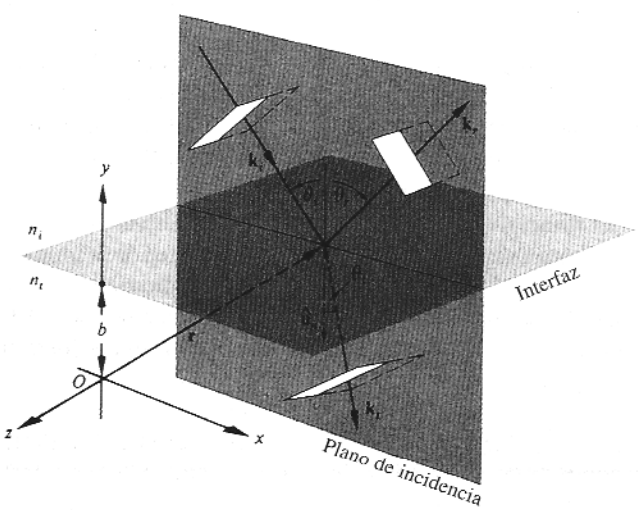


FIGURA 4.36 Ondas planas incidentes en la frontera entre dos medios dieléctricos, sin pérdidas, isótropos y homogéneos.

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} \cos\,(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \tag{4.13}$$

y

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} \cos\,(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \tag{4.14}$$

Aquí ε_r y ε_t son *constantes de fase* relativas a $\mathbf{E}_i$, y se introducen debido a que la posición del origen no es única. La figura 4.36 muestra las ondas en la vecindad de la interfaz plana entre dos medios homogéneos dieléctricos y sin pérdidas, cuyos índices sean n_i y n_t.

Las leyes de la teoría electromagnética (sección 3.1) exigen ciertos requisitos que los campos han de cumplir, a los que nos referiremos como las *condiciones de frontera*. En concreto, uno de estos requisitos es que la componente del campo eléctrico **E**, que es tangente a la interfaz, debe ser continua a través de él (lo mismo deberá aplicarse para **H**). Dicho de otro modo, la componente tangencial total de **E** en un lado de la superficie deberá ser igual a la del otro lado (problema 4.33). De este modo, dado que $\hat{\mathbf{u}}_n$ es el vector unitario normal a la interfaz, independientemente de la dirección del campo eléctrico que haya dentro del frente de onda, el producto vectorial del campo con $\hat{\mathbf{u}}_n$ será perpendicular a $\hat{\mathbf{u}}_n$ y, por consiguiente, tangente a la interfaz. Así pues,

$$\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_i + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_r = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_t \tag{4.15}$$

o bien

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0i} \cos\,(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t) \\ &\quad + \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0r} \cos\,(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \\ &\quad = \hat{\mathbf{u}}_n \times \mathbf{E}_{0t} \cos\,(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Esta relación debe mantenerse en cualquier instante en el tiempo y en todo punto de la interfaz ($y = b$). Como consecuencia, $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_t$ deberán tener precisamente la misma dependencia funcional en las variables t y r, lo cual significa que

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)\big|_{y=b} &= (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t + \varepsilon_r)\big|_{y=b} \\ &= (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t + \varepsilon_t)\big|_{y=b} \end{aligned} \tag{4.17}$$

En este caso los cosenos en la ecuación (4.16) se anulan dejando una expresión independiente de t y r, como en efecto debe ser. Esto deberá cumplirse para todos los valores del tiempo, por lo que los coeficientes de t deberán ser iguales. Así obtendremos

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t \tag{4.18}$$

Recordemos que los electrones dentro del medio están sujetos a vibraciones forzadas (lineales) a la frecuencia de la onda incidente, por lo que cualquier luz que sea dispersada, tendrá la misma frecuencia. Además

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})|_{y=b} = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_r)|_{y=b} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_t)|_{y=b} \tag{4.19}$$

donde $\mathbf{r}$ termina en la interfaz. Los valores de ε_r y ε_t corresponden a una determinada posición de O y, por lo tanto, permiten que la relación sea válida independientemente de esa ubicación. (Por ejemplo, el origen podría escogerse de modo que $\mathbf{r}$ fuera perpendicular a $\mathbf{k}_i$, pero no a $\mathbf{k}_r$ o $\mathbf{k}_t$). De los dos primeros términos obtenemos

$$[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}]_{y=b} = \varepsilon_r \tag{4.20}$$

Recordando la ecuación (2.43), esta expresión simplemente establece que el punto extremo de $\mathbf{r}$ barre un plano (que es por supuesto la interfaz) perpendicular al vector $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$. Dicho de otro modo parecido, $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ es paralelo a $\hat{\mathbf{u}}_n$. Obsérvese, sin embargo, que ya que la onda incidente y la reflejada están en el mismo medio, $k_i = k_r$. Del hecho de que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ no tiene componente en el plano de la interfaz, es decir, $\hat{\mathbf{u}}_n \times (\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r) = 0$, concluimos que

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_r \operatorname{sen} \theta_r$$

y, por consiguiente, obtenemos la ley de la reflexión, es decir

$$\theta_i = \theta_r$$

Por otro lado, ya que $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_r)$ es paralelo a $\hat{\mathbf{u}}_n$, los tres vectores $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$ y $\hat{\mathbf{u}}_n$ están en el mismo plano, a saber, en el plano de incidencia. De nuevo, de la ecuación (4.19) obtenemos

$$[(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t) \cdot \mathbf{r}]_{y=b} = \varepsilon_t \tag{4.21}$$

y por consiguiente $(\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_t)$ es también normal a la interfaz. Entonces $\mathbf{k}_i$, $\mathbf{k}_r$, $\mathbf{k}_t$ y $\hat{\mathbf{u}}_n$ son coplanares. Tal y como sucedía anteriormente, las componentes tangenciales de $\mathbf{k}_i$, y $\mathbf{k}_t$ deben ser iguales y por tanto

$$k_i \operatorname{sen} \theta_i = k_t \operatorname{sen} \theta_t \tag{4.22}$$

Pero como $\omega_i = \omega_t$, podemos multiplicar ambos lados por c/ω_i para obtener

$$n_i \operatorname{sen} \theta_i = n_t \operatorname{sen} \theta_t$$

con lo que llegamos a la ley de Snell. Finalmente, observemos que si hubiéramos escogido el origen O en la interfaz, en las ecuaciones (4.20) y (4.21) vemos claramente que ε_r y ε_t habrían sido ambas nulas. Tal disposición, aunque no resulte muy instructiva, es ciertamente más simple y, por lo tanto, será la que usaremos de aquí en adelante.

4.6.2 Las ecuaciones de Fresnel

Acabamos de encontrar la relación que existe entre las fases de $\mathbf{E}_i(\boldsymbol{r}, t)$, $\mathbf{E}_r(\boldsymbol{r}, t)$ y $\mathbf{E}_t(\boldsymbol{r}, t)$ en la frontera. Hay aún una interdependencia compartida por las amplitudes $\mathbf{E}_{0i}$, $\mathbf{E}_{0r}$, y $\mathbf{E}_{0t}$ que ahora podemos calcular. A este fin, supongamos que una onda monocromática plana incide en una superficie plana que separa dos medios isótropos. Sea cual sea la polarización de la onda, resolveremos sus campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en componentes paralelas y perpendiculares al plano de incidencia y trataremos estas componentes separadamente.

Caso 1. E perpendicular al plano de incidencia. Supongamos que E sea perpendicular al plano de incidencia y que $\mathbf{B}$ es paralela a él (figura 4.37). Recordemos que $E = vB$, de modo que

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B} \tag{4.23}$$

y,

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{4.24}$$

(es decir $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ y el vector de propagación $\hat{\mathbf{k}}$ forman un sistema a derechas). Una vez más, haciendo uso de la continuidad de las componentes tangenciales del campo $\mathbf{E}$, tenemos que en la frontera, en cualquier tiempo y en cualquier punto

$$\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} = \mathbf{E}_{0t} \tag{4.25}$$

donde los cosenos se anulan. Cabe señalar que los vectores de campo mostrados realmente deberían ser visualizados en $y = 0$ (es decir, en la superficie) de la cual han sido desplazados con fines meramente aclaratorios. Obsérvese también que aunque $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_t$ han de ser normales al plano de incidencia por simetría, *estamos suponiendo que apuntan hacia afuera* en la interfaz cuando $\mathbf{E}_i$ lo hace. Las direcciones de los campos $\mathbf{B}$ se derivan entonces de la ecuación (4.23).

Con el fin de obtener una nueva ecuación, es necesario que recordemos otra de las condiciones en la frontera. La presen-

cia de sustancias materiales que la onda polariza eléctricamente tiene un efecto definitivo en la configuración del campo. De este modo, mientras que la componente tangencial de **E** es continua al pasar la frontera, su componente normal no lo es. En su lugar la componente normal del producto $\epsilon\mathbf{E}$ es la misma en ambos lados de la interfaz. Del mismo modo, la componente normal de **B** es continua, al igual que la componente tangencial de $\mu^{-1}\mathbf{B}$. El efecto magnético de los dos medios aparece aquí a través de sus permeabilidades μ_i y μ_t. Esta condición de frontera será la más fácil de usar, sobre todo al aplicarla a la reflexión en la superficie de un conductor [7]. Así pues, la continuidad de la componente tangencial de $\mathbf{B}/\mu$ requiere que

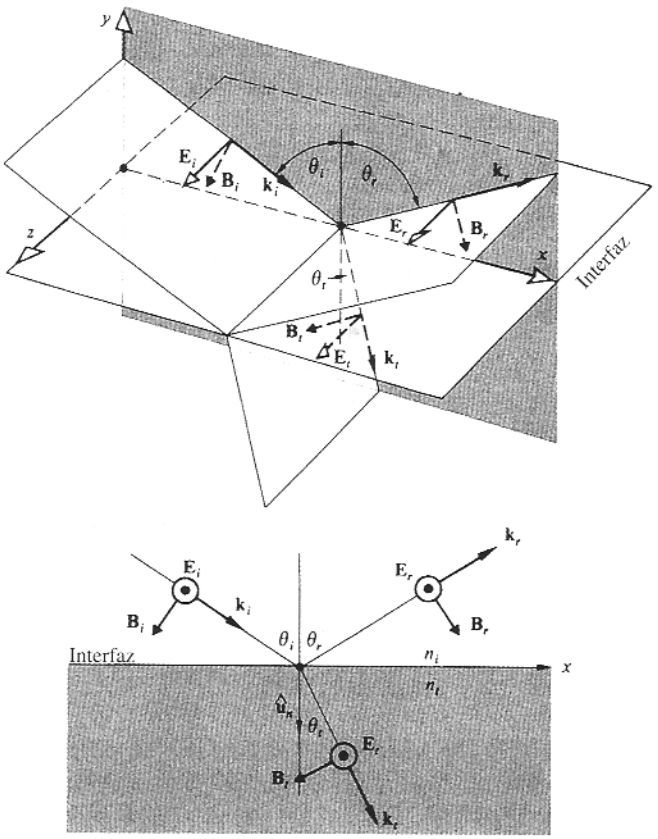


FIGURA 4.37 Onda incidente cuyo campo **E** es normal al plano de incidencia.

[7] Fieles a nuestro intento de usar solamente los campos **E** y **B**, al menos en la primera parte de esta exposición, hemos evitado las expresiones usuales que utilizan H, donde

$$\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} \qquad [A1.14]$$

$$-\frac{B_i}{\mu_i}\cos\theta_i + \frac{B_r}{\mu_i}\cos\theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t}\cos\theta_t \qquad (4.26)$$

donde los lados izquierdo y derecho son las magnitudes totales de $\mathbf{B}/\mu$ paralelas a la interfaz en el medio incidente y en el transmitido, respectivamente. La dirección positiva es aquélla en la que x aumenta de tal forma que las componentes escalar de $\mathbf{B}_i$ y $\mathbf{B}_t$ aparecen con signos negativos. De la ecuación (4.23) tenemos

$$B_i = E_i/v_i \qquad (4.27)$$

$$B_r = E_r/v_r \qquad (4.28)$$

y

$$B_t = E_t/v_t \qquad (4.29)$$

Por consiguiente, dado que $v_i = v_r$ y $\theta_i = \theta_r$, la ecuación (4.26) puede escribirse como

$$\frac{1}{\mu_i v_i}(E_i - E_r)\cos\theta_i = \frac{1}{\mu_t v_t}E_t\cos\theta_t \qquad (4.30)$$

Haciendo uso de las ecuaciones (4.12), (4.13) y (4.14) y recordando que los cosenos que ahí aparecen son iguales entre sí en $y = 0$, obtenemos

$$\frac{n_i}{\mu_i}(E_{0i} - E_{0r})\cos\theta_i = \frac{n_t}{\mu_t}E_{0t}\cos\theta_t \qquad (4.31)$$

Combinando esto con la ecuación (4.25), se obtiene

$$\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{\dfrac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i - \dfrac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t}{\dfrac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i + \dfrac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t} \qquad (4.32)$$

y

$$\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2\dfrac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i}{\dfrac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i + \dfrac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t} \qquad (4.33)$$

El subíndice $\perp$ sirve como recordatorio de que estamos tratando un caso en el que **E** es perpendicular al plano de incidencia. Estas dos expresiones, *que son afirmaciones absolutamente generales que se aplican a cualquier medio homogéneo, isótropo y lineal,* son dos de las denominadas **Ecuaciones de Fresnel**. Lo más frecuente es tratar con dieléctricos para los cuales $\mu_i \approx \mu_t \approx \mu_0$; en consecuencia, la fórmula más común de estas ecuaciones es simplemente

$$r_\perp \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{n_i\cos\theta_i - n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i + n_t\cos\theta_t} \qquad (4.34)$$

y

$$t_\perp \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\perp = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \tag{4.35}$$

Aquí $r_\perp$ denota **el coeficiente de reflexión para la amplitud,** mientras que $t_\perp$ representa **el coeficiente de transmisión para la amplitud.**

Caso 2. E paralelo al plano de incidencia. Cuando el campo incidente **E** está en el plano de incidencia, tal y como se muestra en la figura 4.38, es posible deducir un par de ecuaciones similares. La continuidad de las componentes tangenciales de **E** en ambos lados de la frontera nos lleva a

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t \tag{4.36}$$

De forma muy parecida a la anterior, la continuidad de las componentes tangenciales de $\mathbf{B}/\mu$, da

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r v_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t v_t} E_{0t} \tag{4.37}$$

Dado que $\mu_i = \mu_r$ y que $\theta_i = \theta_r$, podemos combinar estas fórmulas para obtener dos nuevas *Ecuaciones de Fresnel:*

$$r_\parallel \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{\dfrac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i - \dfrac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t}{\dfrac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \dfrac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_t} \tag{4.38}$$

y

$$t_\parallel \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)_\parallel = \frac{2\dfrac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_i}{\dfrac{n_i}{\mu_i} \cos \theta_t + \dfrac{n_t}{\mu_t} \cos \theta_i} \tag{4.39}$$

Cuando los dos medios que forman la interfaz son dieléctricos, que sean esencialmente «no magnéticos» (pág. 66), los coeficientes de amplitud resultantes son

$$r_\parallel = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \tag{4.40}$$

y

$$t_\parallel = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i} \tag{4.41}$$

Usando la ley de Snell puede hacerse una simplificación adicional de la notación, por medio de la cual las ecuaciones de Fresnel para medios dieléctricos se convierten en (problema 4.35)

$$r_\perp = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \tag{4.42}$$

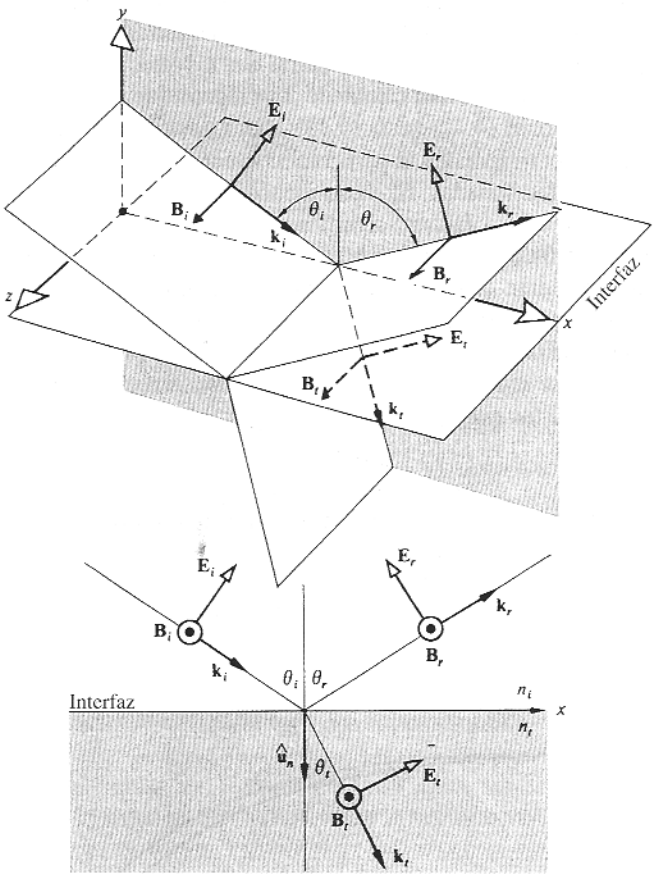


FIGURA 4.38 Onda incidente cuyo campo E se halla en el plano de incidencia.

$$r_\parallel = +\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \tag{4.43}$$

$$t_\perp = +\frac{2 \operatorname{sen} \theta_t \cos \theta_i}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \tag{4.44}$$

$$t_\parallel = +\frac{2 \operatorname{sen} \theta_t \cos \theta_i}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \tag{4.45}$$

Llegados a este punto, es necesario que hagamos una pequeña advertencia: debemos tener en mente que las direcciones (o más concretamente las fases) de los campos en las figuras 4.37 y 4.38 fueron seleccionadas de forma bastante arbitraria. Por ejemplo en la figura 4.37 ciertamente podríamos haber supues-

to que $\mathbf{E}_r$ apuntaba hacia adentro, por lo que $\mathbf{B}_r$ también hubiera tenido que ser invertida. Si hubiéramos hecho eso, el signo de $r_\perp$ habría resultado ser positivo, mientras que los otros coeficientes de amplitud no habrían cambiado. Los signos que aparecen en las ecuaciones (4.42) hasta (4.45), todos positivos excepto el primero, corresponden al particular conjunto de direcciones de campo seleccionadas. El signo menos de la ecuación (4.42), como veremos, solamente significa que no adivinamos correctamente la dirección de $\mathbf{E}_r$ en la figura 4.37. No obstante hay que tener presente que la literatura no es uniforme y que puede encontrarse cualquier variante posible de signo bajo el epígrafe *Ecuaciones de Fresnel.* Para evitar confusión, *tales ecuaciones deben estar relacionadas con las direcciones específicas de los campos de las que fueron deducidas.*

4.6.3 Interpretación de las ecuaciones de Fresnel

Esta sección está dedicada a analizar las implicaciones físicas de las ecuaciones de Fresnel. En particular, estamos interesados en determinar las fracciones de las amplitudes y las densidades de flujo que se reflejan y refractan. Por otro lado, también trataremos cualquier desplazamiento de fase que pueda producirse en el proceso.

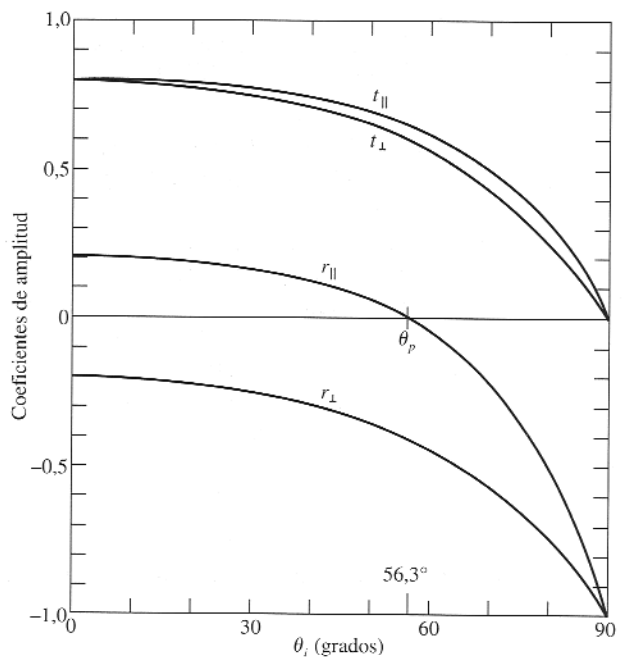


FIGURA 4.39 Los coeficientes de reflexión y transmisión para la amplitud como función del ángulo de incidencia. Estos corresponden a reflexión externa $n_t > n_i$ en una interfaz aire-vidrio (n_{ii} = 1,5).

Coeficientes de Amplitud

Examinemos ahora brevemente la forma de los coeficientes de amplitud en el rango completo de valores de θ_i. A una incidencia casi normal ($\theta_i \approx 0$) Las tangentes en la ecuación (4.43) son esencialmente iguales a los senos, en cuyo caso

$$[r_\parallel]_{\theta_i=0} = [-r_\perp]_{\theta_i=0} = \left[\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)}\right]_{\theta_i=0}$$

Más adelante volveremos al significado que ahora adquiere el signo menos. Después de desarrollar los senos y usar la ley de Snell, esta expresión queda como sigue

$$[r_\parallel]_{\theta_i=0} = [-r_\perp]_{\theta_i=0} = \left[\frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}\right]_{\theta_i=0} \tag{4.46}$$

la cual se deriva también de las ecuaciones (4.34) y (4.40). En el límite, cuando θ_i se aproxima a 0, cos θ_i y cos θ_t se aproximan ambos a la unidad y, por tanto,

$$[r_\parallel]_{\theta_i=0} = [-r_\perp]_{\theta_i=0} = \frac{n_t - n_i}{n_t + n_i} \tag{4.47}$$

Esta igualdad de los coeficientes de reflexión se produce porque el plano de incidencia ya está especificado cuando $\theta_t = 0$. De este modo, en una interfaz aire ($n_i = 1$) vidrio ($n_t = 1{,}5$), por ejemplo, a una incidencia casi normal, los coeficientes de reflexión para la amplitud serán iguales a $\pm$ 0,2 (véase problema 4.38).

Cuando $n_t > n_i$, de la ley de Snell se deduce que $\theta_i > \theta_t$ y así $r_\perp$ es negativo para todos los valores de θ_i (figura 4.39). Por el contrario, la ecuación (4.43) nos indica que $r_\parallel$ comienza siendo positivo en $\theta_i = 0$ y decrece gradualmente hasta que se anula cuando $(\theta_i + \theta_t) = 90°$, ya que en ese caso la tan $\pi/2$ es infinita. El valor particular del ángulo de incidencia para el cual esto ocurre se denota por θ_p y se conoce como el **ángulo de polarización** (véase sección 8.6.1). Obsérvese que $r_\parallel \to 0$ en θ_p justo cuando la fase se desplaza en 180°. Eso quiere decir que no veremos bascular al campo **E** cuando θ_i se acerca a θ_p desde cualquiera de los lados. Cuando θ_i aumenta mas allá de θ_p, $r_\parallel$ se hace cada vez más negativo hasta llegar a $-1{,}0$ a 90°.

Si colocamos sobre esta página una simple lámina de cristal, por ejemplo, un portaobjetos de microscopio, y miramos la

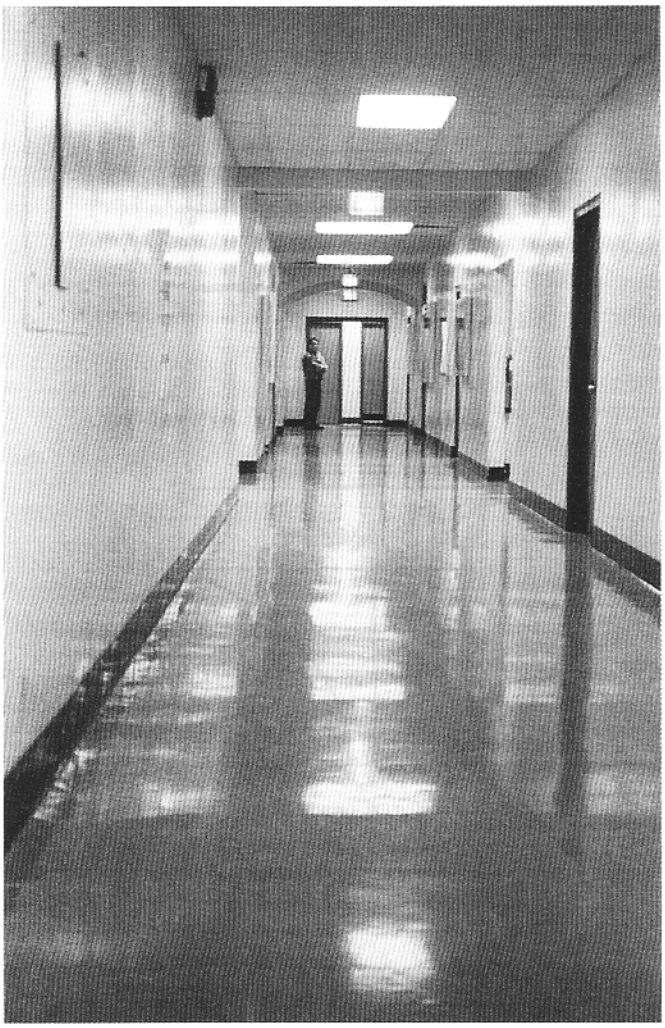


FIGURA 4.40 Con incidencia casi oblicua las paredes y el suelo parecen espejos a pesar de que las superficies son malos reflectores con $\theta_i = 0°$.

página a través de él ($\theta_i = 0$), la zona que queda debajo del cristal aparecerá claramente más gris que el resto del papel ya que el portaobjetos reflejará la luz en sus dos interfaces, y la luz que llega al papel y vuelve a salir de éste quedará apreciablemente atenuada. Sujetemos ahora el portaobjetos cerca de los ojos y miremos de nuevo la página a través de él ladeándolo un poco (θ_i aumentará). La cantidad de luz reflejada será mayor y será más difícil mirar la página a través del cristal. Cuando $\theta_i \approx 90°$, el portaobjetos se comportará como un espejo perfecto ya que

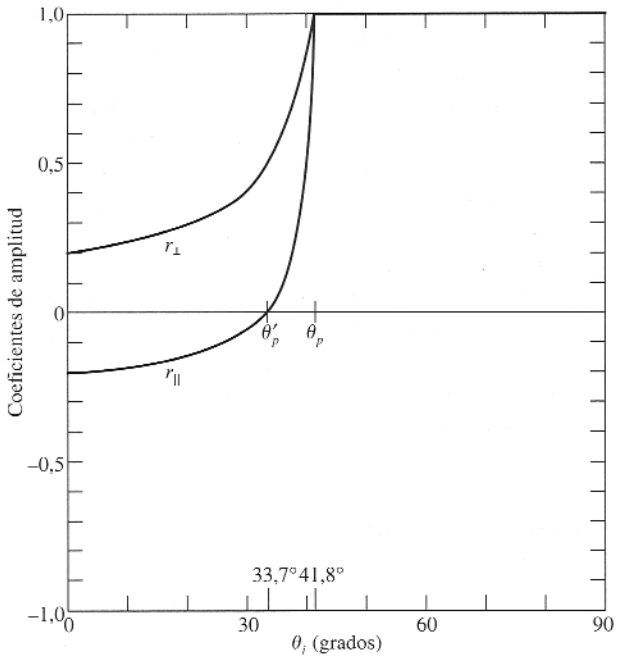


FIGURA 4.41 Los coeficientes de reflexión para la amplitud como función del ángulo de incidencia. Estos corresponden a reflexión interna $n_t < n_i$ en una interfaz aire-vidrio ($n_{ti} = 1/1{,}5$).

los coeficientes de reflexión (figura 4.39) llegan a $-1{,}0$. Incluso en el caso de una superficie pobre (figura 4.40), como la cubierta de este libro, se comportará como un espejo a incidencia oblicua. Sujetemos el libro horizontalmente a nivel de los ojos y pongámonos de frente a una luz brillante: veremos cómo la fuente de luz se refleja bastante bien sobre la cubierta del libro. De esto se deduce que incluso los rayos X pueden reflejarse especularmente a incidencia oblicua (pág. 249). De hecho, los telescopios modernos de rayos X se basan en este principio.

A incidencia normal, las ecuaciones (4.35) y (4.41) llevan directamente a

$$[t_\parallel]_{\theta_i=0} = [t_\perp]_{\theta_i=0} = \frac{2n_i}{n_i + n_t} \tag{4.48}$$

En el problema 4.43 quedará demostrado que la expresión

$$t_\perp + (-r_\perp) = 1 \tag{4.49}$$

es válida para todo valor de θ_i, mientras que

$$t_\parallel + r_\parallel = 1 \tag{4.50}$$

es válida solamente a incidencia normal.

El planteamiento anterior, en su mayor parte, quedaba restringido al caso de **reflexión externa,** es decir $n_t > n_i$. La situación contraria de **reflexión interna**, en la cual el medio incidente es más denso ($n_i > n_t$), es ciertamente también de interés. En ese caso $\theta_t > \theta_i$, y $r_\perp$, tal y como se describe en la ecuación (4.42), será siempre positivo. La figura 4.41 muestra cómo $r_\perp$ aumenta desde su valor inicial [ecuación (4.47)] en $\theta_i = 0$, alcanzando $+1$ a lo que se denomina el **ángulo crítico**, θ_c. Concretamente, θ_c es el valor especial del ángulo de incidencia (pág. 123) para el cual $\theta_t = \pi/2$. Del mismo modo, $r_\parallel$ comienza negativamente [ecuación (4.47)] en $\theta_i = 0$ y después aumenta hasta llegar a $+1$ en $\theta_i = \theta_c$ tal y como se pone de manifiesto en la ecuación de Fresnel (4.40). Una vez más, $r_\parallel$ pasa por cero en el *ángulo de polarización* θ_p'. Dejamos para el problema 4.57 la demostración de que los ángulos de polarización θ_p' y θ_p para reflexión interna y externa en la interfaz entre los mismos dos medios, son simplemente complementarios entre sí. Volveremos a tratar la reflexión interna en la sección 4.7, donde se demostrará que $r_\perp$ y $r_\parallel$ son cantidades complejas para $\theta_i > \theta_c$.

Desplazamientos de fase

Según la ecuación (4.42), debería ser evidente que $r_\perp$ es negativo independientemente de θ_i cuando $n_t > n_i$. Sin embargo, antes vimos que si hubiéramos asignado a $[\mathbf{E}_r]_\perp$ en la figura 4.37 la dirección opuesta, la primera ecuación de Fresnel (4.42), habría cambiado de signo y, por lo tanto, $r_\perp$ habría sido una cantidad positiva. El signo de $r_\perp$ está asociado con las direcciones relativas de $[\mathbf{E}_{0i}]_\perp$ y $[\mathbf{E}_{0r}]_\perp$. Recordemos que una

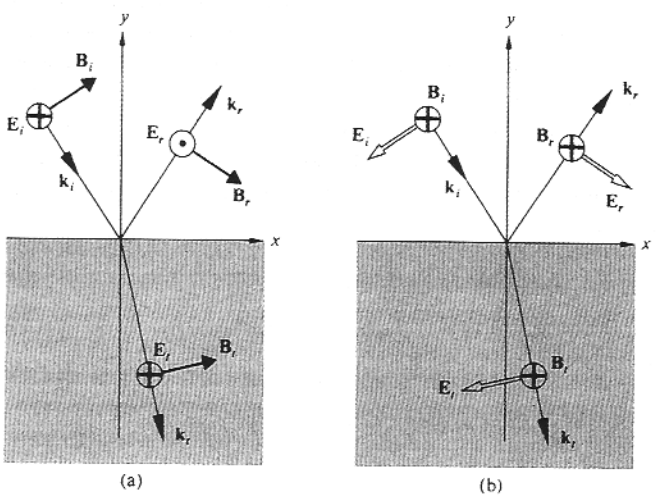


FIGURA 4.42 Orientaciones del campo y desplazamientos de fase.

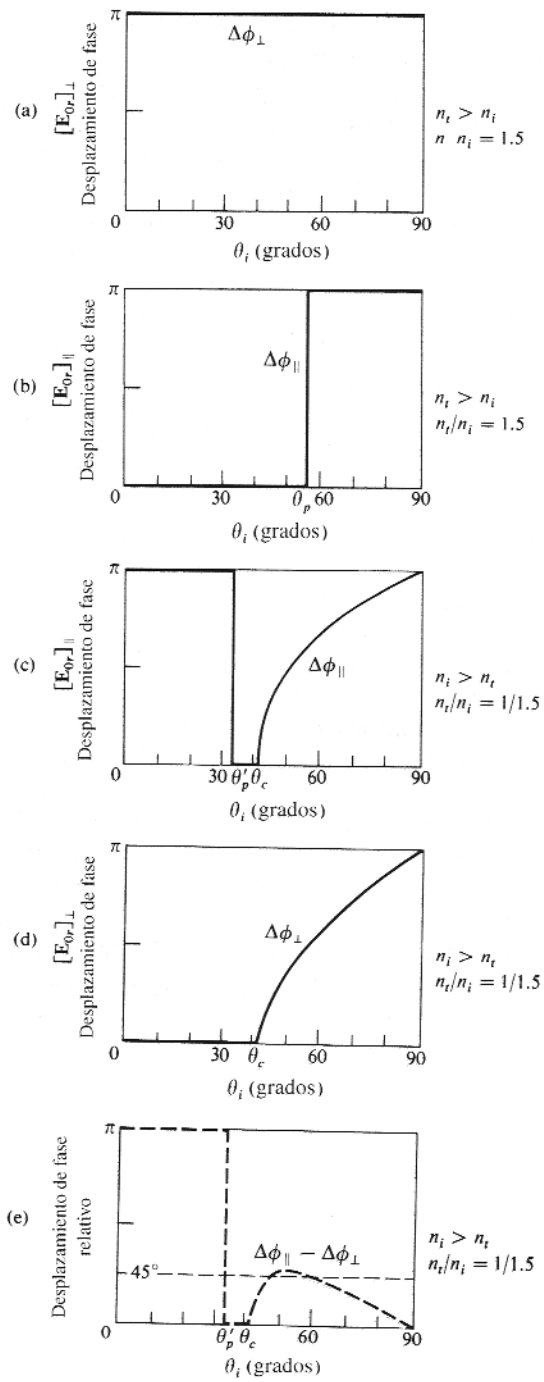


FIGURA 4.43 Desplazamientos de fase para las componentes paralela y perpendicular del campo E que corresponden a reflexión interna y externa.

inversión de $[\mathbf{E}_{0r}]_\perp$ es equivalente a introducir un desplazamiento de fase, $\Delta\varphi_\perp$, de π radianes en $[\mathbf{E}_r]_\perp$. Así, en la frontera $[\mathbf{E}_i]_\perp$ y $[\mathbf{E}_r]_\perp$ serán antiparalelas y por lo tanto estarán desfasadas en π entre sí, como lo indica el valor negativo de $r_\perp$. Cuando se consideran las componentes normales al plano de incidencia, no hay confusión sobre si los dos campos están en fase o desfasados en π radianes; si son paralelos, están en fase; si son antiparalelos, están desfasados en π. Resumiendo entonces, ***la componente del campo eléctrico normal al plano de incidencia sufre un desplazamiento de fase de π radianes bajo reflexión cuando el medio incidente tiene un índice más bajo que el medio transmisor***. Del mismo modo, $t_\perp$ y $t_\parallel$ son siempre positivos y $\Delta\varphi = 0$. *Además, cuando $n_i > n_t$, no se produce ningún desplazamiento de fase en la componente normal bajo reflexión, es decir $\Delta\varphi_\perp = 0$ siempre que $\theta_i < \theta_c$.*

Las cosas resultan un poco menos obvias cuando consideramos $[\mathbf{E}_i]_\parallel$ $[\mathbf{E}_r]_\parallel$ y $[\mathbf{E}_t]_\parallel$. Es necesario ahora definir más explícitamente lo que queremos decir con *en fase*, ya que los vectores de campo son coplanares pero generalmente no colineales. Las direcciones de campo se escogieron en las figuras 4.37 y 4.38 de tal forma que, si miráramos cualquiera de los vectores de propagación en la dirección en que viene la luz **E, B** y **k** parecerían tener la misma orientación relativa ya fuera el rayo incidente, reflejado o transmitido. Podemos utilizar esto como la condición requerida para que dos campos **E** estén en fase. Dicho de manera más simple: ***dos campos en el plano incidente estarán en fase si sus componentes y son paralelas y están desfasadas si son antiparalelas***. Obsérvese que cuando dos campos **E** están fuera de fase, también lo están sus campos asociados **B** y viceversa. Con esta definición necesitamos solamente fijarnos en los vectores normales al plano de incidencia, **E** o **B**, a fin de determinar la fase relativa de los campos acompañantes en el plano de incidencia. De este modo, en la figura 4.42*a*, $\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_t$, están en fase, así como $\mathbf{B}_i$ y $\mathbf{B}_t$, mientras que $\mathbf{E}_i$ y $\mathbf{E}_r$ están desfasados junto con $\mathbf{B}_i$ y $\mathbf{B}_r$. Similarmente, en la figura 4.42*b* $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{E}_r$ y $\mathbf{E}_t$ están en fase, como lo están $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_r$ y $\mathbf{B}_t$.

Ahora, el coeficiente de reflexión para la amplitud para la componente paralela viene dado por

$$r_\parallel = \frac{n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t}{n_t \cos\theta_i + n_i \cos\theta_t}$$

el cual es positivo ($\Delta\varphi_\parallel = 0$) siempre que

$$n_t \cos\theta_i - n_i \cos\theta_t > 0$$

es decir, si

$$\operatorname{sen}\theta_i \cos\theta_i - \cos\theta_t \operatorname{sen}\theta_t > 0$$

o lo que es igual si

$$\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)\cos(\theta_i + \theta_t) > 0 \tag{4.51}$$

Este será el caso para $n_i < n_t$ si

$$(\theta_i + \theta_t) < \pi/2 \tag{4.52}$$

y para $n_i > n_t$ cuando

$$(\theta_i + \theta_t) > \pi/2 \tag{4.53}$$

Y así, cuando $n_i < n_t$, $[\mathbf{E}_{0r}]_\parallel$ y $[\mathbf{E}_{0i}]_\parallel$ estarán en fase ($\Delta\varphi_\parallel = 0$) hasta que $\theta_i = \theta_p$ y desfasados en π radianes de ahí en adelante. La transición no es en realidad discontinua ya que $[\mathbf{E}_{0r}]_\parallel$ va a cero en θ_p. Por el contrario, para la reflexión interna $r_\parallel$ es negativo hasta θ_p', lo cual significa que $\Delta\varphi_\parallel = \pi$. Desde θ_p' hasta θ_c, $r_\parallel$ es positivo y $\Delta\varphi_\parallel = 0$. Más allá de θ_c, $r_\parallel$ se hace complejo y $\Delta\varphi_\parallel$ aumenta gradualmente hasta π cuando $\theta_i = 90°$.

La figura 4.43 resume estas conclusiones y recurriremos a ella en diversas ocasiones. La forma funcional real de $\Delta\varphi_\parallel$ y $\Delta\varphi_\perp$ para reflexión interna en la región donde $\theta_i > \theta_c$ podemos encontrarla en toda la literatura escrita sobre este tema [8], mientras que las curvas que se muestran aquí serán suficientes para nuestros propósitos. La figura 4.43*e* es un diagrama de los correspondientes desplazamientos de fase entre las componentes paralela y perpendicular, es decir, $\Delta\varphi_\parallel - \Delta\varphi_\perp$. La presentamos en este punto porque anticipamos su posterior utilidad cuando consideremos, por ejemplo, los efectos de la polarización. Finalmente, muchas de las características esenciales de este planteamiento se ilustran en las figuras 4.44 y 4.45. Las amplitudes de los vectores reflejados están de acuerdo con las de las figuras 4.39 y 4.41 (para una interfaz aire-vidrio), mientras que los desplazamientos de fase coinciden con los de la figura 4.43.

En realidad muchas de estas conclusiones pueden verificarse usando un equipo de experimentación de lo más sencillo, a saber, dos polarizadores lineales, un trozo de vidrio y una pequeña fuente de luz, como una lámpara de mano o una lámpara de alta intensidad. Colocando un polarizador enfrente de la fuente (a 45° con respecto al plano de incidencia) se pueden fácilmente reproducir las condiciones de la figu-

[8] Born y Wolf, *Principles of Optics*, pág. 49.

ra 4.44. Por ejemplo, cuando $\theta_i = \theta_p$ [figura 4.44*b*], no pasará luz a través del segundo polarizador si su eje de transmisión es paralelo al plano de incidencia. Comparativamente, cerca a una incidencia casi oblicua, el haz reflejado se anulará cuando los ejes de los dos polarizadores sean casi normales uno respecto a otro.

Reflectancia y Transmitancia

Consideremos un haz de luz circular que incide en una superficie, tal y como se muestra en la figura 4.46, de tal modo que se produzca una zona iluminada cuyo área sea A. Recordemos que la potencia por unidad de área que cruza una superficie en el vacío cuya normal es paralela a **S**, el vector de Poynting, viene determinada por

$$\mathbf{S} = c^2\epsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{B} \qquad [3.40]$$

Además, la densidad de flujo radiante (W / m^2) o irradiancia es entonces

$$I = \langle S \rangle_T = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \qquad [3.44]$$

Ésta es el promedio de energía por unidad de tiempo que cruza un área unidad normal a **S** (en medios isótropos **S** es paralela a **k**). En el caso que nos ocupa (figura 4.46) sean I_i, I_r e I_t, las densidades de flujo incidente, reflejado y transmitido respectivamente, por lo que las áreas transversales de los rayos incidentes, reflejados y transmitidos serán, respectivamente, $A \cos \theta_i$, $A \cos \theta_r$ y $A \cos \theta_t$. De acuerdo con esto, la potencia incidente es $I_i A \cos \theta_i$. Ésta es la energía por unidad de tiempo que fluye en el rayo incidente y, por consiguiente, la potencia que llega a la superficie de A. Del mismo modo, $I_r A \cos \theta_r$ es la potencia en el rayo reflejado, e $I_t A \cos \theta_t$ es la potencia que se transmite a través de A. Definimos la **reflectancia** R como el cociente entre la potencia (o flujo) reflejada y la potencia incidente, es decir,

$$R \equiv \frac{I_r A \cos \theta_r}{I_i A \cos \theta_i} = \frac{I_r}{I_i} \qquad (4.54)$$

Del mismo modo, la **transmitancia** T se define como el cociente entre el flujo transmitido y el flujo incidente y viene dada por

$$T \equiv \frac{I_t \cos \theta_t}{I_i \cos \theta_i} \qquad (4.55)$$

El cociente I_r/I_i es igual a $(v_r\epsilon_r E_{0r}^2/2)/(v_i\epsilon_i E_{0i}^2/2)$ y dado que la onda reflejada y la incidente están en el mismo medio, $v_r = v_i$, $\epsilon_r = \epsilon_i$, y

$$R = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 = r^2 \qquad (4.56)$$

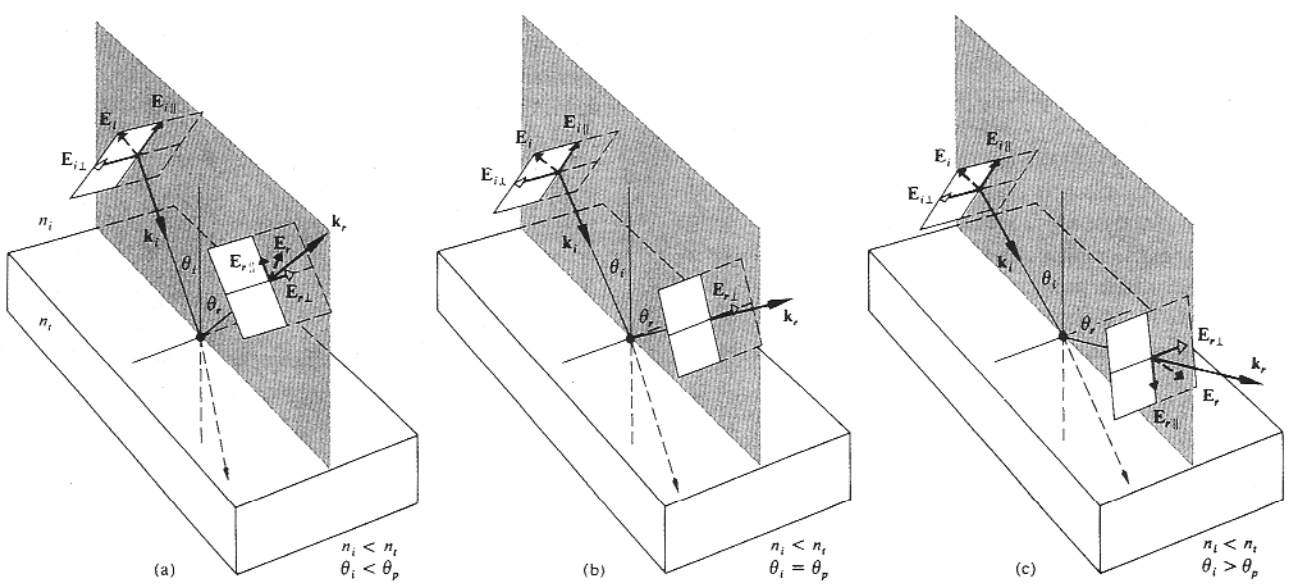


FIGURA 4.44 El campo E reflejado a varios ángulos con reflexión externa.

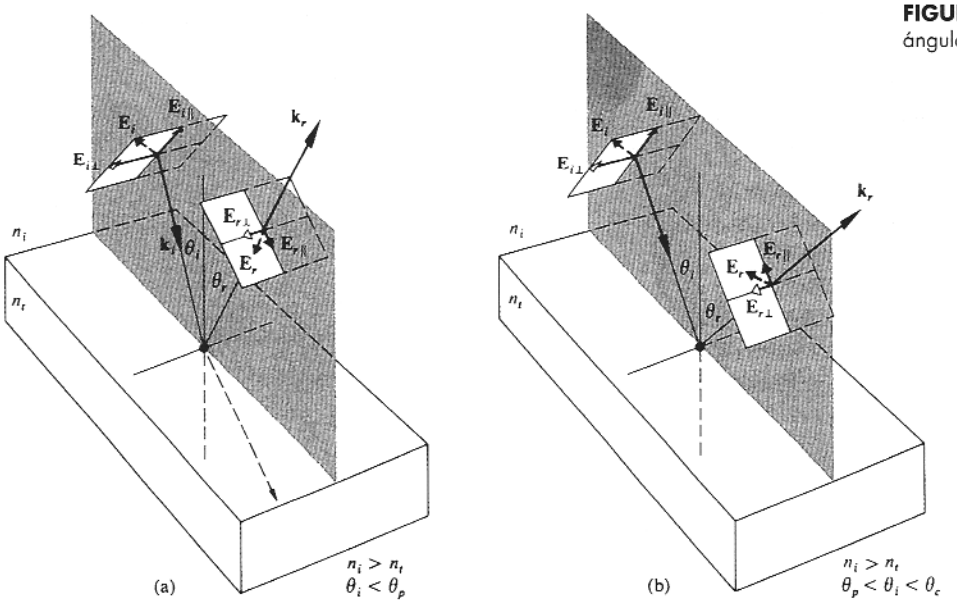


FIGURA 4.45 El campo E reflejado a varios ángulos con reflexión interna.

En la misma forma (suponiendo $\mu_i = \mu_t = \mu_0$),

$$T = \frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2 = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right)t^2 \qquad (4.57)$$

donde se tuvo en cuenta el hecho de que $\mu_0\epsilon_t = 1/v_t^2$ y $\mu_0 v_t \epsilon_t = n_t/c$. Obsérvese que a incidencia normal, que es una situación de gran interés práctico, $\theta_t = \theta_i = 0$, y la transmitancia [ecuación (4.55)], al igual que la reflectancia [ecuación (4.54)], es simplemente el cociente entre las irradiancias adecuadas. Dado que $R = r^2$, no debemos preocuparnos por el signo de r en ninguna formulación en concreto, lo cual convierte la reflectancia en un concepto útil. Obsérvese que en la ecuación (4.57) T no es simplemente igual a t^2, por dos razones. La primera, el cociente entre los índices de refracción ha de estar presente ya que las velocidades a las que se transporta la energía dentro y fuera de la interfaz son diferentes, es decir, $I \propto v$, de la ecuación (3.47). La segunda, las áreas transversales de los haces incidente y reflejado son diferentes. El flujo de energía por área unitaria se ve afectado en correspondencia y esto se manifiesta en la presencia del cociente entre los términos coseno.

Escribamos ahora una expresión que represente la conservación de energía para la configuración que se muestra en la figura 4.46. Dicho de otro modo, la energía total que llega al área A por unidad de tiempo debe ser igual a la energía que fluye hacia fuera de ella por unidad de tiempo:

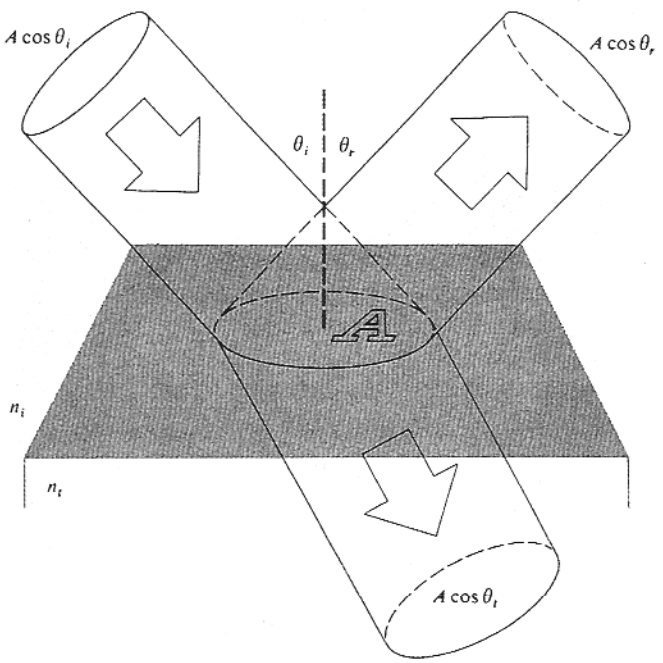


FIGURA 4.46 Reflexión y transmisión de un haz incidente.

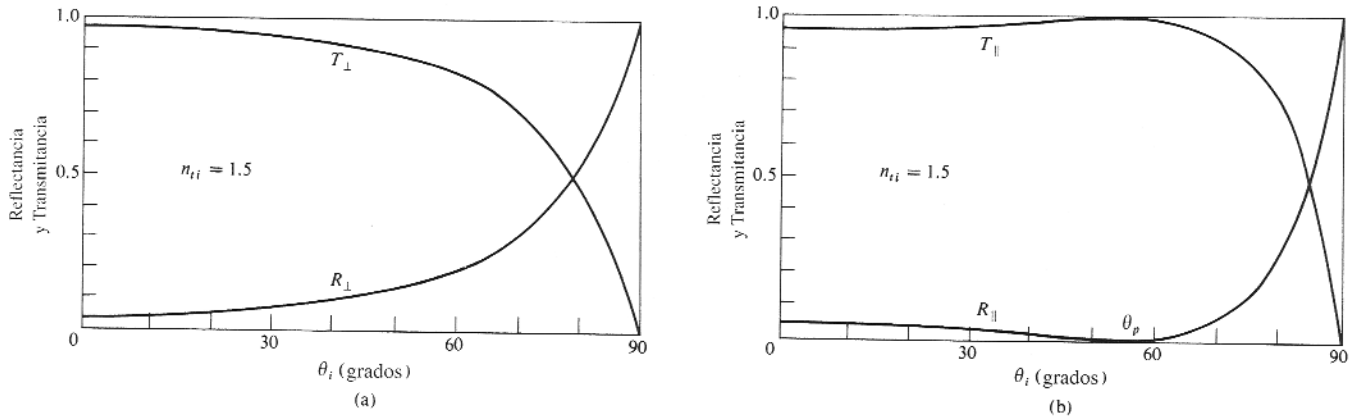


FIGURA 4.47 Reflectancia y transmisión frente a ángulo de incidencia.

$$I_i A \cos \theta_i = I_r A \cos \theta_r + I_t A \cos \theta_t \tag{4.58}$$

Multiplicando ambos lados por c esta expresión queda

$$n_i E_{0i}^2 \cos \theta_i = n_i E_{0r}^2 \cos \theta_i + n_i E_{0t}^2 \cos \theta_t$$

o bien

$$1 = \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2 + \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right)\left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}}\right)^2 \tag{4.59}$$

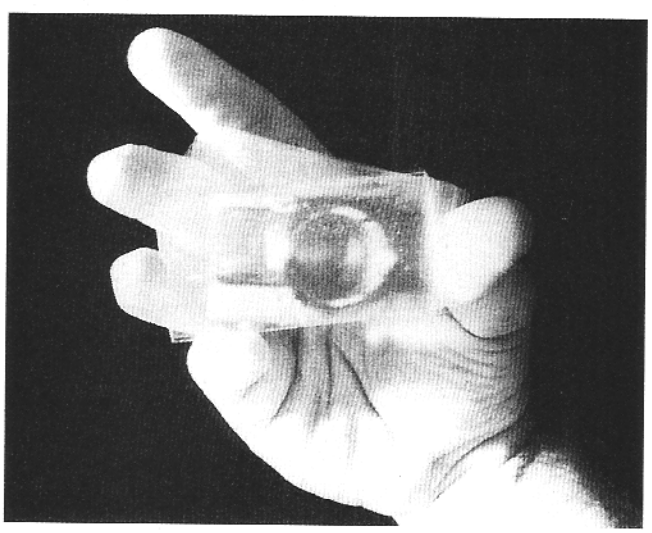


FIGURA 4.48 Reflexión casi normal en una pila de portaobjetos de microscopio. Puede verse la imagen de la cámara con la que se tomó la fotografía. (Foto de E.H.)

Pero esto es simplemente

$$R + T = 1 \tag{4.60}$$

donde no hay absorción. Es conveniente usar las formas con componentes, es decir,

$$R_\perp = r_\perp^2 \tag{4.61}$$

$$R_\parallel = r_\parallel^2 \tag{4.62}$$

$$T_\perp = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right) t_\perp^2 \tag{4.63}$$

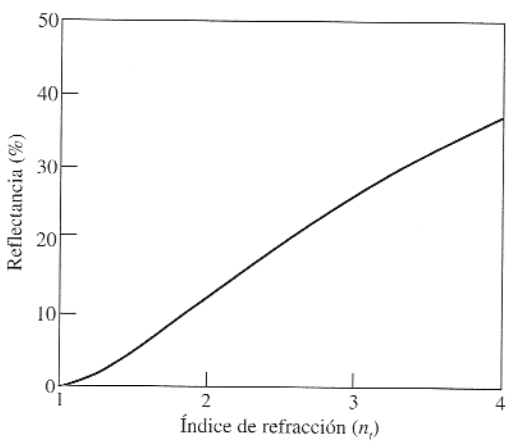


FIGURA 4.49 Reflectancia con incidencia normal en el aire (n_i = 1,0) en una interfaz única.

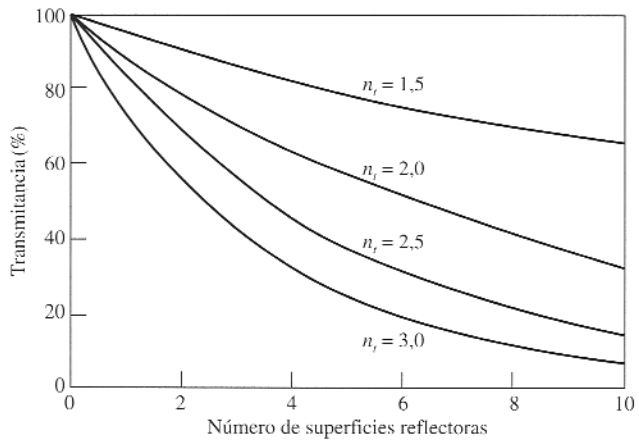


FIGURA 4.50 Transmitancia a través de varias superficies en el aire (n_i = 1,0) en incidencia normal.

y
$$T_{\parallel} = \left(\frac{n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i}\right) t_{\parallel}^2 \tag{4.64}$$

las cuales se ilustran en la figura 4.47. Además puede demostrarse (problema 4.62) que

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1 \tag{4.65}$$

y
$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1 \tag{4.66}$$

Cuando $\theta_i = 0$, el plano de incidencia queda indefinido y cualquier distinción entre las componentes paralela y perpendicular de R y T desaparece. En este caso, las ecuaciones (4.61) hasta (4.64), junto con (4.47) y (4.48) llevan a

$$R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2 \tag{4.67}$$

y
$$T = T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{4 n_t n_i}{(n_t + n_i)^2} \tag{4.68}$$

De este modo, el 4% de la luz que incide normalmente en una interfaz aire-vidrio será reflejada tanto internamente ($n_i > n_t$), como externamente ($n_i < n_t$) (problema 4.63). Esto obviamente será de gran interés para cualquiera que esté trabajando con un sistema complicado de lentes con diez o veinte de tales fronteras aire-vidrio. En efecto, si se mira perpendicularmente una pila de alrededor de 50 portaobjetos de microscopio (los cubreobjetos son mucho más finos y más fáciles de manejar en grandes cantidades) la mayor parte de la luz será reflejada. La pila se comportará como si fuera un único espejo (figura 4.48). Enrolle en forma de cilindro una lámina fina de plástico transparente, y también parecerá de metal brillante. El gran número de interfaces producen multitud de reflexiones *especulares* muy juntas entre sí que envían gran parte de la luz nuevamente al medio incidente, más o menos como si se hubiera producido una única reflexión independiente de la frecuencia. En una superficie lisa de metal gris, el efecto es más o menos el mismo —se produce una reflectancia especular independiente de la frecuencia— y su aspecto será brillante (eso es en realidad lo que «brillante» significa). Si la reflexión es difusa, la superficie parecerá gris o incluso blanca si la reflectancia es lo suficientemente grande.

En la figura 4.49 mostramos un gráfico de la reflectancia en una sola interfaz, a incidencia normal para diversos medios de transmisión en aire. La figura 4.50 ilustra la correspondiente dependencia de la transmitancia a incidencia normal en una serie de interfaces, así como el índice del medio. Esta es la razón por la que no es posible ver a través del cilindro de cinta de plástico con una superficie lisa y «clara», y también es la razón por la que muchas de las piezas de un periscopio han de protegerse con una película antirreflectante (sección 9.9.2).

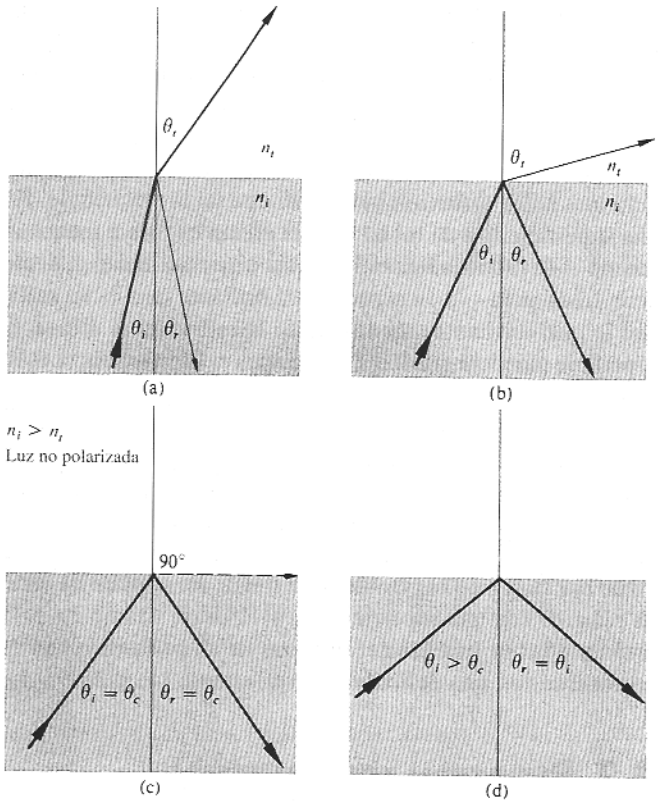
4.7 Reflexión total interna

En la sección anterior vimos claramente que algo interesante estaba sucediendo en el caso de reflexión interna ($n_i > n_t$) cuando θ_i era igual o más grande que θ_c, el llamado **ángulo crítico**. Retomemos ahora esta situación y analicémosla más de cerca. Supongamos que tenemos sumergida una fuente en un medio ópticamente denso y que permitimos que θ_i aumente gradualmente, tal y como se indica en la figura 4.51. Sabemos por la sección anterior (figura 4.41) que $r_{\parallel}$ y $r_{\perp}$ aumentan al aumentar θ_i y, por consiguiente, tanto $t_{\parallel}$ como $t_{\perp}$ disminuyen. Además $\theta_t > \theta_i$ ya que

$$\operatorname{sen} \theta_i = \frac{n_t}{n_i} \operatorname{sen} \theta_t$$

y $n_i > n_t$, en cuyo caso $n_{ti} < 1$. Así pues, al crecer θ_i, el rayo transmitido se aproxima gradualmente a la tangencia con la frontera conforme lo va haciendo, una mayor cantidad de la energía disponible va apareciendo en el haz reflejado. Por último, cuando $\theta_t = 90°$, el sen $\theta_t = 1$ y

$$\operatorname{sen} \theta_c = n_{ti} \tag{4.69}$$



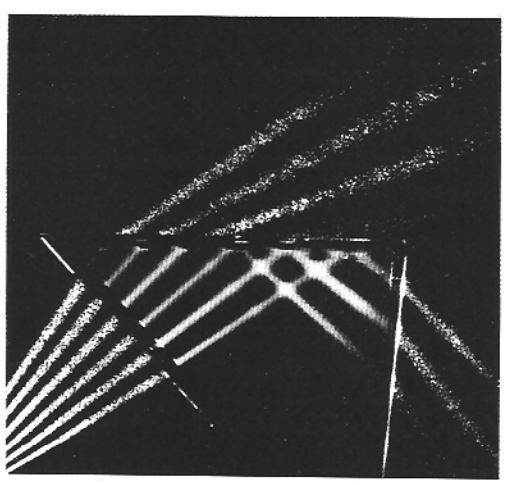


FIGURA 4.51 Reflexión interna y ángulo crítico. (Foto cedida por Educational Services, Inc.)

Tal y como se dijo anteriormente, *el ángulo crítico es ese valor especial de* θ_i *para el cual* $\theta_t = 90°$. Cuanto mayor sea n_i, menor será n_{ti} y menor será también θ_c. Para ángulos incidentes mayores o iguales a θ_c, toda la energía incidente se refleja de nuevo hacia el medio incidente en un proceso conocido como **reflexión total interna** (figura 4.52).

Cabe resaltar que la transición de las condiciones ilustradas en la figura 4.51*a* a las de 4.21*d* tiene lugar sin ninguna discontinuidad. Cuando θ_i aumenta, el haz reflejado se hace más y más fuerte mientras que el haz transmitido se hace más débil hasta que este último desaparece y el primero lleva toda la energía cuando $\theta_r = \theta_c$. Es fácil observar la disminución del haz transmitido cuando θ_i se hace mayor. Limitémonos a colocar un portaobjetos de microscopio sobre una página impresa, esta vez impidiendo la salida de cualquier luz reflejada especularmente. En $\theta_i \approx 0$, 0_t es aproximadamente cero, por lo que la página que se ve a través del vidrio es clara y brillante. Pero si movemos la cabeza, haciendo que el ángulo con el cual se ve la interfaz aumente, la región de la página impresa cubierta por el vidrio aparecerá cada vez más oscura, lo cual indicará que T ha sido en efecto notablemente reducida.

El ángulo crítico para nuestra interfaz aire-vidrio es aproximadamente 42° (véase la tabla 4.2). En consecuencia, un rayo que incida normalmente en la cara izquierda de cualquiera de los prismas de la figura 4.53 tendrá un ángulo $\theta_i > 42°$ y, por consiguiente, será reflejado internamente. Esto es obviamente una forma conveniente de reflejar casi el 100% de la luz incidente sin tener que preocuparse por el deterioro que pueda ocurrir en las superficies metálicas (figura 4.54).

Otra forma útil de interpretar la situación es a través de la figura 4.55, en la que se representa de manera simplificada la dispersión de los osciladores atómicos. Sabemos que el efecto neto de la presencia del medio isótropo homogéneo es alterar la velocidad de la luz de c a v_i y v_t, respectivamente (pág. 91). La onda resultante es la superposición de estos trenes de ondas que se propagan a las velocidades adecuadas. En la figura 4.55*a*, una onda incidente resulta posteriormente en la emisión de trenes de ondas procedentes de los focos de dispersión o esparcimiento A y B. Éstos se superponen para formar la onda transmitida. En esta figura no se ha dibujado la onda reflejada que, como siempre, regresa al medio incidente ($\theta_i = \theta_r$). En un tiempo t, el frente incidente viaja una distancia $v_i t = \overline{CB}$ mientras que el frente transmitido recorre una distancia $v_t t = \overline{AD} > \overline{CB}$. Dado que una onda se mueve de A a E en el mismo tiempo en que la otra va de C a B, y dado que ambas tienen la misma frecuencia y periodo, cambiarán de fase en el proceso

en la misma cantidad. En consecuencia, la perturbación en el punto E debe estar en fase con la que se produce en el punto B; estos dos puntos deben estar en el mismo frente de onda transmitido (recordemos la sección 4.42).

Podemos observar que, cuanto mayor es v_t con respecto a v_i, más se inclinará el frente transmitido (es decir, mayor será θ_t). Esto podemos verlo en la figura 4.55*b*, donde n_{ti} ha sido reducido al presuponer que n_t también se ha reducido. El resultado es una mayor velocidad v_t, que aumenta $\overline{AD}$ y causa un mayor ángulo de transmisión. La figura 4.55*c* muestra un caso especial: $\overline{AD} = \overline{AB} = v_t t$, donde los trenes de ondas se solaparán en fase *sólo a lo largo de la línea de la interfaz*, $\theta_t = 90°$. Del triángulo ABC, sen $\theta_i = v_i t / v_t t = n_t / n_i$, que es la ecuación (4.69). Para estos dos medios concretos (es decir, para el valor particular de n_{ti}), los trenes de ondas dispersados se añadirán constructivamente en el medio de transmisión en la dirección que va a lo largo de la interfaz. La perturbación resultante ($\theta_t = 90°$) se conoce como *onda de superficie*.

FIGURA 4.52 Un ejemplo cotidiano de reflexión interna total. Aquí, el fondo de la tetera se ve a través del agua por la reflexión interna total. Obsérvese que no hay transmisión de luz desde la llama delantera a través del fondo hasta la cámara.

4.7.1 La onda evanescente

Dado que la frecuencia de los rayos X es superior a las frecuencias de resonancia de los átomos del medio, la ecuación (3.70) sugiere, y la experimentación confirma, que el índice de refracción de los rayos X es inferior a 1,0. De este modo, la velocidad de onda de los rayos X (es decir, la velocidad de fase) en la materia excede su valor (c) en el vacío, aunque esto se produce en menos de una diezmilésima parte, incluso en los sólidos más densos. Cuando los rayos X que viajan por el aire entran en un material denso como el vidrio, el haz de luz se dobla ligeramente *alejándose* de la normal, en lugar de acer-

TABLA 4.2 Ángulos críticos

n_{it}	θ_c (grados)	θ_c (radianes)	n_{it}	θ_c (grados)	θ_c (radianes)
1,30	50,284 9	0,877 6	1,50	41,810 3	0,729 7
1,31	49,761 2	0,868 5	1,51	41,471 8	0,723 8
1,32	49,250 9	0,859 6	1,52	41,139 5	0,718 0
1,33	48,753 5	0,850 9	1,53	40,813 2	0,712 3
1,34	48,268 2	0,842 4	1,54	40,492 7	0,706 7
1,35	47,794 6	0,834 2	1,55	40,177 8	0,701 2
1,36	47,332 1	0,826 1	1,56	39,868 3	0,695 8
1,37	46,880 3	0,818 2	1,57	39,564 2	0,690 5
1,38	46,438 7	0,810 5	1,58	39,265 2	0,685 3
1,39	46,007 0	0,803 0	1,59	38,971 3	0,680 2
1,40	45,584 7	0,795 6	1,60	38,682 2	0,675 1
1,41	45,171 5	0,788 4	1,61	38,397 8	0,670 2
1,42	44,767 0	0,781 3	1,62	38,118 1	0,665 3
1,43	44,370 9	0,774 4	1,63	37,842 8	0,660 5
1,44	43,983 0	0,767 6	1,64	37,571 9	0,655 8
1,45	43,602 8	0,761 0	1,65	37,305 2	0,651 1
1,46	43,230 2	0,754 5	1,66	37,042 7	0,646 5
1,47	42,864 9	0,748 1	1,67	36,784 2	0,642 0
1,48	42,506 6	0,741 9	1,68	36,529 6	0,637 6
1,49	42,155 2	0,735 7	1,69	36,278 9	0,633 2

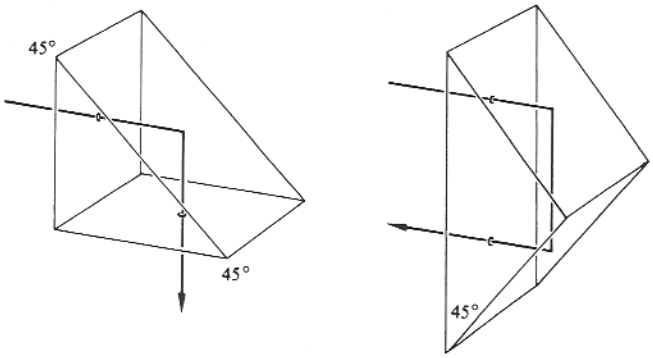


FIGURA 4.53 Reflexión total interna

cándose. Teniendo en cuenta todo lo anteriormente dicho sobre la reflexión total interna, lo esperable sería que los rayos X fueran **reflejados total y externamente** cuando, por ejemplo, $n_i = n_{aire}$ y $n_t = n_{vidrio}$. Esta es la forma en la que normalmente aparece representado en los libros publicados sobre este asunto, pero es un nombre incorrecto ya que en el caso de los rayos X, $n_{aire} > n_{vidrio}$ y, por lo tanto, $n_i > n_t$ (a pesar de que el vidrio es físicamente más denso que el aire) y por lo tanto el proceso sigue siendo realmente de reflexión *interna*. Sea como fuere, dado que n_t es inferior a uno, si bien por muy poco, el índice $n_{ti} \approx 1$ y $\theta_c \approx 90°$.

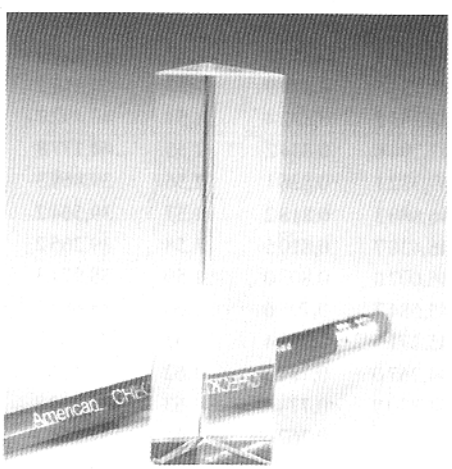


FIGURA 4.54 El prisma se comporta como un espejo reflejando una parte del lápiz (invirtiendo el rótulo en el mismo). El proceso operante es la reflexión total interna.

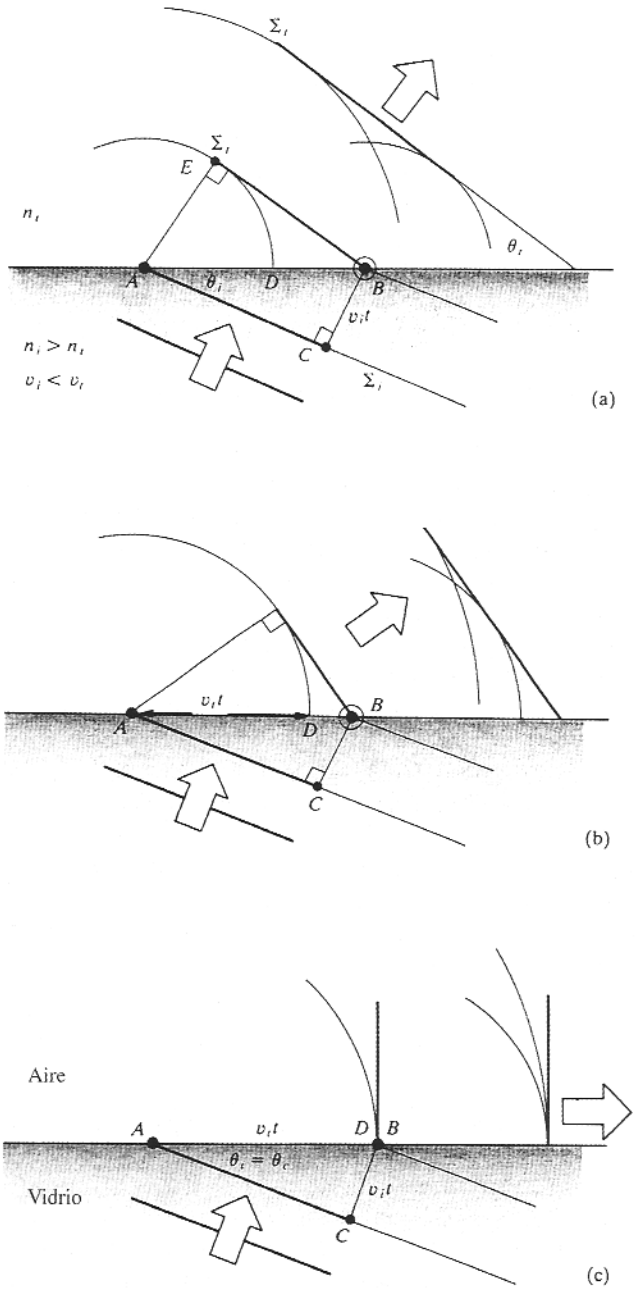


FIGURA 4.55 Un análisis de la onda transmitida en el proceso de reflexión total interna desde una perspectiva de esparcimiento. Aquí, mantenemos θ_i y n_i constantes y en partes sucesivas del diagrama reducimos n_t, aumentando así v_t. La onda reflejada ($\theta_r = \theta_i$) no se traza.

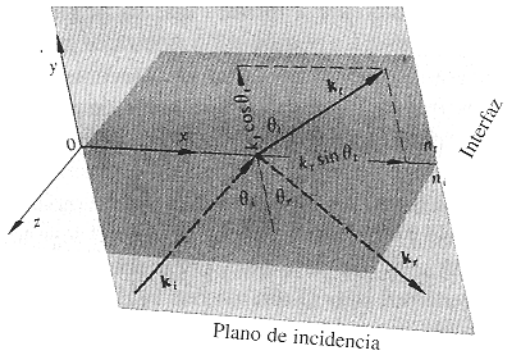


FIGURA 4.56 Vectores de propagación para reflexión interna.

En 1923, A.H. Compton afirmó que a pesar de que los rayos X que inciden en una muestra con ángulos usuales no son reflejados especularmente, en incidencia rasante deberían ser total y «externamente» reflejados. Compton emitió rayos X de 0,128 nm sobre una placa de vidrio con un ángulo crítico de unos 10 minutos de arco (0,167°) medido en relación con la superficie. El resultado fue un índice de refracción para el vidrio que difería de uno en $-4{,}2 \times 10^{-6}$.

Más adelante volveremos a mostrar una serie de aplicaciones prácticas importantes tanto de la reflexión total interna como de la total «externa» (pág. 202).

Si en el caso de la reflexión total interna damos por sentado que no hay onda transmitida, se hará imposible satisfacer las condiciones de contorno utilizando solamente las ondas incidente y reflejada —las cosas no son tan simples como podrían parecer—. Al reformular las ecuaciones (4.34) y (4.40) (problema 4.66) vemos que

$$r_\perp = \frac{\cos\theta_i - (n_{ti}^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i)^{1/2}}{\cos\theta_i + (n_{ti}^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i)^{1/2}} \tag{4.70}$$

y

$$r_\parallel = \frac{n_{ti}^2\cos\theta_i - (n_{ti}^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i)^{1/2}}{n_{ti}^2\cos\theta_i + (n_{ti}^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i)^{1/2}} \tag{4.71}$$

Dado que $\operatorname{sen}\theta_c = n_{ti}$, cuando $\theta_i > \theta_c$, $\operatorname{sen}\theta_i > n_{ti}$, y tanto $r_\perp$ como $r_\parallel$ se hacen cantidades complejas. A pesar de esto (problema 4.67) $r_\perp r_\perp^* = r_\parallel r_\parallel^* = 1$ y $R = 1$, lo cual significa que $I_r = I_i$ y $I_t = 0$. Por lo tanto, aunque sea necesaria una onda transmitida, ésta no puede, como norma general, transportar energía a través de la frontera. No vamos a desarrollar aquí los cálculos completos y bastante largos que se necesitan para deducir las expresiones para todos los campos reflejados y transmitidos, si bien podemos captar una idea de lo que está sucediendo de la siguiente manera: La función de onda para el campo eléctrico transmitido es

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}\exp i(\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

donde

$$\mathbf{k}_t\cdot\mathbf{r} = k_{tx}x + k_{ty}y$$

no habiendo una componente z de $\mathbf{k}$. Pero

$$k_{tx} = k_t \operatorname{sen}\theta_t$$

y

$$k_{ty} = k_t\cos\theta_t$$

como puede verse en la figura 4.56. Usando de nuevo la ley de Snell,

$$k_t\cos\theta_t = \pm k_t\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_i}{n_{ti}^2}\right)^{1/2} \tag{4.72}$$

o ya que nos interesa el caso en que en $\operatorname{sen}\theta_i > n_{ti}$,

$$k_{ty} = \pm ik_t\left(\frac{\operatorname{sen}^2\theta_i}{n_{ti}^2} - 1\right)^{1/2} \equiv \pm i\beta$$

y

$$k_{tx} = \frac{k_t}{n_{ti}}\operatorname{sen}\theta_i$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t}e^{\mp\beta y}e^{i(k_t x \operatorname{sen}\theta_i/n_{ti} - \omega t)} \tag{4.73}$$

No teniendo en cuenta la exponencial positiva, que es físicamente imposible, obtenemos una onda cuya amplitud dismi-

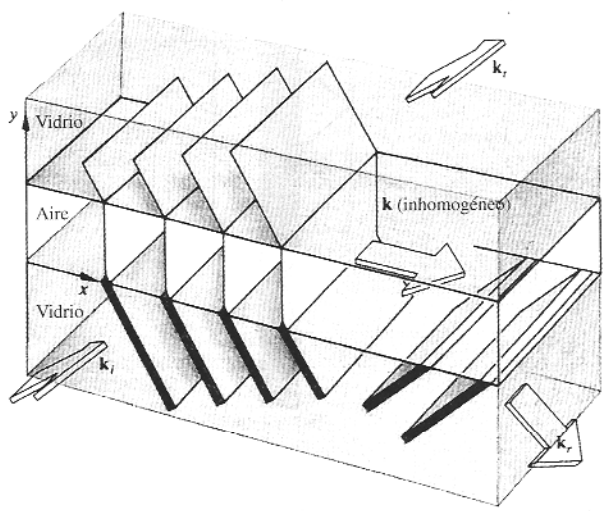
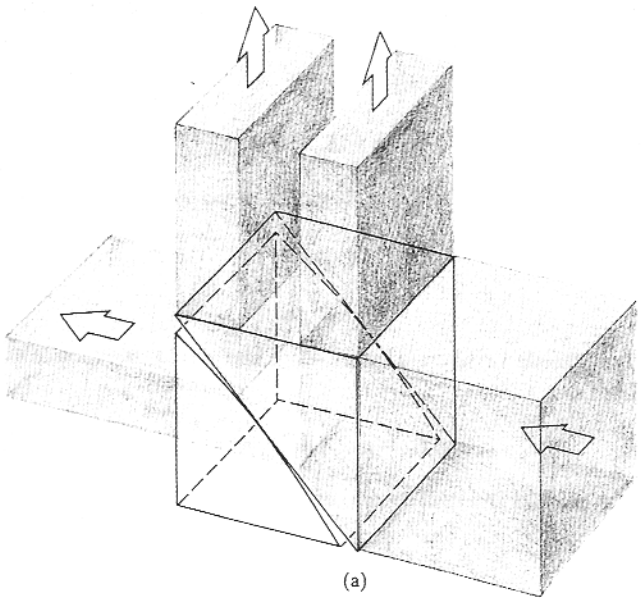


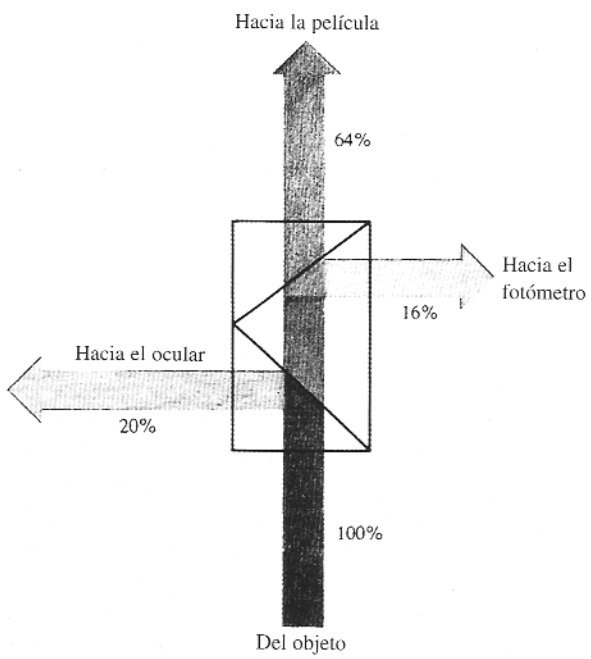
FIGURA 4.57 Reflexión total interna frustrada.

nuye exponencialmente a medida que va penetrando en el medio menos denso. La perturbación avanza en la dirección de x como una onda de frontera u **onda evanescente**. Cabe observar que los frentes de onda o superficies de fase constante (paralelos al plano yz) son perpendiculares a las superficies de amplitud constante (paralelas al plano xz) y como tal la onda *no es homogénea* (pág. 28). Su amplitud se reduce rápidamente en la dirección de y haciéndose despreciable en el segundo medio a una distancia de tan sólo unas pocas longitudes de onda.

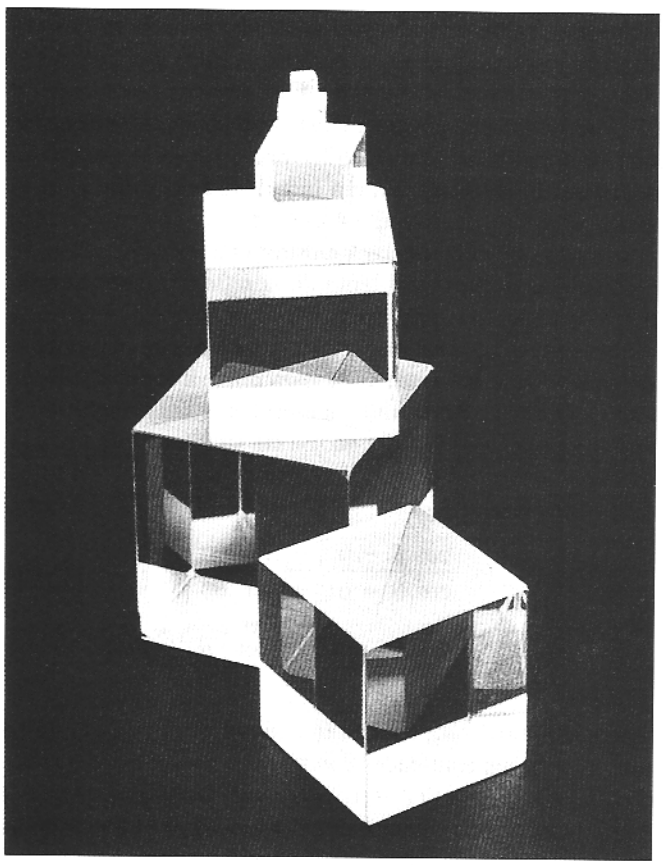
Si mantenemos aún el interés por la conservación de la energía, un análisis más detallado nos habría mostrado que la energía en realidad circula avanzando y retrocediendo a través de la interfaz, y el resultado es un promedio en un flujo neto nulo a través de la frontera al segundo medio. Sin embargo,



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4.58 (*a*) Un divisor de haz que utiliza RTIF. (*b*) Una moderna aplicación típica de RTIF: una disposición convencional del divisor de haz con la que se solía tomar fotografías a través de un microscopio. (*c*) Cubos divisores de haz. (Foto cedida por Melles Griot.)

queda aún un punto sin aclarar, ya que hay una pequeña parte de la energía que hay que tomar en cuenta, es decir, la asociada con la onda evanescente que se mueve a lo largo de la frontera en el plano de incidencia. Dado que esta energía no pudo haber penetrado en el medio menos denso en las circunstancias presentes (siempre que $\theta_i \geq \theta_c$), debemos buscar su fuente en alguna otra parte. Bajo condiciones experimentales reales el haz incidente tendría una sección transversal finita y por lo tanto diferiría obviamente de una onda verdaderamente plana. Esta desviación da lugar (por medio de la difracción) a una ligera transmisión de energía a través de la interfaz, la cual se manifiesta en la onda evanescente.

Abramos un paréntesis para señalar que en la figura 4.43 (*c*) y (*d*) vemos claramente cómo las ondas incidente y reflejada (excepto cuando $\theta_i = 90°$) no tienen una diferencia de fase de π y por consiguiente no pueden anularse entre sí. De la continuidad de la componente tangencial de **E** podemos deducir la existencia de un campo oscilatorio en el medio menos denso con una componente paralela a la interfaz cuya frecuencia sea ω (es decir, la onda evanescente).

El decaimiento exponencial de la onda de superficie o, como se le llama algunas veces, *onda de frontera*, ha sido confirmado experimentalmente a frecuencias ópticas [9].

Imaginemos que un haz de luz viaja dentro de un bloque de vidrio y se refleja internamente en una frontera. Presumiblemente, si presionamos otra pieza de vidrio contra la primera, podríamos hacer que la interfaz aire-vidrio desapareciera y entonces el haz se propagaría hacia adelante sin ser perturbado. Además, sería de esperar que esta transición de reflexión total a ausencia de ella ocurriera gradualmente conforme la película de aire fuera adelgazándose. Es casi lo mismo que sucede cuando sujetamos con la mano un vaso de agua o un prisma y vemos las pequeñas franjas de las huellas digitales en una región que, debido a la reflexión total interna, se comporta como un espejo. En términos más generales, si la onda evanescente se extiende con una amplitud apreciable a través del medio más rarificado hacia una región cercana ocupada por un material de índice más alto, la energía puede ahora fluir a través del espacio que los separa en lo que se conoce como **reflexión total interna frustrada** (RTIF). En otras palabras, si la onda evanescente, después de atravesar el espacio separador, es aún lo suficientemente fuerte como para impulsar electrones en el medio «frustrante», éstos a su vez generarán una onda que alterará significativamente la configuración del campo permitiendo así que la energía fluya. En la figura 4.57 se representa de forma bastante esquemática la RTIF: el ancho de las líneas que representan los frentes de onda disminuye en el medio separador como un recordatorio de que la amplitud de los campos se comporta de la misma manera. El proceso en su conjunto es notablemente similar al fenómeno mecánico-cuántico de *penetración de barreras o efecto túnel*, el cual encuentra numerosas aplicaciones en la física contemporánea.

Con la disposición de prismas de la figura 4.58, es posible demostrar la RTIF de una forma bastante obvia. Además, si las caras de la hipotenusa de ambos prismas son planas y paralelas, se pueden colocar de tal manera que transmitan y reflejen cualquier fracción deseada de la densidad de flujo incidente. Los aparatos que realizan esta función se conocen como ***divisores de haz***. Podemos fabricar un *cubo divisor de haz* usando una película delgada de bajo índice como espaciador de precisión. Los reflectores de bajas pérdidas, cuya transmitancia se puede controlar por reflexión interna frustrada, poseen un interés práctico considerable. La RTIF se puede observar también en otras regiones del espectro electromagnético. Resulta particularmente fácil trabajar con microondas de tres centímetros, ya que la onda evanescente se extenderá aproximadamente 10^5 veces más lejos que lo que se extendería a frecuencias ópticas. Podemos duplicar los experimentos anteriores con prismas sólidos hechos de parafina o huecos hechos de plástico acrílico lleno de keroseno o aceite de motor. Cualquiera de éstos tendría un índice de alrededor de 1,5 para las ondas de tres cm. Medir directamente la dependencia de la amplitud del campo con y resulta pues una tarea sencilla.

4.8. Las propiedades ópticas de los metales

La característica sobresaliente de los medios conductores es la presencia de un número de cargas eléctricas libres (libres en el sentido de que no están ligadas, es decir, son capaces de circular por todas partes dentro del material). En el caso de los metales, estas cargas son por supuesto los electrones y su movimiento constituye una corriente. La corriente por unidad de área que resulta de la aplicación de un campo **E** está relacionada por medio de la ecuación (A 1.15) con la conductividad del medio σ. Para los dieléctricos no hay electrones libres o de conducción y $\sigma = 0$, mientras que para los metales reales σ es diferente de cero y finita. En contraste, un conductor «perfec-

[9] Léase el fascinante artículo de K. H. Drexhage, «Monomolecular layers and light» *Sci. Am.* **222**, 108 (1970)

to» que idealizáramos tendría una conductividad infinita. Esto equivale a decir que los electrones impulsados a oscilar por una onda armónica, simplemente seguirían las alteraciones del campo. No habría fuerza de recuperación ni frecuencias naturales, ni absorción; solamente reemisión. En metales reales los electrones de conducción sufren colisiones con la red agitada térmicamente o con imperfecciones y al hacerlo así, convierten irreversiblemente la energía electromagnética en calor Joule. La absorción de energía radiante por un material es una función de su conductividad.

Ondas en un Metal

Visualizado el medio como si fuera continuo, las ecuaciones de Maxwell nos llevan a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (4.74)$$

que es la ecuación (A 1.21) en coordenadas cartesianas. El último término, $\mu\sigma\, \partial\mathbf{E}/\partial t$, es una derivada de primer orden respecto al tiempo como lo era la fuerza amortiguadora en el modelo de oscilador (pág. 71). El cambio de $\mathbf{E}$ con el tiempo genera un voltaje, las corrientes circulan y ya que el material es resistivo, la luz se convierte en energía térmica y, por consiguiente, hay absorción. Esta expresión puede reducirse a la ecuación de onda no atenuada si la permisividad se reformula como una cantidad compleja. Esto, a su vez, nos lleva al índice de refracción complejo que, como vimos anteriormente (pág. 72), es igual que decir absorción. Así pues, necesitamos solamente sustituir el índice complejo

$$\tilde{n} = n_R - in_I \qquad (4.75)$$

(donde el índice real y el imaginario n_R y n_I son ambos números reales) en la solución correspondiente para un medio no conductor. De forma alternativa, puede utilizarse la ecuación de onda y las condiciones de contorno apropiadas para obtener una solución específica. En todo caso, podemos encontrar una solución simple de onda plana sinusoidal dentro del conductor. Cuando esta onda se propaga en la dirección y, se escribe normalmente como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - ky)$$

o como una función de n

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega(t - \tilde{n}y/c)$$

si bien aquí el índice de refracción deberá tomarse como complejo. Asimismo, escribiendo la onda como una exponencial y usando la ecuación (4.75) se obtiene

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{(-\omega n_I y/c)} e^{i\omega(t - n_R y/c)} \qquad (4.76)$$

o bien

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega n_I y/c} \cos \omega(t - n_R y/c) \qquad (4.77)$$

La perturbación avanza en la dirección y con una velocidad c/n_R, precisamente como si n_R fuera el índice de refracción más usual. A medida que la onda progresa en el conductor, su amplitud, $\mathbf{E}_0 \exp(-\omega n_I y/c)$, es exponencialmente atenuada. Como la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud, tenemos

$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y} \qquad (4.78)$$

donde $I_0 = I(0)$, es decir, I_0 es la irradiancia en $y = 0$ (la interfaz), y $\alpha \equiv 2\omega n_I/c$ recibe el nombre de *coeficiente de absorción o* (aún mejor) de **coeficiente de atenuación.** La densidad de flujo se reducirá en un factor de $e^{-1} = 1/2.7 \approx \frac{1}{3}$ después de que la onda se ha propagado por una distancia $y = 1/\alpha$, denominada **piel** o **profundidad de penetración**. Para que un material sea transparente, la profundidad de penetración debe ser grande en comparación con su grosor. La profundidad de penetración para metales, sin embargo, es excesivamente pequeña. Por ejemplo, el cobre en longitudes de onda ultravioletas ($\lambda_0 \approx 100$ nm) tiene una profundidad de penetración minúscula de alrededor de 0,6 nm, mientras que es aproximadamente sólo 6 nm para el infrarrojo ($\lambda_0 \approx 10.000$ nm). Esto explica la opacidad generalmente observada de los metales, los cuales, no obstante, pueden hacerse parcialmente transparentes cuando se forman en películas extremadamente delgadas (como por ejemplo, en el caso de los espejos de dos vistas parcialmente plateados). El lustre metálico familiar de los conductores corresponde a un alto nivel de reflectancia, que a su vez se debe al hecho de que la onda incidente no puede penetrar efectivamente en el material. Relativamente pocos electrones en el metal «ven» la onda transmitida y por consiguiente, aunque la absorción de cada uno de ellos es fuerte, la energía total que disipan es poca. En su lugar, la mayor parte de la energía que llega reaparece en la onda reflejada. La mayoría de los metales, incluyendo los menos comunes, como por ejemplo el sodio, potasio, cesio, vanadio, niobio, gadolinio, holmio, itrio, escandio, osmio y muchos otros, tienen una apariencia gris plateada como la del aluminio, el estaño o el acero. Estos metales reflejan casi toda la luz incidente independientemen-

te de las longitudes de onda y son por consiguiente esencialmente incoloros.

La ecuación (4.77) recuerda ciertamente la ecuación (4.73) y la RTIF. En ambos casos hay un decaimiento exponencial de la amplitud. Asimismo, un análisis pormenorizado demostraría que las ondas transmitidas no son estrictamente transversales ya que en ambos casos existe un componente del campo en la dirección de propagación.

La representación de un metal como un medio continuo es bastante acertada en el dominio de baja frecuencia y gran longitud de onda del infrarrojo. Sin embargo, podríamos en verdad esperar que mientras la longitud de onda del haz incidente decrece, la naturaleza granular real de la materia tendría que ser tomada en consideración. En efecto, el modelo continuo muestra grandes discrepancias con los resultados experimentales a frecuencias ópticas. Y así volvemos de nuevo al modelo atomístico clásico formulado inicialmente por Hendrik Lorentz, Paul Karl Ludwig Drude (1863-1906) y otros. Este sencillo planteamiento favorecerá el acuerdo cualitativo con los datos experimentales, si bien el tratamiento final exige la teoría cuántica.

La ecuación de dispersión

Visualicemos el conductor como un conjunto de osciladores impulsados amortiguados. Algunos de éstos corresponden a electrones libres y por consiguiente no tendrán fuerza recuperadora, mientras que otros están unidos al átomo en forma muy parecida a los de los medios dieléctricos de la sección 3.5.1. Los electrones de conducción son, sin embargo, los principales responsables de las propiedades ópticas de los metales. Recordemos que el desplazamiento de un electrón vibrante venía dado por

$$x(t) = \frac{q_e/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2)} E(t) \qquad [3.66]$$

Sin fuerza restauradora, $\omega_0 = 0$, el desplazamiento es opuesto en signo al de la fuerza impulsora $q_e E(t)$ y por consiguiente está desfasado 180° con respecto a ella. Esta situación es justo la contraria a la de los dieléctricos transparentes donde las frecuencias de resonancia están por encima del visible y los electrones oscilan en fase con la fuerza impulsora (figura 4.59). Los electrones libres que oscilan desfasados con respecto a la luz incidente radiarán de nuevo trenes de ondas que tenderán a anular la perturbación incidente. El efecto, como ya hemos visto, es una onda refractada que decae rápidamente.

Suponiendo que el campo promedio que experimenta un electrón que se está moviendo dentro de un conductor sea justamente el campo aplicado $\mathbf{E}(t)$, podemos extrapolar la ecuación de dispersión de un medio enrarecido [ecuación (3.72)] y afirmar

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq^2{}_e}{\epsilon_0 m_e}\left[\frac{f_e}{-\omega^2 + i\gamma_e\omega} + \sum_j \frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2 + i\gamma_j\omega}\right] \qquad (4.79)$$

El primer término en el paréntesis señala la contribución de los electrones libres, donde N es el número de átomos por unidad de volumen. Cada uno de éstos tiene f_e electrones de conducción, los cuales carecen de frecuencias naturales. El segundo término procede del efecto de los electrones ligados y es idéntico a la ecuación (3.72). Cabe destacar que si un metal tiene un color particular es porque los átomos están tomando parte en una absorción selectiva por media de los electrones ligados, además de la absorción general característica de los electrones

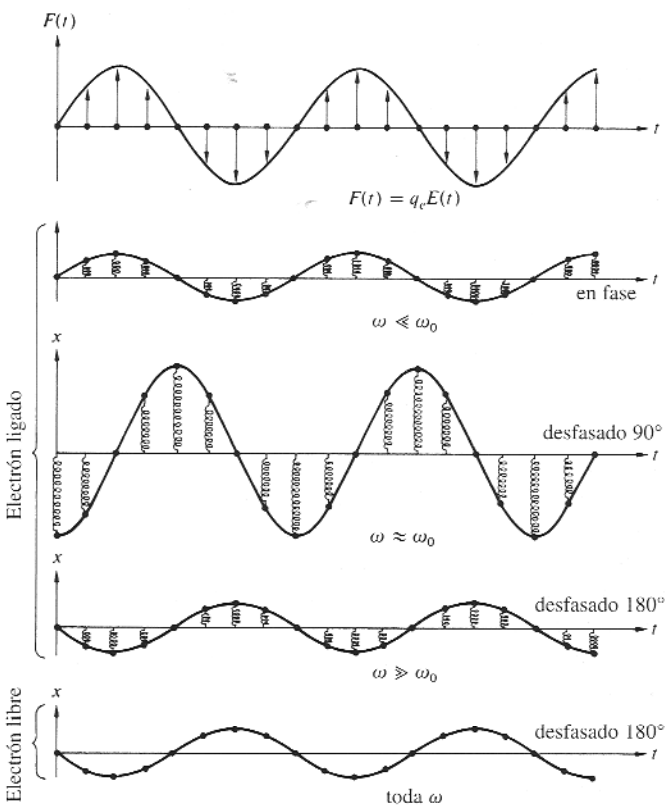


FIGURA 4.59 Oscilaciones de electrones libres y ligados.

libres. Recordemos que un medio que es fuertemente absorbente para una frecuencia determinada no absorbe mucha de la luz incidente a esa frecuencia sino que más bien la *refleja selectivamente*. El oro y el cobre son amarillo rojizo porque n_I aumenta con la longitud de onda, y los valores mayores de λ se reflejan con más fuerza. Entonces, por ejemplo, el oro debe ser muy opaco a las longitudes de onda visibles más grandes. Consecuentemente, bajo una iluminación de luz blanca, una hoja de oro con un grosor inferior aproximadamente a 10^{-6} m transmitirá una luz azul verdosa predominante.

Puede obtenerse una idea aproximada de la respuesta de los metales a la luz realizando unas cuantas suposiciones simplificadoras. De este modo, dejemos de lado la contribución de los electrones ligados y supongamos además que γ_e puede también despreciarse cuando ω tiene un valor muy alto, donde

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} \tag{4.80}$$

La última suposición está basada en el hecho de que a altas frecuencias, los electrones efectuarán un gran número de oscilaciones entre cada colisión. Los electrones libres y los iones positivos dentro de un metal pueden imaginarse como un plasma cuya densidad oscila a una frecuencia natural ω_p llamada **frecuencia de plasma**. Ésta a su vez puede mostrarse que es igual a $(Nq_e^2/\epsilon_0 m_e)^{1/2}$ y, de este modo,

$$n^2(\omega) = 1 - (\omega_p/\omega)^2 \tag{4.81}$$

La frecuencia de plasma sirve como valor crítico por debajo del cual el índice es complejo y la onda penetradora disminuye exponencialmente [ecuación (4.77)] a partir de la frontera; mientras que a frecuencias por encima de ω_p, n es real, la absorción es pequeña y el conductor es transparente. En la última circunstancia n es mayor que uno como lo era para dieléctricos a muy altas frecuencias (v puede ser mayor que c —véase pág. 72—). Por consiguiente, podemos esperar que los metales en general sean muy transparentes ante los rayos X. En la tabla 4.3 aparecen enumeradas las frecuencias de plasma de algunos de los metales alcalinos los cuales son transparentes incluso para el ultravioleta.

Lo más frecuente es que el índice de refracción de un metal sea complejo y que la onda incidente sufra absorción en una cantidad que depende de la frecuencia. Por ejemplo, los visores exteriores de los trajes espaciales del Apolo estaban recubiertos con una finísima película de oro (figura 4.60). La cubierta reflejaba alrededor del 70% de la luz incidente y se usaba bajo condiciones brillantes tales como los ángulos del Sol bajos y frontales. Fue diseñada para disminuir la carga termal en el sistema de refrigeración reflejando con fuerza la energía radiante en el infrarrojo mientras que se seguía transmitiendo adecuadamente en el visible. Un efecto similar es en principio el de las gafas de sol cubiertas con metal que podemos encontrar en el mercado a precios económicos y que vale la pena adquirir aunque sólo sea para experimentar con ellas.

TABLA 4.3 Longitudes de onda y frecuencias críticas de algunos metales alcalinos

Metal	λ_p (observada) nm	λ_p (calculada) nm	$\nu_p = c/\lambda_p$ (observada) Hz
Litio (Li)	155	155	$1{,}94 \times 10^{15}$
Sodio (Na)	210	209	$1{,}43 \times 10^{15}$
Potasio (K)	315	287	$0{,}95 \times 10^{15}$
Rubidio (Rb)	340	322	$0{,}88 \times 10^{15}$

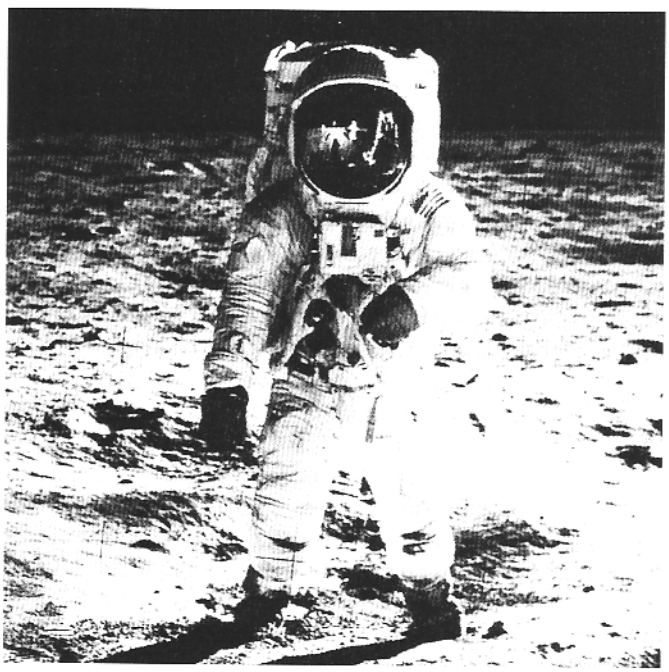


FIGURA 4.60 Edwin Aldrin Jr. en Tranquillity Base en la Luna. El fotógrafo, Neil Armstrong, se refleja en el visor recubierto con oro. (Foto cedida por la NASA.)

La atmósfera superior ionizada de la Tierra posee una distribución de electrones libres que se comportan de forma muy parecida a la de los que están confinados dentro de un metal. El índice de refracción de tal medio será real y menor a uno para frecuencias por encima de ω_p. En julio de 1965 el vehículo espacial *Mariner IV* utilizó este efecto para examinar la ionosfera del planeta Marte, a 216 millones de kilómetros de la Tierra [10].

Si deseamos comunicarnos entre dos puntos distantes en la Tierra, podemos rebotar ondas de baja frecuencia en la ionosfera de la Tierra. En cambio, para hablar con alguien que se encuentre en la Luna, deberíamos usar señales de alta frecuencia, ante las cuales la ionosfera resultaría transparente.

Reflexión en Metales

Imaginemos que una onda plana inicialmente en el aire incide en una superficie conductora. La onda transmitida que avanza a un determinado ángulo con respecto a la normal será inhomogénea. Pero si la conductividad del medio aumenta, los frentes de onda se alinearán con las superficies de amplitud constante, y $\mathbf{k}_t$ y $\hat{\mathbf{u}}_n$ se acercarán al paralelismo. Dicho de otro modo, en un buen conductor la onda transmitida se propaga en una dirección normal a la interfaz independientemente de θ_i.

Calculemos ahora la reflectancia, $R = I_r/I_i$, para el caso más simple de incidencia normal en un metal. Tomando $n_i = 1$ y $n_t = \tilde{n}$ (es decir, el índice complejo) obtenemos de la ecuación (4.47) que

$$R = \left(\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right)\left(\frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1}\right)^* \tag{4.82}$$

y por consiguiente, ya que $\tilde{n} = n_R - in_I$,

$$R = \frac{(n_R - 1)^2 + n_I^2}{(n_R + 1)^2 + n_I^2} \tag{4.83}$$

Si la conductividad del material tiende a cero, tenemos el caso de un dieléctrico donde en principio el índice es real ($n_I = 0$) y el coeficiente de atenuación, α, también es cero. Bajo esas circunstancias, el índice del medio transmisor n_t, es n_R y la reflectancia [ecuación (4.83)] se hace idéntica a la de la ecuación (4.67). Si en lugar de esto, n_I es grande y n_R es comparativamente pequeño, R se hará a su vez grande (problema 4.72). En el límite inalcanzable, donde $\tilde{n}$ es puramente imaginario, el 100% de la densidad de flujo incidente sería reflejada ($R = 1$). Obsérvese que es posible que la reflectancia de un metal sea mayor que la de otro aunque n_I sea más pequeña. Por ejemplo para $\lambda_0 = 589{,}3$ nm, los parámetros asociados con el sodio sólido son aproximadamente $n_R = 0{,}04$, $n_I = 2{,}4$ y $R = 0{,}9$; para el estaño masivo serán $n_R = 1{,}5$, $n_I = 5{,}3$ y $R = 0{,}8$ mientras que para un cristal sencillo de galio $n_R = 3{,}7$; $n_I = 5{,}4$ y $R = 0{,}7$.

Las curvas de $R_\parallel$ y $R_\perp$ para las incidencias oblicuas mostradas en la figura 4.61 son típicas de medios absorbentes. De este modo, aunque R para $\theta_i = 0$, es alrededor de 0,5 para el oro en contraposición con casi un 0,9 para la plata bajo luz blanca, los dos metales tienen reflectancias de forma bastante similar, y que se aproximan a 1,0 para $\theta_i = 90°$. Al igual que sucede con los dieléctricos (figura 4.47), $R_\parallel$ disminuye hasta un mínimo en el cual ahora se le denomina *ángulo de incidencia principal,* pero este mínimo es diferente de cero. La figura 4.62 ilustra la reflectancia espectral a incidencia normal para un número de películas metálicas evaporadas bajo condiciones ideales. Observemos que mientras el oro transmite muy bien en la región verde del espectro y debajo de ella, la plata, que es altamente reflectora a lo largo del visible, se hace transparente en el ultravioleta a alrededor de 316 nm.

Los desplazamientos de fase que aparecen en la reflexión de un metal ocurren en ambas componentes del campo, es decir, en la paralela y perpendicular al plano de incidencia. Éstas generalmente no son ni cero ni π, con una notable excepción para $\theta_i = 90°$, donde, justamente como con un dieléctrico, ambas componentes desplazan su fase 180° por reflexión.

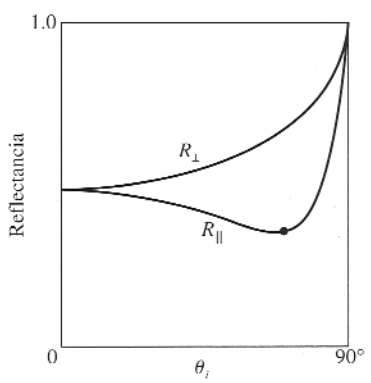


FIGURA 4.61 Reflectancia típica de un haz de luz blanca polarizado linealmente de luz blanca incidente en un medio absorbente.

[10] R. Von Eshelman, *Sci. Am.* **220**, 78 (1969).

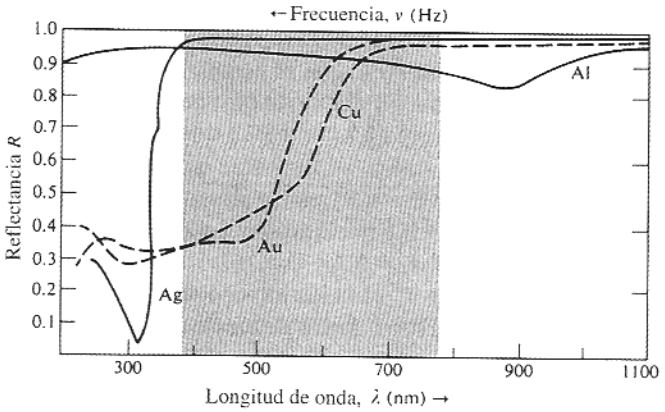


FIGURA 4.62 Reflectancia frente a longitud de onda para plata, oro, cobre y aluminio.

4.9 Aspectos conocidos de la interacción de la luz y la materia

Examinemos ahora algunos de los fenómenos que pintan el mundo cotidiano con multitud de maravillosos colores.

Tal y como vimos anteriormente (pág. 77), la luz que contiene prácticamente la misma cantidad de cada frecuencia en la región visible del espectro, se percibe como blanco. Una fuente amplia de luz blanca (ya sea natural o artificial) es aquélla para la que podemos imaginar cada punto de su superficie como si emitiera un haz de luz con todas las frecuencias visibles. Dado que nosotros evolucionamos en este planeta, no resulta sorprendente que una fuente de luz parezca blanca cuando su espectro de emisión se asemeja al del Sol. Del mismo modo, una superficie reflectora que cumpla esencialmente la misma función también parecerá blanca: un objeto muy reflector, independiente de la frecuencia, y *difusamente* dispersor, será percibido como blanco bajo una iluminación de luz blanca.

Aunque el agua sea esencialmente transparente, su vapor aparece blanco, al igual que el vidrio esmerilado. La razón es bastante simple: si el tamaño del grano es pequeño pero mucho más grande que las longitudes de onda involucradas, la luz entrará en cada partícula transparente, se reflejará y refractará varias veces y emergerá. No se hará ninguna distinción entre las componentes de frecuencia, y así la luz reflejada que llegue al observador será blanca. Éste es el mecanismo que explica la blancura de ciertas cosas como el azúcar, la sal, el papel, la tela, las nubes, el polvo de talco, la nieve y la pintura, cuyos granos o fibras son en realidad transparentes.

Del mismo modo, un envoltorio plástico arrugado claro acolchado parecerá blanquecino, al igual que le pasará a cualquier material transparente normal lleno de pequeñas burbujas de aire (por ejemplo, la espuma de afeitar o la clara de huevo batida). Aunque nosotros generalmente pensamos en el papel, el polvo de talco o el azúcar como si estuvieran formados por algún tipo de sustancia blanca opaca, es muy fácil desterrar este error. Cubramos una hoja impresa con un poco de estos materiales (una hoja de papel blanco, algunos granos de azúcar o talco) e iluminémosla desde atrás. No nos será difícil ver a través de ellos. En el caso de la pintura blanca, simplemente se suspenden partículas transparentes incoloras tales como los óxidos de cinc, titanio o plomo en un vehículo igualmente transparente, como por ejemplo, aceite de linaza o acrílicos. Obviamente, si las partículas y el vehículo tienen el mismo índice de refracción, no habrá ninguna reflexión en las fronteras de los granos. Las partículas simplemente desaparecerán en la conglomeración, la cual permanecerá clara en sí misma. En cambio, si los índices son marcadamente diferentes, habrá una gran cantidad de reflexión en todas las longitudes de onda (problema 4.65), y la pintura aparecerá blanca y opaca [véase de nuevo la ecuación (4.67)]. Para pintar de colores uno necesita solamente colorear las partículas de tal forma que absorban todas las frecuencias excepto la gama deseada.

Aplicando esta lógica en sentido opuesto, si reducimos el índice relativo, n_{ti}, en las fronteras de los granos o de la fibra, las partículas de material reflejarán menos y, por consiguiente, disminuirá la blancura general de un objeto. De este modo, un tejido blanco húmedo tendrá una apariencia grisácea más transparente. El talco mojado pierde su blancura transformándose en gris opaco al igual que la tela blanca mojada. Y de la misma manera una pieza de tela coloreada humedecida en un líquido claro (por ejemplo, agua, ginebra o benceno) perderá su brillo blanquecino y se hará mucho más oscura; los colores serán entonces más profundos y ricos como los de una acuarela aún húmeda.

Una superficie con reflexión difusa con cierta absorción uniforme a lo largo de todo el espectro, reflejará un poco menos que otra superficie blanca, por lo que su aspecto será gris mate. Cuanto menos refleje, más oscuro será el gris, hasta que absorba casi toda la luz y parezca negra. Una superficie que refleja de un 70% a un 80% o más, pero de forma especular, tendrá el típico aspecto gris brillante de los metales. Los metales poseen un altísimo número de electrones libres (pág. 128) que esparcen la luz de forma muy eficiente e independientemente de la frecuencia: no están ligados a los átomos y no poseen resonancias asociadas. Además, las amplitudes de

las vibraciones son de un orden de magnitud mayor que las de los electrones ligados. La luz incidente no puede penetrar en el metal más de una fracción de longitud de onda o así, antes de ser anulada completamente. La luz refractada es poca o nula; la mayoría de la energía sale reflejada y sólo una pequeña cantidad es absorbida. Obsérvese que la diferencia principal entre una superficie gris y otra espejada es que la reflexión de una es difusa y la de la otra especular. Un artista pinta un cuadro de un metal «blanco» abrillantado, como la plata o el aluminio, mediante una técnica de «reflejar» imágenes de cosas en la habitación sobre una superficie gris.

Cuando la distribución de energía en un haz de luz no es del todo uniforme en todo el espectro, la luz aparece coloreada. La figura 4.63 representa las típicas distribuciones de frecuencias para lo que se percibiría como luz roja, verde y azul. Estas curvas muestran las regiones del espectro de frecuencias predominantes, si bien pueden existir grandes variaciones en la distribución que sin embargo seguirán provocando las respuestas del rojo, el verde y el azul. A comienzos del siglo XIX, Thomas Young mostró que se podía generar una amplia gama de colores mezclando tres haces de luz, siempre que sus frecuencias estuvieran a una distancia considerable. Cuando estos tres haces de luz se combinan para producir la luz blanca, reciben el nombre de **colores primarios**. No existe un único grupo de colores primarios ni tampoco tienen que ser cuasimonocromáticos. Los que más frecuentemente se utilizan son el rojo (R), el verde (V) y el azul (A) ya que mezclándolos entre sí podemos obtener una amplia gama de colores. Son los tres componentes (emitidos por tres fósforos) que generan toda la gama de tonalidades que percibimos en un aparato de televisión en color.

En la figura 4.64 se resumen los resultados de una situación en la que los haces de luz de estos colores primarios se solapan de formas diferentes: la luz roja sumada a la luz azul se percibe como *magenta* (M), una especie de morado rojizo; la luz azul sumada a la luz verde se percibe como *cian* (C), verde azulado o turquesa; y quizás lo más sorprendente, la luz roja sumada a la luz verde es percibida como *amarillo* (Am). La suma de los tres colores primarios es el blanco:

$$R + A + V = B$$

$$M + V = B, \text{ ya que } R + A = M$$

$$C + R = B, \text{ ya que } A + V = C$$

$$Am + A = B, \text{ ya que } R + V = Am$$

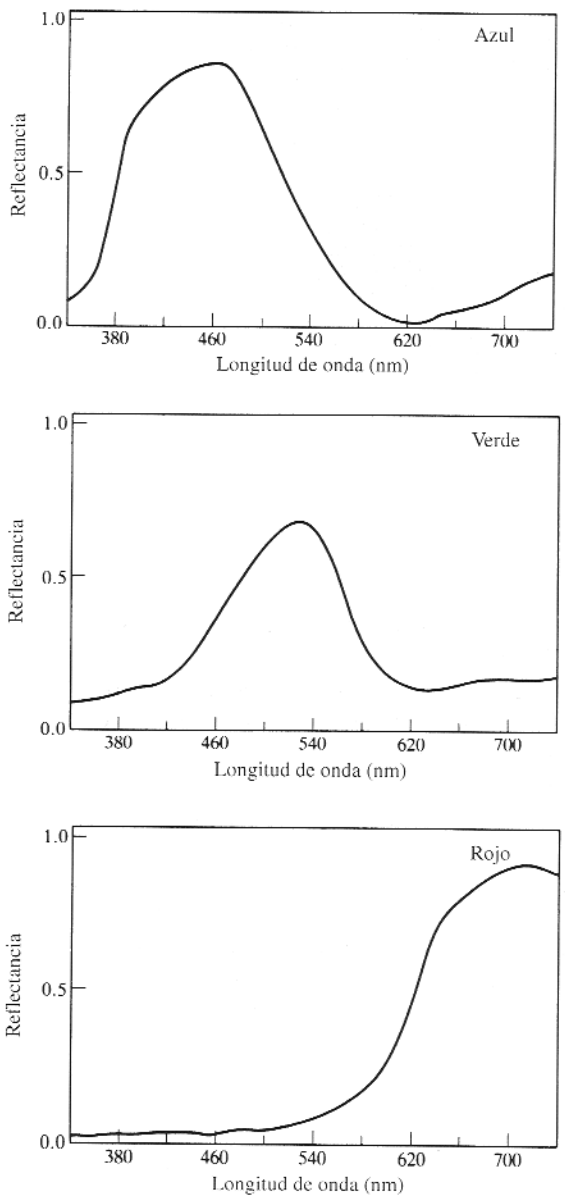


FIGURA 4.63 Curvas de reflexión para pigmentos rojos, verde y azul. Si bien éstos son los típicos, hay muchas variaciones posibles entre los colores.

Cualquiera combinación de dos haces de luz coloreada que dan como resultado el blanco se les denomina **complementarios**, y las representaciones simbólicas arriba señaladas ilustran esta situación. De este modo

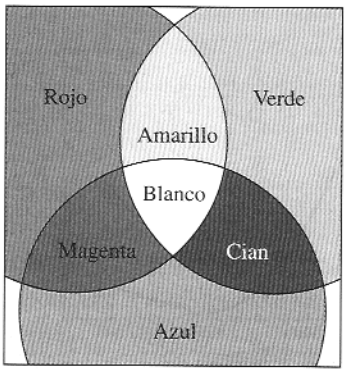


FIGURA 4.64 Tres haces superpuestos de luz coloreada. En un televisor se utilizan precisamente estas tres fuentes primarias de luz —rojo, verde y azul—.

$$R + A + V = B$$

$$R + A \quad = B - V = M$$

$$A + V = B - R = C$$

$$R + \quad V = B - A = Am$$

lo que significa, por ejemplo, que un filtro que absorbe el azul de la luz blanca pasa por amarillo filtrará una luz amarilla.

Supongamos que solapamos un haz de luz magenta con otro amarillo:

$$M + Am = (R + A) + (R + V) = B + R$$

El resultado es una combinación de rojo y blanco, o rosa. Esto nos lleva a otra cuestión: decimos que un color está **saturado**, que es profundo e intenso, cuando no contiene nada de luz blanca. Tal y como se muestra en la figura 4.65, el rosa es equivalente al rojo no saturado —rojo superpuesto sobre un fondo de blanco—.

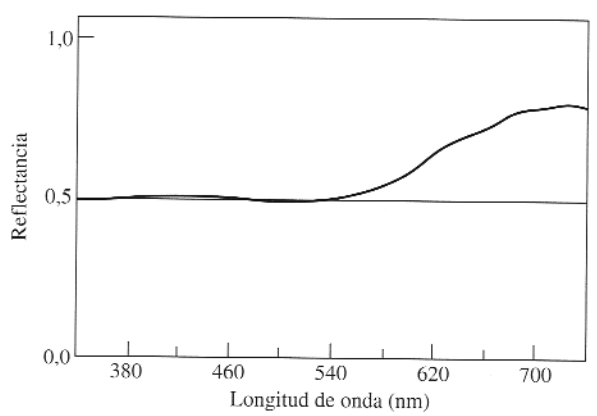


FIGURA 4.65 Reflexión espectral de un pigmento rosa.

El mecanismo responsable del tono rojo-amarillento del oro y el cobre es en algunos aspectos similar al proceso que hace que el cielo aparezca azul. De manera muy sucinta, las moléculas del aire tienen resonancias en el ultravioleta y por consiguiente serán impulsadas a oscilar con mayor amplitud cuando la frecuencia de la luz incidente aumente hacia el ultravioleta. Tomarán en efecto energía de, y reemitirán, la componente azul de la luz solar en todas direcciones, transmitiendo el extremo rojo complementario del espectro con poca alteración. Este fenómeno es análogo a la reflexión selectiva o esparcimiento de la luz roja-amarillenta que tiene lugar en la superficie de una película de oro y la transmisión simultánea de la luz verde-azulada.

Los colores característicos de la mayor parte de las sustancias tienen su origen en el fenómeno de **absorción preferencial o selectiva**. Por ejemplo, el agua tiene una coloración azul-verdosa muy ligera debido a su absorción de la luz roja. Es decir, las moléculas de H_2O tienen una resonancia muy ancha en el infrarrojo que se extiende hasta cierto punto en el visible. La absorción no es muy fuerte por lo que no hay una reflexión muy acentuada de luz roja en la superficie. Es más bien transmitida y gradualmente absorbida hasta que, a una profundidad de alrededor de 30 m del fondo de mar, el rojo es completamente extraído de la luz solar. Este mismo proceso de absorción selectiva es el responsable del color marrón de los ojos de algunas personas, así como del color de las mariposas, los pájaros, las abejas, las coles y los reyes. De hecho, la gran mayoría de los objetos en la naturaleza tienen colores característicos como resultado de la absorción preferencial de moléculas pigmentos. En contraste con la mayoría de los átomos y las moléculas, los cuales tienen resonancias en el ultravioleta e infrarrojo, las moléculas de los pigmentos obviamente deben tener resonancias en el visible. Los fotones visibles tienen energías de aproximadamente 1,6 eV a 3,2 eV, las cuales, como cabría esperar, son muy pequeñas para la excitación electrónica normal y muy grandes para la excitación por medio de la vibración molecular. A pesar de esto, *hay átomos donde los electrones ligados forman capas incompletas* (por ejemplo, en el oro) y las variaciones en la configuración de estas capas proporcionan un modo para la excitación de baja energía. Además de dichos átomos hay un gran grupo de moléculas colorantes orgánicas que también poseen resonancias en el visible. Todas estas sustancias, bien sean naturales o sintéticas, están compuestas de moléculas de larga cadena formada por enlaces dobles y simples regularmente alternados en lo que se denomi-

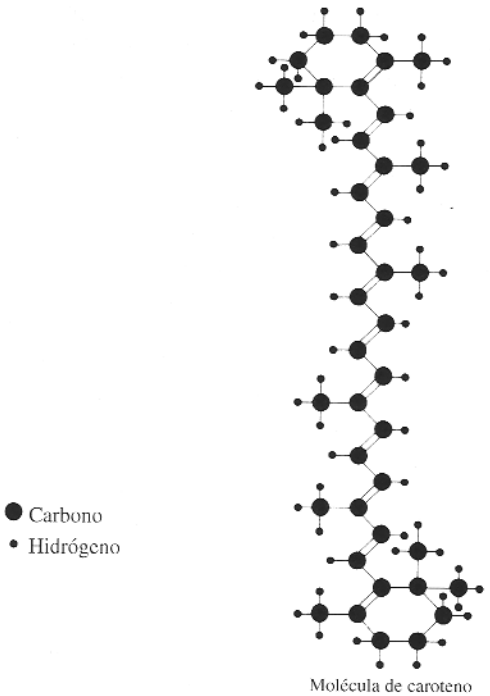


FIGURA 4.66 La molécula de caroteno.

na un sistema conjugado. Esta estructura está tipificada por la molécula de caroteno $C_{40}H_{56}$ (figura 4.66). El color de los carotenoides oscila desde el amarillo hasta el rojo y podemos encontrarlo en las zanahorias, los tomates, los narcisos, los dientes de león, las hojas de otoño y en las personas. Las clorofilas son otro grupo de pigmentos naturales comunes, pero en ellas una porción de la cadena larga se gira sobre sí misma para formar un anillo. En todo caso, los sistemas conjugados de este tipo contienen un número de electrones particularmente móviles conocidos como *electrones pi*, que no están ligados a posiciones atómicas específicas, sino que pueden moverse sobre dimensiones relativamente grandes de la cadena o anillo molecular. En la fraseología de la mecánica cuántica afirmaríamos que se tratan de estados electrónicos de gran longitud de onda, baja frecuencia y, por consiguiente, baja energía. La energía requerida para llevar un electrón pi a un estado excitado resulta comparativamente baja en relación con la de los fotones visibles. En realidad, podemos imaginar la molécula como un oscilador que tiene una frecuencia de resonancia en el visible.

Los niveles de energía de un átomo individual están definidos con precisión, es decir , las resonancias son muy agudas. Con los sólidos y los líquidos, sin embargo, la proximidad de los átomos da lugar a un ensanchamiento de los niveles de energía en bandas anchas. Las resonancias se esparcen sobre un ancho rango de frecuencias. Consecuentemente podemos esperar que un colorante no absorba solamente una porción angosta del espectro, pues, si así lo hiciera, reflejaría la mayor parte de las frecuencias y aparecería casi blanco.

Imaginemos que tenemos una pieza de vidrio coloreado con una resonancia en el azul en la que existe una fuerte absorción. Si miramos a través de dicha pieza con un foco de luz blanca compuesta de rojo, verde y azul, el vidrio absorberá el azul y reflejará el rojo y el verde, que constituyen el amarillo (véase figura 4.67). El vidrio aparece amarillo: la tela, el papel, los tintes, la pintura o la tinta de color amarillo absorben todos ellos selectivamente el azul. Si miramos detenidamente algo de color azul puro a través de un filtro amarillo, uno que refleje el amarillo y absorba el azul, el objeto nos parecerá negro. En este caso el filtro colorea la luz amarilla substrayendo el azul. A este proceso se le denomina **coloración substractiva**, en contraposición con la **coloración aditiva**, que es la resultante de solapar dos o más haces de luz.

Del mismo modo, la fibras de una muestra de paño o papel blanco son esencialmente transparentes, pero cuando se colorea

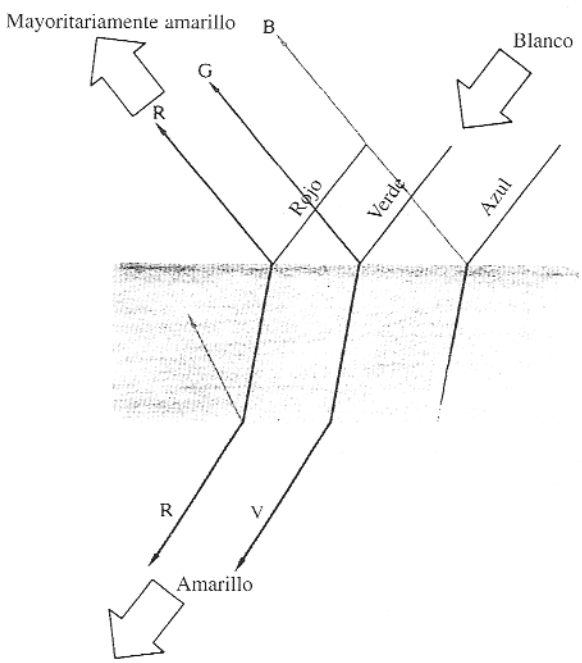


FIGURA 4.67 Vidrio de color amarillo.

cada fibra por separado, ésta se comporta como si fuera un trocito de vidrio coloreado. La luz incidente penetra en el papel emergiendo en su mayor parte como un haz reflejado, solamente después de experimentar numerosas reflexiones y refracciones dentro de las fibras coloreadas. La luz que sale estará tanto más coloreada cuanto menor sea la componente de frecuencia absorbida por el colorante. Ésta es precisamente la causa de que una hoja se vea verde o un plátano se vea amarillo.

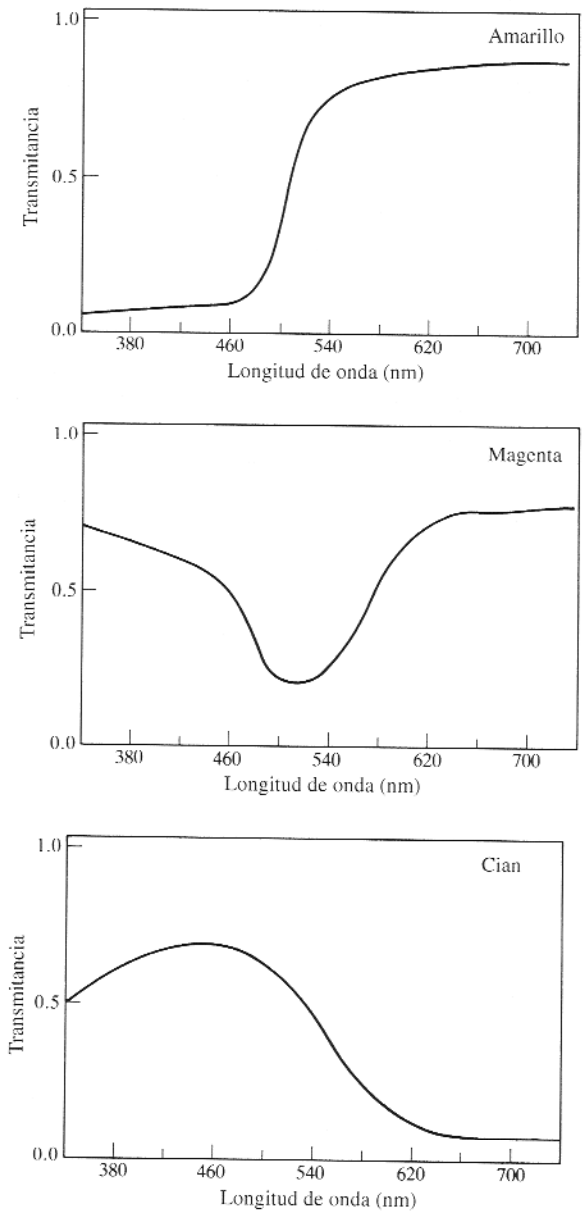


FIGURA 4.68 Curvas de transmisión para filtros coloreados.

Una botella de tinta azul normal se ve azul tanto bajo luz reflejada como transmitida. Pero si con ella pintamos una lámina de vidrio y evaporamos el disolvente, algo muy interesante sucede: el pigmento concentrado se absorbe tanto que refleja de preferencia a la frecuencia de resonancia y aquí retomamos la idea de que un absorbente fuerte (n_I más grande) es un reflector fuerte. Así pues, la tinta verde-azulada concentrada refleja el rojo, mientras que la tinta azul-rojiza refleja el verde. Probemos ahora con un marcador de fieltro (lo ideal es un rotulador para retroproyectores), pero utilicemos luz reflejada y tengamos cuidado de no inundar inadvertidamente la muestra con luz que incida desde abajo. La forma más adecuada de llevar a cabo este experimento es poniendo tinta coloreada sobre una superficie negra que no sea muy absorbente. Por ejemplo, esparzamos tinta roja sobre una zona negra de una página impresa de papel satinado y comprobaremos cómo la luz que refleja tendrá un brillo verdoso. El violeta de genciana, que podemos adquirir en cualquier droguería, es ideal para este experimento. Pongamos un poco sobre una placa de vidrio y dejémoslo secar hasta que se forme una capa espesa. Examinemos tanto la luz reflejada como la transmitida: veremos que son complementarias.

Si proyectamos luz blanca a través de diversos filtros combinados de color magenta, cian y amarillo (véase figura 4.68), podemos obtener todo el rango de colores (incluyendo el rojo, verde y azul). Estos son los colores primarios de la mezcla substractiva, los primarios de una caja de pinturas, aunque comúnmente se les denomine erróneamente rojo, azul y amarillo. Estos son los colores básicos de los tintes empleados en el revelado o impresión de fotografías. Lo ideal sería que si mezcláramos todos los colores primarios substrativos (ya sea combinando pinturas o apilando filtros), no obtuviésemos ningún color, nada de luz: oscuridad. Cada uno de ellos substrae una parte del espectro y todos juntos la anulan.

Si el rango de frecuencias que se están absorbiendo abarca todo el visible, el objeto aparecerá negro. Eso no quiere decir que no haya ninguna reflexión: obviamente será posible ver, aunque difusamente, una imagen reflejada sobre una pieza de cuero negro o sobre una superficie negra áspera. Si aún conservamos las tintas roja y azul, al mezclarlas y añadir un poco de verde obtendremos tinta negra.

Además de los procesos anteriores, específicamente relacionados con la reflexión, la refracción y la absorción, hay otros muchos mecanismos generadores de color que estudia-

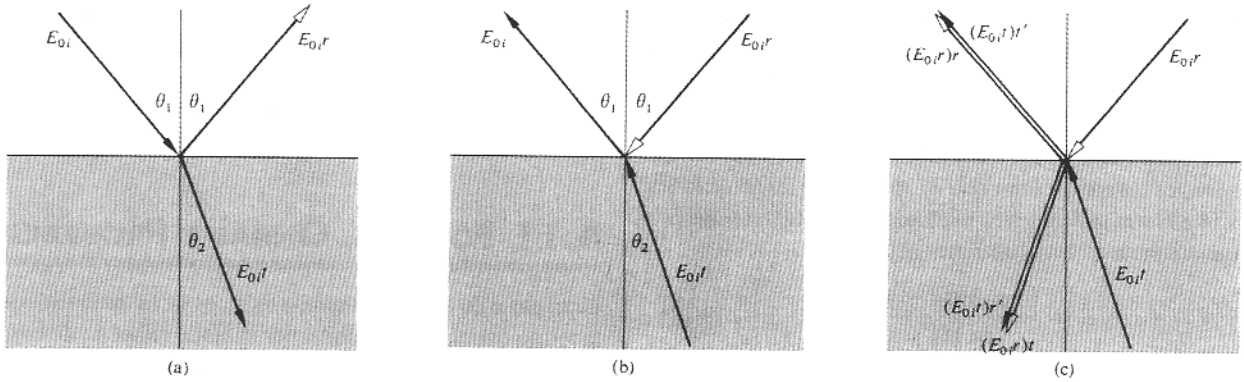


FIGURA 4.69 Reflexión y refracción mediante el análisis de Stokes.

remos más adelante. Por ejemplo, los escarabajos se encubren con los colores brillantes que producen los retículos de difracción de la capa que recubre sus alas; y los efectos de interferencia dependientes de la longitud de onda contribuyen a los diseños que podemos ver en las manchas de aceite, las madreperlas, las pompas de jabón, los pavos reales y colibríes.

4.10 El tratamiento de Stokes de la reflexión y la refracción

El físico inglés Sir George Gabriel Stokes (1819-1903) desarrolló una forma muy elegante y novedosa de analizar la reflexión y la transmisión en una frontera. Supongamos que tenemos una onda incidente de amplitud E_{oi} incidiendo en una interfaz plana que separa dos medios dieléctricos, tal y como aparece en la figura 4.69*a*. Como ya hemos visto anteriormente en este capítulo, dado que r y t son las amplitudes fraccionales reflejadas y transmitidas respectivamente (donde $n_i = n_1$, y $n_t = n_2$), entonces $E_{0r} = rE_{0i}$ y $E_{0t} = tE_{0i}$. Recordemos nuevamente que el principio de Fermat desemboca en el Principio de la Reversibilidad, el cual implica que la situación ilustrada en la figura 4.69*b*, donde se invierten todas las direcciones de los rayos, también debe ser factible desde el punto de vista físico. Con la condición de que no haya disipación de energía (absorción nula), los serpenteos de una onda han de ser reversibles. Equivalentemente, en el lenguaje de la física moderna se habla de la *invariancia en la inversión temporal*, es decir, si un proceso ocurre, el proceso inverso también puede ocurrir. Entonces, si tomamos una hipotética película de cine de la onda incidente, reflejándose y transmitiéndose en la interfaz, el comportamiento mostrado cuando pasemos la película al revés será también realizable desde el punto de vista físico. De acuerdo con esto, examinemos ahora la figura 4.69*c* donde tenemos dos ondas incidentes de amplitudes $E_{0i}r$ y $E_{0i}t$. Una parte de la onda cuya amplitud es $E_{0i}t$ es tanto reflejada como transmitida en la interfaz. Sin hacer ninguna suposición, sean r' y t', respectivamente, los coeficientes de reflexión y transmisión de amplitudes para una onda que incide desde abajo (es decir, $n_i = n_2$, $n_t = n_1$). En consonancia, la parte reflejada es $E_{0i}tr'$ mientras que la transmitida es $E_{0i}tt'$. De forma similar la onda incidente, cuya amplitud es $E_{0i}r$, se divide en segmentos de amplitud $E_{0i}rr$ y $E_{0i}rt$. Si la configuración de la figura 4.69*c* ha de ser idéntica a la de la figura 4.69*b*, entonces obviamente

$$E_{0i}tt' + E_{0i}rr = E_{0i} \tag{4.84}$$

y

$$E_{0i}rt + E_{0i}tr' = 0 \tag{4.85}$$

Por lo tanto

$$tt' = 1 - r^2 \tag{4.86}$$

y

$$r' = -r \tag{4.87}$$

Las últimas dos ecuaciones se conocen como relaciones de Stokes. En realidad este punto merece un poco más de atención de la que generalmente recibe. Cabe destacar que *los coeficientes de amplitud son funciones de los ángulos de incidencia* y, por lo tanto, las relaciones de Stokes podrían reflejarse mejor por escrito como

$$t(\theta_1)t'(\theta_2) = 1 - r^2(\theta_1) \tag{4.88}$$

y

$$r'(\theta_2) = -r(\theta_1) \tag{4.89}$$

donde $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$. La segunda ecuación indica, por medio del signo menos, que *hay una diferencia de fase de 180° entre las ondas reflejadas interna y externamente.* Es importante recordar que θ_1 y θ_2 son pares de ángulos que están relacionados por medio de la ley de Snell. Obsérvese también que nunca dijimos si n_1 es mayor o menor que n_2, por lo que las ecuaciones (4.88) y (4.89) son aplicables en cualquier caso. Regresemos por un momento a una de las ecuaciones de Fresnel:

$$r_\perp = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}(\theta_i + \theta_t)} \qquad [4.42]$$

Si un rayo entra por arriba, como sucede en la figura 4.69a, y suponemos que $n_2 > n_1$, $r_\perp$ se calculará poniendo $\theta_i = \theta_1$ y $\theta_t = \theta_2$ (reflexión externa), donde la última relación se obtiene de la ley de Snell. Si, por otro lado, la onda incide por debajo con el mismo ángulo (en este caso, reflexión interna), $\theta_i = \theta_1$ y de nuevo sustituimos en la ecuación (4.42), pero aquí θ_t no es igual a θ_2 como en el caso anterior. Los valores $r_\perp$ para reflexión interna y externa *al mismo ángulo de incidencia* son obviamente diferentes. Supongamos ahora, en este caso de reflexión interna, que $\theta_i = \theta_2$. Entonces $\theta_t = \theta_1$, las direcciones de los rayos son las inversas a las de la primera situación y la ecuación (4.42) es

$$r'_\perp(\theta_2) = -\frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{sen}(\theta_2 + \theta_1)}$$

Aunque puede que resulte innecesario, señalemos una vez más que ésta es justamente la negativa de la que fue obtenida para $\theta_i = \theta_1$ y la reflexión externa, es decir

$$r'_\perp(\theta_2) = -r_\perp(\theta_1) \qquad (4.90)$$

El uso de símbolos con primas y sin primas para denotar los coeficientes de amplitud debe servir como recordatorio de que una vez más estamos tratando con ángulos relacionados con la ley de Snell. Del mismo modo, intercambiando θ_i y θ_t en la ecuación (4.43), obtenemos

$$r'_\parallel(\theta_2) = -r_\parallel(\theta_1) \qquad (4.91)$$

La diferencia de fase de 180° entre cada par de componentes resulta evidente en la figura 4.43, si bien hay que recordar que cuando $\theta_i = \theta_p$, $\theta_t = \theta'_p$ y viceversa (problema 4.69). Más allá de $\theta_i = \theta_c$, no existe onda transmitida, la ecuación (4.89) no es aplicable, y como ya hemos visto, la diferencia de fase ya no es 180°.

Comúnmente se concluye que tanto la componente paralela como la perpendicular del haz externamente reflejado cambian de fase en π radianes, mientras que el haz internamente reflejado no cambia su fase en absoluto. Esta conclusión es bastante incorrecta (compárense las figuras 4.44*a* y 4.45*a*).

4.11 Fotones, Ondas y Probabilidad

Gran parte de los fundamentos teóricos de la óptica se basan en la teoría ondulatoria. Damos por sentado el hecho de comprender el fenómeno y el de que sea «real». Como botón de muestra de los muchos ejemplos que nos encontraremos más adelante, el proceso de esparcimiento parece solamente comprensible partiendo del concepto de interferencia; las partículas clásicas simplemente no interfieren. Cuando un haz de luz se propaga a través de un medio denso, la interferencia que se produce en dirección frontal es constructiva, mientras que en cualquier otra dirección es casi completamente destructiva. En consecuencia, casi toda la energía luminosa avanza frontalmente. Este punto suscita cuestiones de interés sobre la naturaleza básica de la interferencia y la interpretación tradicional que se da sobre este fenómeno. ***La interferencia es un fenómeno no localizado; no puede suceder solamente en un único punto en el espacio***, a pesar de que con frecuencia se hable de la interferencia en un punto P. El principio de conservación de energía señala con claridad que si en un punto tiene lugar una interferencia constructiva, la energía «extra» en dicho punto procede necesariamente de otro lugar. Por consiguiente, es seguro que en otro punto se está produciendo una interferencia destructiva. ***La interferencia tiene lugar en una amplia región del espacio en un modo coordinado que no altera en absoluto la cantidad total de energía radiante.***

Imaginemos ahora un haz de luz que atraviesa un medio denso, tal y como aparece en la figura 4.6. ¿Se propagan lateralmente los trenes de ondas electromagnéticos que transportan energía (que nunca se llegan a medir realmente) solamente con el fin de interferir destructivamente en otro punto exterior al haz de luz? Si la respuesta es afirmativa, estos trenes de ondas se anulan y la energía que transportan hacia el exterior retorna inexplicablemente al haz de luz, ya que, al final, no hay esparcimiento lateral neto. Esto es así independientemente de la distancia a la que se encuentre el punto P. Por otro lado, esto es aplicable a *todos* los efectos de interferencia (capítulo 9). Si dos o más ondas electromagnéticas llegan al punto P fuera de fase y se anulan, «¿En qué afecta esto a la energía que trans-

portan?». La energía puede redistribuirse pero nunca desaparecer. Hemos aprendido de la mecánica cuántica que la interferencia es uno de los principales misterios de la física.

Recordando el aviso de Einstein de que los átomos no emiten trenes de ondas esféricas, tal vez estamos siendo demasiado literales en nuestra interpretación del campo clásico de ondas. Después de todo y estrictamente hablando, la onda electromagnética clásica con su continua distribución de energía no existe realmente. Tal vez deberíamos pensar en los trenes de ondas y en el patrón global que producen, no como un campo de ondas *real*, sino como un instrumento teórico que, de forma bastante óptima, nos informa de dónde va a parar la luz. En cualquier caso, las ecuaciones de Maxwell proporcionan un medio para calcular las distribución macroscópica de la energía electromagnética en el espacio.

Siguiendo adelante por la vía semiclásica, imaginemos una distribución de la luz dada por alguna función del ángulo θ fuera de eje. Por ejemplo, consideremos la irradiancia sobre una pantalla ubicada mucho más allá de una abertura con forma de rendija (pág. 450) tal que $I(\theta) = I(0)\ \text{sinc}^2\beta(\theta)$. Supongamos que en lugar de observar el patrón visualmente, utilizamos un detector compuesto por un diafragma seguido de un tubo fotomultiplicador. Este mecanismo podría transportarse de un punto a otro y, en un intervalo de tiempo constante, podría medir el número de fotones que llegan a cada punto, $N(\theta)$. Tomando un gran número de estas medidas, obtendríamos una distribución espacial del número de recuentos fotónicos que respondería a la misma fórmula que la de la irradiancia, a saber, $N(\theta) = N(0)\ \text{sinc}^2\beta(\theta)$. El número de fotones detectados es proporcional a la irradiancia. Una cantidad contable como ésta nos lleva implícitamente a un análisis estadístico, y así podemos hablar de la probabilidad de detectar un fotón en cualquier punto de la pantalla. Es decir, podemos construir una distribución de probabilidades, que nos recuerda a la figura 3.19. Dado que las variable espaciales (θ, x, y o z) son continuas, es necesario introducir una **densidad de probabilidad**, sea ésta $\wp(\theta)$. De este modo, $\wp(\theta)\, d\theta$ es la probabilidad de que un fotón se encuentre en el rango infinitesimal de θ a $\theta + d\theta$. En este caso $\wp(\theta) = \wp(0)\ \text{sinc}^2\beta(\theta)$.

El cuadrado de la amplitud del campo eléctrico neto en cada punto del espacio corresponde a la irradiancia (que puede medirse directamente) y que es equivalente a la probabilidad de encontrar fotones en cualquier punto dado. De acuerdo con esto, hagamos un intento de definir la **amplitud de probabilidad** como esa cantidad cuyo valor absoluto elevado al cuadrado es igual a la densidad de probabilidad. Así, podemos interpretar el E_0 neto en P como un valor proporcional a una amplitud de probabilidad **semiclásica** ya que ***la probabilidad de detectar un fotón en un punto cualquiera del espacio depende de la irradiancia que haya en dicho punto y*** $I \propto E_0^2$. Esta afirmación está de acuerdo con el concepto del campo de luz de Einstein, definido por Max Born (quien inició la interpretación estadística de la mecánica cuántica) como *Gespensterfeld*, o campo fantasma. Desde este punto de vista, las ondas del dicho campo revelan el modo en que los fotones se distribuyen en el espacio, en el sentido de que el cuadrado del valor absoluto de la amplitud de onda está relacionado de algún modo con la densidad de probabilidad de los fotones que llegan a un punto. En el tratamiento formal de la mecánica cuántica, *la amplitud de probabilidad es generalmente una cantidad compleja* cuyo valor absoluto elevado al cuadrado corresponde con la densidad de probabilidad (p. ej.: la función de onda de Schrödinger es una amplitud de probabili-

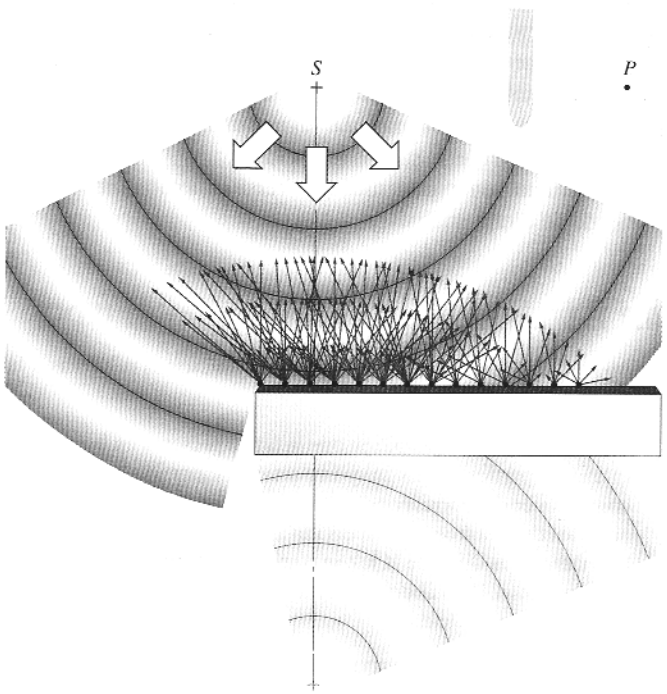


FIGURA 4.70 Representación esquemática de la reflexión. Una onda desde *S* se desplaza hacia abajo y se extiende sobre la superficie de un espejo. Sucesivamente, cada átomo de la interfaz esparce la luz hacia atrás en todas las direcciones ascendentes. Parte de ella llegará finalmente hasta *P*, procedente de cada dispersor de la superficie.

dad). Así pues, por razonable que fuera el considerar que E_0 es equivalente a una amplitud de probabilidad semiclásica, este uso no puede extrapolarse tal cual a la teoría cuántica.

Sin embargo, todo esto sugiere que podríamos adoptar el proceso de esparcimiento o dispersión, desde el punto de vista de las probabilidades, como la base para un planteamiento computacional Cada uno de los trenes de ondas dispersados o esparcidos constituye, pues, una medida de la amplitud de probabilidad para que la luz tome una determinada ruta de un punto a otro, y el campo eléctrico neto en P será la suma de todos los campos dispersados que lleguen a tal punto a través de todas las rutas posibles. En el curso de su desarrollo de electrodinámica cuántica, Feynman, Schwinger, Tomonaga y Dyson desarrollaron una metodología mecánico-cuántica análoga a ésta. De manera resumida, el resultado final observable de un suceso viene determinado por la superposición de todas las diversas amplitudes de probabilidad asociadas a todas y cada una de las formas posibles en las que este suceso puede ocurrir. Dicho de otro modo, a cada «ruta» por la que un suceso tiene lugar, a cada modo en que sucede, se le asigna una representación matemática abstracta, una amplitud de probabilidad compleja. A continuación todos estos valores se combinan (e interfieren, como las cantidades complejas acostumbran a hacer) para dar lugar a una amplitud de probabilidad neta para que el suceso tenga lugar.

A continuación exponemos una versión notablemente simplificada de dicho análisis.

4.11.1 La electrodinámica cuántica (EDC)

Feyman fue bastante rotundo en sus afirmaciones relativas a la naturaleza de la luz:

> «Quiero hacer hincapié en que la luz se presenta en la naturaleza en partículas. Es muy importante saber que la luz se comporta como corresponde a las partículas, sobre todo para aquéllos de vosotros que habéis ido a la escuela, donde probablemente se os dijo que la luz se comportaba como corresponde a las ondas. Pero ahora os voy a decir cómo se comporta *de verdad*: como partículas.»

Para él «la luz está compuesta de partículas (como Newton pensaba originalmente)»; es una corriente de fotones cuyo comportamiento en masa se puede determinar estadísticamente. Por ejemplo, si 100 fotones inciden perpendicularmente sobre un trozo de vidrio en el aire, una media de cuatro serán reflejados hacia atrás en la primera superficie que se encuentren. No se puede saber qué cuatro serán los seleccionados

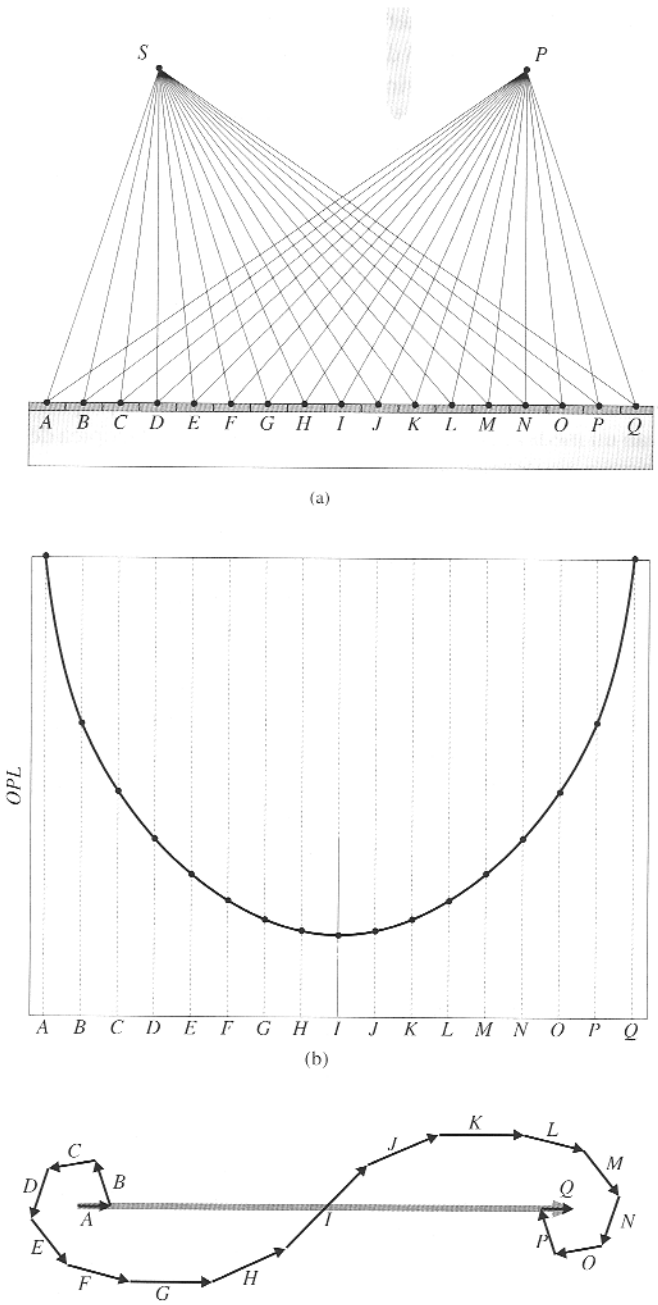


FIGURA 4.71 (*a*) Análisis de Feyman del problema de la reflexión por EDC. (*a*) Varios recorridos desde *S* hasta el espejo y *P*. (*b*) *LCO* para la luz que va desde *S* hasta *P* a lo largo de los recorridos ilustrados en (*a*). Cada recorrido tiene una probabilidad de amplitud asociada a él. Éstas se suman para obtener una amplitud neta.

pues dicha selección es un misterio. Lo que sí podemos deducir y confirmar experimentalmente es que un 4% de la luz incidente será reflejada (pág. 123).

El análisis de Feynman procede de unas cuantas reglas de cálculo generales, y su justificación fundamental es que funciona. El planteamiento establece una serie de predicciones muy concretas: 1) ***La amplitud de probabilidad asociada a que un suceso ocurra es la «suma» de las amplitudes de probabilidad que lo constituyen y que corresponden a todos y cada uno de los modos posibles en que el hecho puede ocurrir.*** 2) ***Cada una de estas amplitudes de probabilidad constitutiva puede expresarse por lo general como una cantidad compleja.*** En lugar de combinar analíticamente estas amplitudes, podemos hacer uso de la representación vectorial (pág. 24) para obtener la suma aproximada y obtener así la amplitud de probabilidad resultante. 3) ***La probabilidad de que ocurra un suceso en su conjunto es proporcional al cuadrado absoluto de la amplitud de probabilidad resultante.***

Mediante el tratamiento de la reflexión dibujado en la figura 4.70, podemos apreciar el modo en que todo esto sucede. Un foco puntual S ilumina un espejo y la luz a continuación se dispersa hacia arriba en todas las direcciones desde cada punto del espejo. Deseamos determinar la probabilidad de que un detector en P, registre la llegada de un fotón. En este caso podemos utilizar la perspectiva clásica, con su tradicional modelo de trenes de ondas, para proporcionar directrices (y quizás un poco de alivio intelectual a aquellos que todavía creen en las ondas electromagnéticas clásicas).

Para simplificar las cosas, supongamos que el espejo sea una banda estrecha (lo cual esencialmente se traduce como unidimensional); esto no cambiará las cosas conceptualmente. Dividámoslo en una serie de partes de igual tamaño (figura 4.71*a*), cada una de las cuales establece un posible camino a P. (Es evidente que cada átomo de la superficie actúa como dispersor y por lo tanto existen multitud de caminos; pese a todo, los que hemos dibujado serán suficientes a efectos explicativos.) Clásicamente sabemos que cada ruta que va de S al punto P del espejo corresponde con una trayectoria de un tren de ondas dispersado, y que la amplitud (E_{0j}) y la fase de cada uno de estos trenes de ondas en P determinará la amplitud resultante neta, E_0. Tal y como vimos con el Principio de Fermat (pág. 107), la longitud de camino óptico (LCO) desde S hasta P en el espejo, establece la fase de cada tren de ondas que llega a P. Además, cuanto mayor sea esta *longitud de camino*, mayor será la dispersión de la luz (en virtud de la ley de la inversa del cuadrado), menor será la amplitud del tren de ondas que llegue a P.

En la figura 4.71*b* se esquematiza la LCO con su mínimo en la trayectoria observada (S-I-P), donde $\theta_i = \theta_r$. Un cambio importante en la LCO, como el que se produce entre (S-A-P) y (S-B-P), va acompañado de una diferencia de fase y una rotación importantes, de los fasores representados en la figura 4.71c. Al pasar de A a B y a C, y así sucesivamente hasta I, las longitudes de camino óptico decrecen cada vez más lentamente, y cada vector adelanta al anterior en un pequeño ángulo (establecido por la pendiente de la curva). De hecho, los vectores que se encuentran a la izquierda de I giran desde A hasta I en sentido contrario de las agujas del reloj. Dado que la LCO alcanza su mínimo en I, los fasores en esa región son grandes y difieren muy poco en ángulo de fase. Al pasar de I a J, a K y así sucesivamente hasta Q, las longitudes de camino óptico aumentan cada vez más rápido, y cada vector se retrasa con respecto al anterior en un gran ángulo. De hecho, los fasores que se encuentran a la derecha de I giran desde I hasta Q en el sentido de las agujas del reloj.

En la figura 4.17*c*, la amplitud resultante queda representada desde el punto de partida hasta el extremo final, y clásicamente corresponde a la amplitud de campo eléctrico neto en P. La irradiancia, I, es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo neto, la cual, a su vez, debería de ser una medida de la probabilidad de encontrar un fotón cuando el detector está ubicado en P.

Avancemos ahora más allá de las ideas clásicas de los trenes de ondas dispersados y los campos eléctricos (aunque nos dejemos guiar por ellos), y construyamos un planteamiento de mecánica cuántica. Los fotones pueden ir de S al punto P del espejo a lo largo de innumerables caminos distintos. Resulta razonable asumir que cada uno de estos caminos contribuye específicamente en el resultado final; una ruta excesivamente larga que vaya hasta el extremo más alejado del espejo para volver nuevamente a P, debería contribuir de diferente manera que otra ruta que sea más directa. De acuerdo con Feynman, establecemos una asociación entre cada uno de los posibles caminos y cierta (aunque no específica) cantidad compleja, una **amplitud de probabilidad mecano-cuántica (MC)** constitutiva. Podemos representar cada una de estas amplitudes como un fasor cuyo ángulo viene determinado por el tiempo total de vuelo que se invierte desde S hasta P, y cuyo tamaño viene determinado por la longitud del camino recorrido. (Es evidente que esto es sólo los resultados obtenidos con cada vector en la figura 4.17*c*. No obstante, existen razones de peso para pensar que el campo clásico E no puede corresponder con la amplitud de probabilidad mecanocuántica). Esta amplitud de probabilidad MC total es la suma de todos los fasores que corresponden a todos los posibles caminos, lo cual es análogo al fasor resultante en la figura 4.71*c*.

Ahora volvamos a redefinir la figura 4.71*c* de tal modo que represente la formulación mecano-cuántica. Claramente, ***la mayor parte de la longitud de la amplitud de probabilidad mecano-cuántica resultante, surge de las contribuciones acaecidas en el entorno más próximo del camino S-I-P, donde los vectores constitutivos son grandes y están casi en fase.*** La mayor parte de la probabilidad acumulada de que la luz vaya de *S* a *P* mediante reflexión, surge a lo largo e inmediatamente al lado de la trayectoria *S-I-P*. Las regiones en los extremos del espejo contribuyen muy poco porque los vectores de esas zonas forman espirales muy cerradas a ambos extremos (figura 4.71*c*). Cubrir los extremos del espejo apenas tendrá repercusiones en la longitud de la amplitud resultante ni, por lo tanto, en la cantidad de luz que llegue hasta *P*. Tengamos en cuenta que este diagrama es bastante crudo; en lugar de 17 rutas desde *S* hasta *P*, hay billones de trayectorias posibles, y los vectores en ambos extremos de la espiral se enrollan en sí mismos incontables veces.

La electrodinámica cuántica predice que la luz emitida por un foco puntual *S* vuelve a *P* reflejándose en todos los puntos del espejo, si bien la ruta más probable es *S-I-P*, en cuyo caso $\theta_i = \theta_r$. Si miramos desde *P* al espejo, veremos una imagen nítida de *S*.

PROBLEMAS

4.1 Formule su propia argumentación empleando el análisis dimensional para establecer la dependencia λ^{-4} del porcentaje de la luz esparcida en la dispersión Rayleigh. Sean E_{0i} y E_{0s} las amplitudes incidente y dispersada, donde la última está a una distancia r del dispersor. Suponga que $E_{0s} \propto E_{0i}$ y $E_{0s} \propto 1/r$. Asimismo, suponga de manera convincente que la amplitud de dispersión sea proporcional al volumen, V, del dispersor, lo cual es razonable dentro de ciertos límites. Determine las unidades de la constante de proporcionalidad.

4.2* Un haz de luz blanca procedente de una lámpara muy intensa cruza un importante volumen que contiene una mezcla de gas molecular tenue de oxígeno y nitrógeno en su mayoría. Compare la cantidad relativa de esparcimiento que ocurre para la componente amarilla (580 nm) con la de la componente violeta (400 nm).

4.3* En la figura P.4.3 se dibuja luz surgiendo de una fuente puntual. En ella se muestran tres representaciones diferentes de la energía radiante que se propaga hacia afuera. Identifique cada una de ellas y discuta su relación con las otras.

4.4 La ecuación para un oscilador forzado amortiguado es

$$m_e\ddot{x} + m_e\gamma\dot{x} + m_e\omega_0^2 x = q_e E(t)$$

a) Explique el significado de cada término

b) Sea $E = E_0 e^{i\omega t}$ y $x = x_0 e^{i(\omega t - \alpha)}$, donde E_0 y x_0 son cantidades reales. Sustitúyalos en la expresión arriba mostrada y demuestre que

$$x_0 = \frac{q_e E_0}{m_e} \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{1/2}}$$

c) Desarrolle una expresión para el retardo de fase, α, y discuta el modo en que α varía a medida que ω va de $\omega \ll \omega_0$ a $\omega = \omega_0$ a $\omega \gg \omega_0$.

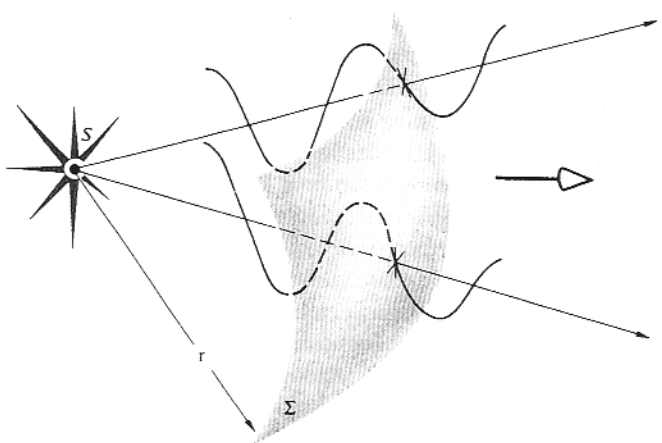


FIGURA P.4.3 Segmento de una onda esférica.

4.5 Imagine que tiene una placa de vidrio no absorbente de índice n y grosor Δy, que se encuentra entre un foco *S* y un observador *P*.

a) Si la onda no obstruida (sin que la placa esté presente) es $E_u = E_0 \exp i\omega(t - y/c)$, demuestre que con la placa en su lugar el observador ve una onda

$$E_p = E_0 \exp i\omega[t - (n - 1)\,\Delta y/c - y/c]$$

b) Demuestre que si $n \approx 1$, o Δy, son muy pequeños, entonces

$$E_p = E_u + \frac{\omega(n - 1)\,\Delta y}{c} E_u e^{-i\pi/2}$$

El segundo término de la derecha puede verse como el campo que surge de los osciladores en la placa.

4.6* Un haz láser muy estrecho incide bajo un ángulo de 58° sobre un espejo horizontal. El haz de luz reflejado incide en una pared en un punto situado a 5 metros de distancia del punto de incidencia donde el haz de luz chocó con el espejo. ¿A qué distancia, medida horizontalmente, está la pared de ese punto de incidencia?

4.7* Al entrar en la tumba de FRED, el Héroe de Nod, se encontrará en una cueva cerrada y oscura con un pequeño agujero en la pared a 3 m. de distancia del suelo. Una vez al año, con motivo del cumpleaños de FRED, un haz de luz solar entra por el agujero, choca contra un pequeño disco de oro pulido que está en el suelo a 4 m de la pared, y se refleja en él iluminando un gran diamante que está incrustado en la frente de una gloriosa estatua de FRED, situada a 20 m de la pared. ¿Cuál es la altura aproximada de la estatua?

4.8 Calcule el ángulo de transmisión para un rayo en el aire incidente a 30° en un bloque de vidrio-crown ($n_v = 1{,}52$).

4.9* Un rayo de luz amarilla en el aire, procedente de una lámpara de descarga de sodio, cae sobre la superficie de un diamante en el aire a 45°. Si a esa frecuencia $n_d = 2{,}42$, calcule la desviación angular sufrida en la transmisión.

4.10* Dada una interfaz entre agua ($n_a = \frac{4}{3}$) y vidrio ($n_v = \frac{3}{2}$), calcule el ángulo de transmisión para un haz incidente en el agua a 45°. Si el haz transmitido regresa de tal forma que ahora incide en la interfaz, demuestre que $\theta_t = 45°$.

4.11 Un haz de microondas planas de 12 cm incide en la superficie de un dieléctrico a 45°. Si $n_{ti} = \frac{4}{3}$, calcule: a) la longitud de onda en el medio transmisor, y b) el ángulo θ_t.

4.12* Luz de longitud de onda de 600 nm en el vacío entra a un bloque de vidrio donde $n_v = 1{,}5$. Calcule su longitud de onda en el vidrio. ¿De qué color aparecerá para alguien que está sumergido en el vidrio (véase tabla 3.4)?

4.13* Un haz de rayos láser incide en una interfaz aire-líquido a un ángulo de 55°. Se observa que el rayo refractado es transmitido a 40°. ¿Cuál es el índice de refracción del líquido?

4.14* Un buceador envía un haz de luz hacia la superficie. La luz incide en la interfaz aire-agua a 35°. ¿A qué ángulo emergerá en el aire?

4.15 Haga un gráfico de θ_i frente a θ_t para una frontera aire-vidrio donde $n_{va} = 1{,}5$.

4.16* Pruebe que para alguien que esté mirando directamente hacia una piscina desde un plano superior, cualquier objeto que se encuentre en el agua parecerá estar a 3/4 de su verdadera profundidad.

4.17* Un haz láser incide en la cara superior de una placa de vidrio paralela de 2 cm de espesor ($n = 1{,}50$) a un ángulo de 35°. ¿Qué longitud tiene la trayectoria real a través del vidrio?

4.18* La luz incide en aire sobre una interfaz aire-vidrio. Si el índice de refracción del vidrio es 1,70, averigüe el ángulo incidente tal que el ángulo de transmisión sea igual a $\frac{1}{2}\theta_i$.

4.19* Suponga que enfoca una cámara con un dispositivo de fuelle de primer plano y la apoya directamente sobre una letra impresa en esta página. Cubra entonces la letra con un portaobjetos de microscopio de un mm de grosor ($n = 1{,}55$). ¿Cuánto tendrá que alejar la cámara en el aire para que la letra siga estando enfocada?

4.20* La configuración de un prisma *ABC* es tal que el ángulo *BCA* = 90° y el *CBA* = 45°. ¿Cuál es el valor mínimo de su índice de refracción si, mientras se encuentra inmerso en el aire, un haz de luz que atraviesa la cara *AC* tiene que reflejarse interna y totalmente desde la cara *BC*?

4.21* En el fondo de un depósito de agua de un metro de profundidad hay una moneda ($n_a = 1{,}33$). Encima del agua flota una capa de benceno ($n_b = 1{,}50$) con un grosor de 20 cm. Si miramos hacia abajo casi perpendicularmente, ¿a qué distancia de la cara más externa de la superficie aparece la moneda? Dibuje un diagrama de rayos.

4.22 En la figura P.4.22 los frentes de onda en el medio incidente coinciden con los frentes en el medio de transmisión en todos los puntos de la interfaz —concepto que se conoce como *continuidad del frente de onda*—. Escriba expresiones para el número de ondas por unidad de longitud en toda la interfaz en función de θ_i y λ_i, en un caso, y θ_t y λ_t, en el otro. Utilice estos parámetros para desarrollar la ley de Snell. ¿Cree que la ley de Snell es aplicable a las ondas sonoras? Explíquelo.

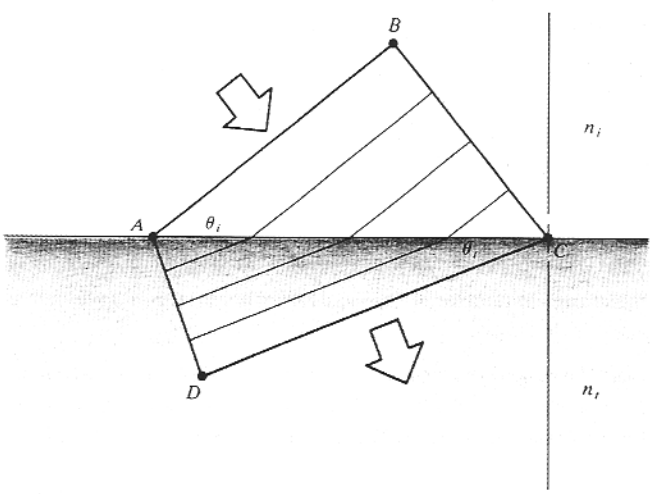


FIGURA P.4.22

4.23* Tomando como referencia el problema anterior, vuelva a la ecuación (4.19) y establezca el origen del sistema de coordenadas en el plano de incidencia y en la interfaz (figura 4.37). Demuestre que esa ecuación es equivalente a igualar las componentes x de los diversos vectores de propagación. Demuestre que también es equivalente al concepto de continuidad del frente de onda.

4.24 Haciendo uso de las ideas de igual tiempo de tránsito entre puntos correspondientes y la ortogonalidad de los rayos y frentes de onda, deduzca la ley de la reflexión y la ley de Snell. El diagrama de rayos de la figura P.4.24 le será de utilidad.

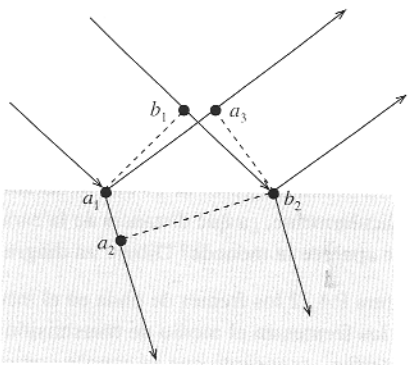


FIGURA P.4.24

4.25 Comenzando con la ley de Snell, pruebe que la ecuación vectorial de la refracción tiene la forma

$$n_t\hat{\mathbf{k}}_t - n_i\hat{\mathbf{k}}_i = (n_t \cos\theta_t - n_i \cos\theta_i)\hat{\mathbf{u}}_n \qquad [4.7]$$

4.26 Deduzca una expresión vectorial equivalente a la ley de la reflexión. Como en el caso anterior, haga que la normal vaya del medio incidente al transmitido, aunque en realidad este punto no tenga ninguna importancia.

4.27 En el caso de reflexión en una superficie plana, use el Principio de Fermat para probar que los rayos incidente y reflejado comparten un plano común con la normal $\hat{\mathbf{u}}_n$, es decir, el plano de incidencia.

4.28* Deduzca la ley de reflexión, $\theta_i = \theta_r$, usando el cálculo diferencial para minimizar el tiempo de tránsito, tal y como requiere el Principio de Fermat.

4.29* De acuerdo con el matemático Hermann Schwarz, hay un triángulo que puede inscribirse en un triángulo acutángulo de tal modo que su perímetro sea mínimo. Utilizando dos espejos planos, un haz láser y el Principio de Fermat, explique el modo de demostrar que este triángulo inscrito tiene sus vértices en los puntos donde las altitudes del triángulo acutángulo se cortan con sus lados correspondientes.

4.30 Demuestre analíticamente que un haz entrando en una placa plana transparente, como sucede en la figura 4.30, emerge paralelo a su dirección inicial. Deduzca una expresión para el desplazamiento lateral del haz. Un inciso: el hecho de que el rayo entrante y el saliente sean paralelos ha de cumplirse incluso para una pila de placas de diferentes materiales.

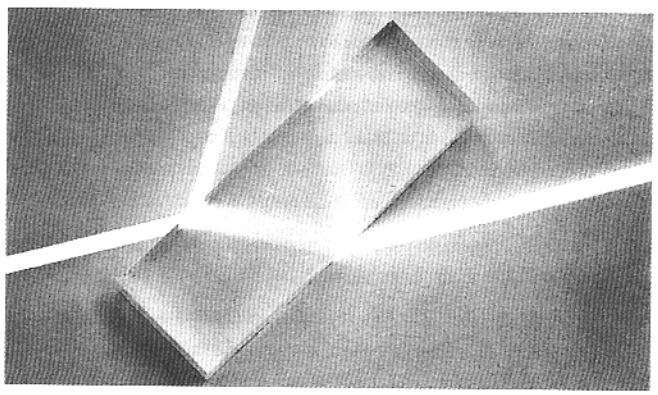


FIGURA P.4.30

4.31* Demuestre que los dos rayos que entran al sistema en la figura P.4.31 paralelos entre sí, emergen de él también paralelos.

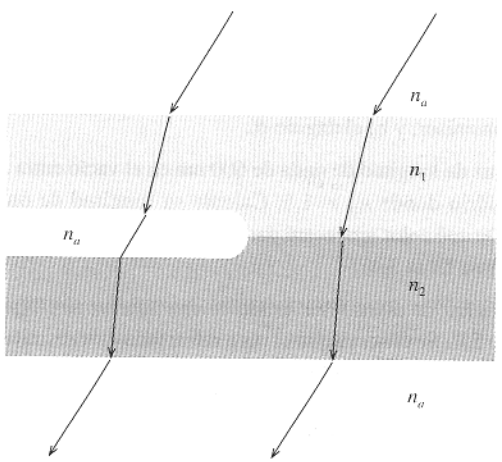


FIGURA P.4.31

4.32 Discuta los resultados del problema 4.30 a la luz del principio de Fermat, es decir, ¿En qué afecta el índice relativo n_{21}? Para ver el desplazamiento lateral, mire una fuente de luz extendida por una pieza gruesa de vidrio ($\approx\frac{1}{4}$ pulgada) o una pila (con cuatro funcionará bien) de portaobjetos de microscopio *sostenidos a un ángulo*. Habrá un desplazamiento obvio entre la región de la fuente que se ve directamente y la región que se ve a través del vidrio.

4.33 Demuestre que aun en el caso no estático, la componente tangencial de la intensidad de campo eléctrico **E** es continua por toda la interfaz. [*Sugerencia:* usando la figura 4.33 y la ecuación (3.5), encoja los lados *FB* y *CD* hasta que el área incluida se anule.]

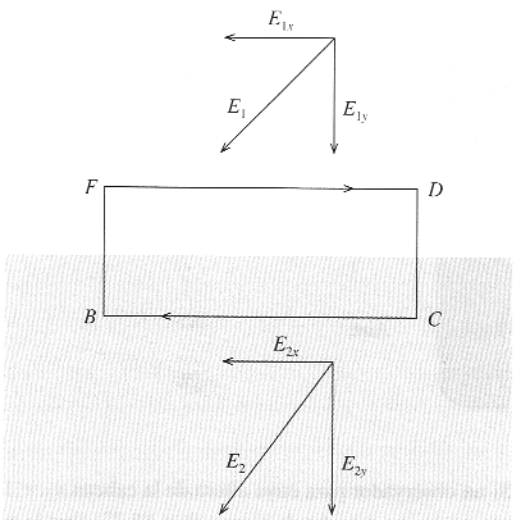


FIGURA P.4.33

4.34 Suponga que una onda de luz que está linealmente polarizada en el plano de incidencia, incide bajo un ángulo de 30° en una placa de vidrio crown ($n_g = 1{,}52$) en el aire. Calcule los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión apropiados en la interfaz. Compare sus resultados con los de la figura 4.39.

4.35 Deduzca las ecuaciones (4.42) a (4.45) para $r_\perp$, $r_\parallel$, $t_\perp$ y $t_\parallel$.

4.36* Un haz de luz en el aire incide en la superficie de un trozo pulido de plástico con un índice de refracción de 1,55 a un ángulo de 20° con respecto a la normal. La luz incidente posee una amplitud de las componentes del campo E paralela y perpendicular al plano de incidencia de 10,0 V/m y 20,0 V/m, respectivamente. Determine las correspondientes amplitudes de campo reflejado.

4.37* Un haz láser incide en la interfaz que se encuentra entre el aire y un dieléctrico de índice n. Para valores pequeños de θ_i, demuestre que $\theta_t = \theta_i/n$. Utilice esto y la ecuación (4.42) para establecer que a incidencia casi normal $[-r_\perp]_{\theta_i \approx 0} = (n-1)/(n+1)$.

4.38* Utilizando los resultados del problema anterior, compare los coeficientes de reflexión de amplitud para una interfaz aire-agua ($n_a = 4/3$) con el de una interfaz aire-vidrio crown ($n_v = 3/2$), ambos a incidencia casi normal. ¿Cuáles son los correspondientes porcentajes de las irradiancias reflejadas frente a las incidentes?

4.39* Utilice la ecuación (4.42) y el desarrollo en serie de potencias de la función seno para establecer que, a incidencia casi normal, podemos obtener una mejor aproximación que la del problema 4.37, que es $[-r_\perp]_{\theta_i \approx 0} = (n-1)/(n+1)$, a saber

$$[-r_\perp]_{\theta_i \approx 0} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1 + \frac{\theta_i^2}{n}\right)$$

4.40* Establezca que a incidencia casi normal, la ecuación

$$[r_\parallel]_{\theta_i \approx 0} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{\theta_i^2}{n}\right)$$

constituye una buena aproximación. [*Sugerencia:* Utilice los resultados de los problemas anteriores, la ecuación (4.43), así como los desarrollos en serie de potencias de las funciones seno y coseno.]

4.41* Pruebe que para una interfaz vacío-dieléctrico a incidencia rasante, $r_\perp \to -1$, tal y como sucede en la figura 4.39.

4.42* En la figura 4.39, la curva de $r_\perp$ se aproxima a -1 a medida que el ángulo de incidencia se acerca a 90°. Pruebe que si $\alpha_\perp$ es el ángulo que la curva dibuja con la vertical a $\theta_i = 90°$, entonces

$$\tan \alpha_\perp = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{2}$$

[*Sugerencia:* Demuestre primero que $d\theta_t/d\theta_i = 0$.]

4.43* Pruebe que

$$t_\perp + (-r_\perp) = 1 \qquad [4.49]$$

para toda θ_i, partiendo primero de las condiciones de contorno y después de las ecuaciones de Fresnel.

4.44* Verifique que

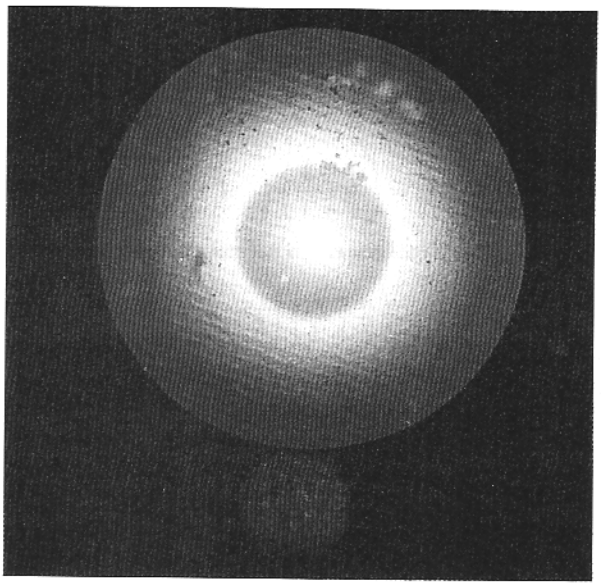
$$t_\perp + (-r_\perp) = 1 \qquad [4.49]$$

para $\theta_i = 30°$ en una interfaz de vidrio crown y aire ($n_{ti} = 1{,}52$).

4.45* Calcule el ángulo crítico más allá del cual hay reflexión total interna en una interfaz aire-vidrio ($n_v = 1{,}5$). Compare este resultado con el del problema 4.15.

4.46* ¿Cuál es el ángulo crítico para la reflexión total interna del diamante? ¿En qué afecta el ángulo crítico, si es que afecta en algo, en las aguas de un diamante bien tallado?

4.47* Al utilizar un bloque de un material transparente y desconocido, se descubre que un haz de luz del interior del material tiene una reflexión total e interna en la interfaz aire-bloque, a un ángulo de 48°. ¿Cuál es el índice de refracción?



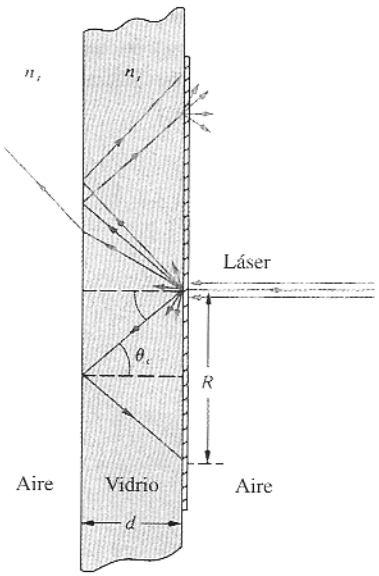


FIGURA P.4.52 (Foto y diagrama cedidos por S. Reich, The Weizmann Institute of Science, Israel.)

4.48* Un pez que mira en línea recta hacia la superficie de un estanque, recibe un cono de rayos y ve un círculo de luz llena de imágenes del cielo, pájaros y demás cosas que están por encima de él. Este brillante campo circular está rodeado por la oscuridad. Explique lo que está sucediendo y calcule el ángulo del cono.

4.49* Un bloque de vidrio con un índice de 1,55 está cubierto por una capa de agua de índice 1,33. Para la luz que se transmite por el vidrio, ¿cuál es el ángulo crítico en la interfaz?

4.50 Deduzca una expresión para la velocidad de una onda evanescente en el caso de la reflexión interna. Escríbala en función de c, n_i y θ_i.

4.51 Luz con una longitud de onda en el vacío de 600 nm, se transmite en un bloque de vidrio ($n_v = 1{,}50$) e incide a 45° en una interfaz vidrio-aire. Sufre entonces reflexión total interna. Determine la distancia en el aire a la que la amplitud de la onda evanescente ha caído a un valor de $1/e$ de su valor máximo en la interfaz.

4.52 La figura P.4.52 representa un haz de rayos láser incidente en un trozo húmedo de papel filtro encima de una lámina de vidrio cuyo índice de refracción debemos medir —la fotografía muestra la distribución de luz resultante—. Explique lo que está sucediendo y deduzca una expresión para n_i en función de R y d.

4.53 Considere el espejismo común asociado a una distribución inhomogénea del aire próximo a una carretera caliente. Visualice el doblado de los rayos como si más bien fuera un problema de reflexión total interna. Si un observador para cuya altura de la cabeza $n_a = 1{,}00029$, ve aparentemente una mancha de agua a $\theta_i \cong 88.7°$ sobre la carretera, averigüe el índice del aire inmediatamente encima de la carretera.

4.54* Utilice las ecuaciones de Fresnel para demostrar que la luz incidente a $\theta_p = \frac{1}{2}\pi - \theta_t$, da como resultado un haz de luz reflejado que está realmente polarizada.

4.55 Demuestre que $\tan\theta_p = n_t/n_i$ y calcule el ángulo de polarización para incidencia externa sobre una placa de vidrio crown ($n_v = 1{,}52$) en el aire.

4.56* Comenzando por la ecuación (4.38), demuestre que para dos medios dieléctricos, en general $\theta_p = [\epsilon_t(\epsilon_t\mu_i - \epsilon_i\mu_t)/\epsilon_i(\epsilon_t\mu_t - \epsilon_i\mu_i)]^{1/2}$.

4.57 Demuestre que los ángulos de polarización para reflexiones interna y externa en una determinada interfaz son complementarios, es decir, $\theta_p + \theta'_p = 90°$ (véase problema 4.55).

4.58 Con frecuencia resulta útil trabajar con el *ángulo azimutal* γ, el cual se define como el ángulo entre el plano de vibración y el plano de incidencia. En consecuencia, para la luz linealmente polarizada

$$\tan\gamma_i = [E_{0i}]_\perp/[E_{0i}]_\parallel \tag{4.92}$$

$$\tan\gamma_t = [E_{0t}]_\perp/[E_{0t}]_\parallel \tag{4.93}$$

y

$$\tan\gamma_r = [E_{0r}]_\perp/[E_{0r}]_\parallel \tag{4.94}$$

La figura P.4.58 es un gráfico de γ_r frente a θ_i para reflexión interna y externa en una interfaz aire-vidrio ($n_{va} = 1{,}51$), donde $\gamma_i = 45°$. Verifique algunos de los puntos en las curvas y, además, demuestre que

$$\tan \gamma_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \gamma_i \tag{4.95}$$

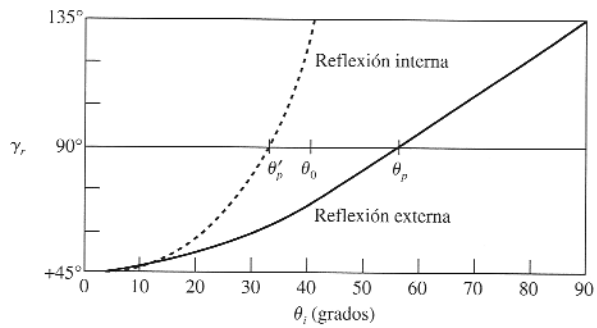


FIGURA P.4.58

4.59* Haciendo uso de las definiciones de los ángulos azimutales que se formulan en el problema 4.58, demuestre que

$$R = R_\parallel \cos^2 \gamma_i + R_\perp \operatorname{sen}^2 \gamma_i \tag{4.96}$$

y

$$T = T_\parallel \cos^2 \gamma_i + T_\perp \operatorname{sen}^2 \gamma_i \tag{4.97}$$

4.60 Haga un esquema de $R_\perp$ y $R_\parallel$ para $n_i = 1{,}5$ y $n_t = 1$, es decir, en reflexión interna.

4.61 Demuestre que

$$T_\parallel = \frac{\operatorname{sen} 2\theta_i \operatorname{sen} 2\theta_t}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)\cos^2(\theta_i - \theta_t)} \tag{4.98}$$

y

$$T_\perp = \frac{\operatorname{sen} 2\theta_i \operatorname{sen} 2\theta_t}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{4.99}$$

4.62* Usando los resultados del problema 4.61, es decir, de las ecuaciones (4.98) y (4.99), demuestre que

$$R_\parallel + T_\parallel = 1 \tag{4.65}$$

y

$$R_\perp + T_\perp = 1 \tag{4.66}$$

4.63 Suponga que miramos perpendicularmente una fuente a través de una pila de N portaobjetos de microscopio. La fuente vista incluso a través de una docena de portaobjetos será visiblemente más oscura. Suponiendo que no hay absorción, demuestre que la transmitancia total de la pila viene dada por

$$T_t = (1 - R)^{2N}$$

y evalúe T_t para tres portaobjetos en el aire.

4.64 Utilizando la expresión

$$I(y) = I_0 e^{-\alpha y} \tag{4.78}$$

para un medio absorbente, definimos una cantidad llamada la *transmitancia unitaria* T_1. En incidencia normal, ecuación (4.55), $T = I_t/I_i$, y entonces cuando $y = 1$, $T_1 \equiv I(1)/I_0$. Si el grosor total de los portaobjetos en el problema anterior es d y si ahora tienen una transmitancia por unidad de longitud T_1, demuestre que

$$T_t = (1 - R)^{2N} (T_1)^d$$

4.65 Demuestre que a incidencia normal en la frontera entre dos dieléctricos, cuando $n_{ti} \to 1$, $R \to 0$, and $T \to 1$. Además, pruebe que cuando $n_{ti} \to 1$, $R_\parallel \to 0$, $R_\perp \to 0$, $T_\parallel \to 1$ y $T_\perp \to 1$ para toda θ_t. Por consiguiente, cuando los índices de los dos medios se aproximan uno al otro, la energía que lleva la onda reflejada es cada vez menor. Ha de resultar obvio que cuando $n_{ti} = 1$, no habrá interfaz ni reflexión.

4.66* Deduzca las expresiones para $r_\perp$ y $r_\parallel$ proporcionadas por las ecuaciones (4.70) y (4.71).

4.67 Demuestre que cuando $\theta_i > \theta_c$ en una interfaz dieléctrica, $r_\parallel$ y $r_\perp$son complejas y $r_\perp r_\perp^* = r_\parallel r_\parallel^* = 1$.

4.68 La figura 4.68 muestra un rayo que se está reflejando múltiplemente en una placa dieléctrica transparente (las amplitudes de los fragmentos resultantes aparecen indicados). Al igual que hicimos en la sección 4.5, hagamos uso de la notación de coeficientes con primas porque los ángulos están relacionados por la ley de Snell.

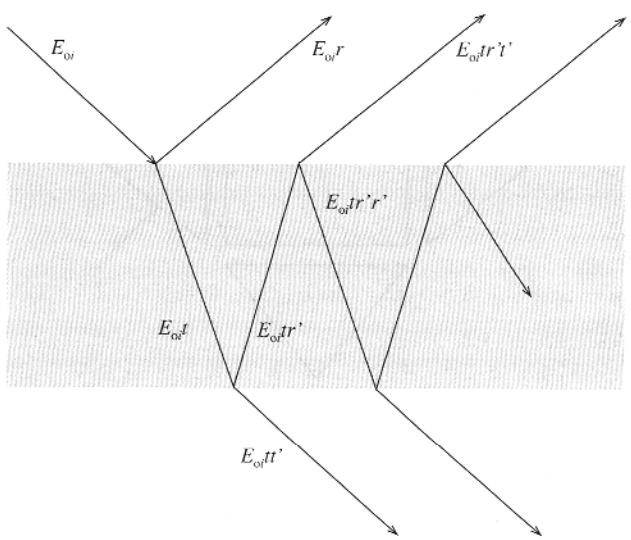


FIGURA P.4.68

a) Complete los valores para las amplitudes de los últimos cuatro rayos.

b) Demuestre, usando las ecuaciones de Fresnel, que

$$t_{\parallel}t'_{\parallel} = T_{\parallel} \tag{4.100}$$

$$t_{\perp}t'_{\perp} = T_{\perp} \tag{4.101}$$

$$r_{\parallel}^2 = r_{\parallel}'^2 = R_{\parallel} \tag{4.102}$$

y

$$r_{\perp}^2 = r_{\perp}'^2 = R_{\perp} \tag{4.103}$$

4.69* Una onda, linealmente polarizada en el plano de incidencia, incide en la interfaz existente entre dos medios dieléctricos. Si $n_i > n_t$ y $\theta_i = \theta'_p$, no hay onda reflejada, es decir $r'_{\parallel}(\theta'_p) = 0$. Usando la técnica de Stokes, comience desde el principio para demostrar que $t_{\parallel}(\theta_p)t'_{\parallel}(\theta'_p) = 1$, $r_{\parallel}(\theta_p) = 0$ y $\theta_t = \theta_p$ (véase problema 4.57). ¿Cuáles son sus cualidades con respecto a la ecuación (4.100)?

4.70 Use las ecuaciones de Fresnel para demostrar que $t_{\parallel}(\theta_p)t'_{\parallel}(\theta'_p) = 1$, como en el problema anterior.

4.71 La figura P.4.71 muestra un cubo de vidrio rodeado muy de cerca por cuatro prismas de vidrio. Haga un esquema de los caminos que tomarían los dos rayos mostrados y discuta una posible aplicación para el sistema.

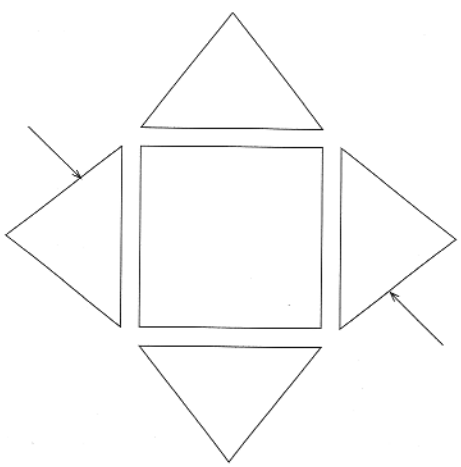


FIGURA P.4.71

4.72 La figura P 4.72 es un gráfico de n_I y n_R frente a λ para un metal común. Identifique el metal comparando sus características con las que se consideran en el capítulo y discuta sus propiedades ópticas.

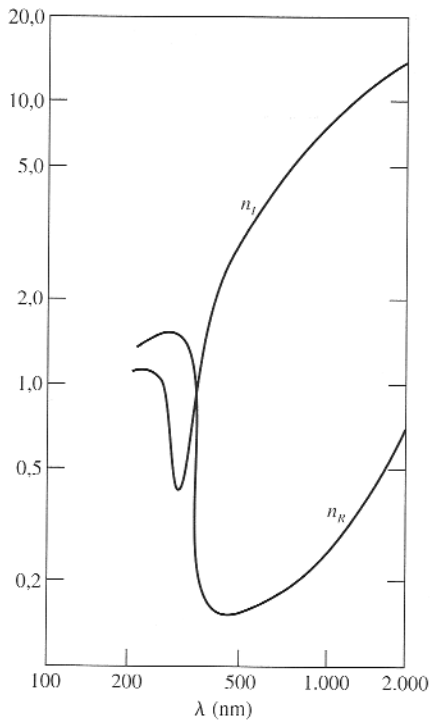


FIGURA P.4.72

4.73 La figura P.4.73 muestra una disposición para un acoplamiento de prismas desarrollado en los laboratorios Bell Telephone. Su función es introducir un haz láser en una película transparente y delgada (0,00001 pulgadas) que sirve como una especie de guía de ondas. Una posible aplicación es la de los circuitos de haces láser en películas delgadas, un tipo de óptica integrada. ¿Cómo cree usted que funciona este sistema?

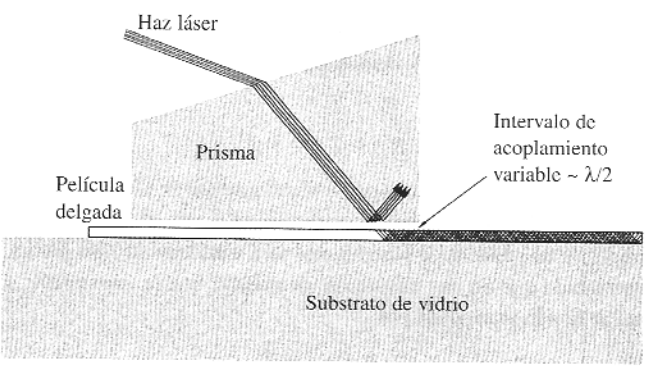


FIGURA P.4.73

5 Óptica geométrica

5.1 Introducción

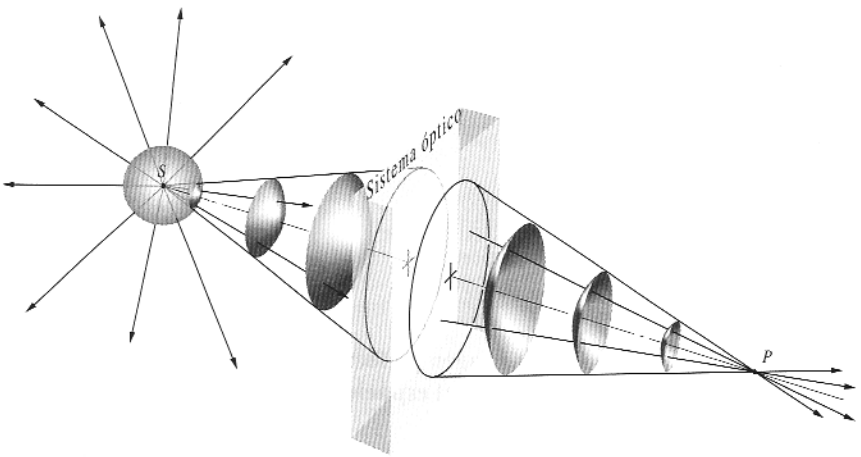
La superficie de un objeto luminiscente o que está iluminado externamente se comporta como si constara de un gran número de fuentes puntuales, cada una emitiendo ondas esféricas, es decir, los rayos emanan radialmente en la dirección en la que fluye la energía, o si se prefiere, en la dirección del vector de Poynting. En este caso, los rayos *divergen* de una fuente puntual S determinada, mientras que si la onda esférica estuviese dirigida hacia un punto, los rayos serían lógicamente *convergentes*. Por lo general, uno se centra tan sólo en una porción pequeña del frente de onda. ***Un punto desde el cual una porción de onda esférica diverge o uno hacia el cual el segmento de onda converge, se denomina foco del haz de rayos.***

En la figura 5.1 se recoge una fuente puntual cercana a alguna disposición de superficies reflectoras y refractoras representan un *sistema óptico*. Por regla general, de la infinidad de rayos que emanan de S, solamente uno pasará a través de un punto arbitrario en el espacio. Aún así, es posible lograr que un número infinito de rayos llegue a un cierto punto P, como en la figura 5.1. Entonces, si para un cono de rayos procedente de S hay un cono correspondiente de rayos que pasa a través de P, se dice que el sistema es **estigmático** para esos dos puntos. La energía en el cono (aparte de algunas pérdidas involuntarias debidas a la reflexión, al esparcimiento y a la absorción) llega a P, dando así lugar a lo que se conoce como la **imagen perfecta** de S. La onda podría formar una mancha finita de luz o **mancha borrosa** alrededor de P; aún sería una imagen de S, si bien no perfecta.

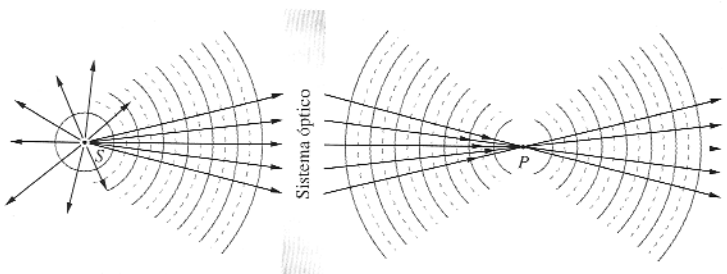
Del principio de reversibilidad (pág. 111) una fuente puntual colocada en P formaría igualmente su imagen en S y, por consiguiente, los dos se denominan **puntos conjugados.** En un *sistema óptico ideal* cada punto de una región tridimensional tendrá su imagen perfecta (o estigmática) en otra región; siendo el primero el **espacio objeto** y el segundo el **espacio imagen**.

En la mayoría de los casos, la función de un sistema óptico es recoger y remodelar una parte del frente de onda incidente, a menudo con la intención esencial de formar una imagen de un objeto. Obsérvese que los sistemas realizables se caracterizan por no poder recibir toda la luz emitida, pues un sistema acepta sólo un segmento del frente de onda. Como resultado, siempre habrá una desviación aparente de la propagación rectilínea incluso en medios homogéneos —las ondas serán *difractadas*—. El grado de perfección alcanzable en la formación real de imágenes de un sistema óptico estará **limitado por la difracción** (siempre habrá una mancha borrosa; pág. 466). A medida que la longitud de onda de la energía radiante disminuye en comparación con las dimensiones físicas del sistema óptico, los efectos de la difracción cobran menos importancia. En el límite conceptual cuando $\lambda_0 \to 0$, en los medios homogéneos se produce propagación rectilínea, definiéndose así el campo ideal de la **óptica geométrica** [1]. En este caso, ya no sería posible observar el comportamiento que es específicamente atribuido a la naturaleza ondulatoria de la luz (por ejemplo, la interferencia y la difracción). En muchas situaciones, la gran simplicidad de la aproximación de la óptica geométrica compensa abundantemente su falta de precisión. Resumiendo, *el argumento estudia la manipulación controlada de los frentes de onda (o rayos) por medio de la interposición de cuerpos reflectantes y/o refractantes, despreciando cualquier efecto de difracción.*

[1] La *óptica física* se ocupa de situaciones en las que deben tomarse en cuenta longitudes de onda de la luz diferentes de cero. Análogamente, cuando la longitud de onda de De Broglie de un objeto material es despreciable, se habla de *mecánica clásica* y, en caso contrario, de *mecánica cuántica*.



(a)



(b)

FIGURA 5.1 Focos conjugados. (*a*) Una fuente puntual *S* emite ondas esféricas. Un cono de rayos penetra en un sistema óptico que invierte los frentes de onda, obligándolos a converger en el punto *P*. (*b*) En la sección transversal, los rayos divergen de *S* y parte de ellos converge hacia *P*. Si nada detiene a la luz en *P*, hacia seguirá delante.

5.2 Lentes

Sin duda el sistema óptico más usado es la lente y eso sin contar que vemos el mundo a través de un par de ellas. Las lentes artificiales se remontan a los vidrios quemadores de la antigüedad que, como el nombre mismo sugiere, se utilizaban para encender el fuego mucho antes de la llegada de los fósforos. En términos generales, **una lente es un dispositivo refractor (es decir, una discontinuidad en el medio dominante) que reconfigura la distribución de la energía emitida**. Esto se aplica a los rayos UV, a las ondas cortas, a IR, a las microondas, radioondas e incluso hasta a las ondas sonoras.

La configuración de una lente se determina a través del remodelado necesario del frente de onda que debe realizar. Como las fuentes puntuales son fundamentales, a menudo es deseable convertir las ondas esféricas divergentes en un haz de ondas planas. Las lámparas portátiles, los proyectores así como los proyectores de exploración llevan a cabo dicha tarea a fin de evitar que el haz se extienda y se debilite a medida que avanza. Por el contrario, con frecuencia es necesario recoger rayos paralelos incidentes haciéndolos converger hacia un punto, enfocando así la energía como se hace con un vidrio quemador o el objetivo de un telescopio. Además, puesto que la luz reflejada por la cara de una persona se difunde desde miles de millones de fuentes puntuales, una lente que hiciera converger cada tren de onda divergente podría formar una imagen de ese rostro (figura 5.2).

5.2.1 Superficies asféricas

Para ver el funcionamiento de una lente, imaginemos que insertamos, en el camino de una onda, una substancia transparente donde la velocidad de la onda es distinta a la inicial. En la figura 5.3*a* se recoge una vista transversal de una onda esférica divergente que se desplaza en un medio incidente de índice n_i para incidir en la superficie curva de un medio de transmisión de índice n_t. Cuando n_t es mayor que n_i, la velocidad de la

FIGURA 5.2 El rostro de una persona, al igual que cualquier otra cosa que vemos todos los días en luz reflejada, está cubierto con innumerables dispersores atómicos.

onda decrece al entrar en la nueva substancia. El área central del frente de onda se desplaza más lentamente que sus extremos exteriores que continúan moviéndose aún con bastante rapidez a través del medio incidente. Dichos extremos sobrepasan la región intermedia y siguen aplanando el frente de onda. Si la interfaz está bien definida, el frente de onda esférico se dobla en una onda plana. La figura 5.3*b* muestra el rayo alternativo; los rayos se doblan simplemente hacia la normal local al entrar en el denso de mayor densidad, y si la configuración de la superficie es la correcta, los rayos saldrán paralelos.

Para dar con la forma precisa de la interfaz, remítanse a la figura 5.3*c*, donde el punto A puede hallarse en cualquier sitio en la frontera. Un frente de onda se transforma en otro, con tal que los caminos por los que se propaga la energía sean todos «iguales», manteniendo de esta forma la fase del frente de onda (pág. 28). Una superficie esférica pequeña de fase constante que se emita de S tendrá que transformarse en una superficie plana de fase constante en $\overline{DD'}$. Sea cual fuere el camino que la luz escoge para ir de S hasta $\overline{DD'}$, tendrá que tener siempre el mismo número de longitudes de onda para que la perturbación empiece y termine en fase. La energía radiante que sale de S como frente de onda individual tendrá que llegar al plano $\overline{DD'}$, después de un recorrido de la misma duración, sea cual fuere la trayectoria escogida por un rayo cualquiera. Dicho de otro modo, $\overline{F_1A}/\lambda_i$ (el número de longitudes de onda a lo largo del rayo arbitrario desde F_1 hasta A) más $\overline{AD}/\lambda_t$ (el número de longitudes de onda a lo largo del rayo desde A hasta D) tiene que ser constante, independientemente de donde se encuentre A en la interfaz. Ahora, sumándolos y multiplicándolos por λ_0 da como resultado

$$n_i\,(\overline{F_1A}) + n_t\,(\overline{AD}) = \text{constante} \qquad (5.1)$$

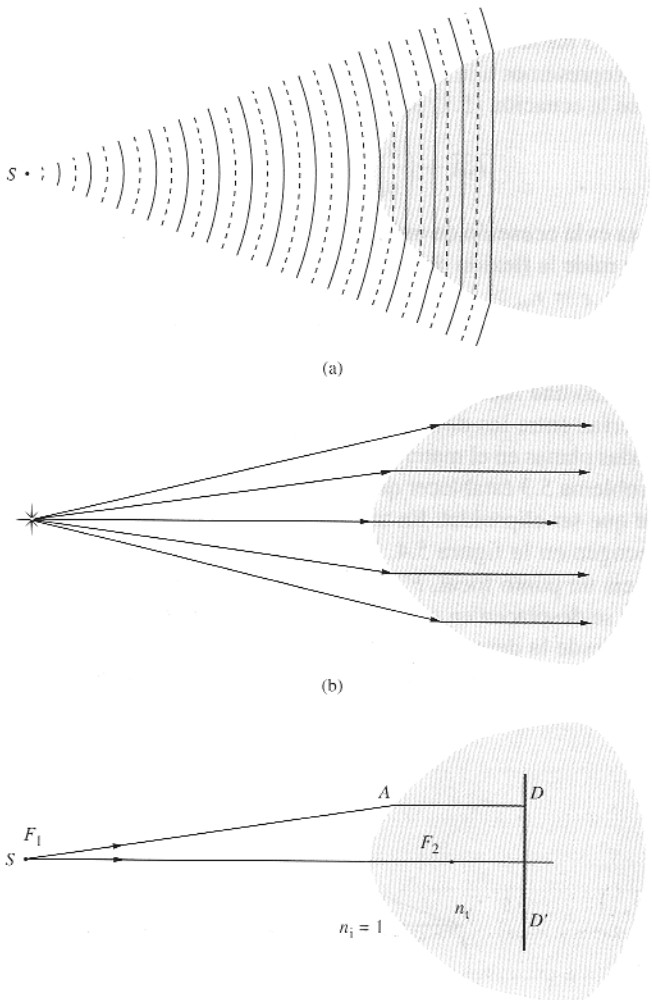


FIGURA 5.3 Una interfaz hiperbólica entre el aire y el vidrio. (*a*) Los frentes de onda se doblany se enderezan. (*b*) Los rayos se hacen paralelos. (*c*) La hipérbola es tal que el camino óptico desde S hasta A hasta D es el mismo dondequiera que esté A.

Cada término a la izquierda representa la longitud que se ha desplazado en un medio multiplicada por el índice del mismo y, naturalmente, cada uno representa la longitud de camino óptico —*LCO*— atravesado. Las longitudes de camino óptico desde S hasta $\overline{DD'}$ son todas iguales. Si la ecuación (5.1) se divide por c, el primer término se convierte en el tiempo que tarda en desplazarse desde S hasta A mientras que el segundo será el tiempo desde A hasta D; el lado derecho permanece constante (si bien no será la misma constante). La ecuación

(5.1) equivale a decir que para cruzar por todos los caminos desde S hasta $\overline{DD'}$ deberá tardarse el mismo tiempo.

Regresemos a la búsqueda de la forma de la interfaz. Divídase la ecuación (5.1) por n_i, de tal forma que

$$\overline{F_1A} + \left(\frac{n_t}{n_i}\right)\overline{AD} = \text{constante} \qquad (5.2)$$

Esta es la ecuación de una hipérbola donde la excentricidad (e) que mide la flexión de la curva, viene dada por $(n_t/n_i) > 1$, es decir, $e = n_{ti} > 1$. Cuanto más grande sea la excentricidad, más plana será la hipérbola (cuanto más grande sea la diferencia de los índices, menor será la curvatura de la superficie). Cuando una fuente puntual esté localizada en el foco F_1 y la interfaz entre los dos medios sea hiperbólica, se transmitirán ondas planas en el material de índice superior. Dejamos para el problema 5.3 establecer que cuando $(n_t/n_i) < 1$, la interfaz tiene que ser elipsoidal. En todos y cada uno de los casos que se recogen en la figura 5.4, los rayos divergen de o convergen hacia un punto focal, F, pudiendo además ser invertidos para que se desplacen en cualquier sentido: si una onda plana incide (desde la derecha) en la interfaz de la figura 5.4*c*, aquélla convergerá (hacia la izquierda) en el foco más lejano del elipsoide.

La primera persona que sugirió utilizar las secciones cónicas como superficies para las lentes y los espejos fue Johann Kepler (1611) cuya idea, sin embargo, no pudo prosperar mucho sin la ley de Snell. Cuando se descubrió esa relación, Descartes (1637) pudo desarrollar las bases teóricas de la óptica de las superficies asféricas recurriendo a la geometría analítica. De hecho el análisis que vamos a presentar aquí de forma resumida es en esencia un regalo de Descartes.

Es sencillo construir lentes de tal manera que los puntos imagen y objeto (o la luz incidente o emergente) se hallen fuera del medio de la lente. En la figura 5.5*a* las ondas esféricas incidentes divergentes se convierten en ondas planas en la primera interfaz a través del mecanismo de la figura 5.4*a*. Estas ondas planas dentro de la lente dan en la cara posterior perpendicularmente, emergiendo sin alterarse: $\theta_i = 0$ y $\theta_t = 0$. Puesto que los rayos son reversibles, las ondas planas incidentes desde la derecha convergerán hacia el punto F_1 que se denomina punto focal de la lente. Expuesta en su cara plana a los rayos paralelos del Sol, nuestra lente bastante compleja funcionaría bien como vidrio quemador.

En la figura 5.5*b*, las ondas planas dentro de la lente se hacen converger hacia el eje curvándolas en la segunda interfaz. Ambas lentes son más gruesas en su punto medio que en sus extremos,

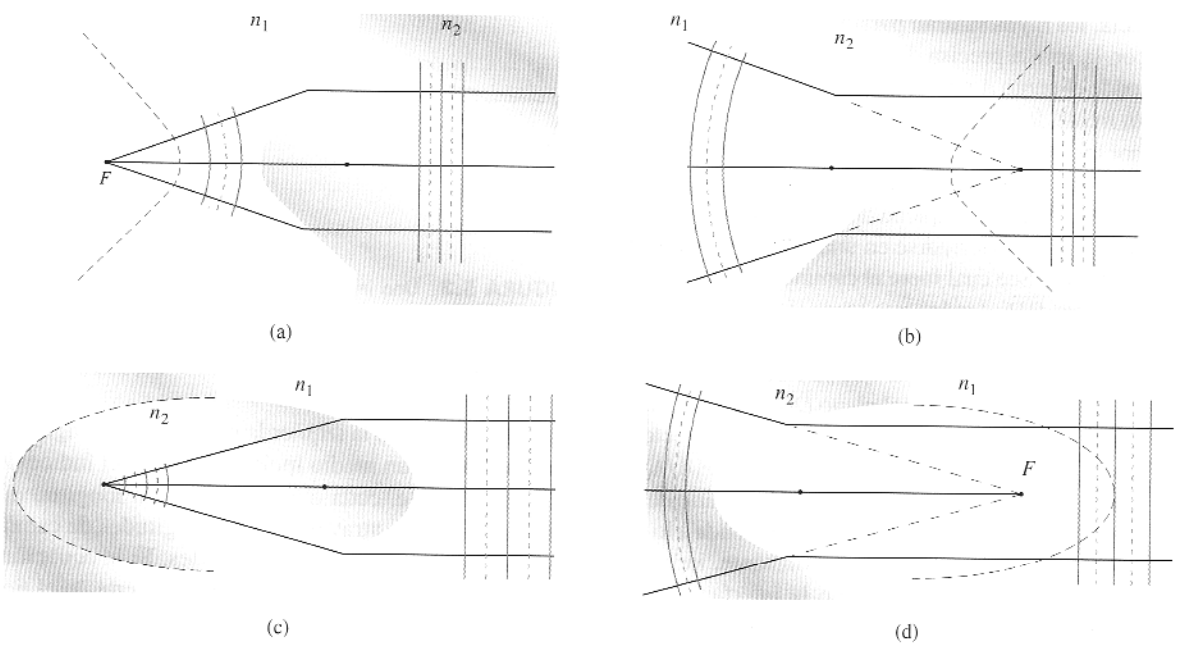
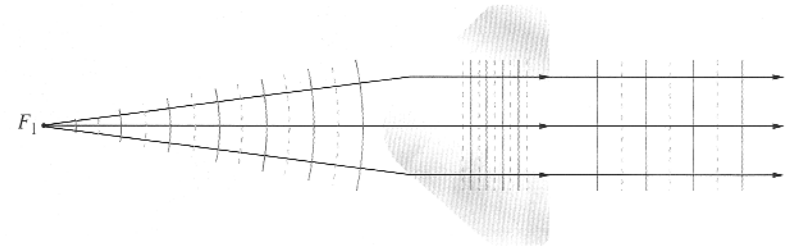
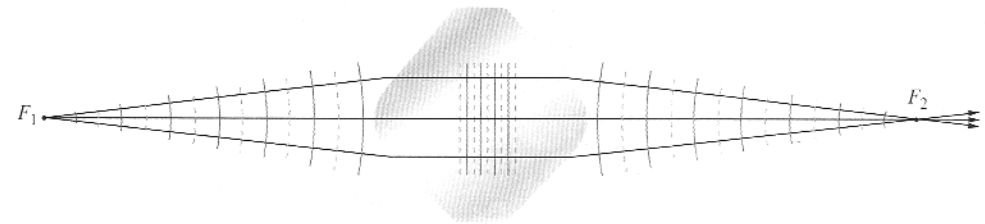


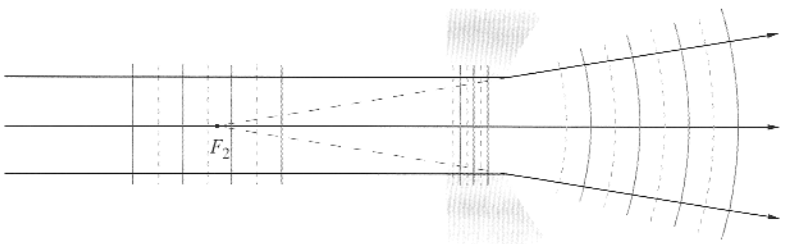
FIGURA 5.4 Superficies refractoras ($n_2 > n_1$) hiperbólicas (*a*) y (*b*) y elipsoidales (*c*) y (*d*) en sección transversal.



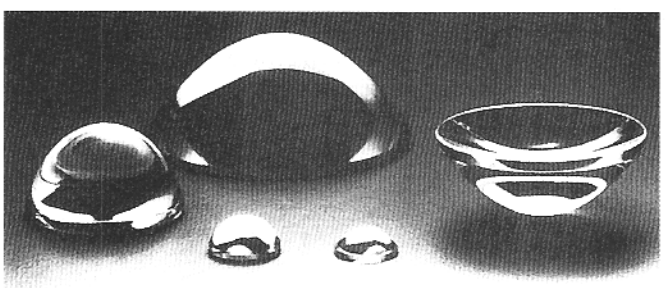
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 5.5 (*a*), (*b*) y (*c*) Varias lentes hiperbólicas vistas en una sección transversal. Para analizar una lente elipsoidal, véase el problema 5.4. (*d*) Selección de lentes asféricas. (Foto cedida por Melles Griot.)

por lo tanto se dice que son **convexas** (del Latín *convexus*, arqueado). Cada una de ellas obliga al haz incidente a converger de algún modo, a curvarse un poco más hacia el eje central; por lo tanto, nos referimos a ellas con el término de **lentes convergentes**. Por el contrario, una lente **cóncava** (del Latín *concavus*, que significa hueco) es más delgada en el centro que en sus extremos, como se puede ver en la figura 5.5*c*. Hace que los rayos que entran como haz paralelo diverjan. Todos estos dispositivos que alejan los rayos exteriores del eje central (y, al hacerlo, añaden divergencia al haz) se denominan **lentes divergentes**. En la figura 5.5*c*, los rayos paralelos entran por la izquierda y, al salir, parecen diverger de F_2; aún así, ese punto se toma como

Ahora quisiéramos escribir δ como función tanto del ángulo de incidencia para el rayo (es decir, θ_{i1}) como del ángulo α del prisma; es de suponer que ambos conocidos. Si el índice del prisma es n y está sumergido en el aire ($n_a \approx 1$), de la Ley de Snell se deduce que

$$\theta_{t2} = \text{sen}^{-1}\,(n \text{ sen } \theta_{i2}) = \text{sen}^{-1}\,[n \text{ sen } (\alpha - \theta_{t1})]$$

Después de desarrollar esta expresión, reemplazando cos θ_{t1} por $(1 - \text{sen}^2\,\theta_{t1})^{1/2}$ y de usar la ley de Snell, obtenemos

$$\theta_{t2} = \text{sen}^{-1}\,[(\text{sen } \alpha)(n^2 - \text{sen}^2\,\theta_{i1})^{1/2} - \text{sen } \theta_{i1} \cos \alpha]$$

La desviación será pues

$$\delta = \theta_{i1} + \text{sen}^{-1}\,[(\text{sen } \alpha)(n^2 - \text{sen}^2\,\theta_{i1})^{1/2} - \text{sen } \theta_{i1} \cos \alpha] - \alpha \qquad (5.53)$$

Al parecer, δ aumenta con n que en sí misma es una función de la frecuencia, así que podríamos designar la desviación como $\delta(\nu)$ o $\delta(\lambda)$. Para la mayoría de los dieléctricos transparentes de interés práctico $n(\lambda)$ disminuye a medida que la longitud de onda aumenta en el visible [remítanse a la figura 3.38 para ver una representación gráfica de $n(\lambda)$ frente a λ para varios cristales]. Está claro que $\delta(\lambda)$ será menor para la luz roja que para la azul.

En los informes de los misioneros que regresaban de Asia al comienzo del siglo XVII se reseñaba que los prismas eran muy conocidos y muy valorados en China gracias a su capacidad para generar color. Varios científicos de la época, particularmente Marci, Grimaldi y Boy habían hecho algunas observaciones usando los prismas pero fue el insigne Sir Isaac Newton quien llevó a cabo los primeros estudios definitivos sobre la dispersión. El 6 de febrero de 1672, Newton presentó un artículo clásico ante la Royal Society bajo el título «*Una nueva teoría acerca de la luz y de los colores*» en la que llegó a la conclusión que la luz blanca consistía en una mezcla de varios colores y que el proceso de refracción dependía del color.

Retomando la ecuación (5.53), es evidente que la desviación sufrida por un haz monocromático al atravesar un prisma determinado (es decir, n y α son fijas) es una función solamente del ángulo de incidencia en la primera cara, θ_{i1}. En la figura 5.64 se recoge un gráfico de los resultados de la ecuación (5.53) aplicada a un prisma típico de vidrio. El valor más pequeño de δ se denomina **desviación mínima**, δ_m, y es de interés especial por razones prácticas. Si bien su valor puede

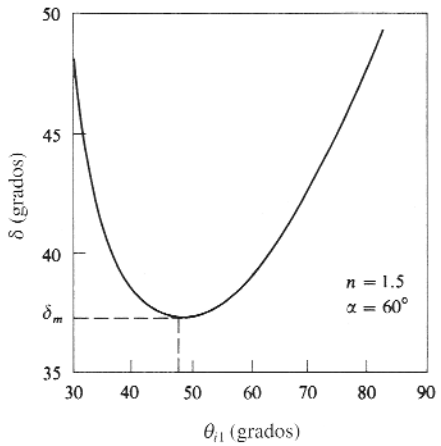


FIGURA 5.64 Desviación contra ángulo de incidencia.

determinarse analíticamente derivando la ecuación (5.53) y fijando sucesivamente $d\delta/d\theta_{i1} = 0$, un camino más indirecto será más simple. Derivando la ecuación (5.52) y estableciendo su valor igual a cero, obtenemos

$$\frac{d\delta}{d\theta_{i1}} = 1 + \frac{d\theta_{t2}}{d\theta_{i1}} = 0$$

o $d\theta_{t2}/d\theta_{i1} = -1$. Tomando la derivada de la ley de Snell en cada interfaz, obtenemos

$$\cos \theta_{i1}\, d\theta_{i1} = n \cos \theta_{t1}\, d\theta_{t1}$$

y

$$\cos \theta_{t2}\, d\theta_{t2} = n \cos \theta_{i2}\, d\theta_{i2}$$

Al derivar la ecuación (5.51), nótese también que $d\theta_{t1} = -d\theta_{i2}$, ya que $d\alpha = 0$. Dividiendo las dos últimas ecuaciones y sustituyendo las derivadas, obtenemos

$$\frac{\cos \theta_{i1}}{\cos \theta_{t2}} = \frac{\cos \theta_{t1}}{\cos \theta_{i2}}$$

Utilizando la ley de Snell una vez más, esto podría volverse a escribir como

$$\frac{1 - \text{sen}^2\,\theta_{i1}}{1 - \text{sen}^2\,\theta_{t2}} = \frac{n^2 - \text{sen}^2\,\theta_{i1}}{n^2 - \text{sen}^2\,\theta_{t2}}$$

El valor de θ_{i1} para el cual lo anterior es cierto es aquel que $d\delta/d\theta_{i1} = 0$. Ya que $n \neq 1$, se deduce que

$$\theta_{i1} = \theta_{t2}$$

Por consiguiente, no debe sorprendernos si la gran mayoría de las lentes que ahora se usan tienen superficies que sean segmentos de esfera. Nuestro intento aquí es establecer las técnicas a fin de usar tales superficies con las que formar simultáneamente las imágenes de muchos puntos objeto con luz compuesta por una banda ancha de frecuencias. Si bien se dan los errores de imagen, denominados **aberraciones,** con la tecnología actual es posible construir sistemas de lentes esféricas de alta calidad cuyas aberraciones estén tan bien controladas que la fidelidad en la imagen este sólo limitada por la difracción.

La figura 5.7 muestra una onda procedente de la fuente puntiforme S que incide en una interfaz esférica de radio R centrada en C. El punto V se denomina **vértice** de la superficie mientras que la longitud $s_O = \overline{SV}$ es la **distancia objeto.** El rayo $\overline{SA}$ será refractado en la interfaz hacia la normal local ($n_2 > n_1$) y por consiguiente hacia el **eje óptico** o central. Supongamos que en algún punto. P, el rayo cruce el eje como lo harán otros rayos incidentes con el mismo ángulo θ_i (figura 5.8). La longitud $s_i = \overline{VP}$ es la **distancia imagen**. El principio de Fermat establece que la longitud de camino óptico LCO será estacionaria, es decir su derivada con respecto a la variable de posición será cero. Para el rayo en cuestión

$$OPL = n_1\ell_o + n_2\ell_i \tag{5.3}$$

Utilizando la ley de los cosenos en los triángulos SAC y ACP junto con el hecho de que $\cos\varphi = -\cos(180° - \varphi)$, obtenemos

$$\ell_o = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\varphi]^{1/2}$$

y

$$\ell_i = [R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\varphi]^{1/2}$$

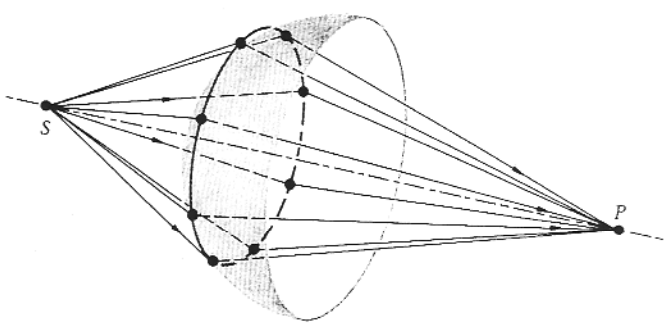


FIGURA 5.8 Rayos incidentes con el mismo ángulo.

Tabla 5.1 Convenio de signos para superficies refractoras y lentes delgadas* (luz entrando por la izquierda).

s_o, f_o	+ izquierda de V
x_o	+ izquierda de F_o
s_i, f_i	+ derecha de V
x_i	+ derecha de F_i
R	+ si C está a la derecha de V
y_o, y_i	+ encima del eje óptico

* Esta tabla anticipa la introducción inminente de varias cantidades de las que aún no se ha hablado.

La LCO puede escribirse como

$$LCO = n_1[R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\varphi]^{1/2} + n_2[R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\varphi]^{1/2}$$

Todas las cantidades en el diagrama, es decir, s_i, s_o, R, etc., son números positivos que forman la base de un *convenio de signos* que se está desarrollando gradualmente y a la que nos remitiremos de vez en cuando (véase tabla 5.1). Puesto que el punto A se mueve en el extremo de un radio fijo (es decir, R = constante), φ es la variable de posición, por lo tanto estableciendo $d(LCO)/d\varphi = 0$ por medio del principio de Fermat, obtenemos

$$\frac{n_1R(s_o + R)\,\text{sen}\,\varphi}{2\ell_o} - \frac{n_2R(s_i - R)\text{sen}\,\varphi}{2\ell_i} = 0 \tag{5.4}$$

de lo cual se deduce que

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2s_i}{\ell_i} - \frac{n_1s_o}{\ell_o}\right) \tag{5.5}$$

Esta es la relación que debe regir entre los parámetros de un rayo que va de S a P por medio de la refracción en la interfaz esférica. Aunque esta expresión sea exacta, es muy compleja. Si A se mueve a una nueva posición cambiando φ, el nuevo rayo no interceptará el eje óptico en P. (Véase el problema 5.1 relativo al óvalo cartesiano que es la configuración de la interfaz que llevaría cualquier rayo hasta P, independientemente de φ).

tes al comparar las tablas 5.3 y 5.5 que son idénticas en todo sentido.

Las propiedades que se resumen en la tabla 5.5 y se ilustran en la figura 5.61 pueden comprobarse empíricamente de manera muy sencilla. Si no disponemos de un espejo esférico a mano, puede hacerse uno muy rudimentario pero funcional moldeando una hoja de aluminio cuidadosamente sobre una forma esférica tal como la parte superior una bombilla (en ese caso particular R y, por lo tanto f, serán pequeños). Un bonito experimento cualitativo consiste en examinar la imagen de un pequeño objeto formada por un espejo cóncavo de distancia focal corta. Al mover el objeto hacia el espejo desde una distancia superior a $2f = R$, la imagen aumentará gradualmente hasta que en $s_o = 2f$ aparecerá invertida y de tamaño natural. Acercándolo más, la imagen aumentará más todavía hasta que llene todo el espejo con una mancha irreconocible. A medida que s_o se hace más pequeña, la imagen que ahora es recta y aumentada continuará disminuyendo hasta que el objeto finalmente descanse en el espejo, donde la imagen tendrá de nuevo tamaño natural. Si todo esto no es suficiente como para motivarnos de inmediato para hacer un espejo, podríamos tratar de examinar la imagen formada por una cuchara reluciente, cualquiera de los lados será interesante.

Tabla 5.5 Imágenes de objetos reales formadas por espejos esféricos

Cóncavo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
$\infty > s_o > 2f$	Real	$f < s_i < 2f$	Invertida	Disminuida
$s_o = 2f$	Real	$s_i = 2f$	Invertida	Mismo tamaño
$f < s_o < 2f$	Real	$\infty > s_i > 2f$	Invertida	Aumentada
$s_o = f$		$\pm\infty$		
$s_o < f$	Virtual	$\lvert s_i\rvert > s_o$	Derecha	Aumentada

Convexo				
Objeto	Imagen			
Posición	Tipo	Posición	Orientación	Tamaño relativo
Cualquier lugar	Virtual	$\lvert s_i\rvert < \lvert f\rvert$, $s_o > \lvert s_i\rvert$	Derecha	Disminuida

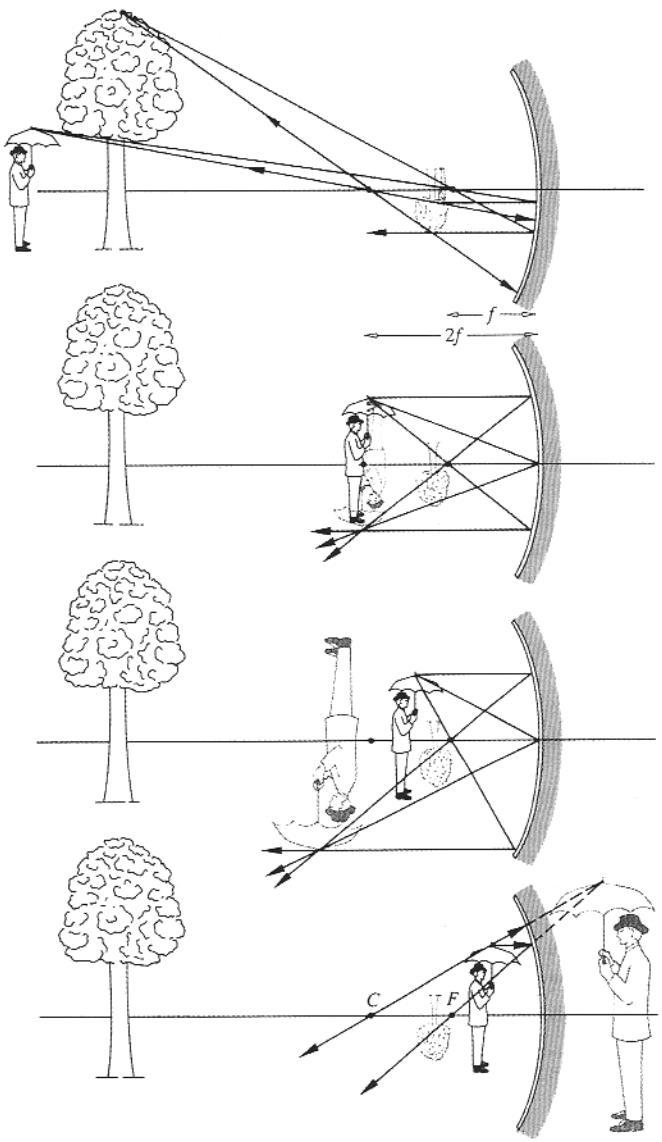


FIGURA 5.61 El comportamiento de un espejo esférico cóncavo que lleva a la formación de la imagen.

5.5 Prismas

Los prismas desempeñan muchos papeles diferentes en la óptica; hay combinaciones de prismas que sirven como divisores de haz, sistemas polarizadores (véase sección 8.4.3) e

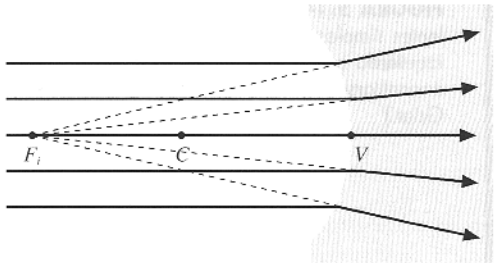


FIGURA 5.11 Un punto imagen virtual.

to axial F_i, donde la imagen se forma cuando $s_o = \infty$, es decir

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Si establecemos que la **segunda distancia focal** o **imagen focal** f_i equivale a la distancia s_i, en este caso especial (figura 5.10) tenemos

$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R \qquad (5.10)$$

Recordemos que una imagen es virtual cuando los rayos divergen de ella (figura 5.11). De manera análoga, ***un objeto es virtual cuando los rayos convergen hacia él*** (figura 5.12). Obsérvese que el objeto virtual está ahora a la derecha del vértice y, por consiguiente, s_o se tomará como una cantidad negativa. Además, la superficie es cóncava y su radio será también negativo como lo requiere la ecuación (5.9) ya que f_o sería negativo. De la misma manera, la distancia a la imagen virtual que aparece a la izquierda de V es negativa.

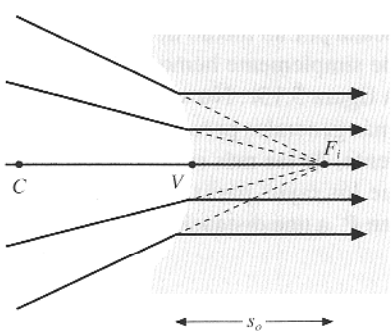


FIGURA 5.12 Un punto objeto virtual.

5.2.3 Lentes delgadas

Existe una amplia gama de formas de lentes tales como, por ejemplo, las lentes acústicas y de microondas; algunas de las últimas se hacen de vidrio o de cera con formas fácilmente reconocibles mientras que otras son bastante más sutiles en apariencia (figura 5.13). En la mayoría de los casos, una lente tiene dos o más interfaces refractoras de las cuales por lo menos una está curvada. Generalmente, las superficies no planas están centradas en un eje común; muy a menudo, son segmentos esféricos recubiertos con películas dieléctricas delgadas que controlan sus propiedades de transmisión (ver sección 9.9).

Una lente que esté formada por un elemento (es decir, cuando tiene sólo dos superficies refractoras), es una *lente simple.* La presencia de más de un elemento la convierte en *lente compuesta.* Una lente puede también clasificarse en *delgada* o *gruesa,* bien sea que su espesor sea efectivamente despreciable o no. Nos limitaremos, en la mayoría de los casos, a *sistemas centrados* (para los cuales todas las superficies son rotacionalmente simétricas alrededor de un eje común) de superficies

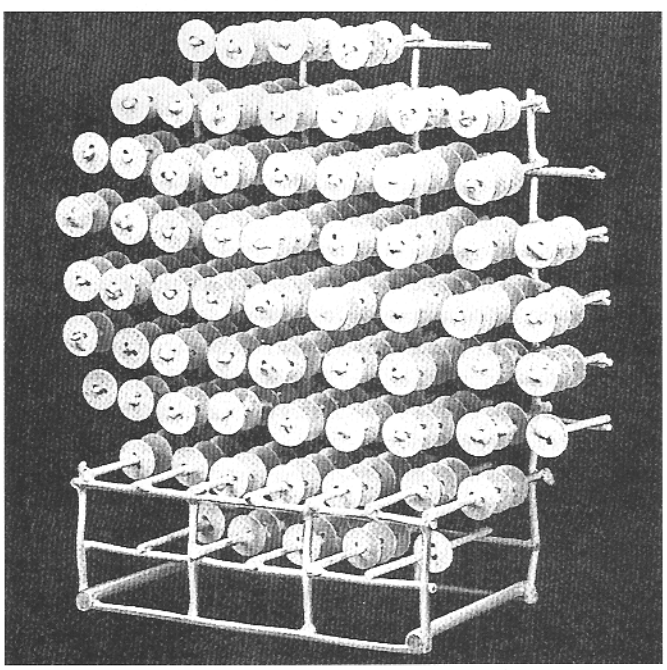


FIGURA 5.13 Lente para ondas de radio de longitud de onda corta. Los discos sirven para refractar estas ondas en la misma forma que las series de átomos refractan la luz. (Foto cedida por Optical Society of America.)

FIGURA 5.57 Un espejo esférico convexo que forma una imagen reducida, derecha y virtual. Intenten localizar la imagen del autor.

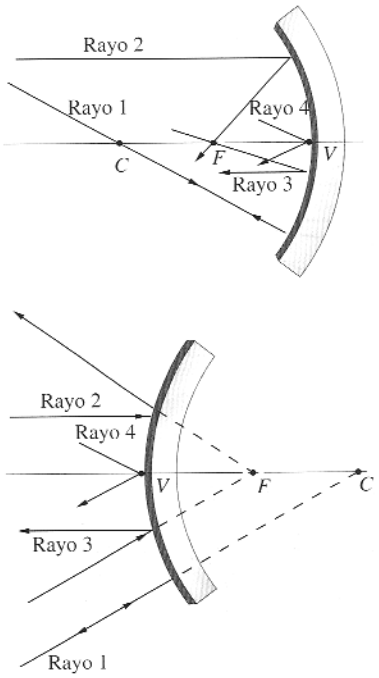


FIGURA 5.58 Cuatro rayos fáciles de trazar. El rayo 1 se dirige hacia C y se refleja hacia atrás en su mismo recorrido. El rayo 2 llega paralelo al eje y se refleja hacia F o alejándose de él. El rayo 3 pasa a través de (o se dirige a) F reflejándose paralelamente al eje. El rayo 4 choca con el punto V y se refleja de tal manera que $\theta_i = \theta_r$.

Formación de Imágenes Finitas

Las demás propiedades de los espejos son tan similares a las de las lentes y superficies refractoras esféricas que solamente necesitaremos mencionarlas brevemente sin tener que repetir todo el desarrollo lógico de cada una. Dentro de las restricciones de la teoría paraxial, cualquier haz de rayos paralelos descentrados del eje será enfocado en un punto en el *plano focal,* normal al eje óptico, que pasa a través de F. De la misma forma, un objeto plano finito perpendicular al eje óptico formará su imagen (en una primera aproximación) en un plano con una orientación similar; cada objeto puntual tendrá un punto imagen correspondiente en ese plano. Esto resulta ser totalmente cierto para un espejo plano, siendo sin embargo tan sólo aproximado para otras configuraciones.

Si un espejo esférico se utiliza de forma limitada, las ondas reflejadas que emanan de cada punto objeto se aproximarán mucho a ondas esféricas. Bajo tales circunstancias, se pueden formar buenas imágenes finitas de objetos extensos.

Si cada punto imagen producido por una lente delgada se halla a lo largo de una línea recta que pasa por el centro óptico O, cada punto imagen de un espejo esférico se hallará en un rayo que pasa tanto a través del centro de curvatura C como del punto objeto (figura 5.58). Al igual que con las lentes delgadas (figura 5.24), el proceso para localizar gráficamente la imagen es muy directo (figura 5.59). La parte superior de la imagen está fijada por la intersección de dos rayos, uno inicialmente paralelo al eje y que pasa a través de F después de reflejarse, el otro que atraviesa directamente C (figura 5.60). El rayo que sale de cualquier punto objeto fuera de eje hasta el vértice forma los mismos ángulos con el eje central al reflejarse siendo, por lo tanto, particularmente conveniente de construir. Lo mismo vale para el rayo que atraviesa primero el foco emergiendo, después de reflejarse, paralelo al eje.

Obsérvese que los triángulos S_1S_2V y P_1P_2V de la figura 5.59*a* son similares y, por consiguiente, sus lados son proporcionales. Imaginando que y_i sea negativa como lo hicimos anteriormente, ya que se halla por debajo del eje, $y_i/y_o = -s_i/s_o$ que es igual a M_T. Se trata del *aumento lateral o transversal,* como lo era para las lentes [ecuación (5.25)].

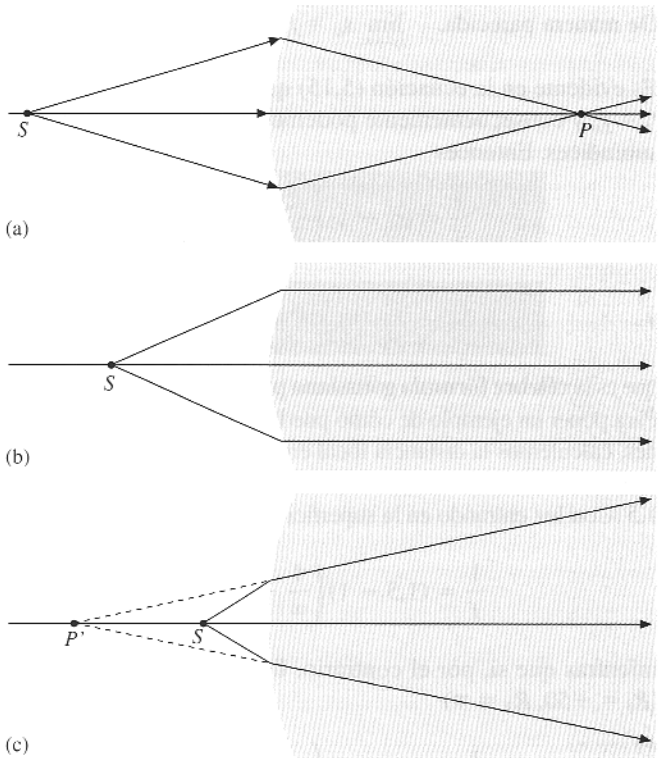


FIGURA 5.15 Refracción en una interfaz esférica entre dos medios transparentes que se muestran en sección transversal.

$$\frac{n_m}{s_{o1}} + \frac{n_l}{s_{i1}} = \frac{n_l - n_m}{R_1} \tag{5.11}$$

Por lo tanto, referente a la segunda superficie, ésta «ve» avanzar los rayos de P' que le sirve como objeto punto colocado a una distancia s_{o2}. Además, los rayos que llegan a la segunda superficie se hallan en el medio del índice n_l. Entonces, el espacio objeto para la segunda interfaz que contiene P', tiene un índice n_l. Obsérvese que los rayos de P' a esa superficie son, en efecto, líneas rectas. Considerando el hecho de que

$$|s_{o2}| = |s_{i1}| + d$$

puesto que s_{o2} está a la izquierda siendo, por lo tanto positivo, $s_{o2} = |s_{o2}|$ y que s_{i1} también está a la izquierda siendo, por consecuencia, negativo, es decir, $-s_{i1} = |s_{i1}|$, tenemos

$$s_{o2} = -s_{i1} + d \tag{5.12}$$

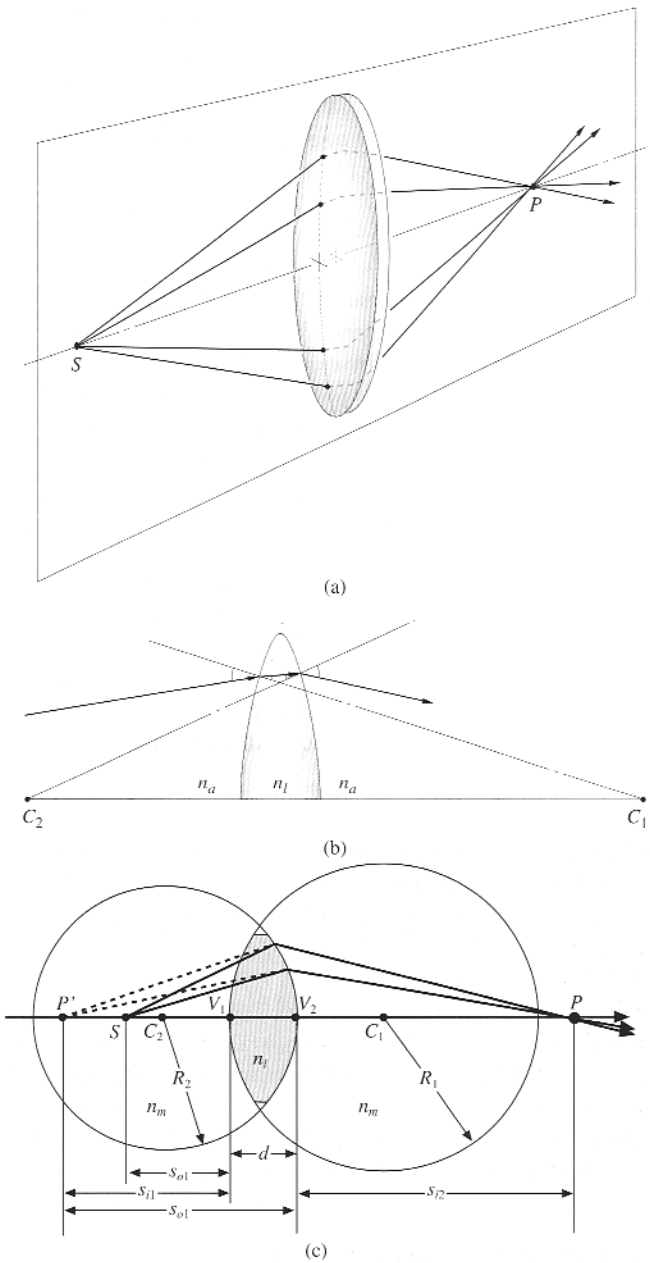


FIGURA 5.16 Lente esférica. (*a*) Rayos en un plano vertical atravesando una lente. Focos conjugados. (*b*) Refracción en las interfaces. El radio trazado desde C_1 es normal a la primera superficie y a medida que el rayo entra en la lente, se dobla hacia abajo *en dirección a* la normal. El radio desde C_2 es normal a la segunda superficie; a medida que el rayo emerge, ya que $n_l > n_a$, el radio se dobla *alejándose* de la normal. (*c*) Geometría.

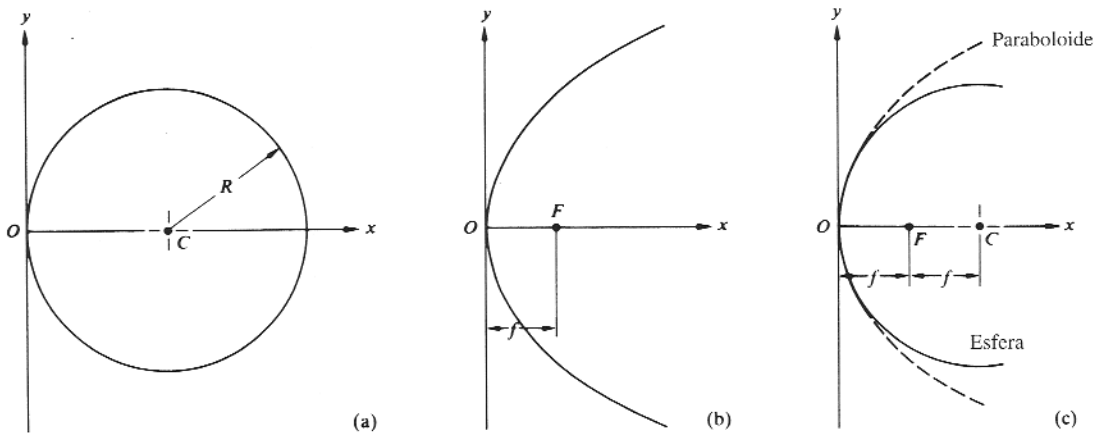


FIGURA 5.54 Comparación de un espejo esférico y otro paraboloidal.

La Fórmula de los Espejos

La ecuación paraxial que relaciona el objeto conjugado y puntos imagen con los parámetros físicos de un espejo esférico pueden deducirse muy fácilmente con la ayuda de la figura 5.55. Para ello, obsérvese que como $\theta_i = \theta_r$, el $\measuredangle SAP$ es cortado en dos partes iguales por $\overline{CA}$ que, por consiguiente, divide el lado $\overline{SP}$ del triángulo SAP en segmentos proporcionales a los dos lados restantes, esto es

$$\frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{PA}} \tag{5.47}$$

Además

$$\overline{SC} = s_o - |R| \quad \text{y} \quad \overline{CP} = |R| - s_i$$

donde s_o y s_i están a la izquierda siendo, por lo tanto, positivas. Si utilizamos la misma convención de signos que usamos cuando analizamos la refracción, R será negativa porque C se halla a la izquierda de V es decir, la superficie es cóncava. Entonces $|R| = -R$ y

$$\overline{SC} = s_o + R \quad \text{y} \quad \overline{CP} = -(s_i + R)$$

En la región paraxial $\overline{SA} \approx s_o$, $\overline{PA} \approx s_i$, y así la ecuación (5.47) queda

$$\frac{s_o + R}{s_o} = -\frac{s_i + R}{s_i}$$

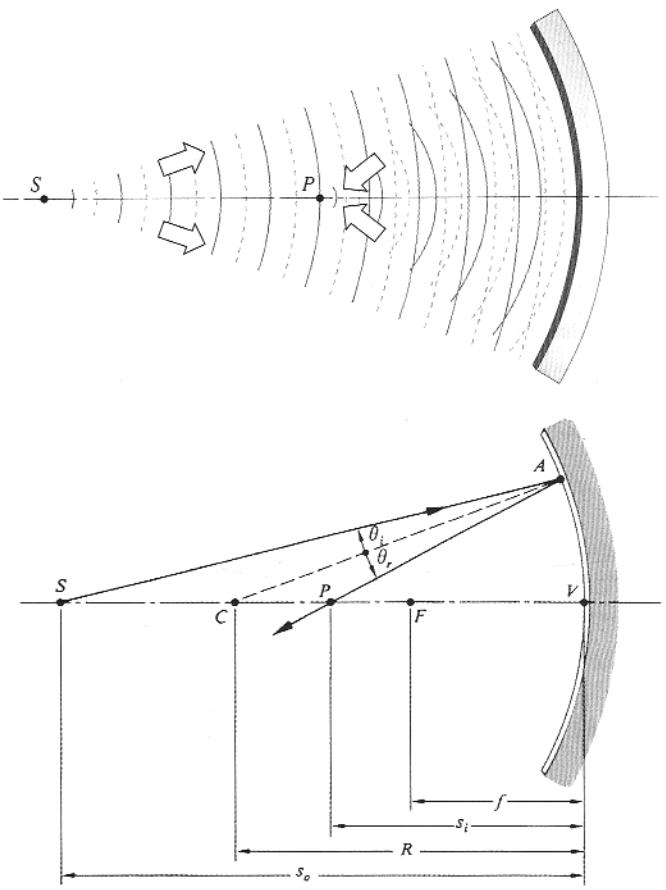


FIGURA 5.55 Espejo esférico cóncavo. Focos conjugados.

y, en cualquier caso, $f = 100$ mm. Si, en cambio, un objeto se coloca a las distancias de 600 mm, 200 mm, 150 mm, 100 mm y 50 mm de la lente en cada lado, podemos calcular los puntos imagen de la ecuación (5.17):

$$s_i = \frac{s_o f}{s_o} - f = \frac{(600)(100)}{600 - 100}$$

y $s_i = 120$ mm. De manera parecida, las otras distancias imagen son 200 mm, 300 mm, ∞ y -100 mm respectivamente.

Es interesante observar que, cuando $s_o = \infty$, $s_i = f$; a medida que s_o disminuye, s_i aumenta positivamente hasta que $s_o = f$ y s_i será negativo de ahí en adelante. Esto puede verificarse cualitativamente con una lente convexa simple y una pequeña luz eléctrica —una de alta intensidad es la más adecuada—. Permaneciendo tan lejos como se pueda de la fuente, proyecte una imagen clara en una hoja blanca de papel. Debería verse la lámpara muy clara y no solamente una mancha; esa distancia imagen se aproxima a f. Ahora movamos la lente hacia S, ajustando s_i de manera que produzca una imagen clara. Ciertamente aumentará. Cuando $s_o \to f$, puede proyectarse una imagen clara de la lámpara, pero sólo sobre una pantalla cuya distancia es cada vez mayor. Para $s_o < f$ solamente habrá una mancha donde la pared más lejana cruza el cono divergente de rayos, o sea, la imagen es virtual.

Puntos y Planos Focales

La figura 5.18 resume gráficamente algunas de las situaciones descritas analíticamente por la ecuación 5.16. Obsérvese que si una lente de índice n_l se sumerge en un medio de índice n_m

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (5.18)$$

Las distancias focales en (a) y (b) de la figura 5.18 son iguales porque en ambos lados de la lente existe el mismo medio. Como $n_l > n_m$ se deduce que $n_{lm} > 1$. En ambos casos $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$ de tal manera que cada distancia focal sea positiva.

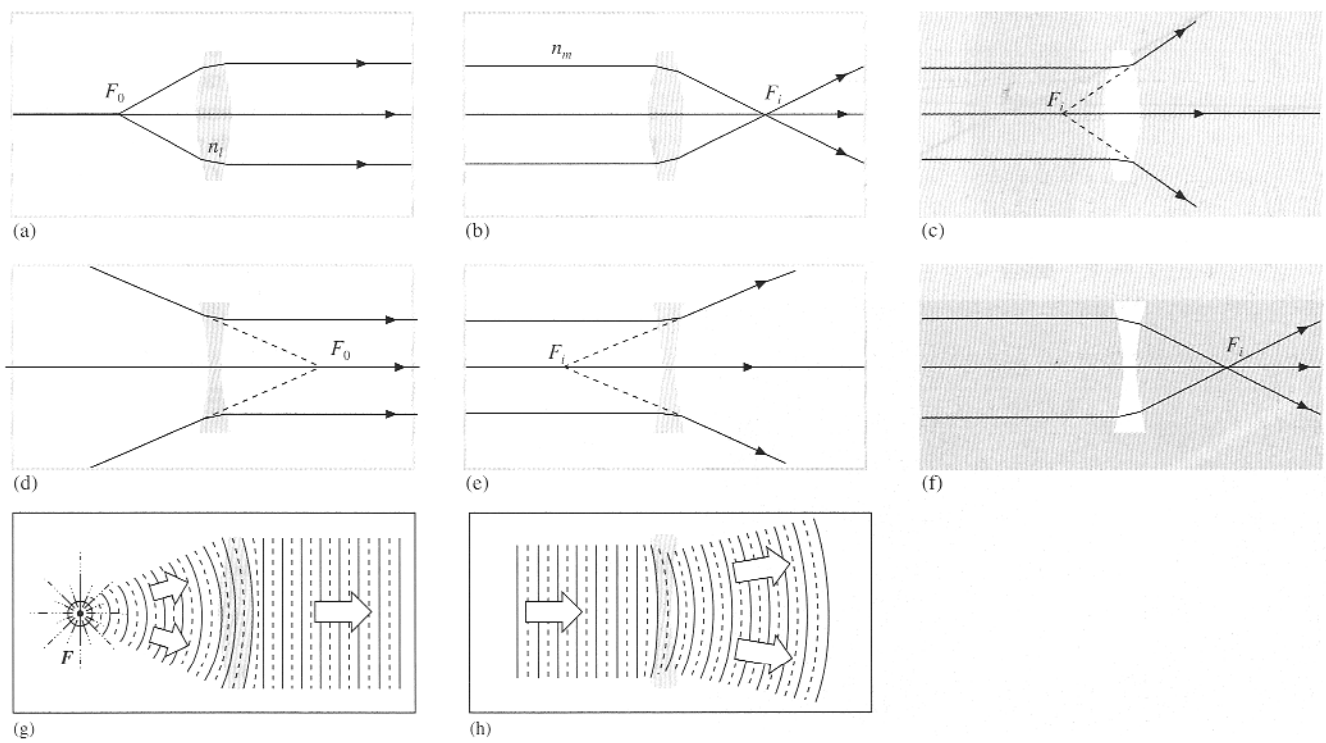


FIGURA 5.18 Distancias focales para lentes convergentes y divergentes.

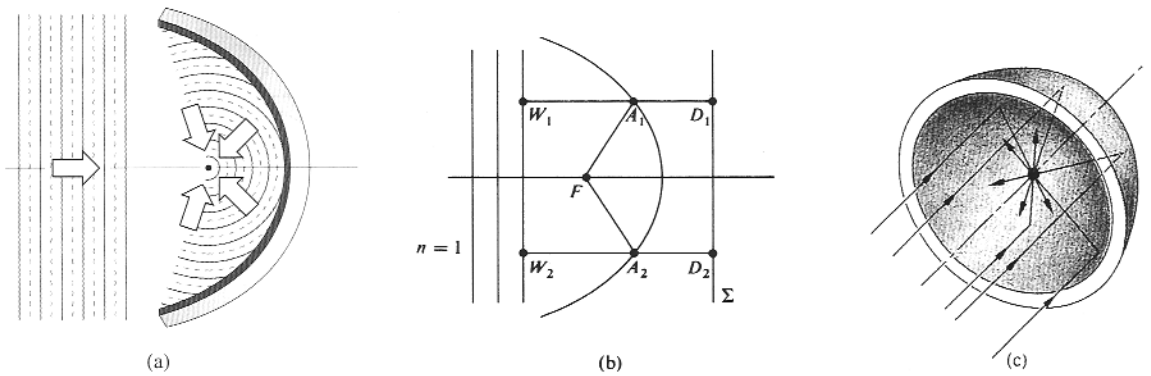


FIGURA 5.48 Espejo paraboloidal.

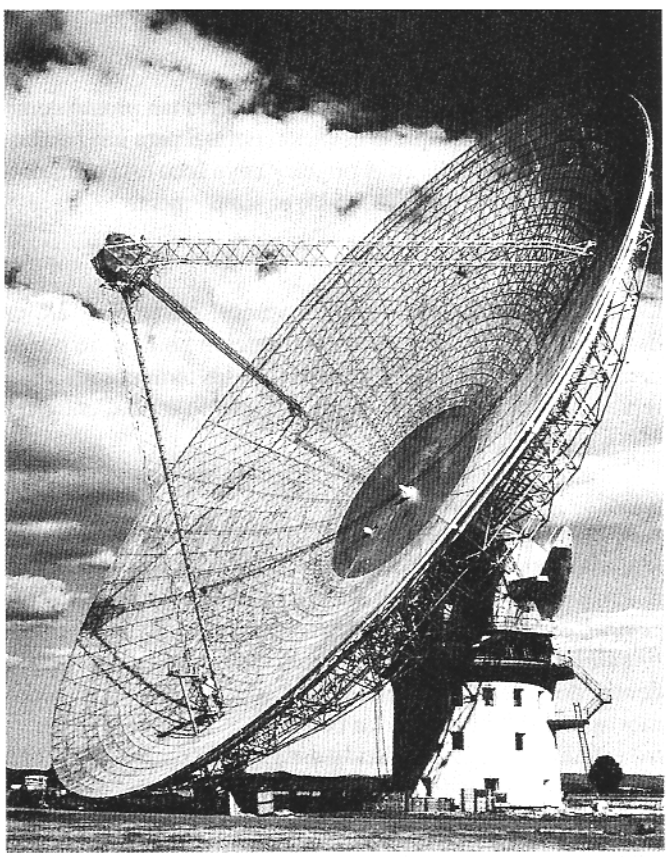


FIGURA 5.49 Antena de radio paraboloidal clásica. (Foto cedida por Australian News and Information Bureau.)

La Región Paraxial

La bien conocida ecuación para la sección circular transversal de una esfera (figura 5.54*a*) es

$$y^2 + (x - R)^2 = R^2 \tag{5.43}$$

donde el centro C está desplazado del origen O por un radio R. Después de escribir esto como

$$y^2 - 2Rx + x^2 = 0$$

podemos despejar x

$$x = R \pm (R^2 - y^2)^{1/2} \tag{5.44}$$

Nos ocuparemos tan sólo de los valores de x menores que R, es decir, estudiaremos un hemisferio, abierto a la derecha, correspondiente al signo menos en la ecuación (5.44). Des-

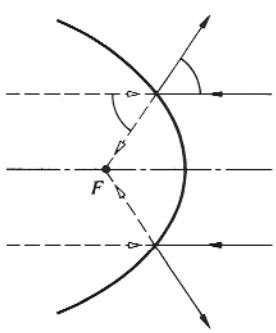


FIGURA 5.50 Imágenes real y virtual de un espejo paraboloidal.

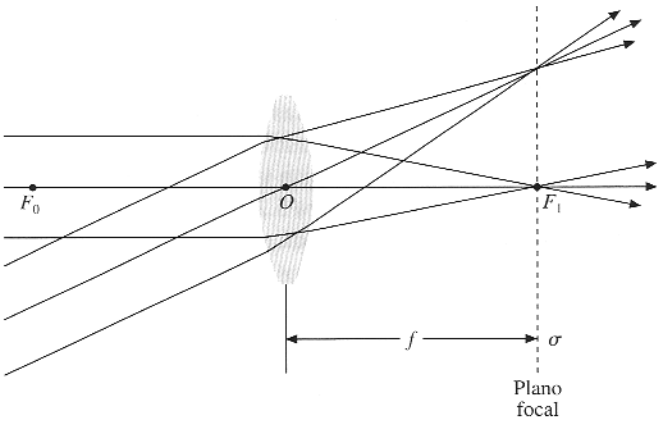


FIGURA 5.21 Plano focal de una lente.

Formación de Imágenes Finitas

Si hasta ahora nos hemos ocupado de la abstracción matemática de una fuente puntual individual, ahora pasamos a analizar una gran cantidad de dichos puntos que se combinan para formar un objeto finito continuo (figura 5.2). Por el momento, imaginemos que el objeto es un segmento de una esfera σ_o centrado en C como en la figura 5.22. Si σ_o está cerca

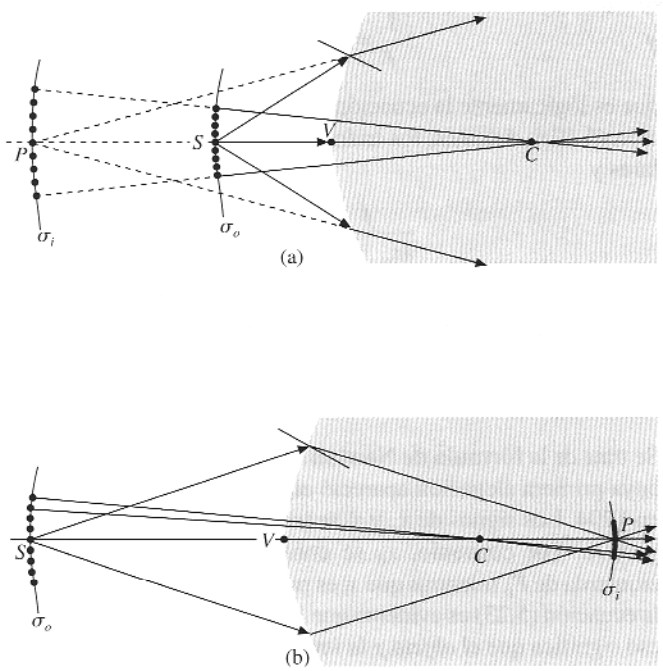


FIGURA 5.22 Imágenes finitas.

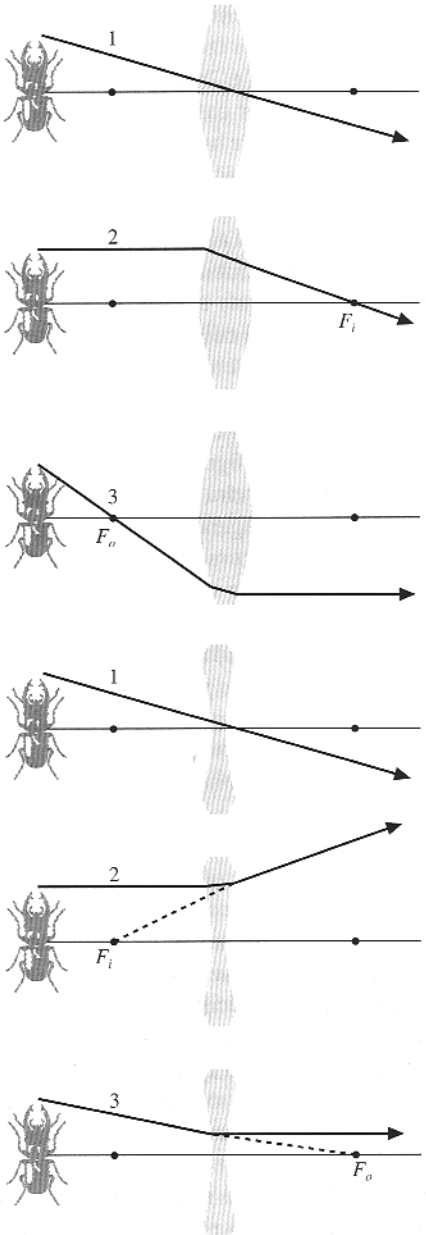
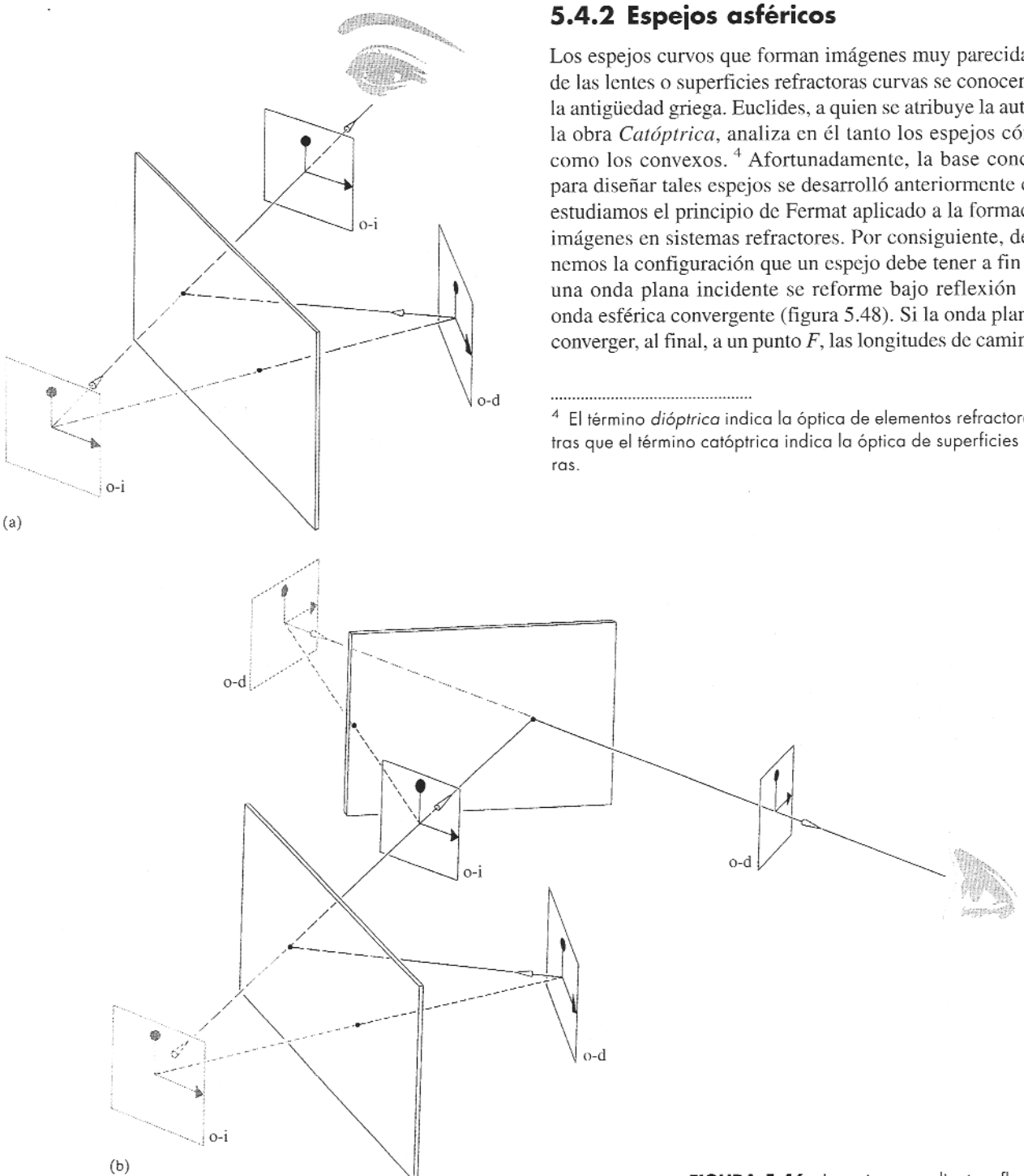


FIGURA 5.23 Trazado de algunos rayos clave a través de una lente positiva y negativa.

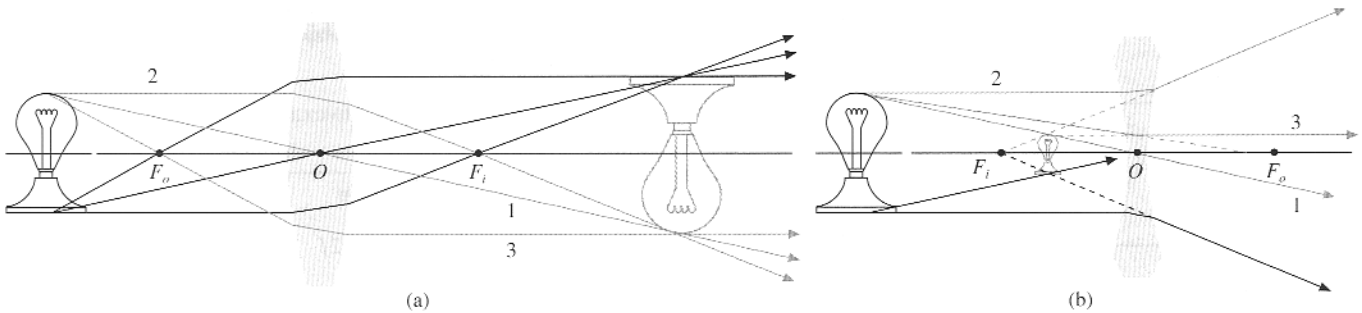


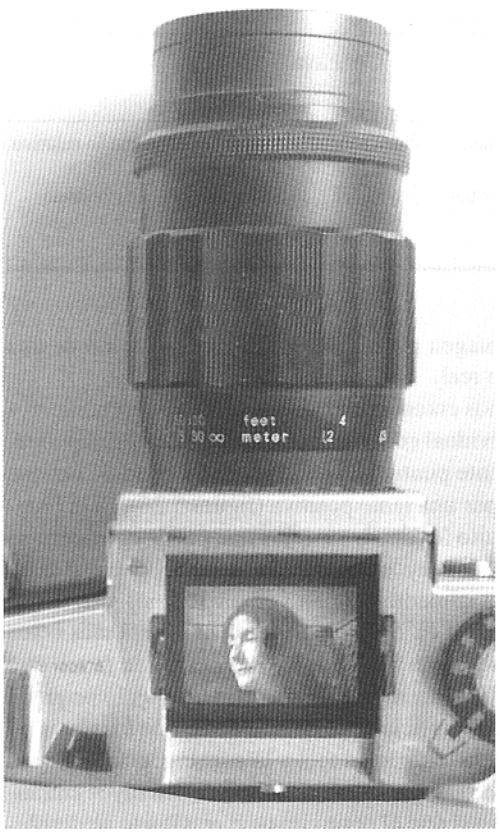
5.4.2 Espejos asféricos

Los espejos curvos que forman imágenes muy parecidas a las de las lentes o superficies refractoras curvas se conocen desde la antigüedad griega. Euclides, a quien se atribuye la autoría de la obra *Catóptrica*, analiza en él tanto los espejos cóncavos como los convexos. [4] Afortunadamente, la base conceptual para diseñar tales espejos se desarrolló anteriormente cuando estudiamos el principio de Fermat aplicado a la formación de imágenes en sistemas refractores. Por consiguiente, determinemos la configuración que un espejo debe tener a fin de que una onda plana incidente se reforme bajo reflexión en una onda esférica convergente (figura 5.48). Si la onda plana debe converger, al final, a un punto F, las longitudes de camino ópti-

[4] El término *dióptrica* indica la óptica de elementos refractores mientras que el término catóptrica indica la óptica de superficies reflectoras.

FIGURA 5.46 Inversiones mediante reflexión.





(c)

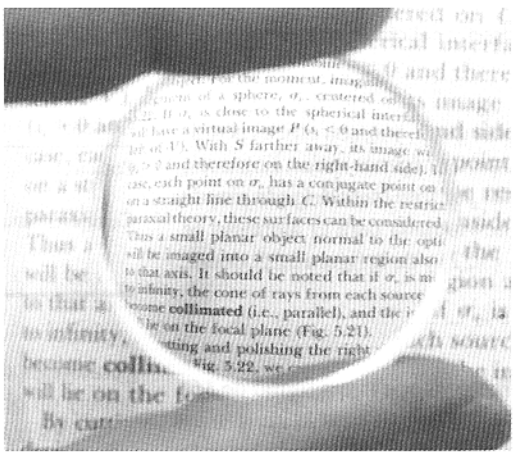

(d)

FIGURA 5.24 (*a*) Un objeto real y una lente positiva. (*b*) Un objeto real y una lente negativa. (*c*) Una imagen real proyectada en la pantalla de visualización de una cámara de 35 mm, de la misma manera que un ojo proyecta su imagen en la retina. Habiéndose aquí eliminado un prisma, puede verse la imagen directamente. (E.H.). (*d*) La imagen virtual reducida, derecha, formada por una lente negativa.

de rayos, lo que normalmente hace mal. La relación de las dimensiones transversales de la imagen final formada por cualquier sistema óptico con la dimensión correspondiente del objeto se define como el *aumento lateral o* ***transversal***, M_T, es decir

$$M_T \equiv \frac{y_i}{y_o} \tag{5.24}$$

O de la ecuación (5.20)

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} \tag{5.25}$$

Entonces, ***un M_T positivo indica una imagen derecha mientras que un valor negativo significa que la imagen está invertida***

espejos se hacían generalmente recubriendo el vidrio con plata, escogiéndose esta última por su alta eficacia en el UV y el IR (véase figura 4.62). Hoy en día, los recubrimientos de aluminio evaporados al vacío sobre substratos altamente pulidos han quedado como el estándar para los espejos de calidad. A menudo se colocan también capas protectoras de monóxido de silicio o fluoruro de magnesio sobre el aluminio. En aplicaciones especiales (por ejemplo, en láseres), donde no pueden tolerarse ni siquiera las pequeñas pérdidas debidas a las superficies metálicas, los espejos formados por películas dieléctricas múltiples (véase sección 9.9) se están haciendo indispensables.

Se está desarrollando una nueva generación de espejos livianos de precisión para utilizarse en telescopios de órbita de gran tamaño —la tecnología no está en absoluto estática.

5.4.1 Espejos planos

Al igual que con todas las configuraciones de espejos, los planos pueden recubrirse en la superficie frontal o posterior. Este último tipo es el que se encuentra más comúnmente en la vida diaria porque permite que la cubierta metálica reflectora quede completamente protegida detrás del vidrio. Por el contrario, la mayoría de los espejos diseñados para uso más técnico, se recubren en la superficie frontal (figura 5.43).

De acuerdo con la sección 4.3.1 es muy fácil determinar las características de la imagen de un espejo plano. Examinando la fuente puntiforme y la disposición de espejos de la figura 5.43, podemos demostrar rápidamente que $|s_o| = |s_i|$, es decir, la imagen P y el objeto S son equidistantes de la superficie. A saber, $\theta_i = \theta_r$ de la ley de reflexión; $\theta_i + \theta_r$ es el ángulo exterior del triángulo SPA siendo, por consiguiente, igual a la suma de los ángulos internos alternos, $\measuredangle VSA + \measuredangle VPA$. Pero $\measuredangle VSA = \theta_i$ y, por lo tanto, $\measuredangle VSA = \measuredangle VPA$. Esto hace que los triángulos VAS y VPA sean congruentes, en cuyo caso $|s_o| = |s_i|$.

Nos encontramos ahora con el problema de determinar el convenio de signos que se aplica a los espejos. Cualquiera que escojamos, y debemos darnos cuenta de que es una elección, sólo debemos ser fieles a él para que todo vaya bien. Un dilema obvio con respecto al convenio para lentes es que ahora la imagen virtual está a la derecha de la interfaz. El observador ve a P colocado detrás del espejo porque su ojo (o cámara) no puede percibir la reflexión real, solamente interpola los rayos hacia atrás a lo largo de líneas rectas. Los rayos del punto P en la figura 5.43 están divergiendo, no pudiendo reunir luz en una

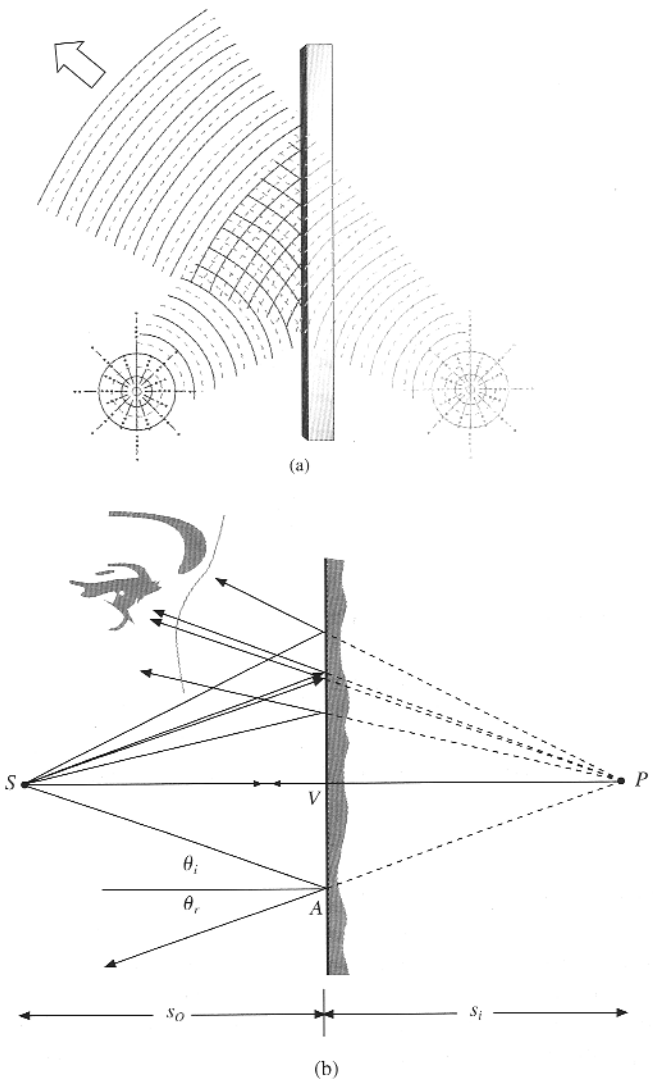


FIGURA 5.43 Un espejo plano. (*a*) Reflexión de ondas. (*b*) Reflexión de rayos.

pantalla colocada en P —la imagen es ciertamente virtual. Es claramente un problema de gusto definir s_i como negativa o positiva en este caso. Puesto que nos gusta que las distancias al objeto o imagen virtuales sean negativas, definiremos s_o y s_i *como negativas cuando están a la derecha del vertice V*. Esto tendrá el beneficio adicional de proporcionar una fórmula para los espejos idéntica a la ecuación gaussiana para lentes [ecuación (5.17)]. Evidentemente, es válida la misma defini-

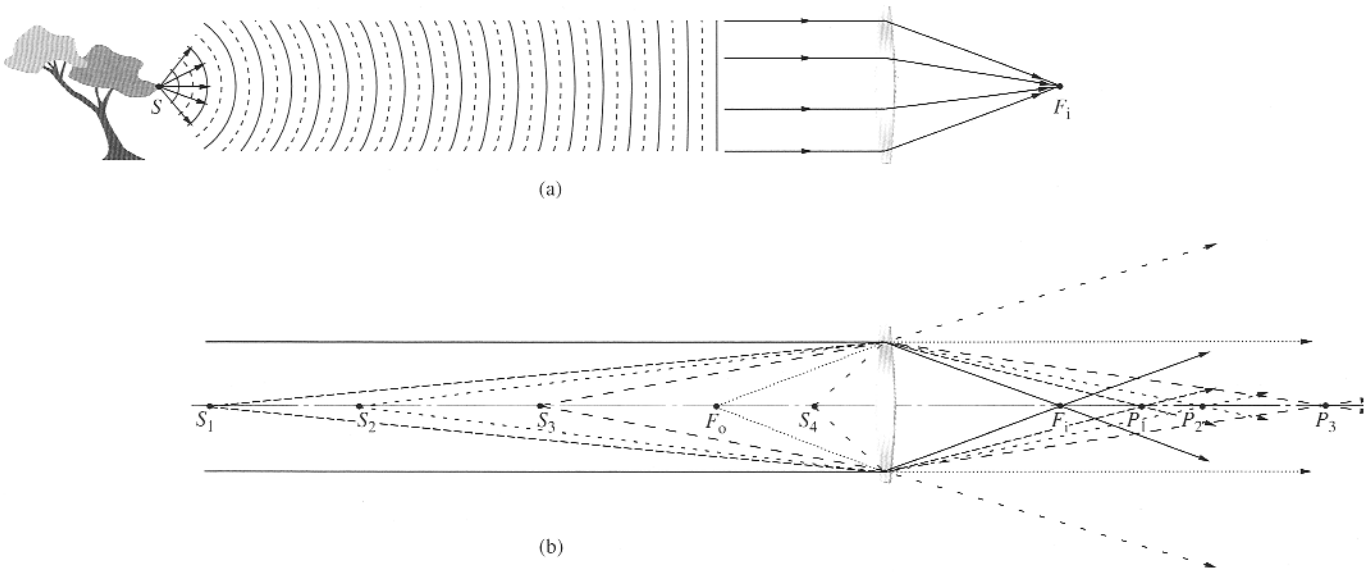


FIGURA 5.26 (*a*) Las ondas de un objeto distante se enderezan a medida que se expanden mientras que los radios aumentan cada vez más. Observados desde lejos, los rayos de cualquier punto son esencialmente paralelos mientras que la lente los obliga a converger en F_i. (*b*) A medida que una fuente puntual se acerca cada vez más, los rayos divergen más y el punto imagen se aleja de la lente. Los rayos emergentes ya no convergen una vez que el objeto haya alcanzado el punto focal; aún más cercanos, divergen.

concepto. **A medida que el objeto se acerca a la lente, la imagen real se aleja de ella**.

Es útil recordar que *el rayo que entra en la lente paralelo al eje central, fija la altura de la imagen real* (figura 5.28). Como ese rayo diverge del eje central, el tamaño de la imagen aumenta rápidamente a medida que el objeto se acerca a F. Obsérvese, también, que la transformación del objeto al espacio imagen no es lineal; todo el espacio objeto desde $2f$ hasta el infinito, a la izquierda de la lente, está comprimido en el espacio imagen entre f y $2f$, a la derecha de la lente. La figura 5.28 sugiere que el espacio imagen es distorsionado, en el sentido de que al avanzar el objeto uniformemente hacia la lente, produce el efecto de cambiar la imagen de forma distinta a lo largo y transversalmente al eje central. Los intervalos de la imagen axial aumentan mucho más rápidamente que los correspondientes cambios sucesivos en la altura de la imagen. Este «aplanamiento» relativo del espacio de objetos distantes puede observarse fácilmente con un telescopio (es decir, una lente de distancia focal larga). Probablemente, habrán visto el efecto en un plano de una película a través de un teleobjetivo. Siempre a mucha distancia, el héroe recorre enérgicamente una gran distancia hacia la cámara, pero psicológicamente parece que no avanza porque el tamaño que de él se percibe aumenta muy poco a pesar de sus esfuerzos.

Es de suponer que la imagen de un objeto tridimensional ocuparía una región tridimensional del espacio. El sistema óptico puede afectar aparentemente tanto a las dimensiones longitudinales como a las transversales de la imagen. El aumento **longitudinal**, M_L, que se relaciona con la dirección axial, se define como

$$M_L \equiv \frac{dx_i}{dx_o} \tag{5.27}$$

Esta es la relación de una longitud axial infinitesimal en la región de la imagen con la longitud correspondiente en la región del objeto. Diferenciando la ecuación (5.23) tenemos

$$M_L = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2 \tag{5.28}$$

para una lente delgada en un medio único (Fig. 5.29). Evidentemente, $M_L < 0$ lo cual implica que una dx_o positiva corresponde a una dx_i negativa y viceversa. Dicho de otro modo, un dedo que

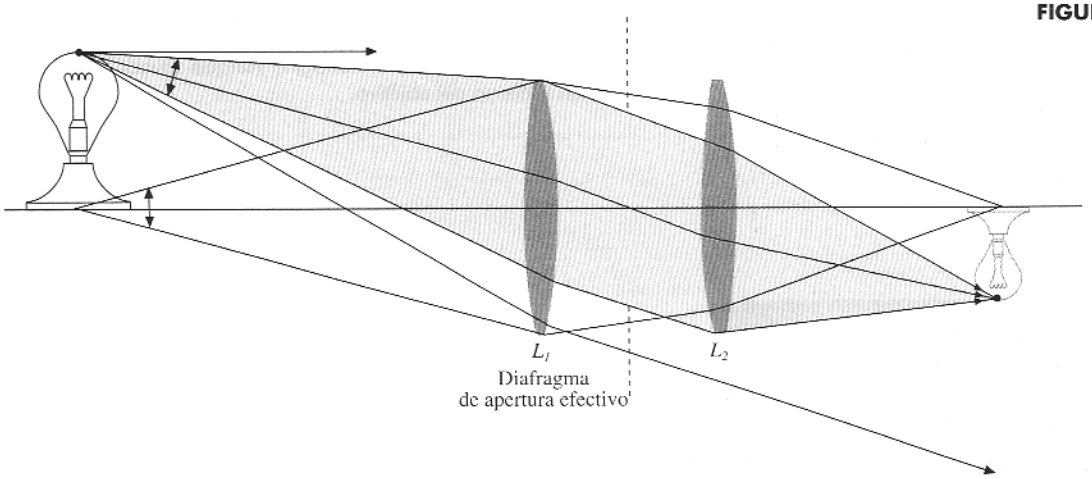


FIGURA 5.40 Viñeteado.

5.3.3 Apertura relativa y número f

Supongamos que recogemos la luz de una fuente extensa y que formamos una imagen de ella usando una lente (o espejo). La cantidad de energía concentrada por la lente (o espejo) de una pequeña región de una fuente distante será directamente proporcional al área de la lente o, en términos más generales, al área de la pupila de entrada. Una *apertura libre* grande intersacará un cono grande de rayos. Naturalmente, si la fuente fuese un láser con un haz muy estrecho, esto no sería necesariamente cierto. Si dejamos de lado las pérdidas debidas a la reflexión, a la absorción, etc., la energía incidente se repartirá sobre una región correspondiente de la imagen (figura 5.41). Entonces la energía por unidad de área por unidad de tiempo, es decir, la densidad de flujo o irradiancia, será inversamente proporcional al área de la imagen.

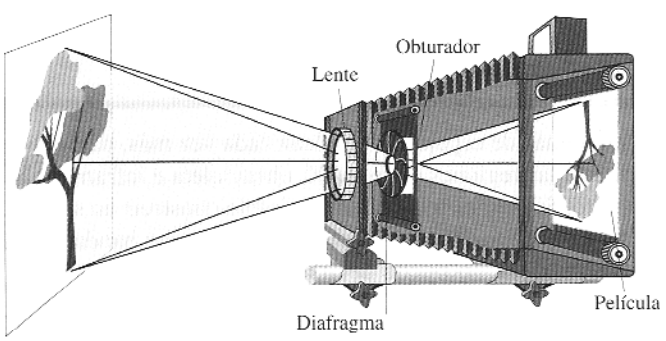


FIGURA 5.41 Una cámara de gran formato normalmente consta de un objetivo seguido de un diafragma ajustable, un obturador que puede abrirse y cerrarse rápidamente y una película en la que se forma la imagen.

El área de la pupila de entrada, si es circular, varía como el cuadrado de su radio siendo, por consiguiente, proporcional al cuadrado de su diámetro D. Además, el área de la imagen variará como el cuadrado de su dimensión lateral, que a su vez [ecuaciones (5.24) y (5.26)] es proporcional a f^2. Recuérdese que estamos hablando de un objeto extenso y no de una fuente puntual. En este último caso, la imagen estaría confinada a un área muy pequeña independiente de f. Por lo tanto, la densidad de flujo en el plano de la imagen varía como $(D/f)^2$. La relación D/f se denomina apertura relativa y su inverso **razón focal** o ***número-f***, que a menudo se escribe $f/\#$, es decir

$$f/\# \equiv \frac{f}{D} \tag{5.40}$$

donde $f/\#$ debe entenderse como un símbolo único. Por ejemplo, una lente con una apertura de 25 mm y una distancia focal de 50 mm tiene un *número-f* de 2 que, por lo general, se escribe $f/2$. La figura 5.42 ilustra este punto mostrando una lente delgada detrás de un diafragma de iris variable que opera con $f/2$ ó $f/4$. Un *número-f* más pequeño obviamente permite que llegue más luz al plano imagen.

Las lentes de cámara se definen generalmente por sus distancias focales y por sus aperturas más grandes posibles; por ejemplo, podría verse «50 mm, f/1,4» en el tambor de una lente. Ya que el tiempo de exposición fotográfica es proporcional al cuadrado del *número-f*, a veces éste se denomina **velocidad** de la lente. Una lente $f/1{,}4$ se dice que es el doble de rápida que una lente $f/2$. Habitualmente, los diafragmas de las lentes tienen

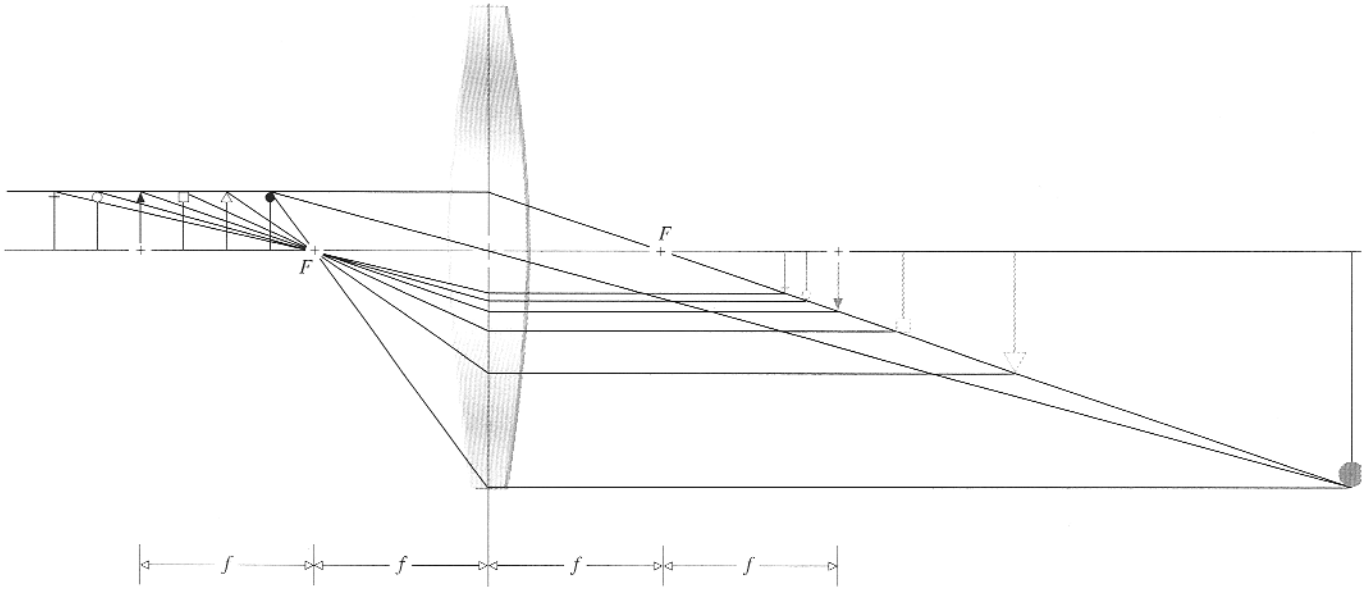


FIGURA 5.28 El rayo número 2 que penetra en la lente paralela al eje central limita la altura de la imagen.

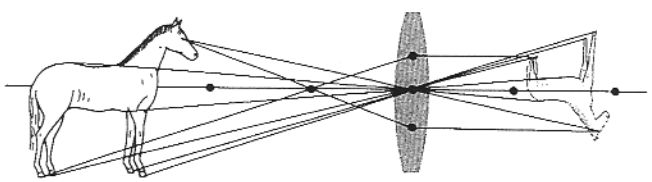


FIGURA 5.29 El aumento transversal es distinto del longitudinal.

quiera de sus distancias focales, como se muestra en la figura 5.31. La imagen resultante puede localizarse gráficamente como sigue. Pasando por alto por el momento la presencia de L_2, construyamos la imagen formada exclusivamente por L_1 usando los rayos 1 y 3. Como de costumbre, éstos pasan a través de los focos objeto e imagen de la lente, es decir, F_{o1} y F_{i1} respectivamente. El objeto se halla en un plano normal así que dos rayos determinan su extremo mientras que una perpendicular al eje óptico encuentra su base. El rayo 2 se construye yendo hacia atrás desde P'_1, hasta O_2. La inserción de L_2 no tiene ningún efecto en el rayo 2 mientras que el rayo 3 se refracta pasando por el foco F_{i2} de L_2. La intersección de los rayos 2 y 3 fija la imagen, que en este caso particular es real, disminuida e invertida. Cuando las dos lentes están juntas,

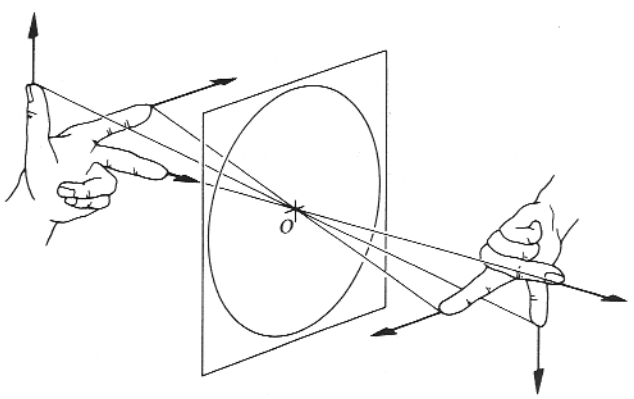


FIGURA 5.30 Orientación de la imagen para una lente delgada.

como en este caso, la presencia de L_2 hace converger esencialmente ($f_2 > 0$) o diverger ($f_2 < 0$) el haz de rayos que emerge de L_1; véase figura 5.32.

Un par similar de lentes se ilustra en la figura 5.33 donde ahora se ha aumentado la separación. Una vez más, los rayos 1 y 3 a través de F_{i1} y F_{o1} fijan la posición de la imagen intermedia generada por L_1 solamente. Como antes, el rayo 2 se traza hacia atrás desde O_2 hasta P'_1, hasta S_1. La intersección

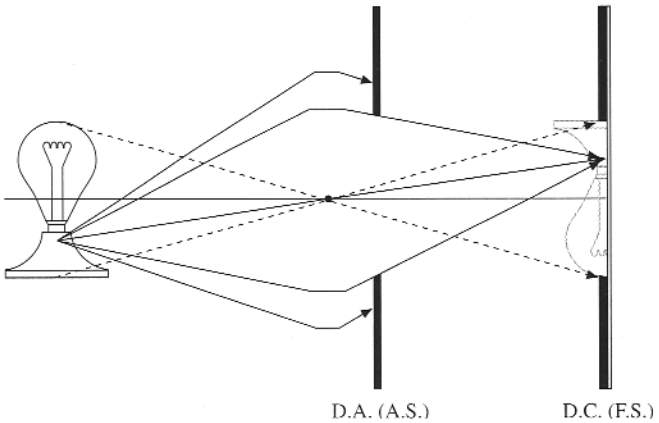


FIGURA 5.36 Diafragma de apertura y diafragmas de campo.

fragma de campo, se permitiría formar la imagen de las regiones que se hallan más allá de los extremos del objeto que previamente habían sido bloqueadas.

5.3.2 Pupilas de entrada y salida

Otro concepto útil a fin de determinar si un determinado rayo atravesará o no el sistema óptico completo, es la *pupila*, que es simplemente *una imagen del diafragma de apertura*. La **pupila de entrada** de un sistema es la ***imagen del diafragma de apertura como se ve desde un punto axial en el objeto a través de aquellos elementos que preceden al diafragma***. Si no hay lentes entre el objeto y el D.A., éste servirá como pupila de entrada. Para ilustrar este punto, examinemos la figura 5.37, que muestra una lente con un ***diafragma de apertura posterior***. La imagen del diafragma de apertura por L es virtual (véase tabla 5.3) y ampliada. Se puede localizar enviando unos cuantos rayos desde los bordes del D.A. de la forma usual. Por el contrario, la **pupila de salida** es la ***imagen del D.A. como se ve desde un punto axial en el plano imagen a través de las lentes interpuestas, si las hay***. En la figura 5.37 no hay tales lentes y así el diafragma de apertura sirve como pupila de salida. Obsérvese que todo esto significa que el cono de luz que realmente entra en el sistema óptico está determinado por la pupila de entrada mientras que el cono que sale está controlado por la pupila de salida. Ningún rayo de la fuente puntual que proceda de fuera de cualquiera de los conos conseguirá llegar hasta el plano imagen.

Para utilizar un telescopio o un monocular como lente de cámara, podría adaptarse un *diafragma de apertura frontal*

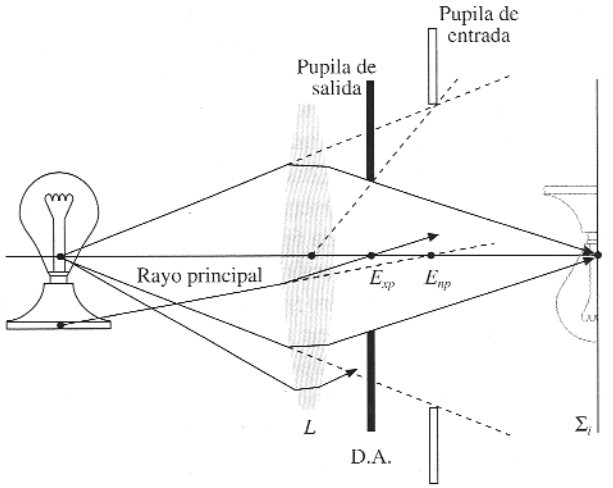


FIGURA 5.37 Pupilas de entrada y de salida.

externo para controlar la cantidad de luz que llega y así la exposición. En la figura 5.38 se recoge una disposición similar donde las posiciones de las pupilas de entrada y salida deberían ser evidentes. Los últimos dos diagramas incluyen un rayo denominado **rayo principal**. Se define como *cualquier rayo de un punto objeto fuera de eje que pasa a través del centro del diafragma de apertura. El rayo principal entra en el sistema óptico a lo largo de una línea dirigida hacia el punto medio de la pupila de entrada, E_{np}, y sale del sistema a lo largo de una línea que pasa a través del centro de la pupila de salida, E_{xp}.*

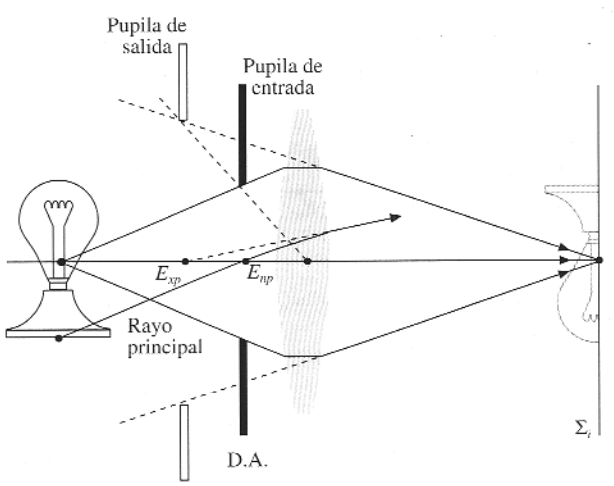


FIGURA 5.38 Diafragma de apertura frontal.

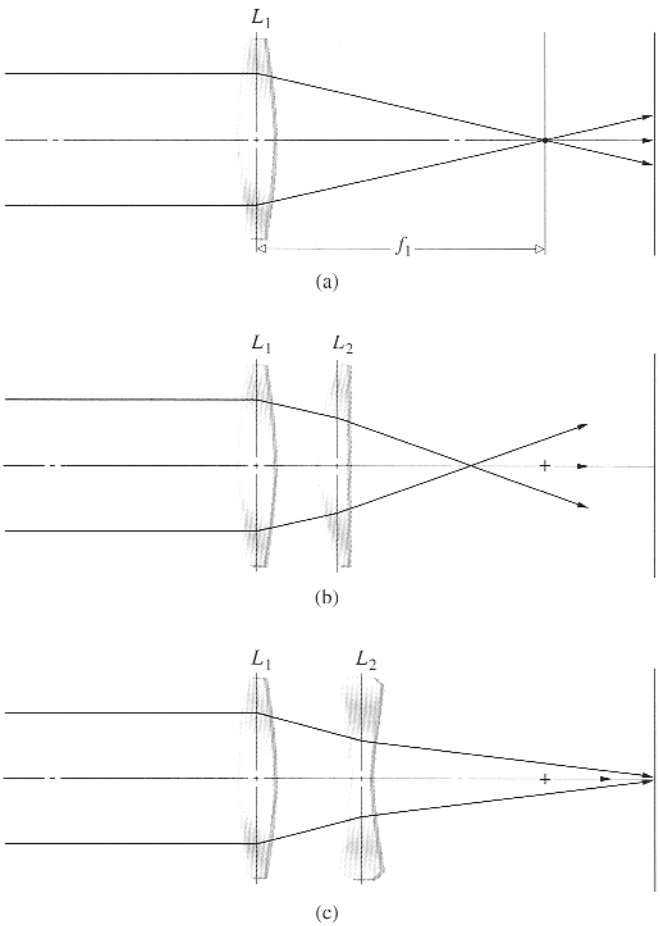


FIGURA 5.32 (a) Efecto resultante al colocar una segunda lente, L_2, dentro de la distancia focal de una lente positiva, L_1. Cuando L_2 es positiva, su presencia hace aumentar la convergencia del haz de rayos. (c) Cuando L_2 es negativa, su presencia añade divergencia al haz.

siendo la imagen real. Ya que L_2 «aumenta» la imagen intermedia formada por L_1, el aumento transversal total de la lente compuesta es el producto de los aumentos individuales, es decir

$$M_T = M_{T1}M_{T2}$$

Dejamos para el problema 5.31 demostrar que

$$M_T = \frac{f_1 s_{i2}}{d(s_{o1} - f_1) - s_{o1}f_1} \tag{5.34}$$

En el ejemplo anterior

$$M_T = \frac{30(26{,}2)}{20(50 - 30) - 50(30)} = -0{,}72$$

y como deberíamos haberlo adivinado de la figura 5.31, la imagen está disminuida e invertida.

La distancia de la última superficie de un sistema óptico hasta el segundo punto focal de ese sistema se denomina **distancia focal posterior** o d.f.p. De manera parecida, la distancia del vértice de la primera superficie hasta el primer punto focal o foco objeto es la **distancia focal frontal** o d.f.f. Por consiguiente, siendo $s_{i2} \to \infty$, s_{o2} se acerca a f_2, la cual combinada con la ecuación (5.31) nos dice que $s_{i1} \to \text{d} - f_2$. Por lo tanto, de la ecuación (5.29)

$$\left.\frac{1}{s_{o1}}\right|_{s_{i2}\to\infty} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{(d - f_2)} = \frac{d - (f_1 + f_2)}{f_1(d - f_2)}$$

Pero este valor especial de s_{o1} es la d.f.f.:

$$\text{d.f.f.} = \frac{f_1(d - f_2)}{d - (f_1 + f_2)} \tag{5.35}$$

De la misma manera, siendo $s_{o1} \to \infty$ en la ecuación (5.33), $(s_{o1} - f_1) \to s_{o1}$, y ya que s_{i2} es entonces la d.f.p., tenemos

$$\text{d.f.p.} = \frac{f_2(d - f_1)}{d - (f_1 + f_2)} \tag{5.36}$$

Para ver cómo funciona esto numéricamente, calculemos tanto la d.f.p. como la d.f.f. para el sistema de lentes delgadas de la figura 5.34*a*, donde $f_1 = -30$ cm y $f_2 = +20$ cm. Entonces

$$\text{d.f.p.} = \frac{20[10 - (-30)]}{10 - (-30 + 20)} = 40 \text{ cm}$$

y, de manera similar, d.f.f. = 15 cm. Por cierto, obsérvese que si $d = f_1 + f_2$, las ondas planas que entren en la lente compuesta desde cualquier lado, saldrán como ondas planas (problema 5.34) como en los sistemas telescópicos.

Obsérvese que si $d \to 0$, es decir, si las lentes se ponen en contacto, como por ejemplo en el caso de algunos dobletes acromáticos,

$$\text{d.f.p.} = \text{d.f.f.} = \frac{f_2 f_1}{f_2 + f_1} \tag{5.37}$$

La lente delgada resultante tiene una *distancia focal efectiva* tal que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{5.38}$$

papel blanco). Ahora hay que llevar a cabo la maniobra que requiere algún esfuerzo si no se tiene un banco óptico. Muévase la segunda lente (L_1) hacia la fuente, manteniéndola razonablemente centrada. Sin intentar bloquear la luz que entra en L_2 directamente, probablemente se verá una imagen borrosa de la mano que sostiene L_1. Colóquense las lentes de tal manera que la región en la pantalla que corresponde a L_1 sea lo más brillante posible. La escena que se difunde en L_1 (es decir, su imagen dentro de la imagen) se hará clara y derecha como en la figura 5.33.

La Electrodinámica Cuántica (EDC) y las Lentes

Una muy buena razón por deducir las ecuaciones básicas de este capítulo del principio de Fermat es que nos mantiene con la mente puesta en las longitudes de camino óptico, llevándonos entonces naturalmente al estudio de Feynman de la Electrodinámica cuántica. Recuérdese que muchos físicos consideran sus teorías como nada más que maquinaria conceptual para calcular

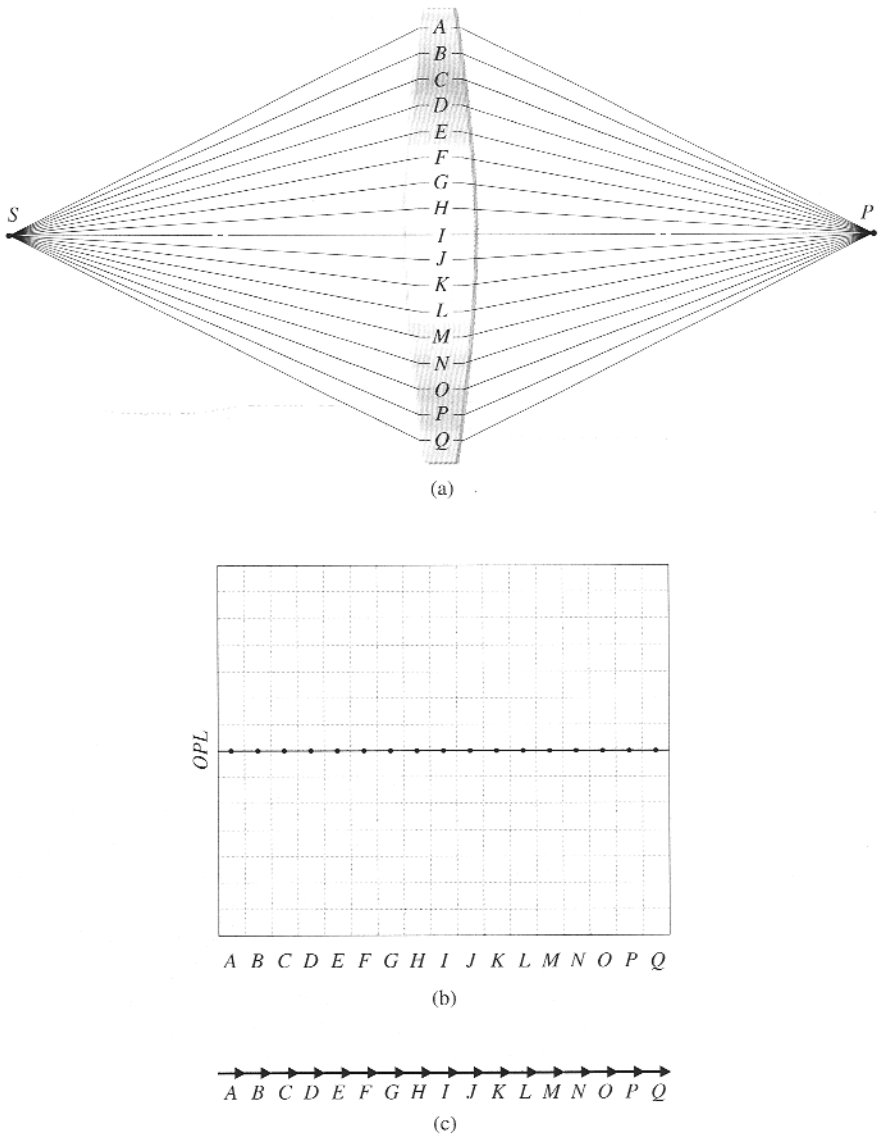


FIGURA 5.35 El análisis de Feyman de la lente delgada por EDC. (*a*) Número posible de caminos desde *S* hasta *P*. (*b*) La *LCO* de la luz a lo largo de cada camino. (*c*) Los fasores de amplitud de probabilidad sumándose en fase.

5.5.2 Prismas reflectores

Ahora vamos a examinar los **prismas reflectores** en los que la dispersión no es conveniente. En el caso que nos ocupa, el haz será introducido de tal manera que se produzca al menos una reflexión interna para el propósito específico de cambiar la dirección de propagación, o la orientación de la imagen o ambas.

Veamos primero si es realmente posible conseguir dicha reflexión interna sin dispersión. Dicho de otro modo, ¿es δ independiente de λ? Se supone que el prisma de la figura 5.67 tiene como perfil un triángulo isósceles —se trata, en todo caso, de una configuración muy común—. El rayo refractado en la primera interfaz más tarde se reflejará desde la cara FG. Como vimos antes (sección 4.7), esto ocurrirá cuando el ángulo interno sea más grande que el ángulo crítico θ_c, definido por

$$\operatorname{sen} \theta_c = n_{ri} \qquad [4.69]$$

Para una interfaz vidrio-aire, θ_i tendrá que ser superior a aproximadamente 42°. Para evitar cualquier dificultad con ángulos más pequeños, supongamos además que la base de nuestro prisma hipotético está plateada —ciertos prismas precisan caras plateadas—. El ángulo de desviación entre los rayos incidentes y salientes es

$$\delta = 180° - \measuredangle BED \qquad (5.55)$$

Del polígono $ABED$ se deduce que

$$\alpha + \measuredangle ADE + \measuredangle BED + \measuredangle ABE = 360°$$

Además, en las dos superficies refractoras

$$\measuredangle ABE = 90° + \theta_{i1}$$

y

$$\measuredangle ADE = 90° + \theta_{t2}$$

Reemplazando $\measuredangle BED$ en la ecuación (5.55) tenemos

$$\delta = \theta_{i1} + \theta_{t2} + \alpha \qquad (5.56)$$

Ya que los ángulos de incidencia y reflexión del rayo en el punto C son iguales, $\measuredangle BCF = \measuredangle DCG$. Así, tratándose de un prisma isósceles, $\measuredangle BFC = \measuredangle DGC$ siendo los triángulos FBC y DGC similares. Se deduce que $\measuredangle FBC = \measuredangle CDG$ y, por consiguiente, $\theta_{t1} = \theta_{i2}$. De la ley de Snell sabemos que esto equivale a $\theta_{i1} = \theta_{t2}$, de donde la desviación queda

$$\delta = 2\theta_{i1} + \alpha \qquad (5.57)$$

que es ciertamente independiente tanto de λ como de n. La reflexión ocurrirá sin ninguna preferencia de color y el prisma se denominará **acromático**. Si lo desplegamos, es decir, si

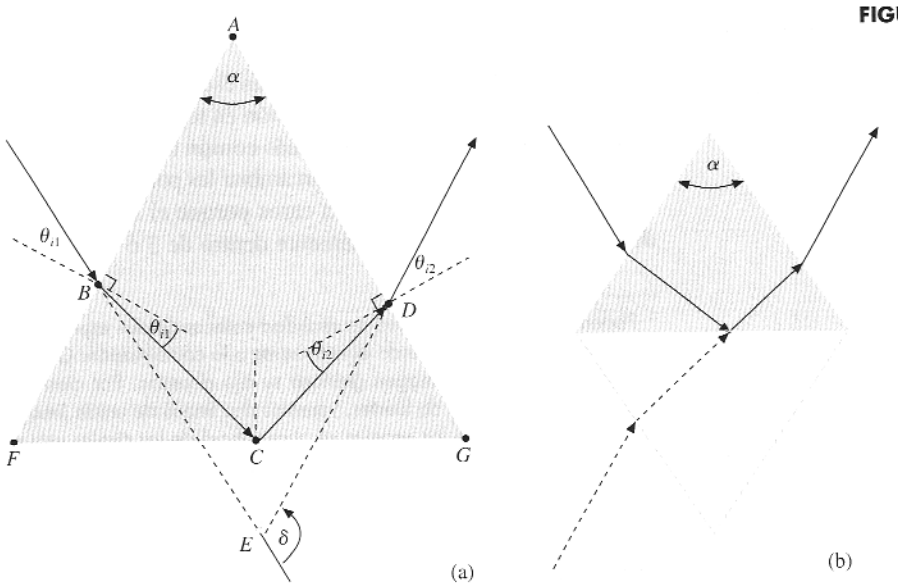


FIGURA 5.67 Geometría de un prisma reflector.

dibujamos su imagen en la superficie reflectora *FC*, como en la figura 5.67*b*, vemos que es equivalente, en cierto sentido, a una lámina plana gruesa o de forma paralelepípeda. La imagen del rayo incidente emerge paralela a sí misma independientemente de su longitud de onda.

En las siguientes figuras se muestran algunos de los numerosos prismas reflectores que se utilizan ampliamente y que están hechos, a menudo, de vidrio BSC-2 o C-1 (véase tabla 6.2). En su mayoría, las ilustraciones se explican por sí mismas, así que el comentario descriptivo será breve.

El **prisma ortogonal** (figura 5.68) desvía en 90° los rayos perpendiculares a la cara de incidencia. Obsérvese que la parte superior e inferior de las imágenes han sido intercambiadas, es decir, la flecha se ha volcado sin afectar sin embargo a los lados derecho e izquierdo. Por consiguiente, se trata de un sistema inversor cuya cara superior actúa como un espejo plano. (Para verlo, imaginemos que la flecha y el pirulí sean vectores y que tomemos su producto vectorial. La resultante, flecha × pirulí, que se hallaba inicialmente en la dirección de propagación, es invertida por el prisma.)

El **prisma de Porro** (figura 5.69) es físicamente el mismo que el ortogonal pero se utiliza con una orientación diferente. Después de dos reflexiones, el haz se desvía en 180°, por lo tanto, si entra con orientación a derechas, saldrá con orientación a derechas.

El **prisma de Dove** (figura 5.70) es una versión truncada (para reducir tamaño y peso) del prisma ortogonal, siendo utilizado casi exclusivamente en luz colimada. Tiene la interesante propiedad (problema 5.61) de girar la imagen con el doble de velocidad de lo que el prisma mismo gira alrededor de su eje longitudinal.

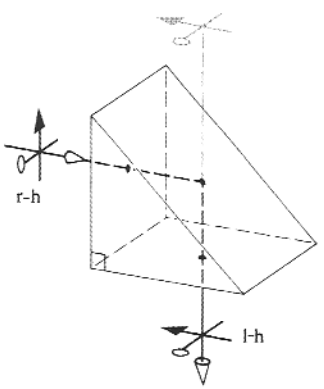


FIGURA 5.68 Prisma de ángulo recto.

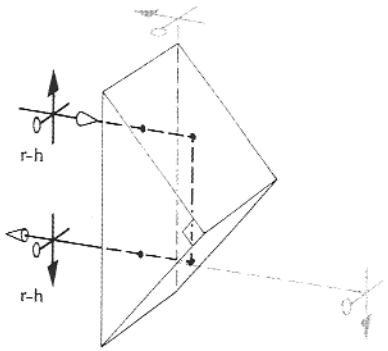


FIGURA 5.69 El prisma de Porro.

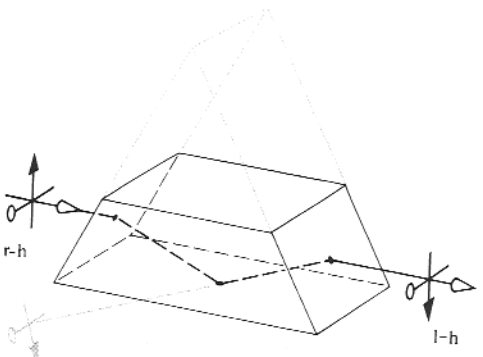


FIGURA 5.70 El prisma de Dove.

El **prisma de Amici** (figura 5.71) es esencialmente un prisma ortogonal truncado con una sección en tejado añadida en el lado de la hipotenusa. En su uso más común tiene el efecto de partir la imagen por la mitad e intercambiar las porciones derecha e izquierda.[5] Estos prismas son caros porque el ángulo apical debe conservarse aproximadamente dentro de 3 ó 4 segundos

[5] Podemos ver cómo funciona en realidad colocando dos espejos planos en ángulo recto y mirando directamente a la combinación. Guiñando el ojo *derecho*, la imagen guiñará su ojo *derecho*. Por cierto, si nuestros ojos son igual de fuertes, veremos dos líneas de unión (imágenes de la línea donde los espejos se encuentran) de las cuales una va bajando por la mitad de cada ojo, hallándose la nariz supuestamente entre ellas. Si uno de los dos ojos es más fuerte, habrá solamente una línea vertical que va bajando por el centro de ese ojo. Si lo cerramos, la línea saltará al otro ojo. Para poder apreciar este fenómeno, es preciso intentarlo.

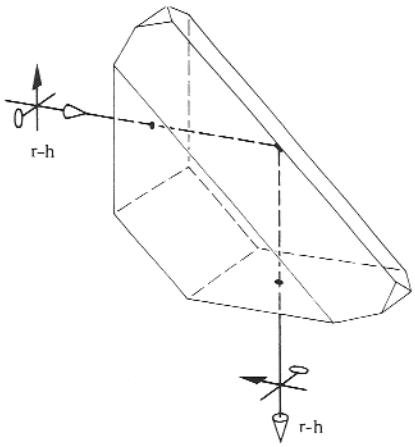


FIGURA 5.71 El prisma de Amici.

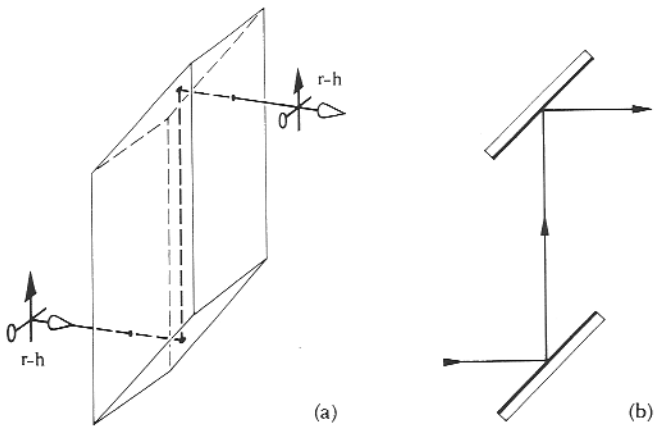


FIGURA 5.73 El prisma romboidal y su equivalente especular.

de arco, de lo contrario se obtendría una doble imagen molesta. A menudo se usan en sistemas telescópicos simples para corregir la reversión producida por las lentes.

El **pentaprisma** (figura 5.72) desviará el haz en 90° sin afectar a la orientación de la imagen. Obsérvese que dos de sus superficies deben estar plateadas. Estos prismas se usan a menudo como reflectores en los extremos de buscadores de corto alcance.

El **prisma romboide** (figura 5.73) desplaza la línea visual sin producir ninguna desviación angular o cambios en la orientación de la imagen.

El **prisma de Leman-Springer** (figura 5.74) tiene también un tejado de 90°. Aquí la línea visual se desplaza sin desviarse, pero la imagen que emerge tiene orientación a derechas y 180° de rotación, pudiendo por lo tanto el prisma servir para enderezar las imágenes en sistemas telescópicos, por ejemplo miras de rifle y otros similares.

Muchos más prismas reflectores desempeñan funciones específicas. Por ejemplo, si se corta simplemente un cubo de tal forma que la pieza resultante tenga tres lados mutuamente perpendiculares, se dice que es un **prisma de esquina de**

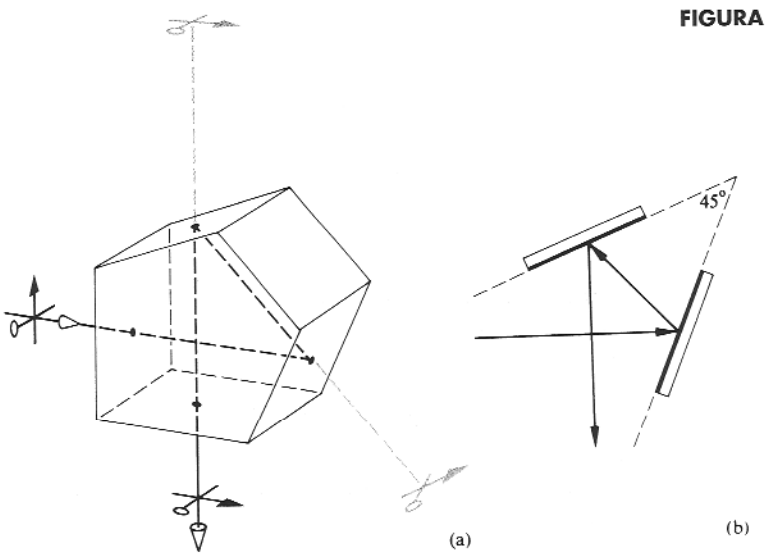


FIGURA 5.72 El prisma pentagonal y su equivalente especular.

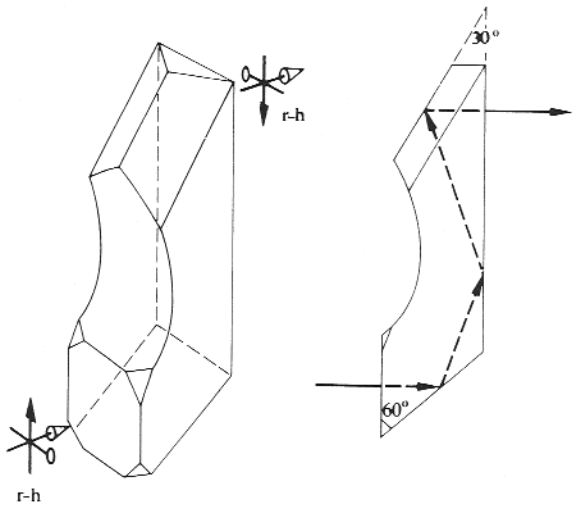


FIGURA 5.74 El prisma de Leman-Springer.

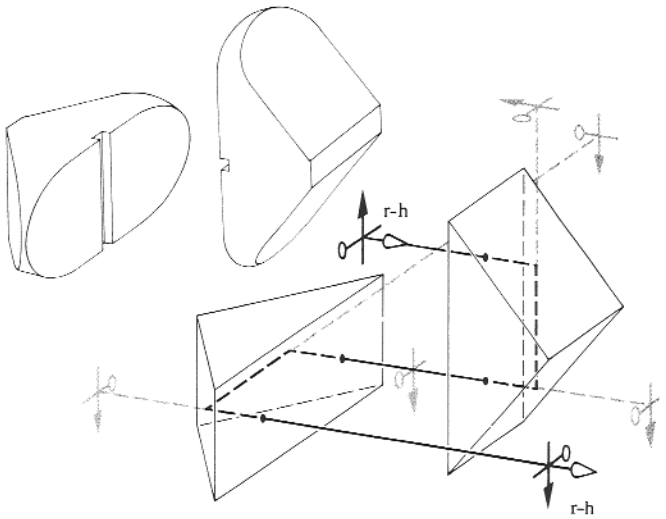


FIGURA 5.75 El prisma doble de Porro.

cubo. Tiene la propiedad de ser retrovisor, es decir, reflejará hacia atrás todos los rayos a lo largo de sus direcciones originales. Cien prismas de esta clase están descansando en un conjunto cuadrado de 18 pulgadas a 240.000 millas de aquí, habiendo sido colocados en la Luna durante el vuelo del Apolo 11.[6]

El sistema erector más común consiste en dos prismas Porro, como se ilustra en la figura 5.75. Éstos son relativamente fáciles de fabricar y se muestran aquí con esquinas redondeadas para reducir su peso y tamaño. Ya que hay cuatro reflexiones, la imagen saliente será a derechas. A menudo se hace una pequeña hendidura en el lado de la hipotenusa para obstruir rayos que se reflejan internamente con ángulos de incidencia oblicuos. Encontrar estas rendijas después de desmontar los gemelos de campaña de la familia es a menudo una sorpresa inexplicable.

5.6 Fibras ópticas

El concepto de conducir la luz dentro de un dieléctrico estrecho y largo (mediante reflexión total interna) se conoce desde hace bastante tiempo. John Tyndall (1870) demostró que una fina corriente de agua podía contener y guiar la luz. Poco después, se recurrió a «tubos luminosos» de vidrio y, sucesivamente, a hilos de cuarzo fundido para demostrar ulteriormente dicho efecto. Sin embargo, sólo a inicios de los años cincuenta se llevaron a cabo unos estudios serios para transportar imágenes en el interior de mazos de fibra de vidrio cortas.

Después de la invención del láser en 1960, se valoraron en seguida los beneficios potenciales proporcionados por la transmisión de información de un lugar a otro recurriendo a la luz, en comparación con las corrientes eléctricas o incluso las microondas. A frecuencias ópticas tan elevadas (del orden de 10^{15} Hz), se puede transportar cien mil veces más información con respecto a las microondas lo cual equivaldría, en teoría, al envío de decenas de millones de programas de televisión simultáneamente en un rayo de luz. No fue preciso esperar mucho tiempo (1966) hasta que se pusiera de relieve la posibilidad de acoplar los láseres con las fibras ópticas para comunicaciones a larga distancia. Así, empezó una transformación tecnológica de enorme alcance que sigue adelante aún hoy en día.

En 1970, los investigadores de Corning Glass Works produjeron una fibra de sílice con un poder de transmisión de las señales de más del 1% en una distancia de 1 km (es decir, una atenuación de 20 dB/km) que podía compararse con los sistemas eléctricos de cobre existentes en aquel entonces. Durante las dos décadas

[6] J. E. Foller y E. J. Wampler, «The Lunar Laser Reflector», *Sci Am.* Marzo 1970, pág. 38.

que siguieron, la transmisión alcanzó aproximadamente el 96% en 1 km (es decir, una atenuación de tan sólo 0,16 dB/km).

Debido a su transmisión de bajas perdidas, su capacidad para transportar mucha información, su pequeño tamaño y peso, su inmunidad a la interferencia electromagnética, su inigualable seguridad en la señal así como la abundante disponibilidad de las materias primas necesarias (es decir, arena normal y corriente), las fibras de vidrio ultrapura se han convertido en los principales medios de comunicación.

Siempre que el diámetro de estas fibras sea grande comparado con la longitud de onda de la energía radiante, la naturaleza ondulatoria inherente del mecanismo de propagación es de poca importancia y el proceso obedece a las leyes conocidas de la óptica geométrica. Por otro lado, si el diámetro es del orden de λ, la transmisión se asemejará mucho a la manera en la que las microondas avanzan a lo largo de las guías de ondas. Algunos de los modos de propagación son evidentes en las vistas fotomicrográficas de frente de las fibras que se muestran en la figura 5.76. Aquí, cabe tener en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz, siendo este comportamiento parte integrante del dominio de la óptica física. Aunque las guías de onda ópticas, particularmente de la variedad de las películas delgadas, sean de interés creciente, este estudio estará limitado al caso de fibras de diámetro relativamente grande, aproximadamente igual al de un cabello humano.

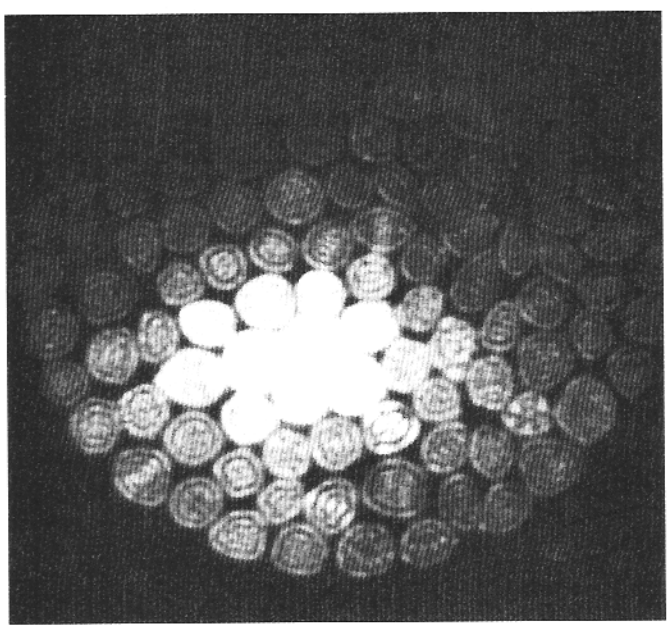


FIGURA 5.76 Distribuciones de modos en de la guía de onda óptica observados en las caras extremas de fibras de pequeño diámetro. (Foto cedida por Narinder S. Kapany, AMP Fellow.)

Consideremos el cilindro recto de vidrio de la figura 5.77 rodeado de un medio incidente cuyo índice es n_i —sea aire, $n_i = n_a$—. La luz que llega a sus paredes desde adentro se reflejará total e internamente siempre que el ángulo de incidencia de cada reflexión sea mayor que $\theta_c = \text{sen}^{-1}\, n_a/n_f$, donde n_f es el índice del cilindro o fibra. Como mostraremos, un *rayo meridional* (es decir, uno que es coplanar con el eje óptico) podría ser sometido a varios miles de reflexiones por centímetro cuando rebota hacia delante y hacia atrás a lo largo de una fibra hasta que salga por el otro extremo lejano (figura 5.78). Si el diámetro y la longitud de la fibra son D y L respectivamente, la longitud ℓ de la trayectoria recorrida por el rayo será

$$\ell = L/\cos\,\theta_t \tag{5.58}$$

o, desde la ley de Snell

$$\ell = n_f L(n_f^2 - \text{sen}^2\,\theta_i)^{-1/2} \tag{5.59}$$

El número N de reflexiones viene dado entonces por

$$N = \frac{\ell}{D/\text{sen}\,\theta_t} \pm 1$$

o

$$N = \frac{L\,\text{sen}\,\theta_i}{D(n_f^2 - \text{sen}^2\,\theta_i)^{1/2}} \pm 1 \tag{5.60}$$

redondeándolo al número entero más cercano. El ± 1, que depende de dónde choque el rayo con la cara final, no tiene

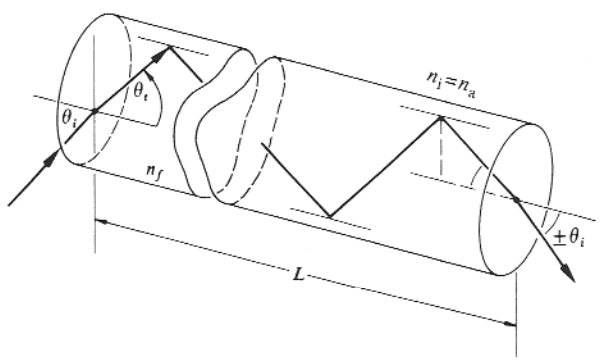


FIGURA 5.77 Rayos reflejados dentro de un cilindro dieléctrico.

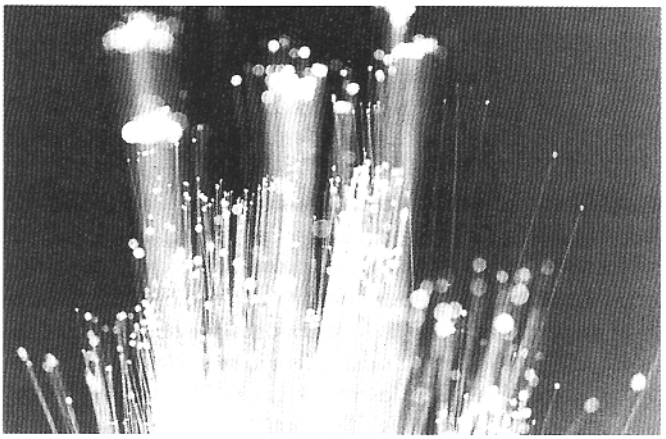


FIGURA 5.78 Luz saliendo por los extremos de un mazo suelto de fibras de vidrio.

importancia cuando N es grande, como lo es en la práctica. Entonces, si D es 50 μm (es decir, 50 micras donde 1 μm = 10^{-6} m = 39,37 $\times$ 10^{-6} pulgadas) que es aproximadamente 2×10^{-3} pulgadas (el diámetro de un cabello de la cabeza de una persona es de unos 50 μm) y si $n_f = 1{,}6$ y $\theta_i = 30°$, N resulta ser aproximadamente de 2.000 reflexiones por pie. También se dispone de fibras con diámetros de unas 2 μm pero raras veces se utilizan tamaños muy inferiores a unas 10 μm. Los filamentos de vidrio (o plástico) extremadamente finos son muy flexibles, pudiendo incluso tejerse para hacer telas.

La superficie lisa de una fibra individual debe mantenerse limpia de humedad, polvo, aceite, etc., si se desean evitar las fugas de luz (a través del mecanismo de reflexión total interna frustrada). De manera parecida, si un gran número de fibras se empaquetan muy próximas entre sí, la luz puede pasar de una fibra a otra; se trata del fenómeno denominado *comunicación cruzada*. Por estas razones, se suele ahora revestir cada fibra con una vaina transparente de índice más bajo, llamada **revestimiento**. Esta capa sólo necesita ser lo suficientemente gruesa para proporcionar el aislamiento deseado, pero por otras razones generalmente ocupa alrededor de un décimo del área de sección transversal. Aunque en la literatura existan referencias a los tubos luminosos que se remontan a un siglo atrás, la era moderna de la fibra óptica empezó con la introducción de las fibras con recubrimiento en 1953.

El índice típico del núcleo de una fibra (n_f) puede ser de 1,62 mientras que el del revestimiento (n_c) de 1,52 si bien se dispone de un rango de valores. En la figura 5.79 se muestra una fibra con revestimiento. Obsérvese que hay un valor máximo $\theta_{máx}$ de θ_i para el cual el rayo interno incidirá con el ángulo crítico θ_c. Los rayos incidentes en la cara con ángulos mayores que $\theta_{máx}$ chocarán con la pared interior con ángulos menores que θ_c, reflejándose sólo parcialmente en cada encuentro con la interfaz núcleo-revestimiento y abandonarán rápidamente la fibra. Por lo tanto, $\theta_{máx}$, denominado el ángulo de aceptación, define el semiángulo del cono de aceptación de la fibra. Para determinarlo empecemos por

$$\text{sen } \theta_c = n_c/n_f = \text{sen } (90° - \theta_t)$$

Así
$$n_c/n_f = \cos \theta_t \tag{5.61}$$

o
$$n_c/n_f = (1 - \text{sen}^2 \theta_t)^{1/2}$$

Utilizando la ley de Snell y ajustando los términos, tenemos

$$\text{sen } \theta_{\max} = \frac{1}{n_i}(n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \tag{5.62}$$

La cantidad n_i sen $\theta_{máx}$ se define como la **apertura numérica** o NA (del inglés «numerical aperture») cuyo cuadrado es una medición del poder colector de luz del sistema. El término se originó en microscopia donde la expresión equivalente ilustra la capacidad correspondiente del objetivo. Debería relacionarse con la *velocidad* del sistema y, en efecto,

$$f/\# = \frac{1}{2(\text{NA})} \tag{5.63}$$

Entonces para una fibra

$$\text{NA} = (n_f^2 - n_c^2)^{1/2} \tag{5.64}$$

El lado izquierdo de la ecuación (5.62) no puede exceder de 1 y en el aire ($n_a = 1.000\,28 \approx 1$), esto significa que el valor más

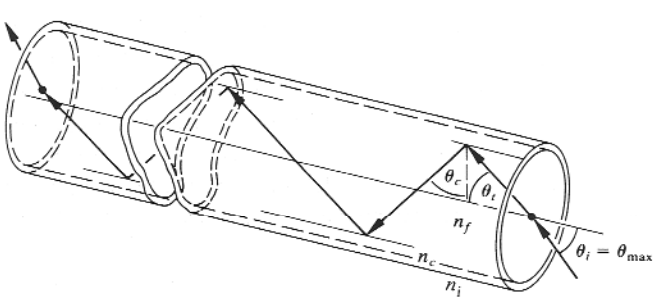


FIGURA 5.79 Rayos en una fibra óptica con recubrimiento.

grande de NA es igual a uno. En este caso, el semiángulo $\theta_{máx}$ es igual a 90° y la fibra reflejará interna y totalmente toda la luz que entre a través de su cara (problema 5.62). En el mercado se pueden encontrar fibras con una gran variedad de aperturas numéricas que van desde aproximadamente 0,2 hasta 1,0.

Los manojos de fibras libres cuyos extremos están unidos entre sí (por ejemplo, con epoxy), tallados y pulidos forman guías de luz flexibles. Si no se procura alinear las fibras en una disposición ordenada, darán lugar a un *mazo incoherente*. El uso desafortunado del término *incoherente*, que no debería confundirse con la teoría de la coherencia, sólo significa, por ejemplo, que la primera fibra de la fila superior de la cara de entrada puede tener su término en cualquier lugar del mazo en la cara de salida. Dichos *transportadores flexibles de luz* son, por esa razón, relativamente baratos y fáciles de hacer, siendo su función primaria simplemente la de conducir la luz de una región a otra. Por el contrario, cuando las fibras se disponen cuidadosamente de tal forma que sus terminaciones ocupen las mismas posiciones relativas en ambos extremos pegados del manojo, se dice que el manojo es *coherente*. Tal combinación es capaz de transmitir imágenes denominándose, por lo tanto, *transportador flexible de imágenes*.

A menudo, los manojos coherentes se forman enrollando las fibras alrededor de un tambor para hacer lazos que sucesivamente se colocarán cuidadosamente por capa. Al meter un extremo de dicho dispositivo boca abajo y llano en una superficie iluminada, en el otro extremo aparecerá una imagen detallada de lo que se encuentre debajo (figura 5.80). Puesto que estos manojos pueden ser provistos con una pequeña lente, no será preciso que estén en contacto con el objeto que está siendo examinado. Hoy en día, los instrumentos de fibra óptica se suelen utilizar para penetrar en sitios inverosímiles, desde la región activa de reactores nucleares y motores de aviones hasta estómagos y órganos de reproducción. El instrumento que se utiliza para examinar las cavidades internas corporales se denomina *endoscopio* a cuya clase pertenecen el broncoscopio, el colonoscopio, el gastroscopio etc., todos ellos con una longitud que es, por lo general, inferior a 200 cm. Los instrumentos análogos de uso industrial son dos o tres veces más largos y, a menudo, contienen desde 5.000 hasta 50.000 fibras, dependiendo de la resolución de la imagen que se requiera y del diámetro global que pueda acomodarse. Un mazo adicional incoherente que se incorpora al instrumento normalmente proporciona la iluminación.

No todas las combinaciones de fibras ópticas son flexibles; por ejemplo, las placas frontales de fibras coherentes, fundidas y rígidas denominadas *mosaicos* se utilizan para reemplazar láminas de vidrio homogéneas de baja resolución en tubos de rayos catódicos, vidicones, intensificadores de imagen y otros instrumentos. Las propiedades mecánicas de los mosaicos que consisten en, literalmente, millones de fibras con revestimientos fundidos entre sí son casi idénticas a las del vidrio homogéneo. De manera parecida, una lámina de fibras fundidas *achaflanadas* puede tanto aumentar como disminuir una imagen, dependiendo de si la luz entra por el extremo más grande o el más pequeño de la fibra. El ojo compuesto de un insecto, como el de una mosca doméstica, es efectivamente un mazo de filamentos ópticos fibrosos achaflanados. Los bastones y los conos que forman la retina humana también pueden conducir la luz por la reflexión total interna. Otra aplicación común de los mosaicos que involucra la formación de imágenes es el *aplanador de campo*. Si la imagen formada por un sistema de lentes se halla en una superficie curva, puede que a

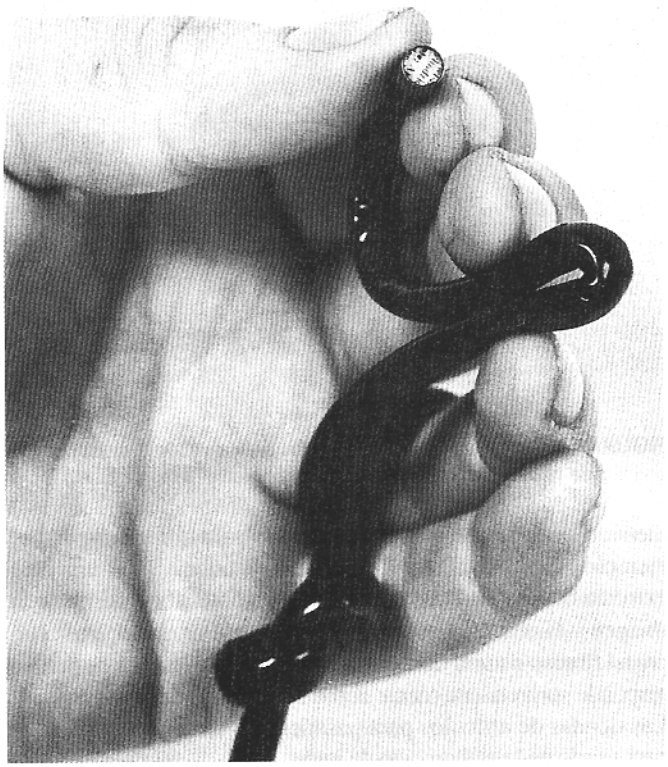


FIGURA 5.80 Un manojo coherente de fibras de vidrio de 10 μm transmitiendo una imagen a pesar de estar anudado y notablemente doblado. (Foto cedida por American ACMI Div., American Hospital Supply Corp.)

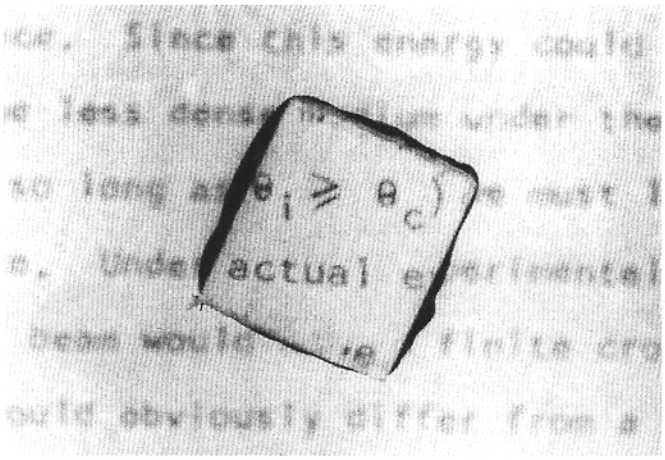


FIGURA 5.81 Una pila de cubreobjetos de microscopio atados con una tira de goma sirve como guía de luz coherente. (Foto de E. H.)

menudo se desee convertirla en un plano para que se adapte, por ejemplo, a la placa fotográfica. Se puede tallar y pulir una cara extrema de un mosaico para que corresponda al contorno de la imagen y la otra para ajustarse al detector. Por cierto, existe un cristal fibroso natural denominado *ulexita* que después de pulirse responde sorprendentemente como un mosaico de fibras ópticas. Las tiendas de artículos para pasatiempos a menudo lo venden para usarlo en la elaboración de joyas.

Si nunca se ha visto el tipo de conducción de luz del que hemos estado hablando, inténtese mirar por los bordes de una pila de portaobjetos de microscopio. Aún mejor si se trata de cubreobjetos de microscopio pues son mucho más finos (0,18 mm). En la figura 5.68 se recoge la manera en que la luz se dirige hacia la cara superior de una pila de unos cientos de estos portaobjetos unidos por una goma elástica.

Hoy en día las fibras ópticas se aplican de manera muy distinta: para la transmisión directa (a corta distancia) de las imágenes y de la iluminación, proporcionan una gama de guías de ondas extraordinarias y sirven como núcleo de una nueva familia de sensores. La transmisión de imágenes a lo largo de distancias de unos pocos centenares de metros utilizando manojos coherentes por más bellos y útiles que sean es un asunto poco sofisticado que desaprovecha toda la potencialidad inherente de la fibra óptica. Durante las últimas décadas, la aplicación de guías luminosas en las telecomunicaciones ha empezado a reemplazar los cables de cobre y de la electricidad como vía de acceso principal a la información. En todo el mundo se han instalado más de 100 millones de kilómetros de fibras desde 1970. Más recientemente, los sensores de fibra óptica —instrumentos que miden la presión, el sonido, la temperatura, el voltaje, la corriente, los niveles de líquido, los campos eléctricos y magnéticos, las rotaciones, etc.— se han convertido en la demostración más actual de la versatilidad de las fibras.

5.6.1. La tecnología de comunicación por fibra óptica

Las elevadas frecuencias de la luz posibilitan una enorme capacidad de procesamiento de datos. Por ejemplo, recurriendo a técnicas de transmisión complejas, un par de cables telefónicos de cobre pueden transmitir simultáneamente dos docenas de conversaciones. Esto debería compararse con una transmisión televisiva, simple, individual y en curso que equivale a unas 1.300 conversaciones telefónicas simultáneas lo cual, a su vez, corresponde aproximadamente al envío de 2.500 páginas mecanografiadas por segundo. Lógicamente, en la actualidad no sería factible intentar enviar programas televisivos por las líneas telefónicas de cobre. Sin embargo, hacia la mitad de la década de los ochenta ya se podían transmitir más de 12.000 conversaciones simultáneas con un *solo par* de fibras —es decir más de nueve canales de televisión—. Cada una de dichas fibras tiene una velocidad de línea de unos 400 millones de bits de información por segundo (400 Mb/s) ó 6.000 circuitos acústicos. Las fibras de esta clase (con repetidores colocados a unos 40 km de distancia entre sí) dieron lugar a las nuevas redes internacionales de telecomunicaciones interurbanas de larga distancia. A comienzos de la década de los noventa, los investigadores recurrieron a los **solitones** —pulsos cuidadosamente formados que viajan sin cambiar— para alcanzar velocidades de transmisión de hasta 4 Gb/s que equivale a 70 canales televisivos de color funcionando simultáneamente enviados a más de un millón de kilómetros.

Los logros de las últimas décadas son extraordinarios. Por ejemplo, el primer cable transatlántico de fibra óptica TAT-8 se realizó utilizando algunas técnicas inteligentes de procesamiento de datos para transmitir al mismo tiempo 40.000 conversaciones a través de tan sólo dos cables de fibra óptica. El TAT-1, un cable de cobre que se instaló en 1956, podía llevar no más de 51 conversaciones mientras que las demás versiones de cobre, TAT-7 (1983) puede transmitir solamente unas 8.000. El TAT-8 que comenzó a funcionar en 1988, funciona a 296 Mb/s con fibras monomodo de 1.300 nm —véase pág. 203 y con regeneradores o repetidores— para reforzar la señal) cada 50 km (30 mi) o más. Esto debería compararse con el TAT-7 de

cobre con amplificadores cada 10 km o así. Esta característica es de enorme importancia en las comunicaciones de larga distancia. Los repetidores en los sistemas de cables corrientes deben colocarse aproximadamente a un kilómetro de distancia mientras que en las redes coaxiales dicha distancia aumenta hasta 2-6 kilómetros. Incluso las transmisiones radiofónicas a través de la atmósfera necesitan regeneración cada 30-50 km. Se prevé que los sistemas de fibras de gran precisión aumentarán la distancia de los repetidores de hasta 150 km.

Un factor determinante muy importante en el espaciamiento de los repetidores es la pérdida de potencia debido a la atenuación de la señal a medida que se propaga en la línea. El decibelio (dB) es la unidad habitual que se utiliza para designar la relación de dos niveles de potencia y en cuanto tal proporciona una indicación conveniente de la potencia de salida (P_o) con respecto a la potencia de entrada (P_i). El número de decibelios dB = – 10 logaritmo (P_o/P_i) y por tanto una relación de 1 : 10 es de 10 dB, 1: 100 es de 20 dB, 1 : 1.000 es de 30 dB etc. Normalmente, la atenuación (α) se especifica en decibelios por kilómetros (dB/km) de longitud de fibra (L). Por lo tanto, $-\alpha L/10$ = logaritmo (P_o/P_i) y si elevamos a la potencia de ambos lados

$$P_o/P_i = 10^{-\alpha L/10} \tag{5.65}$$

Por lo general, se precisará volver a amplificar la señal al reducirse la potencia en un factor de aproximadamente 10^{-5}. La atenuación del vidrio óptico comercial, material que se utilizaba en las fibras hacia la mitad de la década de los sesenta, es de unos 1.000 dB/km. La potencia de la luz, después de transmitirse por 1 km a través de la materia, se reduciría en un factor de 10^{-100}, siendo necesarios los regeneradores cada 50 m —lo cual es algo mejor que comunicarse con una cuerda y dos botes de hojalata—. En 1970, α había disminuido hasta 20 dB/km para la sílice fundida (cuarzo, SiO_2), reduciéndose ulteriormente hasta 0,16 dB/km en 1982. Esta enorme disminución de la atenuación se logró principalmente eliminado las impurezas (especialmente los iones de hierro, níquel y cobre) y reduciendo la contaminación mediante los grupos OH, a través de la eliminación escrupulosa de cualquier huella de agua en el vidrio (pág. 72).

En la figura 5.82 se ilustran las tres configuraciones de fibras más importantes que se utilizan hoy en día en las comunicaciones. En (a), el núcleo es relativamente ancho siendo los índices del núcleo y del revestimiento constantes en todas partes. Se trata de la denominada **fibra de salto de índice** con un núcleo homogéneo de entre 50 y 150 μm o más y con un revestimiento cuyo diámetro oscila aproximadamente entre

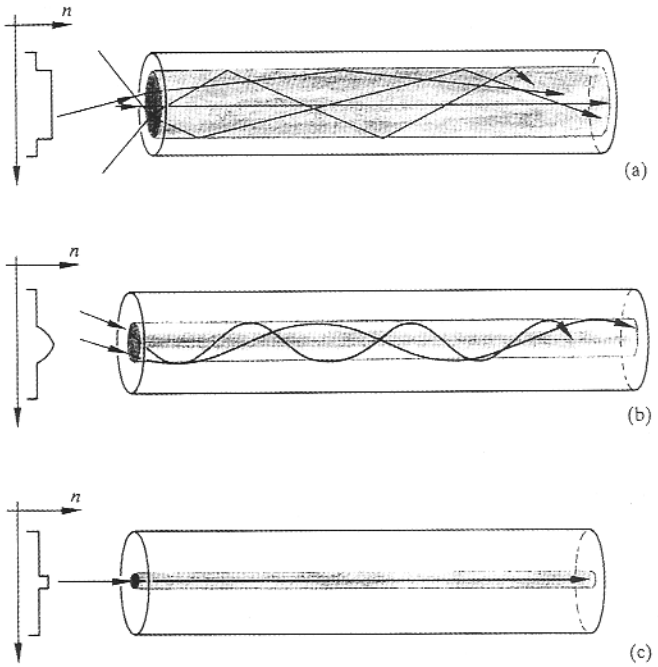


FIGURA 5.82 Las tres principales configuraciones de fibra óptica y sus perfiles de índice. (*a*) Fibra de salto de índice multimodo. (*b*) Fibra de índice graduado multimodo. (*c*) Fibra de salto de índice monomodo.

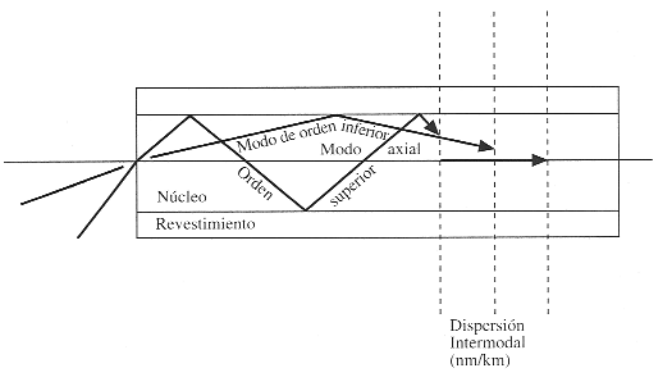


FIGURA 5.83 Dispersión intermodal en una fibra multimodo de salto de índice.

100 y 250 μm. El más antiguo de estos tres tipos, la fibra de salto de índice se utilizó ampliamente en los primeros sistemas de generación (1975-1980). El núcleo central comparativa-

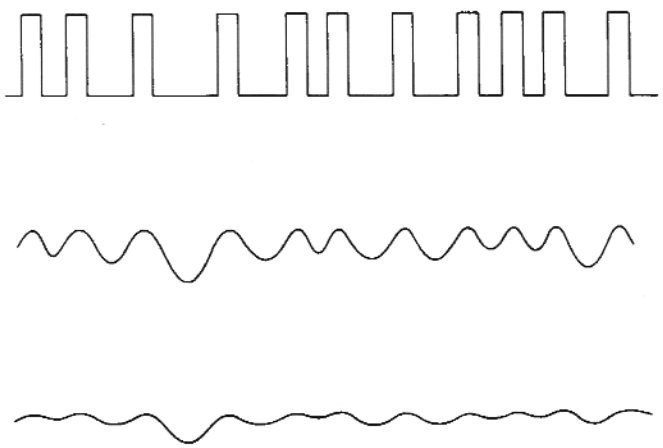


FIGURA 5.84 Pulsos rectangulares de luz que van difundiéndose por una dispersión cada vez mayor. Obsérvese cómo los pulsos más cercanos se degradan más rápidamente.

mente grande hace que sea resistente y fácil de introducirle la luz además de poderse adaptar y acoplar sin problemas. Es la menos cara de todas pero también la menos eficaz, revelando unos inconvenientes para aplicaciones de largo alcance.

Según el ángulo de llegada al interior de la fibra, pueden existir centenares, incluso, miles de trayectorias de rayos o modos diferentes por los que puede propagarse energía en el núcleo (figura 5.83). Se trata, por lo tanto, de la **fibra multimodo** donde cada modo corresponde a un tiempo de tránsito ligeramente distinto. Rayos con ángulos más elevados se desplazan a lo largo de caminos más largos; reflejándose de un lado a otro, tardan más en alcanzar el extremo de la fibra que los rayos que se mueven a lo largo del eje. Se trata de lo que se denomina con poca rigurosidad **dispersión intermodal** o, a veces, tan sólo *dispersión modal*, si bien no tiene nada que ver con un índice de refracción que depende de la frecuencia. La información a transmitir se digitaliza por lo general en algunos códigos para sucesivamente enviarse a lo largo de las fibras como un flujo de millones de pulsos o bits por segundo. Los tiempos de propagación diferentes producen el efecto no deseado de cambiar la forma de los pulsos de la luz que representa la señal. Lo que empezó como un pulso rectangular intenso puede difundirse, después de haber viajado unos kilómetros en la fibra, hasta aparecer como una mancha irreconocible (figura 5.84).

El tiempo total de propagación entre la llegada del rayo axial y la del rayo más lento, el que recorre la distancia más larga, es $\Delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}}$. Aquí, remitiéndonos a la figura 5.79, el tiempo de propagación mínimo corresponde a la longitud axial L dividida por la velocidad de la luz en la fibra

$$t_{\text{mín.}} = \frac{L}{v_f} = \frac{L}{c/n_f} = \frac{Ln_f}{c} \tag{5.66}$$

La trayectoria no axial (ℓ) proporcionada por la ecuación (5.58) es la más larga cuando el rayo incide con el ángulo crítico, con lo cual es válida la ecuación (5.61). Combinando las dos, obtenemos $\ell = Ln_f/n_c$, y así

$$t_{\text{máx}} = \frac{\ell}{v_f} = \frac{Ln_f/n_c}{c/n_f} = \frac{Ln_f^2}{cn_c} \tag{5.67}$$

Por lo tanto, al restar la ecuación (5.66) de la ecuación (5.67) se deduce que

$$\Delta t = \frac{Ln_f}{c}\left(\frac{n_f}{n_c} - 1\right) \tag{5.68}$$

Para poner un ejemplo, supongamos que $n_f = 1{,}500$ y $n_c = 1{,}489$. El retraso, $\Delta t/L$, resulta ser de 37 ns/km. Dicho de otra forma, un pulso agudo luminoso que entra en el sistema se extenderá en el tiempo unos 37 ns cada kilómetro de fibra que atraviese. Asimismo, viajando a una velocidad de $v_f = c/n_f = 2{,}0 \times 10^8$ m/s se extenderá en el espacio sobre una longitud de 7,4 m/km. Para cerciorarse que la señal transmitida podrá leerse fácilmente, podríamos establecer que la separación espacial (o temporal) sea por lo menos el doble del ancho de expansión (figura 5.85). Ahora, imaginemos que la línea tenga 1 km de largo; en este caso, los pulsos emitidos tendrán un ancho de 7,4 m/km al salir de la fibra, por lo tanto tendrán que estar separados por 14,8 m. Esto significa que los pulsos de entrada tendrán que estar a una distancia de 14,8 m uno de otro, teniendo que estar separados en el tiempo por 74 ns lo cual significa que no podrán viajar más rápido que 1 cada 74 ns, es decir un ritmo de 13,5 millones de pulsos por segundo. De esta forma, la dispersión intermodal (que, por lo general, es de 15-30 ns/km) limitará la frecuencia de la señal de entrada, indicando de ese modo la velocidad a la que se podrá alimentar la información en el sistema.

Este problema de las diferencias de retraso puede reducirse cien veces variando gradualmente el índice de refracción del núcleo, disminuyéndolo radialmente hacia el exterior hasta el revestimiento (figura 5.82*b*). En lugar de seguir por caminos en zigzag pronunciados, los rayos podrán moverse en espiral alrededor del eje central. Puesto que el índice es más elevado a lo largo del centro, los rayos que escogen caminos más cortos, disminuyen la velocidad en cantidades proporcionalmente más

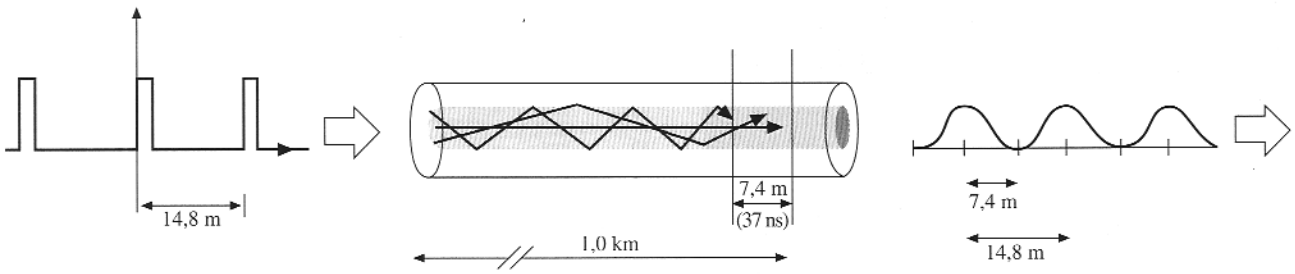


FIGURA 5.85 Difusión de una señal de entrada provocada por dispersión intermodal.

elevadas mientras que los rayos que se mueven en espiral cerca del revestimiento se desplazan más rápidamente en caminos más largos. El resultado es que todos los rayos tienden a permanecer más o menos juntos en estas **fibras de gradiente de índice** multimodo. Por lo general, una fibra de gradiente de índice tiene un núcleo de unos 20-90 μm de diámetro y una dispersión intermodal de tan sólo unos 2 ns/km. Se han utilizado ampliamente en aplicaciones interurbanas de distancia media siendo su precio medio.

Las fibras multimodales cuyo núcleo tiene un diámetro de 50 μm o más a menudo son alimentadas por *diodos emisores de luz* (LED); su precio es comparativamente barato siendo utilizadas comúnmente en distancias relativamente cortas con velocidades de transmisión bajas. El problema que plantean es que emiten una gama bastante amplia de frecuencias. Por lo tanto, la *dispersión espectral o material usual*, el hecho que el índice de fibra sea una función de la frecuencia, se convierte en un factor de limitación. Esta dificultad se evitará recurriendo a haces láser espectralmente puros o las fibras podrán utilizarse con longitudes de onda cerca de 1,3 μm, donde el vidrio de sílice (figuras 3.38 y 3.39) tiene poca dispersión.

La última y mejor solución al problema de la dispersión intermodal es construir un núcleo tan estrecho (menos de 10 μm) que proporcionará tan sólo un modo según el cual los rayos puedan viajar paralelamente al eje central (figura 5.82*c*). Dichas **fibras monomodo** de vidrio ultrapuro (tanto de salto de índice como con gradiente de índice) proporcionan el mejor rendimiento. Por lo general, al tener unos diámetros del núcleo que oscilan entre 2 y 9 μm (unas 10 longitudes de onda), eliminan esencialmente la dispersión intermodal. Si bien son relativamente caras y aún necesitando fuentes láser, estas fibras unimodales que funcionan a 1,55 μm (donde la atenuación es de aproximadamente 0,2 dB/km, no lejos del valor ideal de la sílice de 0,1 dB/km) son hoy en día las principales guías de luz de larga distancia. Un par de fibras de esta clase podría, en el día de mañana, conectar vuestra casa con una amplia red de comunicaciones e infraestructura informática, de manera que la época del cable de cobre parezca primitiva.

La óptica capilar

El funcionamiento de la fibra óptica es hacer que la energía radiante (de relativamente baja frecuencia, esto es luz o IR) se refleje total e internamente fuera de una interfaz de índice alto/bajo dentro de una guía de ondas sólida y estrecha. De manera parecida, también la radiación EM de alta frecuencia (especialmente los rayos X) puede reflejarse total e internamente (pág. 123) fuera de una interfaz aire-vidrio (antes que una interfaz de vidrio-aire). El ángulo de incidencia límite, *medido desde la superficie*, es normalmente de aproximadamente 0,2° para rayos X de 10 keV ($\approx$ 0,12 nm). La figura 5.86 muestra de qué manera un haz sigue la curva de un tubo capilar hueco mediante reflexión de incidencia rasante en la interfaz interna aire-vidrio. Intentar doblar el camino de los rayos X sería de otra manera algo desalentador.

Se puede fabricar un hilo de vidrio único con un diámetro que oscila entre 300 y 600 μm para que contenga miles de finos canales capilares cuyo diámetro es de 3-50 μm (figura 5.87). Miles de tales hilos multicanal (figura 5.88) se utilizan juntos a fin de enfocar oportunamente o colimar los rayos X de una forma que antes no era posible.

FIGURA 5.86 Reflexiones múltiples de incidencia rasante de rayos X en una fibra de vidrio hueca.

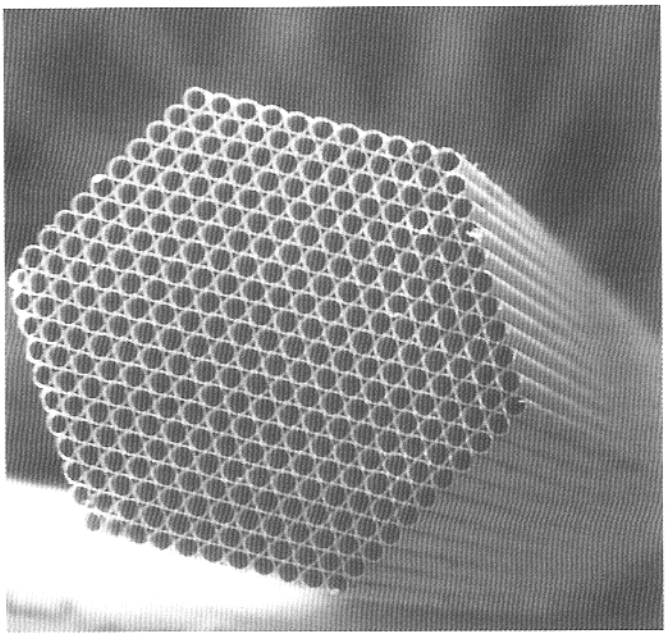


FIGURA 5.87 Micrografía con microscópio electrónico de barrido de un único hilo multicanal que contiene centenares de capilares huecos. (Foto cedida por X-Ray Optical Systems, Inc. Albany, NY, USA.)

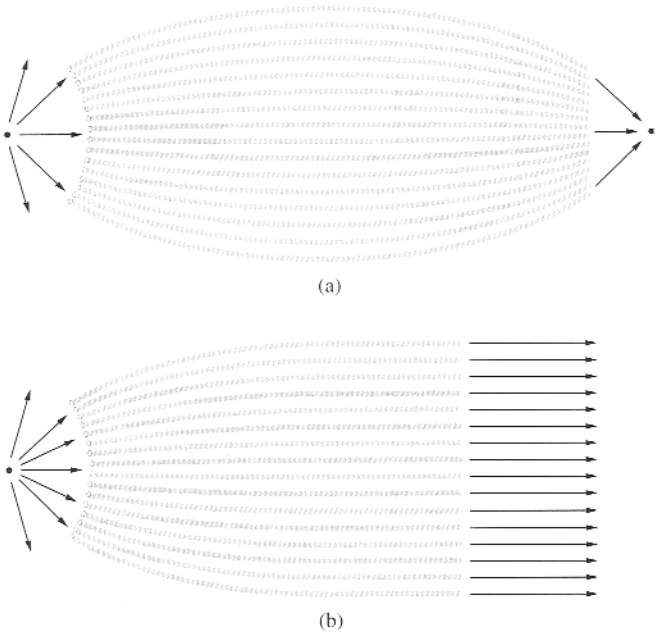


FIGURA 5.88 Un mazo de hilo de capilares múltiples que se utiliza para (*a*) enfocar, (*b*) colimar los rayos X de una fuente puntual.

5.7 Los sistemas ópticos

Hemos desarrollado la teoría paraxial hasta un punto donde pueden apreciarse los principios básicos de la mayoría de los sistemas ópticos prácticos. Para estar seguros, las sutilezas involucradas en el control de las aberraciones son extremadamente importantes, están aún lejos de este estudio. Sin embargo, podría construirse, por ejemplo, un telescopio (admitamos que no muy bueno, pero un telescopio de todos modos) utilizando las conclusiones ya extraídas de la teoría de primer orden.

¿Qué mejor punto de partida para un estudio de los instrumentos ópticos que el más común de todos, el ojo?

5.7.1 Los ojos

Para nuestros propósitos, distinguimos tres grupos principales de ojos: los que reúnen luz radiante y forman imágenes por medio de un sistema de lente única, los que utilizan esencialmente una disposición de facetas múltiples de lentes diminutas (que entran en canales parecidos a fibras ópticas) y los más rudimentarios que funcionan simplemente con un pequeño agujero sin lente (pág. 222). Además de ojos fotosensibles, la serpiente de cascabel dispone de «ojos» infrarrojos, orificios diminutos denominados «poros» que podrían incorporarse a este último grupo.

Los sistemas visuales de lentes pertenecientes a la primera clase se han desarrollado de forma independiente y sorprendentemente parecida en por lo menos tres tipos distintos de organismos. Algunos de los moluscos más avanzados (por ejemplo, el pulpo), ciertas arañas (por ejemplo, la Avicularia) y los vertebrados, incluyéndonos a nosotros mismos, poseen ojos cada uno formando una imagen individual continua real en una pantalla fotosensible o retina. Comparando, el ojo compuesto de facetas múltiple (figura 5.89) se desarrolló de forma independiente entre los artrópodos, esos animales de cuerpo y miembros articulados (por ejemplo, insectos y cangrejos). Produce una imagen sensorial de mosaico compuesta de numerosas contribuciones puntuales de campos de visión, una por cada uno de los segmentos diminutos del ojo (como si una persona estuviera mirando al mundo a través de un manojo de tubos extremadamente finos estrechamente empaquetados). Al igual que una imagen televisiva hecha de puntos de intensidad diferente, el ojo compuesto

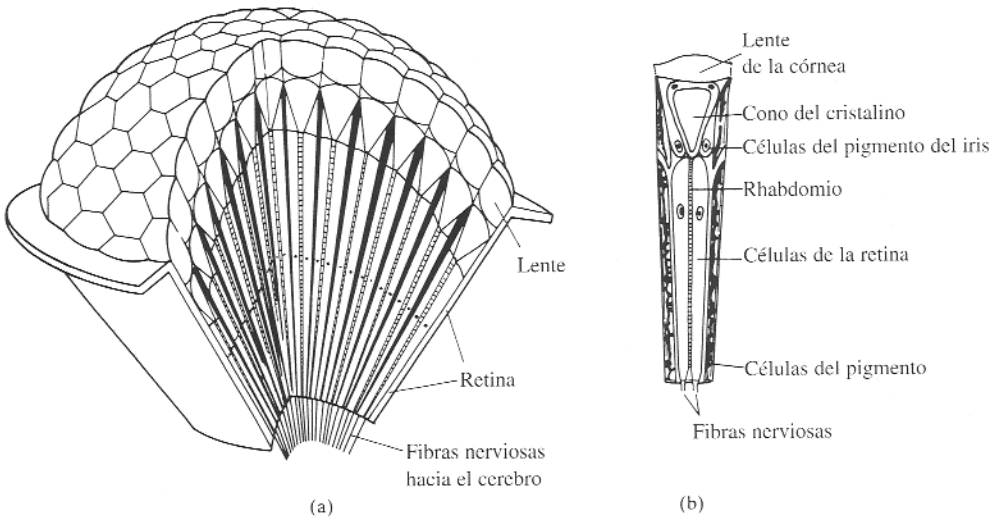


FIGURA 5.89 (a) El ojo compuesto formado por muchos ommatidio. (b) Cada ommatidio, el pequeño ojo individual, «ve» una pequeña zona en una dirección determinada. La lente de la córnea y el cono del cristalino encauzan la luz en la estructura sensora, el rhabdomio claro, en forma de bastón. Cada uno de ellos está rodeado por las células de la retina que a través de las fibras nerviosas conducen al cerebro. (Extraído de Ackerman *et al.*, *Biophysical Science*, © 1962, 1979. Englewood Cliffs, NJ: Prebtice-Hall, Inc., pág. 31. Por R. Bushman, *Animals Without Back Bones*.)

divide y digitaliza la escena que está observando. En la pantalla de una retina no se forma una imagen real: la síntesis tiene lugar eléctricamente en el sistema nervioso. El tábano tiene unos 7.000 segmentos de esta clase, la libélula predadora, insecto que vuela a gran velocidad, consigue mejorar su visión con 30.000 segmentos en comparación con determinadas hormigas que lo logran con tan sólo 50. Cuantas más facetas haya, más serán los puntos de imagen y cuanto mejor sea la resolución, más nítida será la imagen compuesta. Ésta podría ser la clase más antigua de ojo: los trilobitas, pequeños animales marinos de hace 500 millones de años tenían ojos compuestos bien desarrollados. Sorprendentemente, por más diferente que sea la óptica, la química de los mecanismos para la detección de imágenes es bastante similar en todos los animales terrestres.

La estructura del ojo humano

El ojo humano puede considerarse como una disposición de doble lente positiva que forma una imagen real en una superficie fotosensible. Al parecer, esta idea fue propuesta, de manera rudimentaria, por Kepler (1604) quien escribió: «Afirmo que la visión se produce cuando la imagen del ... mundo externo ... se proyecta sobre la ... retina cóncava». Este conocimiento fue bien recibido sólo después de que, en 1625, el jesuita alemán Christopher Scheiner —y, de forma independiente Descartes cinco años más tarde— llevara a cabo un experimento interesante. Scheiner quitó el revestimiento posterior del globo del ojo de un animal y mirando a través de la retina casi transparente desde atrás, pudo ver una imagen reducida e invertida de la escena que se desarrollaba delante del ojo. Si bien se parece a una cámara simple (pág. 179), el sistema visual (ojo, nervio óptico y corteza visual) funciona más como una unidad televisiva computerizada de circuito cerrado.

El ojo (figura 5.90) es una masa gelatinosa casi esférica (24 mm de largo y unos 22 de ancho) contenida dentro de una envoltura dura y flexible, la **esclerótica**. Excepto por la porción frontal o **córnea** que es transparente, la esclerótica es blanca y opaca. Sobresaliendo del cuerpo de la esfera está la córnea, la superficie curva de la córnea (que está ligeramente aplastada reduciendo así la aberración esférica) sirve como el primer y más fuerte elemento convexo del sistema de lentes. En efecto, gran parte de la curvatura impartida a un haz de rayos se da la interfaz aire-córnea. Por cierto, una de las razones por las que no podemos ver muy bien debajo del agua ($n_a \approx 1{,}33$) es que el índice está demasiado cerca del de la córnea ($n_C \approx 1{,}376$) para que pueda permitir una refracción adecuada.

Desde la córnea, la luz pasa a través de una cámara llena con un fluido acuoso denominado **humor acuoso** ($n_{ha} \approx 1{,}336$) que nutre la parte anterior del ojo. Un rayo que hubiera sido fuertemente refractado hacia el eje óptico en la interfaz aire-córnea, sería tan sólo ligeramente redirigido en la interfaz córnea-humor acuoso debido a la similitud de sus índices. En el humor acuoso está sumergido un diafragma conocido como **iris** que sirve como diafragma de apertura cuya función es controlar la luz que entra en el ojo a través de su agujero o **pupila**. Es el iris (palabra grie-

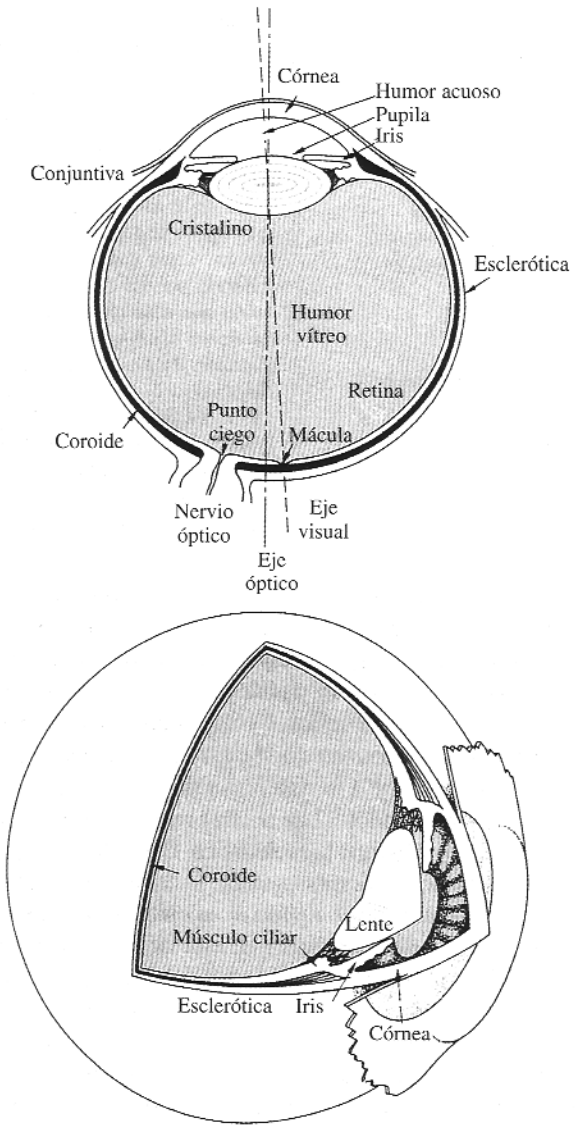


FIGURA 5.90 El ojo humano.

ga para arco iris) el que proporciona al ojo su característico color azul, marrón, gris, verde o castaño. Hecho de músculos circulares y radiales, el iris puede hacer expandir o contraer la pupila dentro de una gama que va de unos 2 mm en luz brillante hasta unos 8 mm en la oscuridad. Además de esta función, está también relacionado con el proceso de enfoque, contrayéndose para aumentar la nitidez de la imagen al realizar trabajos finos.

Inmediatamente detrás del iris se halla la **lente del cristalino.** El nombre, que se presta a confusiones, data del año 1000 d.C. y al trabajo de Abû ' Alî al Hasan ibn al Hasan ibn al Haitham, alias Alhazen del Cairo, quien dividió la descripción del ojo en tres regiones: acuosa, cristalina y vidriosa, respectivamente. El cristalino, que tiene tanto el tamaño como la forma de una pequeña judía (9 mm de diámetro y 4 mm de espesor) es una masa compleja de capas fibrosas rodeada por una membrana elástica. Su estructura es similar a la de una cebolla transparente, formada aproximadamente por 22.000 capas muy finas y tiene algunas características notables que lo distinguen de las lentes artificiales que se usan en la actualidad, además del hecho de que su tamaño sigue creciendo. Debido a su estructura laminar, los rayos que lo cruzan siguen trayectorias formadas por diminutos segmentos discontinuos. El cristalino es, en su conjunto, muy flexible, aunque dicha flexibilidad disminuya con la edad. Además, su índice de refracción varía de alrededor de 1,406 en el núcleo interior hasta aproximadamente 1,386 en la corteza menos densa, representando como tal un gradiente de índice o un sistema GRIN (pág. 280). El cristalino proporciona el mecanismo de enfoque de alta definición necesario cambiando su forma, es decir, tiene una distancia focal variable —característica a la que volveremos más tarde.

Los componentes refractantes del ojo, la córnea y el cristalino, pueden estudiarse como parte integrante de una lente efectiva de elementos dobles con un foco objeto de unos 1,56 mm frente a la superficie anterior de la córnea y un foco imagen de unos 24,3 mm detrás suyo en la retina. Para simplificar un poco el asunto, podemos imaginar que el centro óptico de la lente combinada esté a 17,1 mm enfrente de la retina y que se halla precisamente en el borde trasero del cristalino.

Detrás de éste hay otra cámara llena con una substancia gelatinosa transparente hecha de colágeno (un polímero proteínico) y ácido hialurónico (un concentrado de proteínas), denominada **humor vítreo** ($n_{hv} \approx 1{,}337$) que da sustento al globo ocular. Como comentario aparte, cabe observar que el humor vítreo contiene partículas microscópicas de tejido celular que flotan libremente en él. Sus sombras dibujadas con franjas de difracción pueden verse fácilmente entornando el ojo hacia una fuente luminosa o al observar el cielo a través de un agujero diminuto: en el campo de visión flotarán objetos pequeños y extraños parecidos a las amebas (*muscae volitantes*). Por cierto, un aumento muy marcado en la percepción de estos cuerpos flotantes puede ser indicativo del desprendimiento de la retina. Mientras estén haciendo esto, entornen los ojos otra vez hacia la fuente luminosa (una luz fluorescente difusa también sirve).

Cerrando los párpados casi completamente, podrán ver la periferia circular cercana de su propia pupila, más allá de la cual el brillo de la luz desaparecerá en la oscuridad. Para verificar lo anterior, tapen y destapen parte de la luz; el brillo circular se expandirá visiblemente y se contraerá, respectivamente. ¡Están viendo la sombra proyectada por el iris desde adentro! El ver objetos internos de esta forma se denomina percepción entóptica.

Al interior de la dura membrana esclerótica se halla una envoltura interna, la coroides, una capa oscura, bien provista de conductos sanguíncos y bien pigmentada con melanina, que absorbe la luz parásita al igual que la cubierta de pintura negra en el interior de una cámara. Una capa delgada (cuyo espesor varía entre 0,5 y 0,1 mm) de células receptoras luminosas reviste gran parte de la superficie interior de la coroides: se trata de la **retina** (del latín *rete* que significa red). El haz luminoso enfocado se absorbe a través de reacciones electroquímicas en esta estructura rosácea de capas múltiple.

El ojo humano contiene dos clases de células fotorreceptoras: los **bastones** y los **conos** (figura 5.91). Unos 125 millones de ellas están entremezcladas de manera no uniforme sobre la retina. En algunos casos, el conjunto de los bastoncitos (cuyo diámetro es de unos 0,002 mm) tiene las características de una película en blanco y negro de alta velocidad (tal como la Tri-X). Si bien es extremadamente sensible, funcionando con luz demasiado débil como para que reaccionen los conos, es incapaz de distinguir el color y las imágenes que retransmite no están bien definidas. Por el contrario, el conjunto de 6 ó 7 millones de conos (cada uno con un diámetro de unos 0,006 mm) puede imaginarse como si fuera una película de color de baja velocidad, superpuesta pero separada. Funciona con luz brillante proporcionando vistas detalladas y en color, siendo sin embargo bastante insensible con niveles de luz bajos.

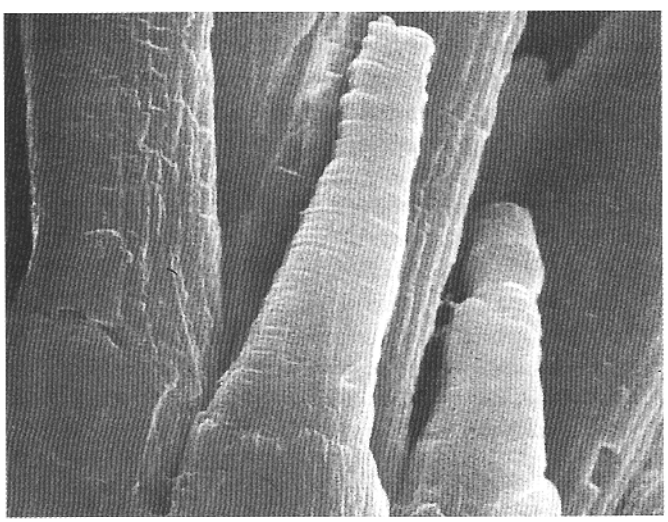


FIGURA 5.91 Una micrografía electrónica de la retina de una salamandra (*Necturus Maculosus*). En primer plano aparecen dos conos visuales y varios bastones detrás de ellos. Foto de E. R. Lewis, Y. Y. Zeevi y F. S. Werblin, *Brain Research* **15**, 559 (1969).

La gama normal de longitud de onda de la visión humana oscila entre 390 nm y 780 nm aproximadamente (tabla 3.4). En todo caso, los estudios que se han llevado a cabo han permitido bajar dichos límites hasta alrededor de 310 nm en el ultravioleta, aumentándolos sucesivamente hasta unos 1.050 nm en el infrarrojo. De hecho, algunas personas han afirmado haber «visto» las radiaciones X. La limitación de la transmisión ultravioleta en el ojo es impuesta por el cristalino que absorbe en el UV. Las personas que han sufrido la extirpación quirúrgica de un cristalino han mejorado enormemente su sensibilidad al UV.

La zona de salida del nervio óptico del ojo no contiene receptores, siendo insensible a la luz; por esta razón se denomina **punto ciego** (ver figura 5.92). El nervio óptico se extiende sobre la parte posterior del interior del ojo con forma de retina.

Cerca del centro de la retina existe una pequeña depresión de 2,5 a 3 mm de diámetro, conocida como la mancha amarilla o **mácula** cuyo número de conos es más que el doble del de los bastoncitos y en cuyo centro se halla una pequeña región libre de bastones de unos 0,3 mm de diámetro, llamada **fovea centralis.** (Comparando, la imagen de la Luna llena en la retina tiene un diámetro de aproximadamente 0,2 mm —problema 5.66—.) Aquí, los conos son más delgados (su diámetro oscila entre 0,0030 mm y 0,0015 mm) y están más densamente empaquetados que en ningún otro lugar en la retina. Puesto que esta zona proporciona la información más clara y detallada, el globo ocular se mueve continuamente de tal forma que la luz que llega del área al objeto de interés primario cae en esta zona. Una imagen se desplaza constantemente a través de las diferentes células receptoras por medio de estos movimientos normales del ojo. Si

FIGURA 5.92 A fin de comprobar la existencia del punto ciego, ciérrese un ojo y mírese a una distancia de unas 10 pulgadas, directamente a la X; el 2 desaparecerá. Acercándose, el 2 reaparecerá mientras que el 1 desaparece.

tales movimientos no se dieran y la imagen se mantuviera estacionaria en una determinada serie de fotorreceptores, tendería a desvanecerse. Sin la fóvea, el ojo perdería entre 90 y 95% de su capacidad, reteniendo tan sólo la visión periférica.

Otro hecho que indica la complejidad del sistema sensor es que los bastones están múltiplemente conectados con las fibras nerviosas y que una sola de dichas fibras puede activarse por uno cualquiera de los casi cien bastoncitos. Por el contrario, en la fóvea los conos están conectados individualmente con las fibras nerviosas. La percepción real de una escena se realiza por el sistema ojo-cerebro en un continuo análisis de la imagen de la retina variable en el tiempo. Repárese en el poco estorbo que el punto ciego acarrea incluso con un ojo cerrado.

Entre la capa nervio-fibra de la retina y el humor existe una red de grandes vasos sanguíneos de la retina que pueden observarse entópticamente. Una forma es cerrar el ojo y colocar una pequeña fuente luminosa brillante contra el párpado. Se «verá» un patrón de sombras *(figuras de Purkinje)* proyectadas por los vasos sanguíneos en la capa sensible de la retina.

Acomodación

El enfoque fino o **acomodación** del ojo humano es una función que desempeña el cristalino suspendido en posición detrás del iris mediante unos ligamentos que están conectados con los **músculos ciliares**. Por lo general, dichos músculos están relajados y en ese estado empujan hacia fuera radialmente en la red de finas fibras que fijan el borde del cristalino. Así, éste hace que el cristalino flexible adquiera una configuración bastante plana, aumentando su radio que, a su vez, aumenta su distancia focal [ecuación (5.16)]. Con los músculos completamente relajados, la luz de un objeto al infinito se enfocará en la retina (figura 5.93). Cuando el objeto se acerca más al ojo, los músculos ciliares se contraen, liberando la tensión externa sobre la periferia del cristalino que entonces sobresale ligeramente por sus propias fuerzas elásticas. Al hacerlo, la distancia focal disminuye de tal forma que s_i se mantiene constante. A medida que el objeto se acerca aún más, el yugo de los músculos ciliares se contrae con más tensión, la región circular que rodean se hace todavía más pequeña mientras que el radio de las superficies del cristalino se reduce aún más. El punto más cercano que un ojo puede enfocar se denomina **punto próximo**. En un ojo normal podría ser de unos 7 cm para un adolescente, 25 cm para un adulto joven y aproximadamente de unos 100 cm para una persona de mediana edad. Al diseñar los instrumentos visuales se tiene en cuenta este fenómeno de tal manera que el ojo no haga esfuerzos innecesarios. Lógicamente, el ojo no puede enfocar a dos objetos diferentes al mismo tiempo como podrá comprobarse si al mirar a través de una lámina de vidrio, tratamos de enfocar ésta y la escena que se halla detrás al mismo tiempo.

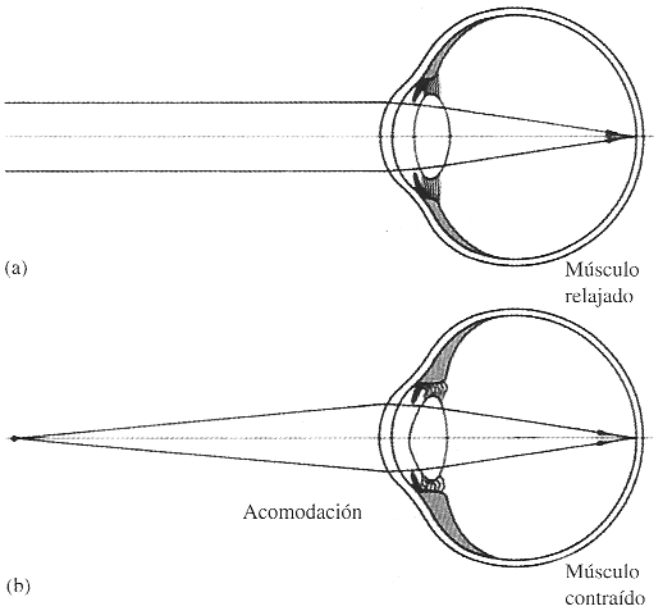


FIGURA 5.93 Acomodación; cambios en la configuración del cristalino.

Los mamíferos, como el hombre, generalmente llevan a cabo la acomodación variando la curvatura del cristalino, sin embargo existen otros métodos. Los peces mueven tan sólo el cristalino hacia la retina o lo alejan de ella, de la misma forma que se mueve el objetivo de una cámara para enfocar. Algunos moluscos logran hacer lo mismo contrayendo o expandiendo todo el ojo, alterando así la distancia relativa entre el cristalino y la retina. Para las aves de rapiña, que tienen que continuar enfocando un objeto que se mueve rápidamente en una amplia gama de distancias pues se trata de un asunto de vida o de muerte, el mecanismo de acomodación es muy diferente. Acomodan cambiando notablemente la curvatura de la córnea.

5.7.2 Gafas

Las gafas fueron inventadas probablemente durante el siglo XIII, quizás en Italia. Un manuscrito florentino de esa época (1299), que ya se perdió, hablaba de «gafas inventadas hace poco para la

comodidad de las personas mayores cuya vista haya empezado a menguar». Se trataba de lentes biconvexas, un poco distintas a la lupa o a la lente de leer portátiles mientras es indudable que mucho antes se utilizaron las piedras preciosas pulidas como monóculos. Si bien Roger Bacon (*C.A.* 1267) empezó a escribir acerca de lentes negativas bastante pronto, se tuvo que esperar casi otros doscientos años antes de que Nicholas Cusa hablara, por vez primera, de su uso en las gafas y otros cien años más antes de que dichas gafas ya no fueran una novedad, hacia finales del siglo XVI. Curiosamente, todavía en el siglo XVIII no se consideraba correcto llevar gafas en público tanto es así que son muy escasas las personas que aparecen en las pinturas de esa época con las gafas puestas. En 1804, Wollaston al admitir que las gafas tradicionales (bastante planas, biconvexas y cóncavas) permitían mejorar la vista tan sólo cuando se miraba a través de su centro, patentó una lente nueva, acentuadamente curva que sería la precursora de las modernas lentes del tipo menisco (del griego *meniskos,* diminutivo de Luna, es decir, media luna) que permiten al globo ocular giratorio ver a través de ellas desde el centro hasta el margen sin distorsión reseñable.

En la óptica fisiológica se habla habitual y oportunamente de **la potencia dióptrica**, $\mathcal{D}$, de una lente que es simplemente el inverso de la distancia focal. Cuando f se expresa en metros, la unidad de potencia es el inverso del metro o *dioptría*, representada por el símbolo D: $1\ \text{m}^{-1} = 1$ D. Por ejemplo, si una lente convergente tiene una distancia focal de + 1 metro, su potencia es + 1 D; con una distancia focal de − 2 metros (una lente divergente) $\mathcal{D} = -\frac{1}{2}$ D; para $f = +10$ cm, $+10$ cm, $\mathcal{D} = 10$ D. Ya que una lente delgada de índice n_l en el aire tiene una distancia focal que viene dada por

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad [5.16]$$

su potencia es

$$\mathcal{D} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad (5.69)$$

Podemos sentir hacia dónde nos movemos considerando, de manera aproximada, que cada superficie de una lente desvíe los rayos entrantes (cuanto más los desvíe más fuerte será la superficie). Una lente convexa que desvíe fuertemente los rayos en ambas superficies tiene una distancia focal corta y una gran potencia dióptrica. Ya sabemos que la distancia focal para dos lentes delgadas en contacto viene dada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad [5.38]$$

Esto significa que la potencia combinada es la suma de las potencias individuales, es decir

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

Entonces, una lente convexa con $\mathcal{D}_1 = +10$ D que esté en contacto con una lente negativa de $\mathcal{D}_2 = -10$ D da como resultado $\mathcal{D} = 0$; la combinación se comporta como una lámina paralela de vidrio. Asimismo, podemos imaginar una lente, por ejemplo, una lente doble convexa, como si estuviera compuesta de dos lentes plano-convexas en contacto íntimo una con otra. La potencia de cada una de ellas se deduce de la ecuación (5.69), entonces para la primera lente plano-convexa ($R_2 = \infty$)

$$\mathcal{D}_1 = \frac{(n_l - 1)}{R_1} \qquad (5.70)$$

mientras que para la segunda

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(n_l - 1)}{-R_2} \qquad (5.71)$$

Estas expresiones pueden definirse igualmente bien proporcionando las *potencias de las superficies respectivas* de la doble lente convexa inicial. Dicho de otro modo, *la potencia de cualquier lente delgada es igual a la suma de las potencias de sus superficies.* Como R_2 es un número negativo para una lente convexa, tanto $\mathcal{D}_1$ como $\mathcal{D}_2$ serán positivos en ese caso. La potencia de una superficie, definida de esta manera, no es en general el inverso de su distancia focal, aunque sí lo es cuando esté sumergida en aire. Relacionando esta terminología con el modelo que se utiliza normalmente para el ojo humano, notamos que la potencia del cristalino *rodeado por aire* es alrededor de +19 D. La córnea proporciona aproximadamente +43 de las +58,6 dioptrías totales del ojo intacto sin acomodación.

Un ojo normal, a pesar del sentido implícito del término, no es realmente algo tan común como se supone. Por el vocablo *normal*, o su sinónimo *emétrope,* queremos referirnos a un ojo que es capaz de enfocar rayos paralelos sobre la retina mientras se halla en la condición de relajamiento, es decir, esa condición cuyo segundo punto focal se encuentra en la retina. Para el ojo sin acomodación, el **punto lejano** es el punto objeto cuya imagen se halla en la retina. Así, para el ojo normal, el punto más distante que puede enfocarse en la retina, el punto lejano, está por consiguiente al infinito (que por razones prácticas es cualquier punto más allá de 5 metros). Por el contrario, cuando el punto focal no se halla en la retina, el ojo es *amétrope* (padece, por ejemplo, hipermetropía, miopía o astigmatismo). Esto puede darse tanto como consecuencia de cambios

anormales en el mecanismo de refracción (córnea, lente, etc.) o como consecuencia de las alteraciones en la longitud del globo ocular que modifica la distancia entre la lente y la retina, siendo esta segunda causa la más frecuente. Tan sólo para poner las cosas en su justa perspectiva, obsérvese que aproximadamente el 25% de los adultos jóvenes necesitan una corrección visual de $\pm 0{,}5$ D o menos y quizás el 65% necesita tan sólo una corrección de $\pm 1{,}0$ D o inferior.

Miopía-lentes negativas

La **miopía** es la condición donde el foco de los rayos paralelos se halla enfrente de la retina; la potencia del sistema de lentes así configurada es demasiado grande para la distancia axial anterior-posterior del ojo. Las imágenes de objetos distantes caen enfrente de la retina, el punto lejano está más cerca que el infinito y todos los puntos más alejados de él aparecerán borrosos. Esta es la razón por la cual la miopía a veces recibe el nombre de **vista corta**; un ojo aquejado de este defecto ve claramente los objetos cercanos (figura 5.94). Para corregir esta situación o por lo menos sus síntomas, colocamos una lente adicional enfrente del ojo para que el punto focal de la combinación gafas-sistema de lente ocular esté en la retina. Ya que el ojo miope puede ver claramente los objetos más cercanos que el punto lejano, la lente de las gafas debe proyectar imágenes relativamente cercanas de objetos distantes, por esta razón introducimos una lente negativa que hará diverger ligeramente los rayos. Resistamos la tentación de suponer que estamos simplemente reduciendo la potencia del sistema. En realidad, la potencia de la combinación lente-ojo a menudo es igual a la del ojo desnudo. Si ustedes llevan gafas para corregir la miopía, quítenselas; el mundo se volverá borroso pero no cambiará de tamaño. Procuren proyectar una imagen real en un trozo de papel utilizando sus gafas —no lo conseguirán—.

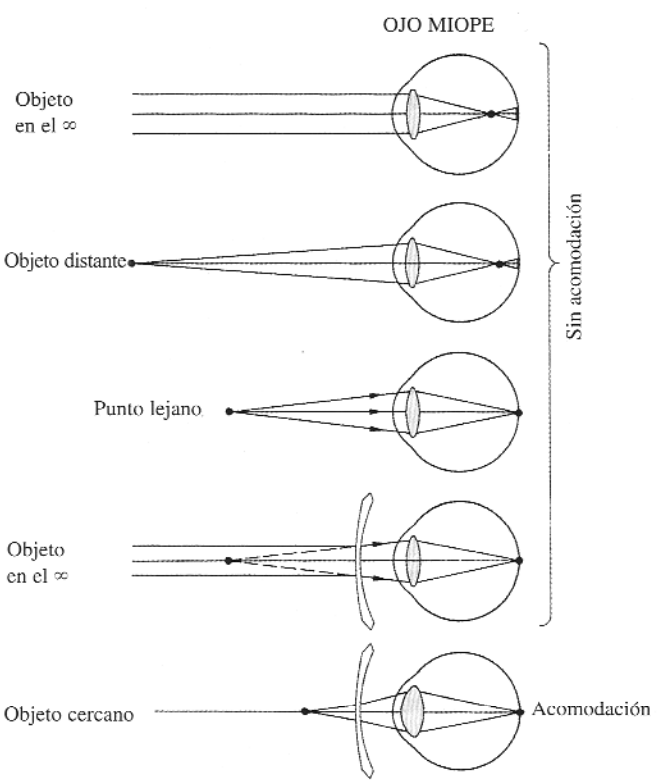


FIGURA 5.94 Corrección del ojo miope.

Supongamos que un ojo tenga un punto lejano de 2 m. No habría ningún problema si la lente de las gafas acercara los objetos distantes a más de 2 m. Si la imagen virtual de un objeto en el infinito se forma con una lente cóncava a 2 m, el ojo verá el objeto claramente con el cristalino sin acomodación. Así, utilizando la aproximación para lentes delgadas (por lo general, las gafas son finas para reducir su peso y tamaño) tenemos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-2} \qquad [5.17]$$

y $f = -2$ m mientras que $\mathcal{D} = -\frac{1}{2}$ D. Obsérvese que la distancia del punto lejano, medida desde la lente correctiva, equivale a su distancia focal (figura 5.95). El ojo ve las imágenes virtuales derechas de todos los objetos formadas por la lente correctiva, estando dichas imágenes ubicadas entre su punto lejano y próximo. Por cierto, también el punto próximo se aleja un poco, razón por la cual los miopes a menudo prefieren quitarse las gafas al enhebrar o leer letras pequeñas; pueden acercar más el material a su ojo, incrementando de esta forma el aumento.

En los cálculos que acabamos de realizar, pasa por alto la distancia entre la lente correctiva y el ojo —de hecho, se aplica más a las lentes de contacto que a las gafas—. Por lo general, la separación entre la lente y el ojo se hace igual a la distancia del primer punto focal del ojo ($\approx$16 mm) a la córnea, a fin de que no haya aumento de la imagen sobre la del ojo desnudo. Mucha gente tiene ojos desiguales, sin embargo, ambos tienen el mismo aumento. Un cambio de M_T para un ojo sólo sería un desastre. Al colocar la lente correctiva en el primer punto focal del ojo, se evita completamente el problema, independientemente de la potencia de esa lente [véase la ecuación

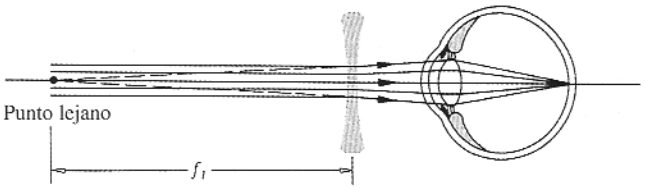


FIGURA 5.95 La distancia del punto lejano es igual a la distancia focal de la lente correctiva.

(6.8)]. Para ver esto, trácese tan sólo un rayo desde lo alto de un objeto a través de ese punto focal. El rayo entrará en el ojo y lo atravesará paralelamente al eje óptico, estableciendo así la altura de la imagen. Sin embargo, ya que este rayo no se ve afectado por la presencia de la lente de gafas, cuyo centro se halla en el punto focal, la posición de la imagen puede cambiar al incorporar dicha lente, pero quedando su altura y M_T inalterados [véase ecuación (5.24)].

La pregunta que se plantea ahora es: ¿Cuál es la potencia equivalente de una lente de gafas a una distancia d del ojo (es decir, equivalente a la de una lentilla con una distancia focal f_c que iguala la distancia del punto lejano? Para nuestra finalidad, será oportuno considerar el ojo como una lente individual y considerar la distancia d desde esa lente hasta las gafas de unos 16 mm, equivalente aproximadamente a la distancia gafas-córnea. Suponiendo que la distancia focal de la lente correctiva sea f_l y la del ojo sea f_e, la distancia focal de la combinación viene dada por la ecuación (5.36), es decir,

$$\text{b.f.l.} = \frac{f_e(d - f_l)}{d - (f_l + f_e)} \tag{5.72}$$

Esta es la distancia desde el cristalino hasta la retina. De manera parecida, la distancia focal de la lentilla equivalente combinada con el cristalino es proporcionada por

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_c} + \frac{1}{f_e} \tag{5.73}$$

donde f = b.f.l. Invirtiendo la ecuación (5.72), igualándola a la ecuación (5.73) y simplificando, obtendremos el resultado $1/f_c = 1/(f_l - d)$, independiente del ojo mismo. En términos de potencia,

$$\mathcal{D}_c = \frac{\mathcal{D}_l}{1 - \mathcal{D}_l d} \tag{5.74}$$

La potencia efectiva de una lente de gafas de potencia $\mathcal{D}_l$ a una distancia d desde el cristalino es igual a la de una lentilla de potencia $\mathcal{D}_c$. Observe que como d se mide en metros y por tanto es muy pequeña, a menos que $\mathcal{D}_l$ sea grande, como sucede frecuentemente, $\mathcal{D}_c \approx \mathcal{D}_l$. Por lo general, el punto donde colocamos las gafas sobre nuestra nariz tiene muy poco efecto, pero no siempre es así; un valor incorrecto de d ha dado como resultado muchas jaquecas.

Hipermetropía-lentes positivas

La **hiperopia** (o *hipermetropía*) es el defecto que hace que el segundo punto focal del ojo sin acomodación se forme más allá de la retina (figura 5.96). La **vista lejana**, como podría llamarse, a menudo se debe a un acortamiento del eje antero-posterior del ojo (el cristalino se halla demasiado cerca de la retina). Para aumentar la refracción de los rayos, se coloca una lente positiva enfrente del ojo. El ojo hipermétrope puede y debe llevar a cabo la operación de acomodación para ver distintamente los objetos

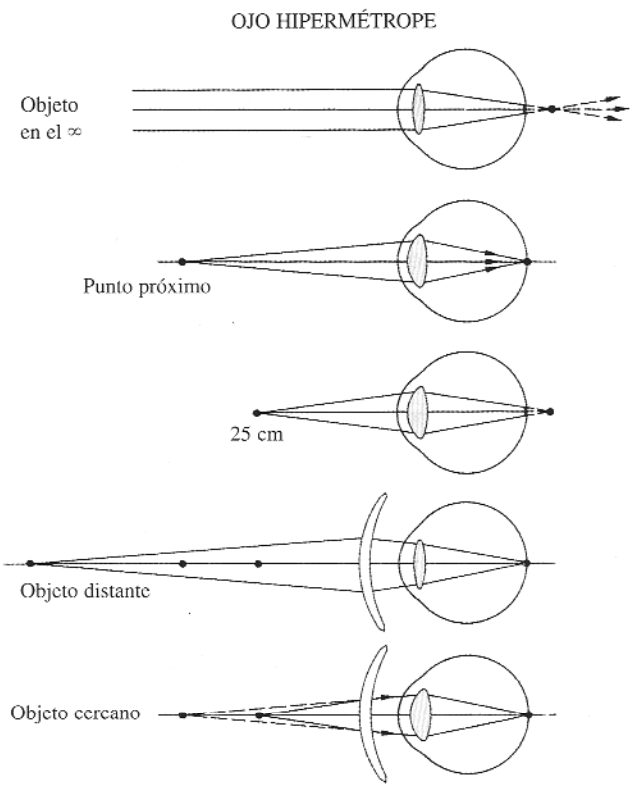


FIGURA 5.96 Corrección del ojo hipermétrope.

lejanos, pero estará en su límite al hacerlo para un punto próximo determinado que está mucho más alejado de lo habitual (unos 254 mm o 25 cm) siendo, por lo tanto, incapaz de ver claramente. Pero una lente correctiva convergente con potencia positiva desplazará efectivamente un objeto cercano más allá del punto próximo donde la agudeza del ojo es adecuada, es decir, formará una imagen virtual distante que el ojo podrá ver entonces claramente. Supongamos que el punto próximo de un ojo hipermétrope sea de 125 cm. Para que un objeto a + 25 cm tenga su imagen en $s_i = -125$ cm, de tal forma que pueda verse como si el ojo estuviera normal, la distancia focal deberá ser

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{(-1{,}25)} + \frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{0{,}31}$$

o $f = 0{,}31$ m y $\mathcal{D} = +3{,}2$ D. Esto es conforme a la Tabla 5.3 donde $s_o < f$. Estas gafas formarán imágenes reales —inténtelo si usted es hipermétrope.

Como se muestra en la figura 5.97, la lente correctiva posibilita el que el ojo relajado vea los objetos en el infinito. De hecho, crea una imagen en su «plano» focal (que atraviesa F) que sirve sucesivamente como objeto virtual para el ojo. El punto en cuestión (cuya imagen se halla en la retina) es de nuevo el *punto lejano,* y está a una distancia f_l *detrás* del cristalino. La persona hipermétrope puede «ver» cómodamente el punto lejano, y cualquier lente puesta en un punto cualquiera delante del ojo con una distancia focal oportuna valdrá.

Una presión suave con el dedo en los párpados por encima y por debajo de la córnea distorsionará temporalmente la visión, cambiándola de borrosa a clara y viceversa.

Astigmatismo-lentes anamórficas

Quizá el defecto más corriente del ojo es el **astigmatismo** que se debe a una curvatura desigual de la córnea, es decir, la córnea es asimétrica. Supongamos que hacemos pasar dos planos meridionales (uno que contiene el eje óptico) a través del ojo de manera que la curvatura o la potencia sea máxima en uno y mínima en el otro. Si estos planos son perpendiculares, el *astigmatismo* es *regular* y corregible; en caso contrario, es *irregular* y no podrá corregirse fácilmente. El astigmatismo regular puede asumir formas distintas: el ojo puede ser emétrope, miope o hipermétrope en varias combinaciones y grados sobre los dos planos meridionales perpendiculares. Así, para poner un ejemplo simple, las columnas de un tablero de ajedrez podrían enfocarse bien mientras que las filas resultarán borrosas debido a miopía o hipermetropía. Obviamente, estos planos meridionales no necesitan ser horizontales o verticales (figura 5.98).

El insigne astrónomo Sir George B. Airy utilizó una lente cóncava esfero-cilíndrica para aminorar su propio astigmatismo miope en 1825, siendo ésta, quizás, la primer «vez» que se corrigió tal defecto. Pero tan sólo después de la publicación, en 1862, de un tratado sobre lentes cilíndricas y astigmatismo del holandés Franciscus Cornelius Donders (1818-1889) los oftalmólogos fueron impulsados a adoptar el método a gran escala.

Cualquier sistema óptico que tiene un valor diferente de M_T o $\mathcal{D}$ en dos meridianos principales se dice que es *anamórfico.* Entonces, por ejemplo, si reconstruyéramos el sistema que se muestra en la figura 5.34, recurriendo esta vez a lentes cilíndricas (figura 5.99), la imagen estaría distorsionada, habiendo sido aumentada solamente en un plano. Esta es precisamente la clase de distorsión que se necesita para corregir el astigmatismo cuando un defecto existe solamente en un meridiano. Una lente plano-cilíndrica oportuna de gafas, bien sea positiva o negativa, restablecería, en su esencia, la visión normal. Cuando ambos

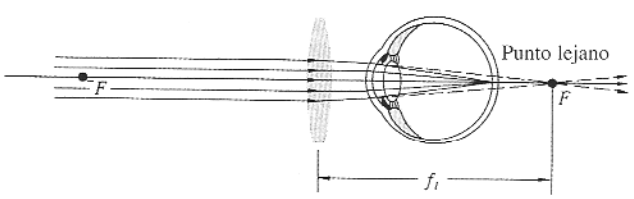


FIGURA 5.97 La distancia del punto lejano es nuevamente igual a la distancia focal de la lente correctiva.

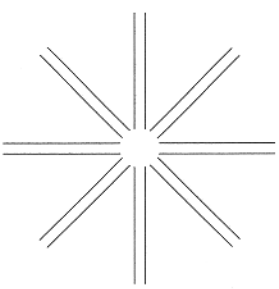
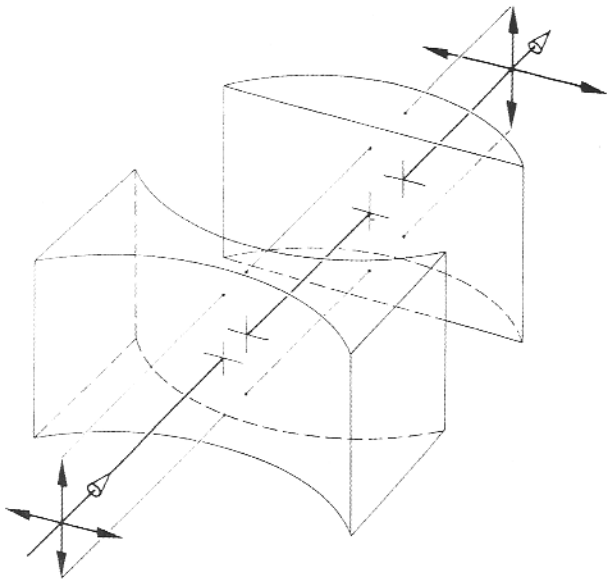
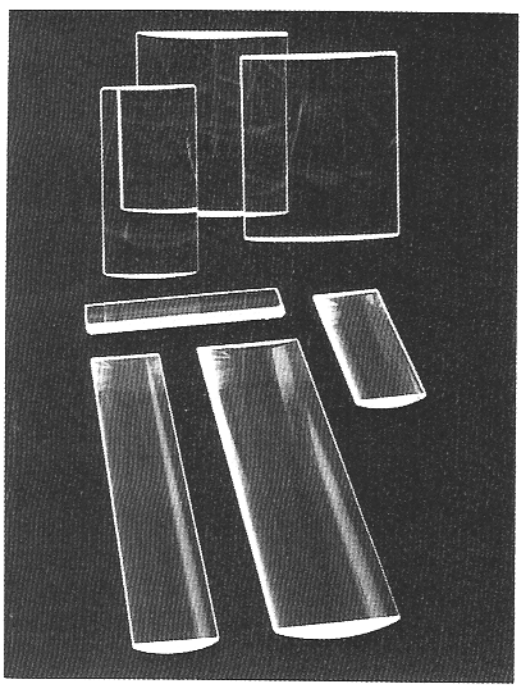


FIGURA 5.98 Una prueba para el ojo aquejado de astigmatismo. Obsérvese esta figura a ojo desnudo. Si una de las series de líneas aparece más gruesa que las demás, el observador tiene un problema de astigmatismo. Acérquese la figura al ojo; aléjese lentamente y obsérvese cuál es la serie de líneas que se enfoca primero. Si dos de las series parecen tener la misma claridad, gírese la figura hasta que una serie esté enfocada. Si todas las series son claras, el observador no tiene astigmatismo.



(a)



(b)

FIGURA 5.99 (a) Un sistema anamórfico. (c) Lentes cilíndricas (Foto cedida por Melles Griot.)

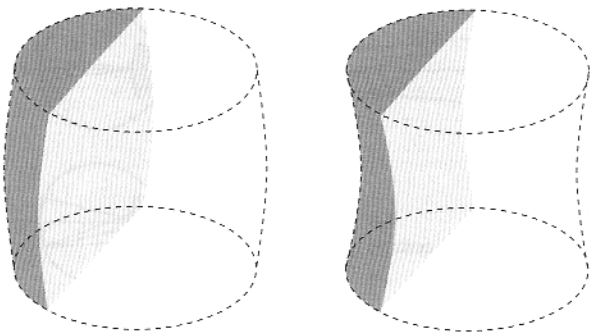


FIGURA 5.100 Superficies tóricas.

meridianos perpendiculares requieren corrección, la lente puede ser *esfero-cilíndrica* o incluso *tórica* como en la figura (5.100).

Como nota al margen, cabe observar que las lentes anamórficas se usan en otras áreas, por ejemplo, en la fabricación de películas cinematográficas de pantalla panorámica donde un campo de visión horizontal extragrande se comprime en el formato normal de las películas. Al proyectarla a través de una lente especial, la figura distorsionada se expande de nuevo. A veces, una emisora de televisión habrá mostrado pequeños extractos sin la lente especial; puede que hayan visto el extraño resultado de imágenes alargadas.

5.7.3 La lupa

Un observador puede hacer que un objeto se vea más grande para así poderlo examinar en detalle, simplemente acercándolo más a su ojo. A medida que el objeto se aproxima, su imagen en la retina aumenta, permaneciendo en foco hasta que el cristalino ya no podrá proporcionar la acomodación adecuada. Si el objeto se acercara más que este *punto próximo,* la imagen se haría borrosa (figura 5.101). En efecto, se puede usar una única lente positiva para aumentar el poder de refracción del ojo, de tal forma que el objeto pueda acercarse aún más y seguir estando en foco. Si bien la lente que se utiliza de esta manera recibe varias denominaciones tales como: **lupa**, *lupa simple* o *microscopio simple,* su función es *proporcionar una imagen de los objetos cercanos que es más grande que la que se ve con el ojo desnudo* (fig. 5.102). Dispositivos de este tipo se han usado por mucho tiempo. En efecto, en 1885 se descubrió una lente convexa de cuarzo ($f \approx 10$ cm), que quizá se usó como lupa, entre las ruinas del palacio del rey Sennacherib (705-681 a.C.) de Asiria.

Lo deseable sería, lógicamente, que la lente formara una imagen aumentada y derecha y que, además, los rayos que

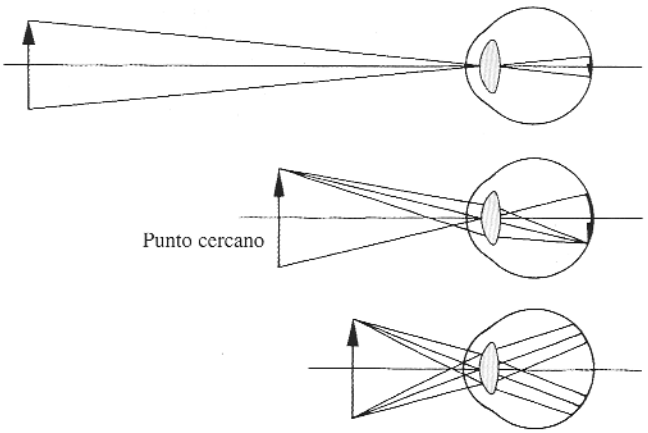


FIGURA 5.101 Imágenes en relación al punto cercano.

entran en el ojo desnudo no fueran convergentes. La tabla 5.3 (pág. 168) sugiere de inmediato que el objeto debería colocarse dentro de la distancia focal, es decir $s_o < f$. El resultado se muestra en la figura 5.103. Debido al tamaño relativamente pequeño de la pupila del ojo, es casi seguro que ella será, casi siempre, el diafragma de apertura y, como se ve en la figura 5.37 (pág. 177), también la pupila de salida.

La **potencia de aumento**, *PA o, de manera equivalente, el* **aumento angular**, M_A, de un instrumento visual se define como *la relación entre el tamaño de la imagen en la retina cuando se ve a través del instrumento y el tamaño de la imagen en la retina cuando se ve con el ojo desnudo a la distancia de visión normal.* Ésta generalmente se toma como la distancia hasta el punto próximo, d_o. La relación de los ángulos α_a y α_u

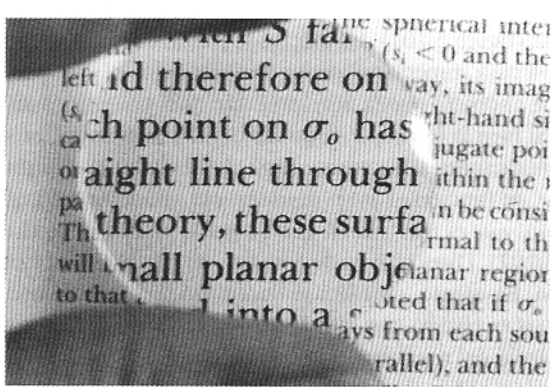


FIGURA 5.102 Una lente positiva utilizada como lupa. (E.H.)

(que están formados por los rayos principales de la parte superior del objeto en los casos del ojo normal y desnudo, respectivamente) es equivalente a PA, es decir

$$\text{PA} = \frac{\alpha_a}{\alpha_u} \tag{5.75}$$

Recordando que nos limitamos a la región paraxial, tan $\alpha_a = y_i/L \approx \alpha_a$ y tan $\alpha_u = y_o/d_o \approx \alpha_u$, así

$$\text{PA} = \frac{y_i d_o}{y_o L}$$

donde y_i e y_o están arriba del eje y son positivos. Si establecemos que d_o y L son cantidades positivas, se obtendrá una P.A. positiva, lo cual es muy razonable. Recurriendo a las ecuaciones (5.24) y (5.25) para M_T junto con la fórmula gaussiana para lentes, la expresión queda

$$\text{PA} = -\frac{s_i d_o}{s_o L} = \left(1 - \frac{s_i}{f}\right)\frac{d_o}{L}$$

Ya que la distancia de imagen es negativa, $s_i = -(L - \ell)$ y

$$\text{PA} = \frac{d_o}{L}[1 + \mathcal{D}(L - \ell)] \tag{5.76}$$

siendo $\mathcal{D}$ la potencia de la lupa $(1/f)$. Hay tres situaciones particularmente interesantes: (1) cuando $\ell = f$ la potencia de aumento es igual a $d_o\mathcal{D}$. (2) Cuando ℓ es efectivamente cero

$$[\text{PA}]_{\ell=0} = d_o\left(\frac{1}{L} + \mathcal{D}\right)$$

En ese caso, el valor más elevado de P.A. corresponde al valor más pequeño de L lo cual, si la visión debe ser clara, tendrá que ser igual a d_o. Entonces

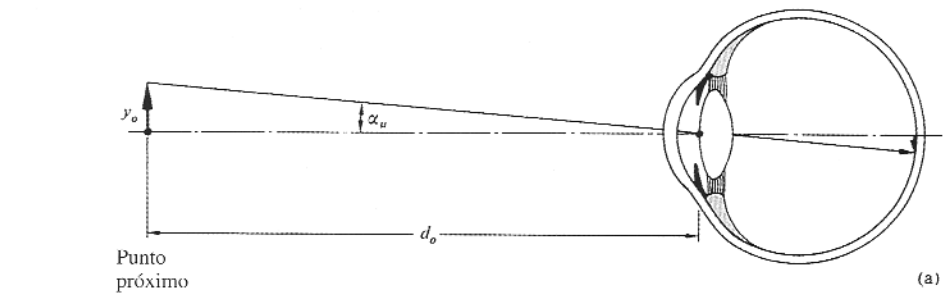
$$[\text{PA}]_{\substack{\ell=0 \\ L=d_o}} = d_o\mathcal{D} + 1 \tag{5.77}$$

Estableciendo $d_o = 0{,}25$ m para el observador estándar, tenemos

$$[\text{PA}]_{\substack{\ell=0 \\ L=d_o}} = 0.25\mathcal{D} + 1 \tag{5.78}$$

A medida que L aumenta, P A disminuye y de manera parecida, al aumentar ℓ, P.A. disminuye. Si el ojo está muy lejos de la lente, la imagen en la retina será de verdad muy pequeña. (3) Esta última situación es quizás la más común. Aquí, colocamos el objeto en el punto focal $(s_o = f)$ en cuyo caso la imagen virtual está en el infinito $(L = \infty)$. Entonces de la ecuación (5.76)

$$[\text{PA}]_{L=\infty} = d_o\mathcal{D} \tag{5.79}$$



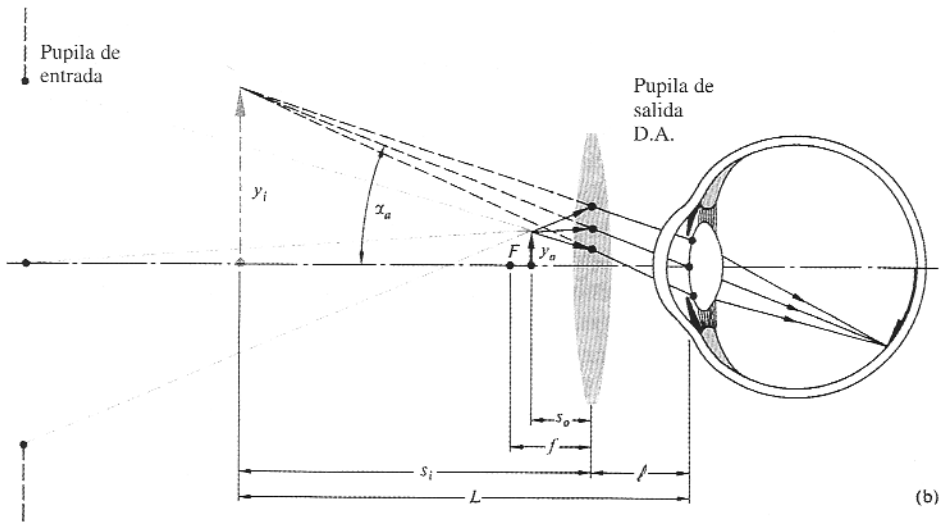
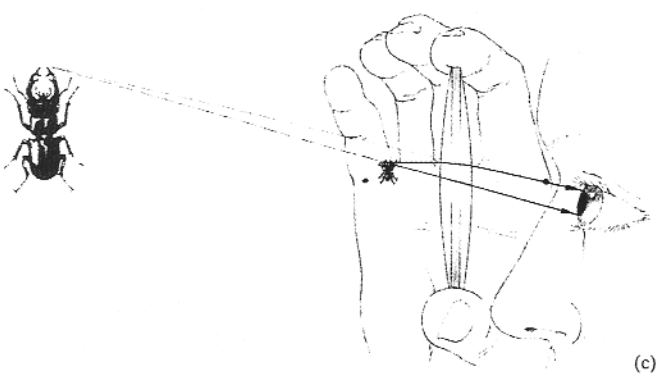


FIGURA 5.103 (*a*) Observación de un objeto a ojo desnudo. (*b*) La observación a través de una lupa. (*c*) Una lente positiva utilizada como lupa. El objeto se halla a menos de una distancia focal del cristalino.



para todos los valores prácticos de ℓ. Debido a que los rayos son paralelos, el ojo ve la escena en una configuración relajada, sin acomodación, una característica muy deseada. Obsérvese que $M_T = -s_i/s_o$ se acerca al infinito cuando $s_o \to f$, mientras que en marcado contraste M_A solamente disminuye en 1 bajo las mismas circunstancias.

Una lupa con una potencia de 10 D tiene una distancia focal $(1/\mathcal{D})$ de 0,1 m y una PA igual a 2,5 cuando $L = \infty$. Esto se representa convencionalmente por 2,5 ×, lo cual significa que la imagen en la retina es 2,5 veces mayor con el objeto a la distancia focal de la lente que lo que sería si el objeto estuviera en el punto próximo del ojo desnudo (donde puede darse la imagen clara de mayor tamaño). Las lupas simples más sencillas están limitadas por las aberraciones a 2× ó 3×. Un vasto campo de visión generalmente implica una lente grande lo cual, por razones prácticas, requiere habitualmente una curvatura muy pequeña de las superficies. Los radios son grandes, como lo es f, y por consiguiente PA es pequeña. La lente para leer, la clase de lente que Sherlock Holmes hizo famosa, es un ejemplo típico. La lupa de relojero es, a menudo, una lente de un solo elemento y también de alrededor de 2× ó 3×. La figura 5.104 muestra algunas lupas más complejas diseñadas para

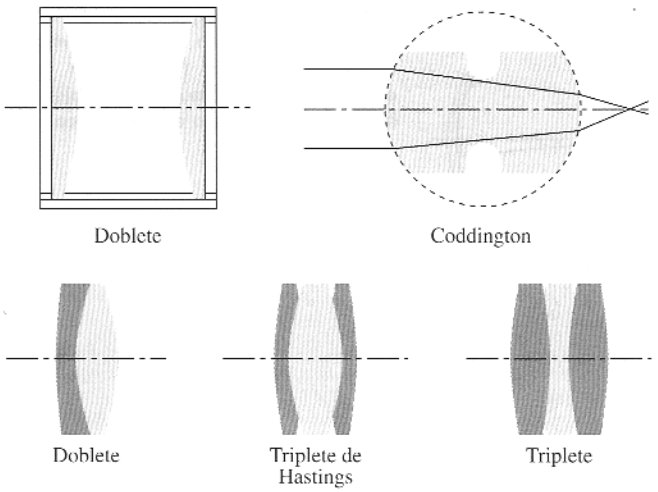


FIGURA 5.104 Lupas.

funcionar en la gama de aproximadamente 10× a 20×. La lente doble es bastante común en un gran número de configuraciones. Aunque no sean particularmente buenas, funcionan satisfactoriamente, por ejemplo, en lupas de gran potencia. La lente de Coddington es esencialmente una esfera con una ranura cortada dentro de la misma con el fin de obtener una apertura más pequeña que la de la pupila del ojo. Una canica de vidrio (cualquier esfera pequeña de vidrio sirve) transparente también aumentará considerablemente, pero con una elevada distorsión.

El índice de refracción relativo de una lente y el medio en el que está sumergida, n_{lm}, depende de la longitud de onda. Pero ya que la distancia focal de una lente simple varía con $n_{lm}(\lambda)$, esto significa que f es una función de la longitud de onda y que los colores constitutivos de la luz blanca formarán el foco en diferentes puntos en el espacio. El defecto resultante se conoce como *aberración cromática.* A fin de que la imagen esté libre de esta coloración, se combinan lentes positivas y negativas hechas de vidrio diferente para formar lentes *acromáticas* (véase sección 6.3.2). Los dobletes y tripletes acromáticos pegados, son comparativamente caros y se encuentran generalmente en pequeñas lupas de potencia elevada y muy corregidas.

5.7.4 Oculares

El **ocular** es un instrumento óptico visual. Se trata esencialmente de una lupa cuya función no es ver un objeto físico real, sino la imagen intermedia de ese objeto, formada por el sistema de lentes que lo precede. En realidad, el ojo mira en el ocular y el ocular mira en el sistema óptico, bien sea una mira, un microscopio compuesto, un telescopio o unos gemelos de campaña. Una lente simple podría servir para ese propósito, pero mal. Si queremos conseguir una imagen en la retina más satisfactoria, el ocular no podrá tener aberraciones muy elevadas. El ocular de un instrumento especial, sin embargo, puede diseñarse como parte integrante del sistema completo, de tal manera que sus lentes se puedan utilizar en el esquema global para compensar las aberraciones. Aún así, los oculares estándares se intercambian en la mayoría de los telescopios y microscopios compuestos. Los oculares son además muy difíciles de diseñar y la técnica más usual y quizás la más beneficiosa es incorporar o modificar ligeramente uno de los diseños existentes.

El ocular debe proporcionar una imagen virtual (de la imagen intermedia), muy a menudo localizada en el infinito o cerca del mismo, para que pueda ser vista cómodamente por un ojo normal y relajado. Asimismo, debe determinar la posición del centro de la pupila de salida o *punto ocular* en donde el ojo del observador se coloca en alguna posición conveniente, preferiblemente a una distancia de al menos unos 10 mm de la última superficie. Como antes, el aumento ocular es el producto $d_o\mathcal{D}$ o, como se escribe a menudo, PA = (250 mm)/f.

El ocular de **Huygens** que data de hace más de 250 años, se sigue utilizando aún extensamente hoy en día (figura 5.105), especialmente en microscopia. La lente adyacente al ojo se denomina **lente ocular** mientras que la primera lente en el ocular es la **lente de campo.** La distancia desde la lente ocular hasta el punto ocular recibe el nombre de **emergencia pupilar** que en el ocular de Huygens es la incómoda y corta distancia de tan sólo unos 3 mm. Cabe observar que para este ocular los rayos entrantes tienen que ser convergentes de tal manera que formen

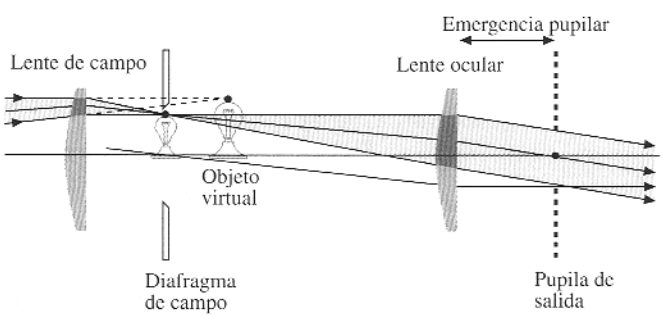


FIGURA 5.105 El ocular de Huygens.

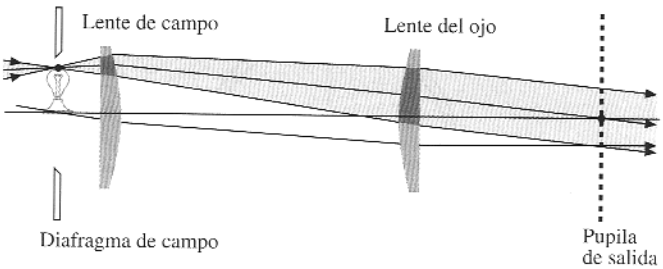


FIGURA 5.106 El ocular de Ramsden.

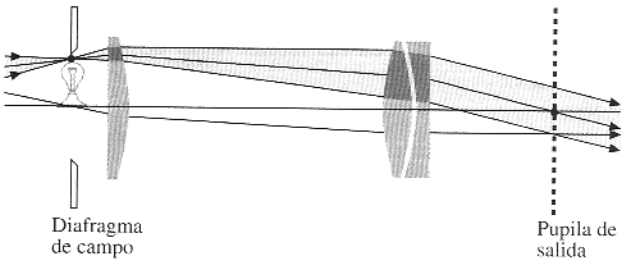


FIGURA 5.107 El ocular de Kellner.

un objeto virtual para la lente ocular. Por consiguiente, está claro que el ocular de Huygens no puede utilizarse como lupa ordinaria radicando su atractivo contemporáneo en su bajo precio de compra (véase sección 6.3.2). Otro de los viejos recursos de confianza es el ocular de **Ramsden** (figura 5.106) en donde el foco principal se halla enfrente de la lente de campo y así la imagen intermedia aparecerá ahí en un acceso fácil y donde se colocaría un *retículo* que podría contener una serie de hilos, escalas de precisión o rejillas circulares divididas por ángulos, etc. (Cuando éstos se forman en una placa transparente, a menudo se denominan *cuadrícula*.) Ya que el retículo y la imagen intermedia se hallan en el mismo plano, ambos estarán en foco al mismo tiempo. La emergencia pupilar de unos 12 mm es una ventaja sobre el ocular anterior. El ocular de Ramsden es relativamente conocido y bastante barato (véase problema 6.2). El ocular de **Kellner** proporciona un aumento indiscutible de la calidad de la imagen si bien su emergencia pupilar se sitúa a medio camino entre la de los dos sistemas anteriores. El de Kellner es esencialmente un ocular de Ramsden acromatizado (figura 5.107) que se utiliza a menudo en instrumentos telescópicos de campo moderadamente ancho. El ocular ortoscópico (figura 5.108) tiene un campo ancho, gran aumento y gran emergencia pupilar ($\approx$20 mm). El ocular **simétrico** (**Plössl**) (figura 5.109) tiene características similares a las del ocular ortoscópico siendo sin embargo algo superiores. El de **Erfle** (figura 5.110) es probablemente el ocular de campo ancho más común (aproximadamente $\pm 30°$). Está bien corregido para todas las aberraciones y es comparativamente caro. [7]

Si bien hay muchos más oculares, incluyendo oculares *zoom* de potencia variable y unos con superficies asféricas, los que ya se han examinado aquí son los más representativos

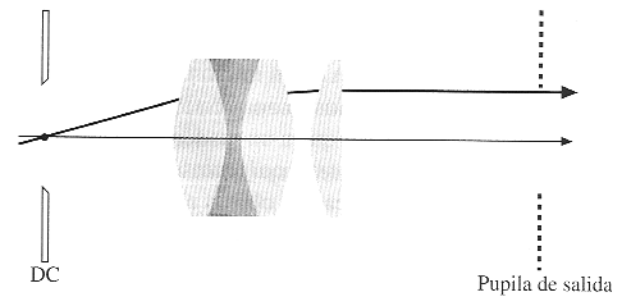


FIGURA 5.108 El ocular ortoscópico.

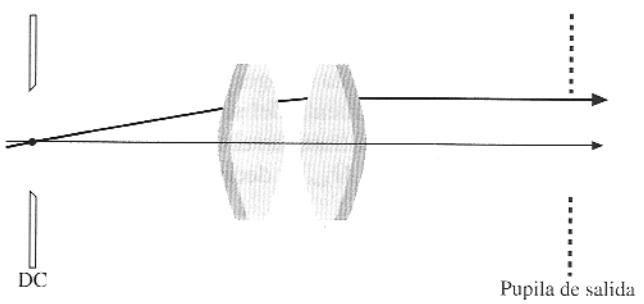


FIGURA 5.109 El ocular simétrico (Plössl).

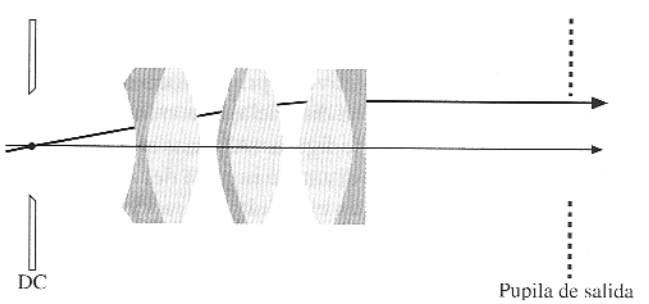


FIGURA 5.110 El ocular de Erfle.

[7] Diseños detallados de éstos y demás oculares pueden encontrarse en el libro *Military Standardization Handbook-Optical Design*, MIL-HDBK-141.

siendo aquellos que se encontrarán comúnmente en telescopios y microscopios y en las largas listas de los catálogos comerciales.

5.7.5 El microscopio compuesto

El microscopio compuesto representa un paso más allá de la lupa simple proporcionando un mayor aumento angular (mayor que 30× aproximadamente) de objetos *cercanos*. Su invención, que pudo haber ocurrido hace mucho tiempo, en 1590, se atribuye generalmente a un fabricante de anteojos holandés Zacharias Janssen de Middleburg. Galileo tiene el segundo lugar por haber anunciado la invención de un microscopio compuesto en 1610. En la figura 5.111 se ilustra una versión simple, más cercana a los primeros sistemas que a un moderno microscopio de laboratorio. El sistema de lentes, aquí representado por una sola lente, que se halla más cerca del objeto recibe el nombre de **objetivo**. Forma una imagen real del objeto, invertida y generalmente aumentada que se sitúa en el espacio sobre el plano del limitador de campo del ocular y que tiene que ser lo suficientemente pequeña como para poder caber en el tambor del dispositivo. Los rayos que divergen de cada punto de esta imagen emergerán de la lente ocular (que en este caso sencillo es el ocular mismo) paralelos el uno al otro como en la sección anterior. El ocular aumentará esta imagen intermedia aún más. Entonces la potencia de aumento del sistema completo es el producto del aumento lineal transversal del objetivo, M_{To}, y el aumento angular del ocular, M_{Ae}, es decir

$$\text{MP} = M_{To}M_{Ae} \tag{5.80}$$

El objetivo aumenta el objeto y lo acerca en forma de imagen real, donde podrá ser examinado como si estuviera bajo una lupa.

Recordemos que $M_T = -x_i/f$, ecuación (5.26) de la que se sirve la mayoría pero no todos los fabricantes a la hora de diseñar sus microscopios para que la distancia (correspondiendo a x_i) del segundo foco del objetivo al primer foco del ocular se estandarice en 160 mm. Dicha distancia, denominada **longitud del tubo**, se indica con L en la figura. (Algunos autores definen la longitud del tubo como la distancia imagen del objetivo.) Por lo tanto, con la imagen final en el infinito [ecuación (5.79)] y el punto próximo estándar establecido en 10 pulgadas o 254 mm.

$$\text{MP} = \left(-\frac{160}{f_o}\right)\left(\frac{254}{f_e}\right) \tag{5.81}$$

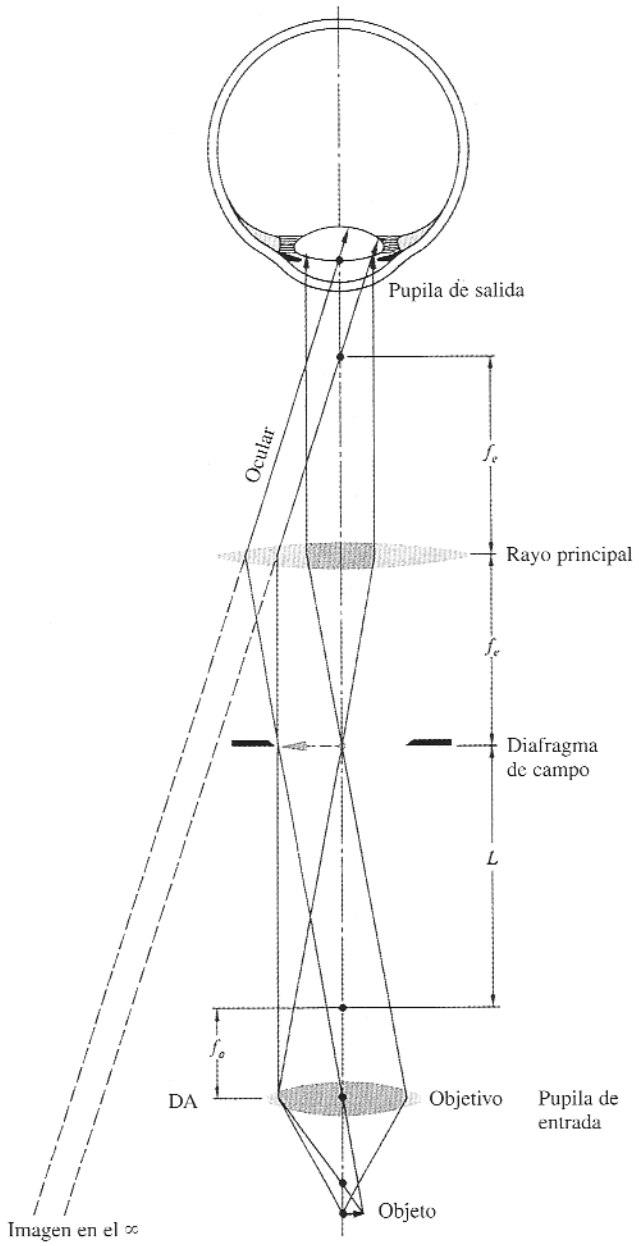


FIGURA 5.111 Microscopio compuesto rudimentario. El objetivo forma una imagen real de un objeto cercano. El ocular, que funciona como una lupa, aumenta la imagen intermedia. La imagen virtual final puede resultar más grande que el tambor puesto que no hace falta que quepa dentro.

Aquí las longitudes se expresan en milímetros y la imagen está invertida (PA < 0). Por lo tanto, el barrilete de un objetivo con una distancia focal f_o de, digamos, 32 mm llevará la marca $5\times$ (ó $\times 5$) para indicar una potencia de 5. Combinado con un ocular $10\times$ (f_e = 1 pulgada) la PA del microscopio será entonces $50\times$.

Para mantener las relaciones de distancia entre el objetivo, el diafragma de campo y el ocular, mientras se determina la posición de una imagen enfocada intermedia del objeto en el primer plano focal del ocular, los tres elementos se mueven como una sola unidad.

El objetivo mismo funciona como diafragma de apertura y pupila de entrada. Su imagen, formada por el ocular, es la pupila de salida en la que se coloca el ojo. El diafragma de campo, que limita la extensión del objeto más grande que se puede ver se fabrica como parte del ocular. La imagen del diafragma de campo formada por los elementos ópticos que la siguen se llama *lucarna de salida* mientras que la imagen formada por los elementos que la preceden es la *lucarna de entrada.* El angulo cónico subtendido desde el centro de la pupila de salida por la periferia de la ventana de salida se denomina *campo angular de visión en el espacio imagen.*

Un objetivo de microscopio moderno puede clasificarse aproximadamente como uno de los tres tipos esencialmente diferentes. Se puede diseñar para que funcione mejor colocando el objeto debajo de un cubreobjetos, sin cubreobjetos (instrumentos metalúrgicos) o sumergiendo el objeto en un líquido que esté en contacto con el objetivo. En algunos casos, la distinción no es decisiva pudiéndose utilizar el objeto con o sin cubreobjetos. En la figura 5.112 se ilustran cuatro objetivos representativos (véase sección 6.3.1). Además, el doblete acromático pegado de baja potencia (alrededor de $5\times$) es bastante habitual. Los objetivos acromáticos de potencia media ($10\times$ ó $20\times$) relativamente baratos, debido a su corta distancia focal, pueden también usarse oportunamente al expandir o filtrar espacialmente haces de láser.

Hay otra característica cuantitativa de importancia que cabe reseñar aquí, aunque sea brevemente. El brillo de la imagen depende, en parte, de la cantidad de luz que capta el objetivo. El *número f* es un parámetro útil para describir esta cantidad, especialmente cuando el objeto es distante (véase sección 5.3.3). Sin embargo, para un instrumento que funcione con *conjugados finitos* (s_i y s_o son ambos finitos), la apertura numérica NA es más apropiada (véase sección 5.6). En el caso que nos ocupa

$$\text{NA} = n_i \operatorname{sen} \theta_{\max} \tag{5.82}$$

donde n_i es el índice de refracción del medio de inmersión (aire, aceite, agua, etc.) adyacente al objetivo siendo $\theta_{\max}$ la mitad del ángulo del cono máximo de luz captado por esa lente (figura 5.112*b*). Dicho de otro modo, $\theta_{\max}$ es el ángulo que forma un

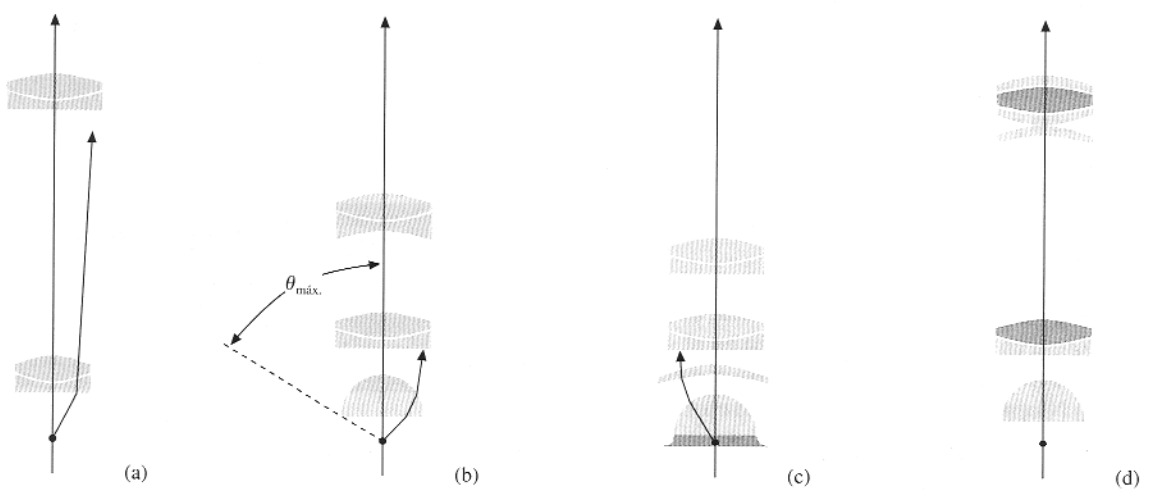
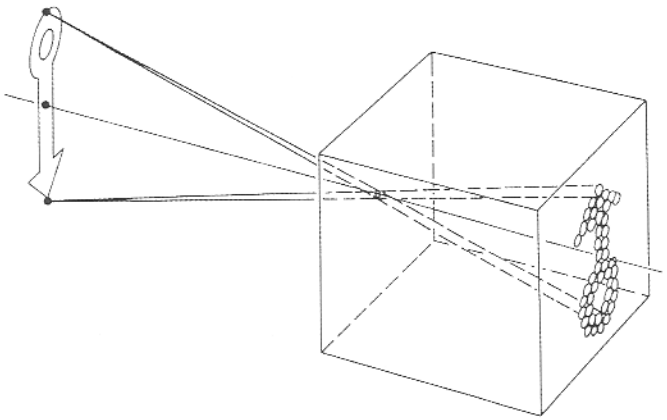


FIGURA 5.112 Objetivos de microscopio: (*a*) Objetivo Lister, $10\times$, NA = 0,25, f = 16 mm (2 dobletes acromáticos pegados). (*b*) Objetivo de Amici, desde $20\times$, NA = 0,5, f = 8 mm hasta $40\times$, NA = 0,8, f = 4 mm. (*c*) Objetivo de inmersión en aceite, $100\times$, NA = 1,3, f = 1,6 mm (véase figura 6.18). (*d*) Objetivo apocromático, $55\times$, NA = 0,95, f = 3,2 (contiene dos lentes de fluorita.)

rayo marginal con el eje. La apertura numérica es, por lo general, el segundo número grabado en el tambor del objetivo y oscila entre 0,07 para objetivos de baja potencia y aproximadamente 1,4 para los de alta potencia (100×). Naturalmente, si el objeto está en el aire, la NA no puede ser superior a 1,0. Por cierto, Ernst Abbe (1840-1905), mientras trabajaba en los talleres de la Carl Zeiss donde se producían microscopios, introdujo el concepto de la apertura numérica. Fue él quien reconoció que la distancia transversal mínima entre dos puntos objeto que se puede resolver en la imagen, es decir, el *poder de resolución,* variaba directamente como λ e inversamente como NA.



5.7.6 La cámara

El prototipo de la cámara fotográfica moderna [8] era un aparato denominado *cámara oscura* cuya forma primitiva era simplemente una cavidad oscura que contenía un agujero pequeño en una pared. La luz que entraba por el agujero proyectaba una imagen invertida de la escena exterior iluminada por el sol, en una pantalla interior. Este principio era conocido por Aristóteles cuyas observaciones fueron custodiadas por los eruditos árabes durante toda la Edad Media europea. Alhazen lo utilizó para examinar indirectamente los eclipses solares hace más de ochocientos años. Los libros de apuntes de Leonardo da Vinci encierran varias descripciones de la cámara oscura, pero el primer estudio detallado aparece en *Magia naturalis* (Magia natural) de Giovanni della Porta quien lo recomendaba como ayuda para dibujar, función que no tardó en difundirse. Johannes Kepler, el ilustre astrónomo, tenía una versión portátil que usaba mientras hacía peritajes en Austria. En la última parte del siglo XVII, la pequeña cámara oscura portátil ya era muy conocida. Obsérvese que el ojo del nautilo, una pequeña sepia, es literalmente un poro oscuro y abierto que simplemente se llena de agua de mar al sumergirse.

Al reemplazar la pantalla de visualización con una superficie fotosensible tal como una película fotográfica, la cámara oscura se transforma en una cámara fotográfica en el sentido moderno de la palabra. La primera fotografía permanente fue hecha por Joseph Nicéphore Niépce (1765-1833) en 1826 con una cámara de caja con una pequeña lente convexa, una placa de peltre sensibilizada y unas ocho horas de exposición.

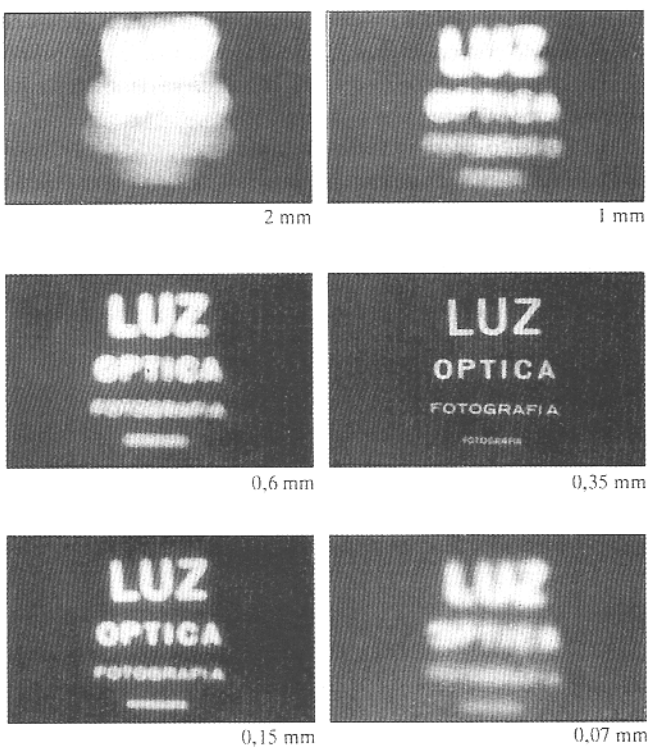


FIGURA 5.113 Estenoscopio. Obsérvese la variación en la claridad de la imagen a medida que el diámetro del agujero disminuye. (Fotos cedida por Dr. N. Joel, UNESCO.)

[8] Véase W. H. Price, «The Photographic Lens», *Sci. Am.* (Agosto 1976), pág. 72.

El estenoscopio sin lentes (figura 5.113) es, con mucho, el sistema menos complejo que se adecua a este propósito, sin embargo tiene varias virtudes entrañables y ciertamente notables. Puede formar una imagen bien definida, prácticamente sin distorsión de objetos sobre un campo angular extremadamente ancho (debido a la gran profundidad de foco) y sobre una extensa gama de distancias (gran profundidad de campo). Si inicialmente la pupila de entrada es muy ancha, no habrá imagen. A medida que su diámetro disminuye, la imagen se forma y se define más. Después de cierto punto, una mayor reducción del tamaño del agujero hace que la imagen se vuelva borrosa de nuevo, así que uno rápidamente descubre que el tamaño de la apertura para la definición máxima es proporcional a su distancia del plano imagen. (Un agujero con un diámetro de 0,5 mm a una distancia de 0,25 m de la película resulta ser conveniente y da buen resultado.) No hay convergencia de rayos y, por lo tanto, la pérdida de claridad no es achacable a defectos de ese tipo de mecanismo. El problema es en realidad de difracción como veremos más tarde (véase sección 10.2.5). En la mayoría de las situaciones prácticas, el fallo predominante del estenoscopio es su lentitud (unos $f/500$) es decir que los tiempos de exposición serán por lo general demasiado largos, incluso con las películas más sensibles. La excepción obvia es un sujeto estático tal como un edificio (figura 5.114) en cuyo caso el estenoscopio da resultados excelentes.

En la figura 5.115 se ilustran las componentes esenciales de una cámara moderna muy conocida y representativa: la réflex de lente simple o RLS. La luz que atraviesa los primeros elementos de la lente pasa entonces a través de un diafragma iris que se usa, en parte, para controlar el tiempo de exposición o, de manera equivalente, el *número f*—en realidad es un diafragma de apertura variable—. La luz emergente de la lente choca contra un espejo móvil inclinado a 45°, dirigiéndose sucesivamente hacia arriba a través de la pantalla de enfoque al pentaprisma para luego salir por el ocular del visor. Al presionar el disparador se cierra el diafragma a un valor prefijado, el espejo gira hacia arriba para dejar libre el camino y el obturador en el plano focal se abre para exponer la película. Sucesi-

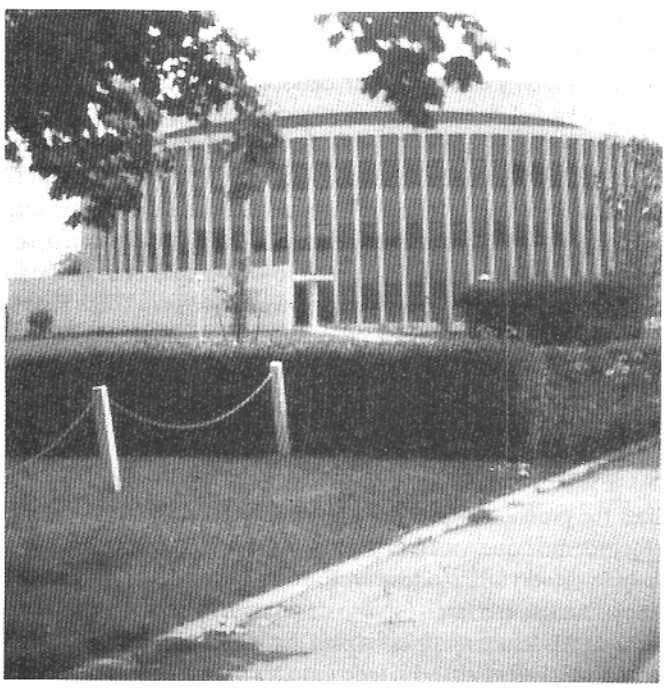


FIGURA 5.114 Fotografía tomada con estenoscopio. (Edificio de Ciencias de la Universidad Adelphi.) Diámetro del agujero 0,5 mm, distancia al plano de la película 25 cm, A.S.A. 3000, velocidad del obturador 0,25 s. Obsérvese la profundidad de campo. (Foto de E. H.)

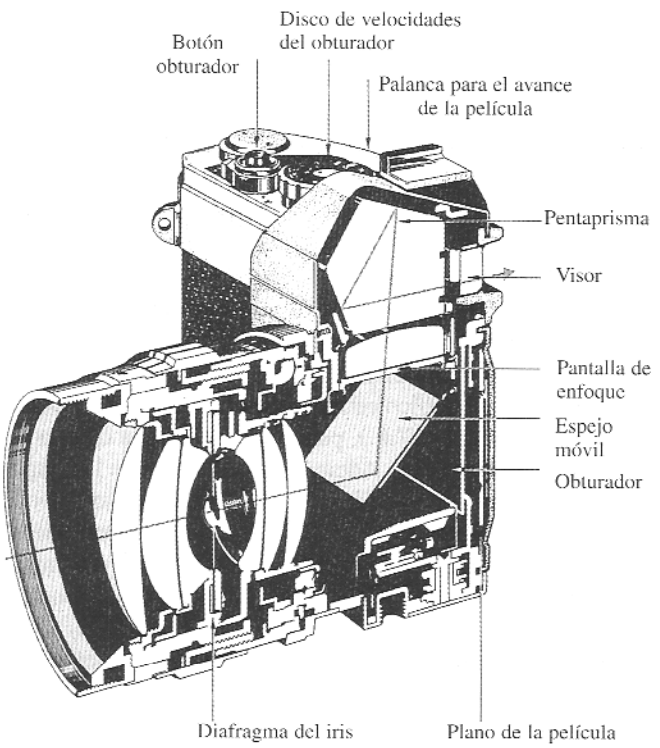


FIGURA 5.115 Una cámara réflex de lente simple.

vamente, el obturador se cierra, el diafragma se abre completamente y el espejo vuelve de nuevo a su posición. Hoy en día, la mayoría de los sistemas RLS están dotados de varios dispositivos fotométricos que se acoplan automáticamente al diafragma y al obturador; esas componentes se han excluido del diagrama por simplicidad.

Para enfocar la cámara, toda la lente se mueve acercándola o alejándola del plano de la película. Ya que la distancia focal es fija, al variar s_o, debe variar también s_i. El *campo de visión angular* puede considerarse aproximadamente relacionado con la fracción de la escena que se incluye en la foto. Además, es necesario que toda la superficie de la foto corresponda a una región de calidad satisfactoria de la imagen. Más precisamente, el ángulo subtendido en la lente, por un círculo que encierra el área de la película es el campo de visión angular φ (figura 5.116). Como aproximación general pero razonable de un sistema común, imaginemos que la distancia diagonal en la película iguala a la distancia focal. Por consiguiente, $\varphi/2 \approx \tan^{-1} \frac{1}{2}$ es decir, $\varphi \approx 53°$. Si el objeto se acerca al infinito, s_i debe aumentar. La lente se aleja entonces de la placa fotográfica para mantener la imagen en foco mientras que el campo de visión que se registra en la película cuya periferia es el diafragma de campo, disminuye. La distancia focal de una lente RLS **estándar** oscila entre 50 y 58 mm y su campo de visión entre 40° y 50°. Manteniendo constante el tamaño de la película, al reducir f el ángulo de campo aumenta. Por lo tanto, las lentes de gran angular de una cámara RLS van disminuyendo desde $f \approx 40$ mm hasta alrededor de 6 mm mientras que φ oscila entre 50° y un notable 220° (en este último caso se trata de una lente especial donde la distorsión es inevitable). La distancia focal del *teleobjetivo* es de unos 80 mm o más. Por lo tanto, su campo de visión disminuye rápidamente hasta tan sólo unos pocos grados en $f \approx 1.000$ mm.

El objetivo fotográfico estándar tiene que tener una apertura relativa grande, $1/(f/\#)$, para que los tiempos de exposición se mantengan cortos. Además, es necesario que la imagen sea plana y sin distorsión y que el campo de visión angular de la lente sea también ancho. La evolución de una lente moderna comienza aún con una idea creativa que nos lleva a una nueva forma prometedora. En el pasado, éstas se perfeccionaban laboriosamente confiando en la intuición, experiencia y, por supuesto, en el tanteo con una sucesión de lentes de desarrollo. Ahora, el ordenador desempeña, en su mayoría, esta función sin tener que disponer de numerosos prototipos.

Muchos objetivos fotográficos contemporáneos son variaciones de sistemas muy conocidos que han tenido éxito. La

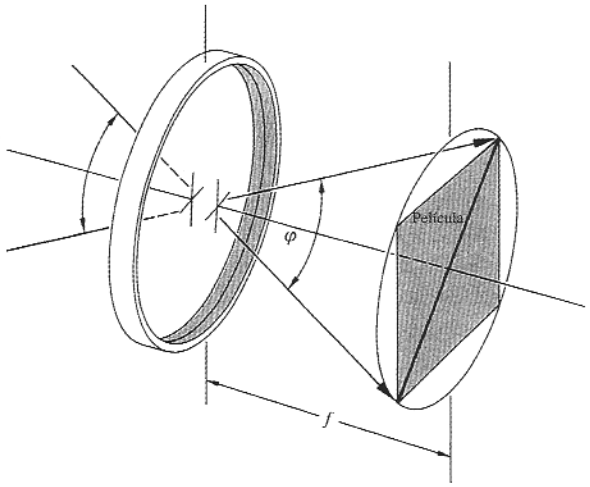


FIGURA 5.116 Campo de visión angular con enfoque al infinito.

figura 5.117 ilustra la configuración general de varias lentes importantes que proceden aproximadamente desde el gran angular hasta el teleobjetivo, sin proporcionar sus especificaciones particulares pues sus variaciones son muy numerosas. El dispositivo *Aviogon* y el *Orthometer* Zeiss son lentes de gran angular mientras que el *Tessar* y el *Biotar* son a menudo lentes estándares. El *triplete Cooke,* que H. Dennis Taylor de Cooke and Sons describió en 1895 se sigue fabricando (obsérvese la similitud con el Tessar). Contiene el número más pequeño de elementos que hacen que el total de las siete aberraciones de tercer orden desaparezcan. Incluso antes, (*ca.* 1840) Josef Max Petzval diseñó lo que entonces era una lente rápida (para retratos) para Voightländer and Son y cuyas versiones modernas son ya muy numerosas.

5.7.7 El telescopio

No se sabe a ciencia cierta quién inventó el telescopio. En realidad, fue probablemente inventado y reinventado muchas veces. Recordemos que ya en el siglo XVII, las lentes para anteojos habían estado utilizándose en Europa durante casi trescientos años. Durante ese largo espacio de tiempo, la yuxtaposición fortuita de dos lentes apropiadas para dar vida a un telescopio parece algo casi inevitable. En todo caso, es muy probable que fuera un óptico holandés, posiblemente el omnipresente Zacharias Jenssen, ya famoso por el microscopio, quien construyó el primer telescopio, percatándose de alguna forma del valor de lo que estaba haciendo. La prueba indiscutible más remota del des-

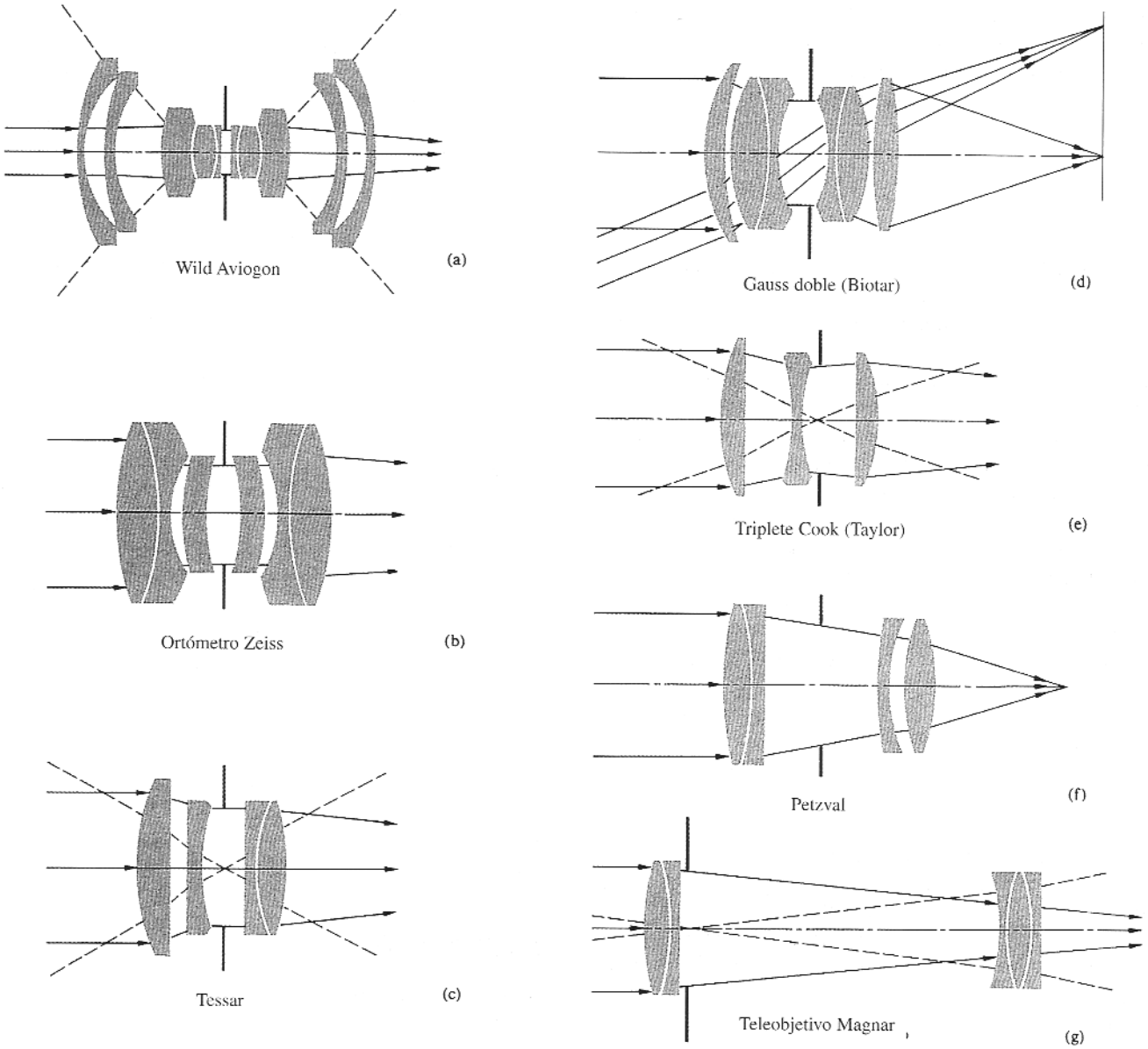


FIGURA 5.117 Lentes de cámara.

cubrimiento, sin embargo, data del 2 de octubre de 1608 cuando Hans Lippershey se dirigió al States-General de Holanda para tramitar la patente de un sistema para ver de lejos (que es el significado de *teleskopos* en griego). Como se puede imaginar, el gobierno se percató de inmediato de sus posibles aplicaciones en el campo militar y así, en lugar de otorgarle la patente, adquirió los derechos del instrumento del inventor quien recibió el encargo de seguir investigando. Habiendo oído hablar de este trabajo, hacia 1609, Galileo Galilei ya disponía de su propio telescopio que había fabricado utilizando dos lentes y un cañón

de órgano como tubo. No pasó mucho tiempo antes de que pasara a elaborar un gran número de instrumentos altamente mejorados y comenzara a asombrar al mundo con sus descubrimientos astronómicos que lo harían famoso.

El telescopio refractor

En la figura 5.118 se muestra un **telescopio astronómico**. A diferencia del microscopio compuesto, al que se parece mucho, su función primaria es ampliar la imagen en la retina de un objeto *distante*. En la ilustración, el objeto está a una distancia finita lejana del objetivo tal que la imagen intermedia real se forma justo después de su segundo punto focal. Esta imagen servirá como objeto para el siguiente sistema de lentes, es decir, el ocular. De la tabla 5.3 (pág. 168) se deduce que si queremos que el ocular forme una imagen final amplificada virtual dentro del rango de acomodación normal, la distancia objeto deberá ser menor o igual a la distancia focal, f_e. En la práctica, *la posición de la imagen intermedia es fija moviéndose tan sólo el ocular para enfocar el instrumento.* Cabe observar que *la imagen final está invertida*, pero mientras que el telescopio se use para observaciones astronómicas, esto tiene poca importancia sobre todo porque la mayoría del trabajo es fotográfico.

Con distancias objeto muy grandes los rayos incidentes son efectivamente paralelos —la imagen intermedia reside en el segundo foco del objetivo—. Generalmente, el ocular se sitúa de tal forma que su primer foco se superponga al segundo foco del objetivo, en cuyo caso los rayos que divergen de un punto en la imagen intermedia saldrán del ocular paralelos unos a otros. El ojo de un observador normal puede entonces enfocar los rayos en una configuración relajada. Si el ojo es miope o hipermétrope, el ocular puede moverse hacia adentro o hacia afuera de tal forma que los rayos diverjan o converjan un poco para compensar. Los astigmáticos tendrán que seguir con las gafas puestas cuando usen instrumentos visuales ordinarios. Anteriormente, vimos (sección 5.2.3) que tanto la distancia focal frontal como la posterior de una combinación de lentes delgadas van al infinito cuando las dos lentes están separadas por una distancia d igual a la suma de sus distancias focales (figura 5.119). El telescopio

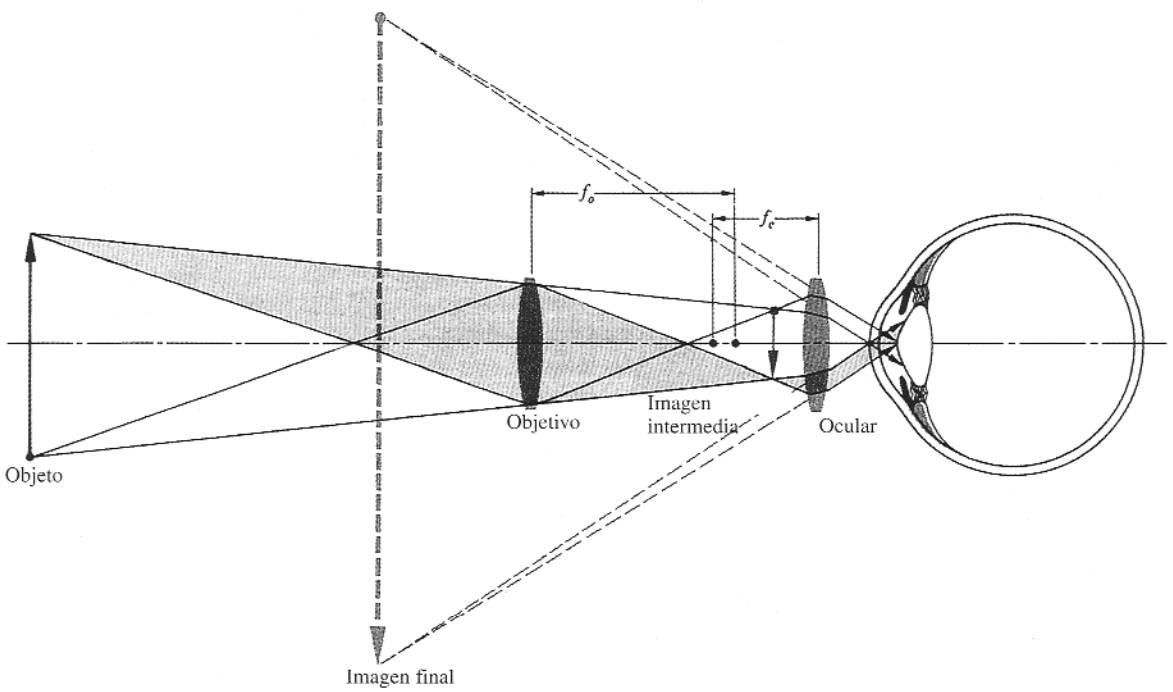


FIGURA 5.118 Telescopio astronómico Kepleriano (ojo con acomodación).

astronómico de esta configuración de *conjugados infinitos* se llama *afocal,* es decir, no tiene distancia focal. Como nota al margen, si enviamos un haz lasér estrecho y colimado (rayos paralelos, es decir, ondas planas) hacia la parte posterior de un telescopio enfocado al infinito, emergerá aún colimado, pero con una sección transversal aumentada. A menudo, es deseable tener un haz ancho de ondas planas cuasimonocromáticas; dispositivos específicos de esta clase pueden adquirirse ahora en el mercado.

La periferia del objetivo es el diafragma de apertura, abarcando también la pupila de entrada, ya que no hay lentes a su izquierda. Si el telescopio se apunta directamente a alguna galaxia distante, el eje visual del ojo será presumiblemente colineal con el eje central del telescopio. La pupila de entrada del ojo deberá entonces coincidir en el espacio con la pupila de salida del instrumento. Sin embargo, el ojo no permanecerá inmóvil sino que se moverá barriendo todo el campo de visión que a menudo contiene muchos puntos de interés. En realidad, el ojo examina diferentes regiones del campo girando de tal forma que los rayos de una determinada área inciden en la fóvea centralis. La dirección establecida por el rayo principal a través del centro de la pupila de entrada y que se dirige hacia la fóvea centralis se denomina *línea visual primaria.* El punto axial, fijo con respecto a la cabeza, a través del cual la línea visual primaria siempre pasa, independientemente de la orientación del globo ocular, recibe el nombre de *interceptor visual.* Cuando se desea que el ojo inspeccione el campo, el interceptor visual deberá colocarse en el centro de la pupila de salida del telescopio. En ese caso, la línea visual primaria siempre corresponderá a un rayo principal a través del centro de la pupila de salida por más que el ojo se mueva.

Supongamos que el margen del objeto visible subtienda la mitad del ángulo α desde el objetivo (figura 5.120) que es esencialmente el mismo ángulo α_u que se subtendría al ojo desnudo. Como en las secciones anteriores, el aumento angular es

$$\text{PA} = \frac{\alpha_a}{\alpha_u} \qquad [5.75]$$

Aquí α_u y α_a son medidas de campo de visión en los espacios objeto e imagen, respectivamente. El primero es la mitad del ángulo del cono real de rayos captados mientras que el segundo se relaciona con el cono aparente de rayos. Si un rayo incide en el objetivo con una pendiente negativa, entrará en el ojo con una pendiente positiva y viceversa. Por lo tanto, a fin de que el signo de PA sea positivo para imágenes derechas siendo así coherente con el uso anterior (figura 5.103), cualquiera de α_u y α_a deberá considerarse como negativa —escogemos la primera porque el rayo tiene una pendiente negativa—. Observe que el rayo que atraviesa el primer foco del objetivo atraviesa el segundo foco del ocular, es decir, F_{o1} y F_{e2} son puntos conjugados. En la aproximación paraxial $\alpha \approx \alpha_u \approx \tan \alpha_u$ y $\alpha_a \approx \tan \alpha_a$. La imagen llena la región del diafragma de campo mientras que la mitad de su extensión iguala a la distancia $\overline{BC} = \overline{DE}$. Por consiguiente, de los triángulos $F_{o1}BC$ y $F_{e2}DE$, la relación de las tangentes da como resultado

$$\text{MP} = -\frac{f_o}{f_e} \qquad (5.83)$$

Otra expresión oportuna para la PA procede del examen del aumento transversal del ocular. Ya que la pupila de salida es la imagen del objetivo (figura 5.120), obtenemos

$$M_{Te} = -\frac{f_e}{x_o} = -\frac{f_e}{f_o}$$

Asimismo, si D_o es el *diámetro del objetivo* y D_{ep} es el *diámetro de su imagen, la pupila de salida,* entonces $M_{Te} = D_{ep}/D_o$.

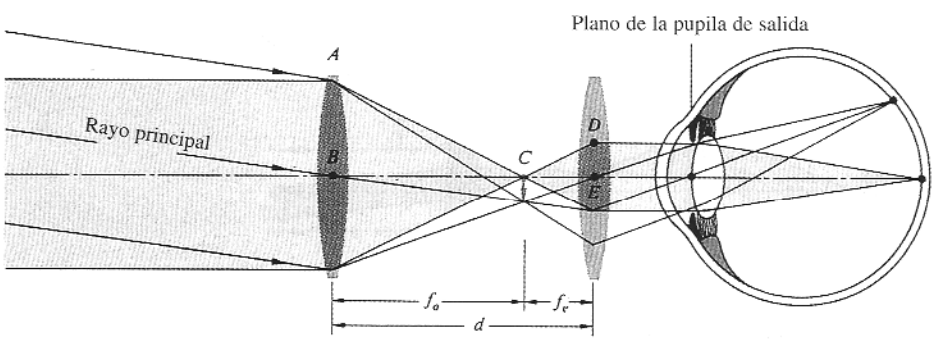


FIGURA 5.119 Telescopio astronómico; conjugados infinitos.

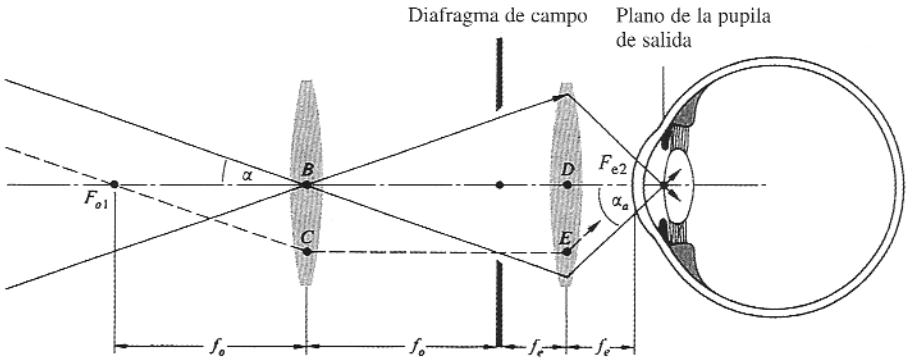


FIGURA 5.120 Ángulos de los rayos para un telescopio.

Estas dos expresiones para M_{Te} comparadas con la ecuación (5.83) proporciona

$$\text{PA} = \frac{D_o}{D_{ep}} \tag{5.84}$$

Aquí D_{ep} es en realidad una cantidad negativa ya que la imagen está invertida. Es muy fácil de construir un telescopio refractor simple, basta con sostener una lente de distancia focal grande enfrente de otra cuya distancia focal sea pequeña, cerciorándose al mismo tiempo que $d = f_o + f_e$. Pero de nuevo, los instrumentos telescópicos dotados de una buena corrección tienen, por lo general, unos objetivos de elementos múltiples, dobletes o tripletes.

Para que un telescopio resulte útil cuando la orientación del objeto es importante, deberá disponer de un **sistema de enderezamiento** adicional que se denomina **telescopio terrestre.** Por lo general, una lente enderezadora individual o un sistema de semejantes lentes se coloca entre el ocular y el objetivo con el resultado de que la imagen tiene su lado superior arriba. La figura 5.121 muestra un telescopio con un doble objetivo pegado y un ocular Kellner. Lógicamente, tendrá que tener un tubo extensible muy largo, del tipo pintoresco que nos traen a la memoria los barcos de madera y las balas de cañón.

Por esa razón, los **binoculares** (telescopios binoculares) generalmente utilizan prismas enderezadores que logran el mismo resultado en menos espacio aumentando también la separación de los objetivos, reforzando así el efecto estereoscópico. Muy a menudo, estos se tratan de prismas Porro dobles, como se muestra en la figura 5.122 (obsérvese el ocular Erfle modificado, el ancho diafragma de campo y el doble objetivo acromático). Es costumbre que los binoculares lleven varias marcas numéricas, por ejemplo 6 × 30, 7 × 50 ó 20 × 50, etc. El número inicial es el aumento, por ejemplo, 6×, 7× ó 20×. El segundo número es el diámetro de la pupila de entrada o, de manera equivalente, la apertura libre del objetivo, expresada en milímetros. De la ecuación (5.84) se deduce que el diámetro de la pupila de salida será el segundo número dividido por el primero o, en este caso, 5, 7, 1 y 2,5, todos ellos en milímetros. Alejando el instrumento del ojo, veremos que la brillante pupila de salida circular está rodeada de oscuridad. Para medirla, enfóquese el sistema al infinito apuntándolo hacia el cielo y obsérvese el disco de luz emergente bien definido usando un trozo de papel como pantalla. Al mismo tiempo, determínese la emergencia de pupila de salida.

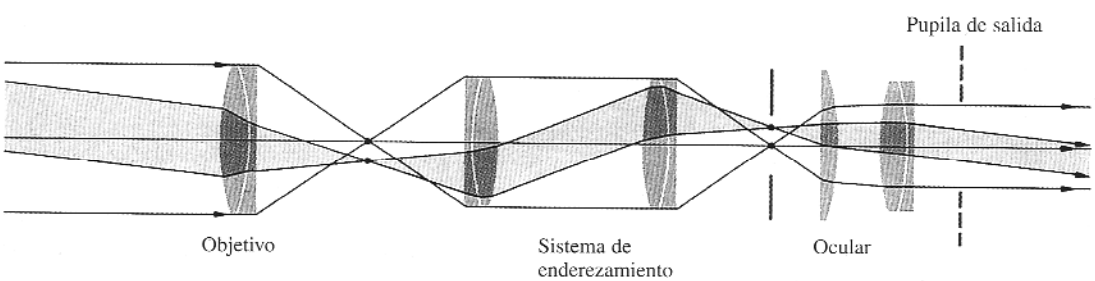


FIGURA 5.121
Telescopio terrestre.

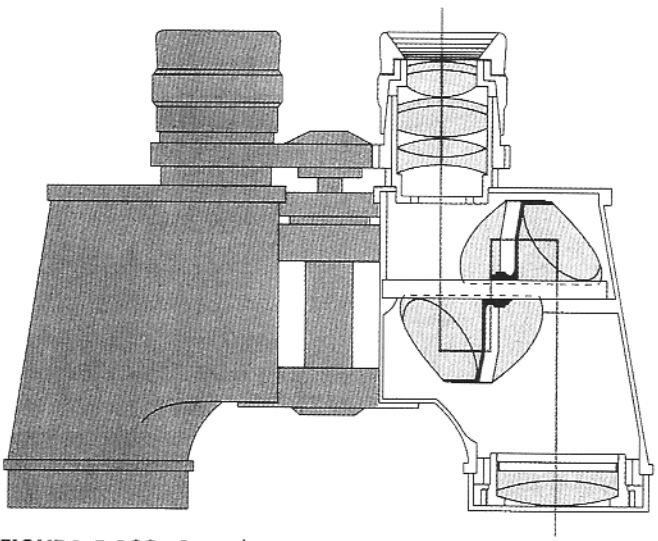


FIGURA 5.122 Binocular.

Por cierto, siempre que $d = f_o + f_e$, el telescopio será afocal incluso si el ocular es negativo (es decir, $f_e < 0$). El telescopio creado por Galileo Galilei (figura 5.123) tenía precisamente tal lente negativa como ocular formando, por consiguiente, una imagen derecha [$f_e < 0$ y PA > 0 en la ecuación (5.83)]. Como telescopio, el sistema tiene ahora principalmente interés histórico y pedagógico aunque aún se pueden comprar dos de tales telescopios montados uno al lado del otro para formar así un anteojo galileano de campo. Resulta ser muy útil, sin embargo, como expansor del haz láser porque no tiene puntos focales internos donde un haz de gran potencia terminaría ionizando el aire circundante.

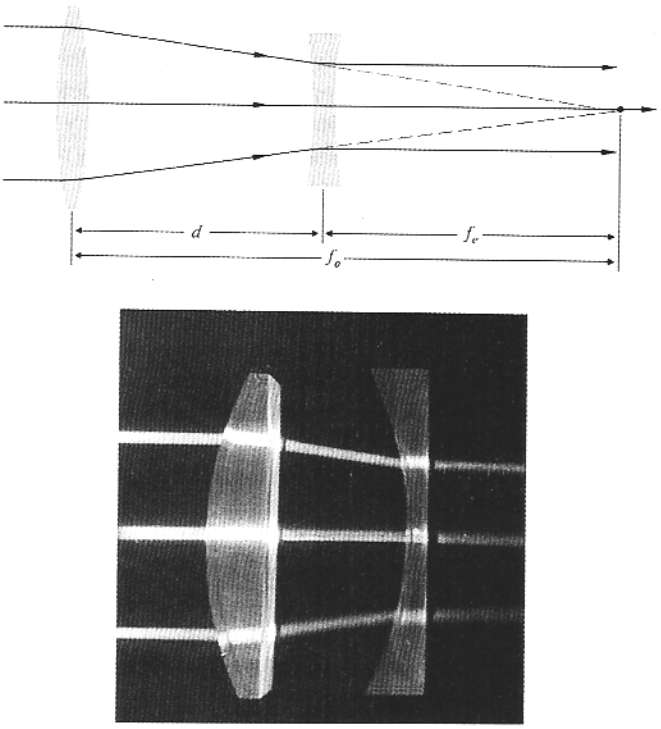


FIGURA 5.123 Telescopio galileano. El primer telescopio de Galileo tenía un objetivo plano-convexo (5,6 cm de diámetro, f = 1,7 m, R = 93,5 cm) y un ocular plano-cóncavo, ambos pulidos por el mismo. Su aumento era 3× comparado con su último telescopio que era 32×. (Foto de E. H.)

Telescopios reflectores

Dicho de manera sencilla, un telescopio nos debería permitir ver *claramente* los objetos distantes que a veces son también muy *débiles*. Tenemos que poder resolver los detalles diminutos, es decir, distinguir los rasgos independientes de pequeño tamaño y que están muy cerca unos de otros, tales como las dos estrellas de un sistema binario. Un satélite espía que sea capaz de ver a la gente que pasea es muy útil pero otro que pueda distinguir el cuerpo al que pertenecen basándose en los símbolos que llevan en su uniforme es aún mejor. Esta habilidad de medición se denomina **resolución** y aumenta con el diámetro (D) de la apertura que permite la entrada de luz. Dado por sentado que todo lo demás sea igual (bajo condiciones de visibilidad ideales), la resolución de un telescopio de diámetro grande será mayor que la de un telescopio de diámetro pequeño. Hay, además, otra razón aún más convincente por aumentar el tamaño de la apertura: incrementar la **potencia colectora**. Un telescopio con una apertura grande estará en condiciones de captar más cantidad de luz y ver un número mayor de objetos distantes y más débiles que otro igual pero más pequeño.

Las dificultades inherentes en la fabricación de lentes grandes quedan subrayadas por el hecho de que el instrumento refractor más grande es el telescopio de 40 pulgadas de Yerkes en Williams Bay, Wisconsin, mientras que el diámetro del reflector del Monte Palomar en California, es de 200 pulgadas. Los problemas son evidentes: una lente debe ser transparente y estar libre de imperfecciones internas tales como burbujas, etc. Un espejo de superficie frontal obviamente no necesita serlo, en realidad, ni siquiera necesita ser transparente. Una lente puede apoyarse sólo en sus bordes, pudiendo combarse por su propio

peso mientras que un espejo se puede sujetar de su borde y también de su cara posterior. Además, como no se produce refracción y, por lo tanto, no hay efecto en la distancia focal debido a que el índice depende de la longitud de onda, los espejos no están sometidos a la aberración cromática. Por estas y otras razones (por ejemplo, su respuesta de la frecuencia) los reflectores predominan en los telescopios de gran tamaño.

Inventado por el escocés James Gregory (1638-1675) en 1661, fue Newton quien en 1668 logró construir el primer telescopio reflector que se convertiría en una herramienta imprescindible para la investigación tan sólo un siglo más tarde, en manos de William Herschel. En la figura 5.124 se ilustran varios dispositivos reflectores, todos ellos dotados de un espejo primario paraboloidal cóncavo. El venerable telescopio Hale de 200 pulgadas es tan grande que en el foco primario se halla una pequeña cabina, donde se puede sentar un observador (figura 5.124*a*). En la versión newtoniana (figura 5.124*b*) un espejo plano o prisma saca el haz según ángulos rectos con el eje del telescopio, donde se puede fotografiar, ver, analizar espectralmente o procesar fotoeléctricamente. En la disposición gregoriana clásica (figura 5.124*c*), que no es muy conocida, un espejo secundario elipsoidal cóncavo vuelve a invertir la imagen, devolviendo el haz a través de un agujero en el primario. El sistema clásico de Cassegrain (figura 5.124*d*) recurre a un espejo secundario hiperbólico convexo para aumentar la distancia focal efectiva (remítanse a las figura 5.51, pág. 186). Funciona como si el primario tuviera la misma apertura pero una distancia focal o radio de curvatura más grande.

El simple telescopio paraboidal de espejo único (figura 5.124*a*) se creó para que funcionara con rayos que entraban a lo largo de su eje óptico. Sin embargo, siempre habrá objetos interesantes en otros puntos del campo de visión que no sea su centro directo. Cuando un haz de rayos paralelos fuera de eje son reflejados por un paraboloide, no todos convergen en el mismo punto. La imagen de un punto fuera de eje (por ejemplo, una estrella) es una mancha asimétrica fuera de eje producida por las aberraciones combinadas de *coma* (pág. 265) y del *astigmatismo* (pág. 268). Muy pronto, a medida que el objeto se mueve fuera de eje, tal imagen borrosa se hace inaceptable, sobre todo por la aportación de coma, ya que acaba limitando el campo de visión aceptable a algo muy estrecho. Incluso para un sistema lento de $f/10$, el radio angular del campo de visión aceptable es solamente de unos 9 minutos de arco descentrado del eje, reduciéndose a tan sólo 1,4 minutos de arco en $f/4$. Los campos de visión de los telescopios clásicos de dos espejos (figuras 5.124*b*, *c* y *d*) se ven limitados gravemente de manera parecida por coma.

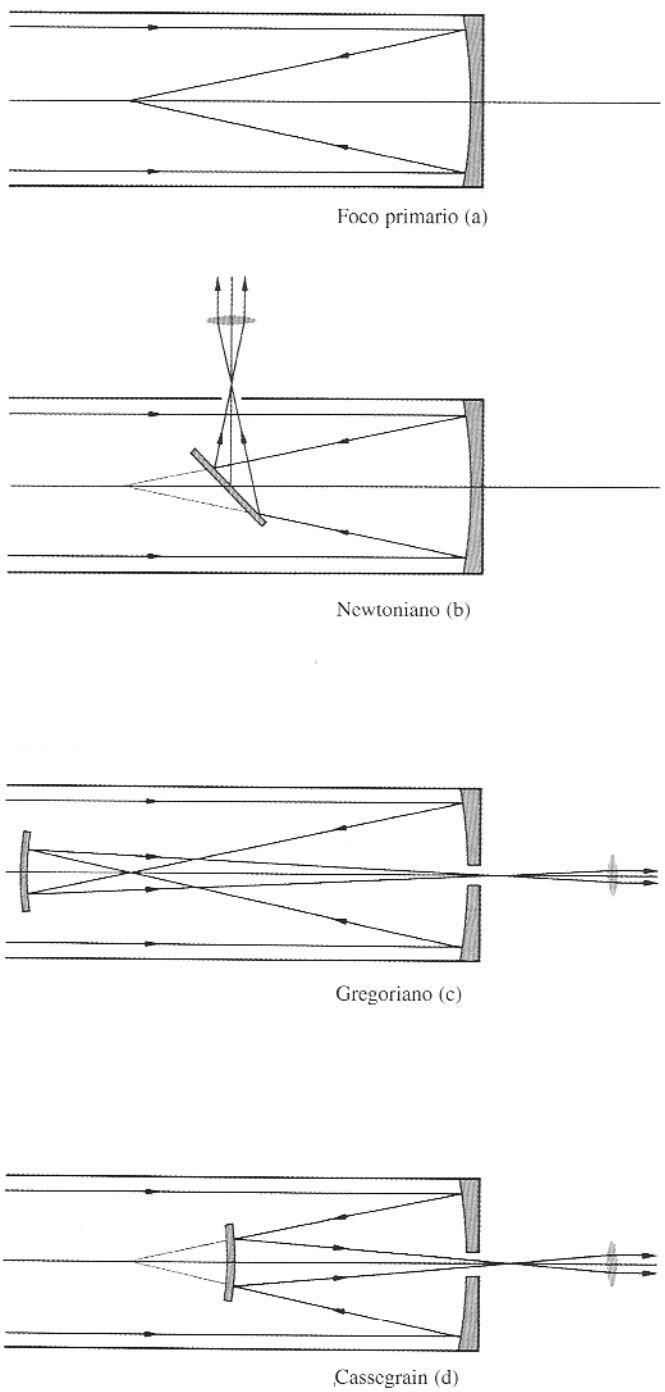


FIGURA 5.124 Telescopios reflectores.

Reflectores aplanáticos

Un sistema óptico cuyas aberración esférica (pág. 258) y coma sean ambas despreciables, se denomina **aplanático.** Existen versiones aplanáticas tanto del telescopio de Cassegrain como de Gregory. El modelo de Ritchey-Chrétien es un telescopio aplanático de Cassegrain con un primario y secundario hiperbólicos que, recientemente, se ha convertido en el modelo más escogido para dispositivos con aperturas de 2 m o más. Quizás, el ejemplo más conocido de ello es el Telescopio espacial Hubble (TEH) de 2,4 m que se ilustra en la figura 5.125. Solamente los telescopios espaciales (es decir, por encima de la atmósfera absorbente) pueden funcionar eficazmente en el ultravioleta, donde, por ej., se desea examinar las estrellas jóvenes incandescente. Gracias a sus grupos de dispositivos con acoplamiento por carga (CCD) que se instalaron hace poco (1993), el TEH puede «ver» desde aproximadamente 1 μm en el infrarrojo hasta 121.6 nm en el ultravioleta. Esto complementa los telescopios situados en tierra que pueden proporcionar imágenes limitadas por la difracción en una gama de longitud de onda superior a 10 μm. Por cierto, los CCD tienen una sensibilidad que es unas 50 veces más grande comparada con cualquier película fotográfica; la época de tirar carretes de películas de los satélites espías ya terminó.

Con una coma insignificante o inexistente, el campo de visión del modelo Ritchey-Chrétien está limitado por el astigmatismo. Así, un instrumento de $f/10$ tendrá un radio de campo angular aceptable de 18 minutos de arco, el doble del de un telescopio paraboloidal equivalente. Comparándolo con el telescopio aplanático de Gregory, la versión de Ritchey-Chrétien tiene un secundario más pequeño, y por tanto bloquea una menor cantidad de luz, siendo asimismo considerablemente más corto; ambas características aumentan su atractivo.

Como un instrumento puede captar tan sólo una parte del frente de onda incidente para luego reconstituir una imagen, la difracción siempre estará presente: la luz se desviará de su propagación rectilínea, difundiéndose de alguna manera en el plano imagen. Cuando un sistema óptico con una apertura circular recibe ondas planas, más que existir ahí un «punto» de imagen (cual sea el sentido que esto tenga), la luz realmente se difundirá en una diminuta mancha circular (denominada disco de Airy que contiene aproximadamente el 84% de la energía), rodeada por unos círculos muy borrosos. El radio del disco de Airy define el solapamiento de las imágenes contiguas y, por consiguiente, la resolución. Esa es la razón por la cual un sistema de formación de imágenes, por más perfecto que sea, se considera **limitado por la difracción**.

La resolución angular teórica ideal de un instrumento perfecto viene dada por la ecuación (10.59), es decir, el radio del disco de Airy, $1{,}22\lambda/D$ radianes. Aquí, D es el diámetro del instrumento con las mismas unidades que λ. Otra manera de representar la resolución angular es recurrir a los segundos de arco, en cuyo caso equivaldría a $2{,}52 \times 10^5\lambda/D$. Debido a las distorsiones atmosféricas, las resoluciones de los telescopios situados en tierra, independientemente de su tamaño, raras veces son superiores a aproximadamente 1 segundo de arco. Es decir, las imágenes de dos estrellas separadas por un ángulo inferior a 1 segundo de arco se mezclan para dar lugar a una mancha indescifrable. Haciendo una comparación, el TEH situado muy por encima de la atmósfera y para el que $D = 2{,}4$ m tiene una resolución angular limitada por la difracción en $\lambda = 500 \times 10^{-9}$ m, de unos 0,05 segundos de arco.

Los dos telescopios más grandes del mundo son los modelos gemelos aplanáticos Keck de la clase Cassegrain que están colocados a 85 m de distancia uno de otro, en lo alto del volcán extinguido Mauna Kea en las islas de Hawai a una altura de aproximadamente 13.600 pies. Cada uno está dotado de un primario hiperboloidal de 10 m que consta de 36 elementos hexagonales de curvatura marcada de manera que la distancia focal del sistema de $f/1{,}75$ es de solo 17,5 m. Esto es indicativo de la nueva generación de telescopios de gran tamaño cuya tendencia es disponer de espejos rápidos (menos que $f/2$) con distancias focales relativamente pequeñas. El coste de fabricación y de almacenamiento de los telescopios cortos es menor, siendo además más estables y dirigidos de forma precisa.

Ya se dispone de la tecnología para combinar de manera interferométrica las imágenes procedentes de varios telescopios ópticos separados, incrementando así extraordinariamente la apertura efectiva global. Una nueva generación de sistemas telescópicos ópticos situados sobre el terreno está encaminada a contribuir significativamente a nuestra visión del Universo.

Telescopios catadióptricos

Una combinación de elementos reflectores *(catóptricos)* y refractores *(dióptricos)* recibe el nombre de sistema *catadióptrico.* Seguramente el más conocido de éstos, aunque no el primero, es el clásico *sistema óptico Schmidt* que analizaremos aquí, aunque sea muy brevemente, porque representa un planteamiento importante para el diseño de sistemas reflectores de

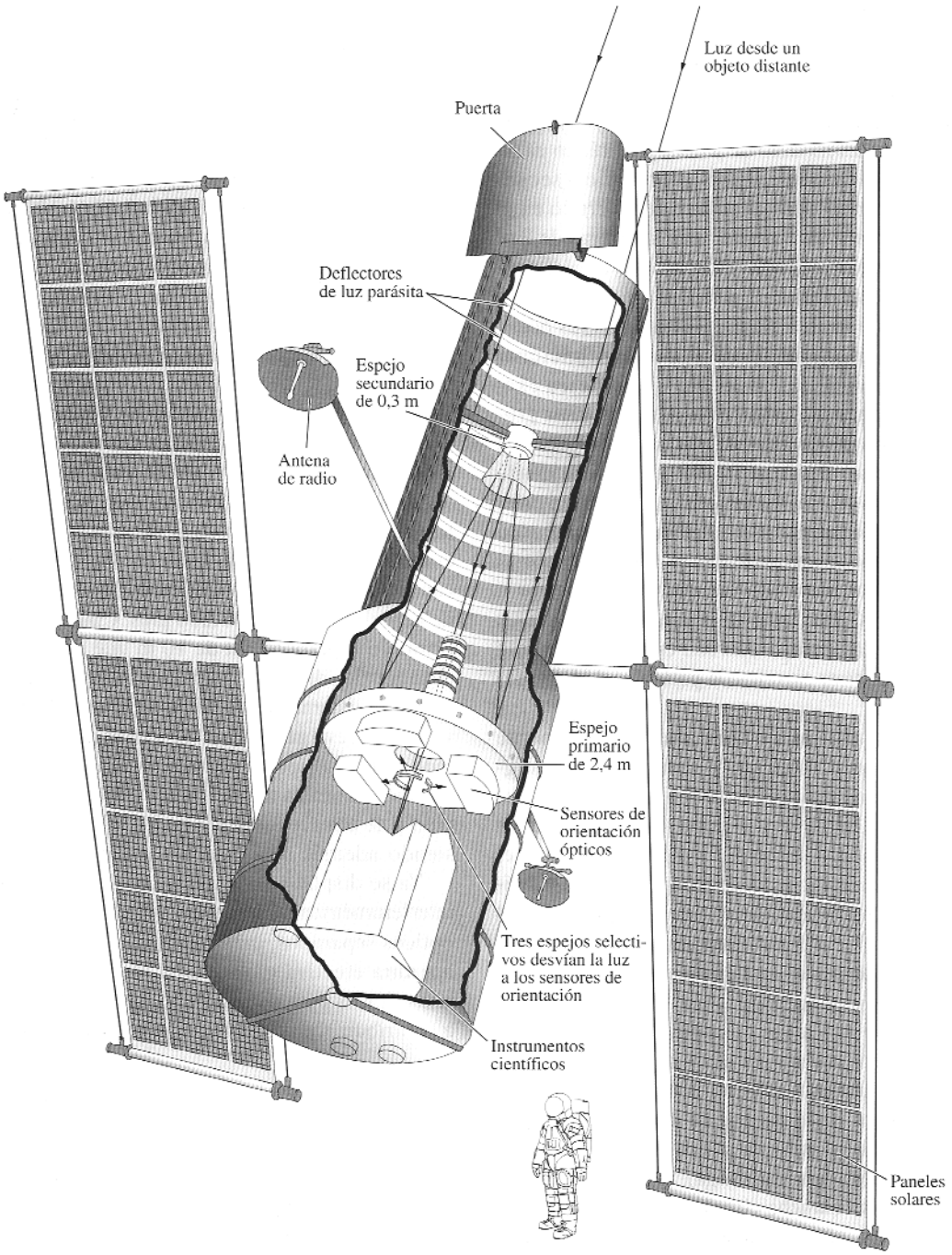


FIGURA 5.125 El Telescopio Espacial Hubble. La astronave mide 13 m de largo (43 pies) (unos 16 pies del espejo primario al secundario) y tiene una masa de 11.600 kg. Se halla en una órbita de 599 km por 591 km. con un período de 96 minutos. El espejo primario de este telescopio se ilustra en la figura 5.52.

campo extenso y gran apertura. Como se ve en la figura 5.126, los haces de rayos paralelos que se reflejan en un espejo esférico formarán imágenes de, digamos, un campo de estrellas, sobre una superficie imagen esférica que, en la práctica, es una placa fotográfica curvada. El único problema que surge con tal esquema es que si bien está libre de otras aberraciones (astigmatismo y coma, véase sección 6.3.1), sabemos que los rayos reflejados desde las regiones exteriores del espejo no convergerán en el mismo foco que los de la región paraxial. Dicho de otro modo, el espejo es una esfera, no un paraboloide y está sujeto a la *aberración esférica* (figura 5.126*b*). Si esto pudiera corregirse, el sistema podría (al menos en teoría) producir imágenes perfectas sobre un ancho campo de visión. Al no haber un eje central, en efecto, no hay puntos descentrados del eje. Recordemos que el paraboloide forma imágenes perfectas sólo en los puntos axiales, deteriorándose rápidamente la imagen fuera de eje.

Una tarde de 1929, mientras navegaban en el Océano Índico (al regresar de una expedición para ver un eclipse en las Filipinas), Bernhard Voldemar Schmidt (1879-1935) le enseñó a un colega un diagrama de un sistema que él había diseñado a fin de controlar la aberración esférica de un espejo esférico. El quería usar una fina placa correctora de vidrio en cuya superficie se tallaría una curva toroidal poco profunda (figura 5.126*c*). Los rayos que pasaran por las regiones exteriores serían desviados lo necesario para que se enfocaran claramente en la esfera imagen. El corrector debe eliminar un defecto sin introducir cantidades apreciables de otras aberraciones. El primer sistema se construyó en 1930 y en 1949 se completó el famoso telescopio Schmidt de 48 pulgadas del Observatorio Palomar. Se trata de un sistema rápido ($f/2{,}5$), de campo ancho, ideal para escudriñar el cielo nocturno. Una sola fotografía podría cubrir una región del cielo del tamaño de la cuenca del *Big Dipper* (*N. del T.*: es una de las siete estrellas de la constelación de la Osa Mayor) comparada con aproximadamente 400 fotos del reflector de 200 pulgadas para cubrir la misma área.

Se han producido avances de gran trascendencia en el diseño de los instrumentos catadióptricos desde la introducción del sistema original de Schmidt. En la actualidad, hay satélites catadióptricos e instrumentos para el seguimiento de los misiles, cámaras para meteoros, telescopios comerciales compactos, objetivos telefotográficos así como sistemas de guía de radiomando para misiles. Existen un sinfín de variaciones en este tema; algunas reemplazan la placa correctora por sistemas concéntricos de lentes meniscos (Bouwers-Maksutov) mientras que otros recurren a espejos sólidos y gruesos. En un método de mucho éxito se aprovecha una configuración de tres lentes asféricas (Baker).

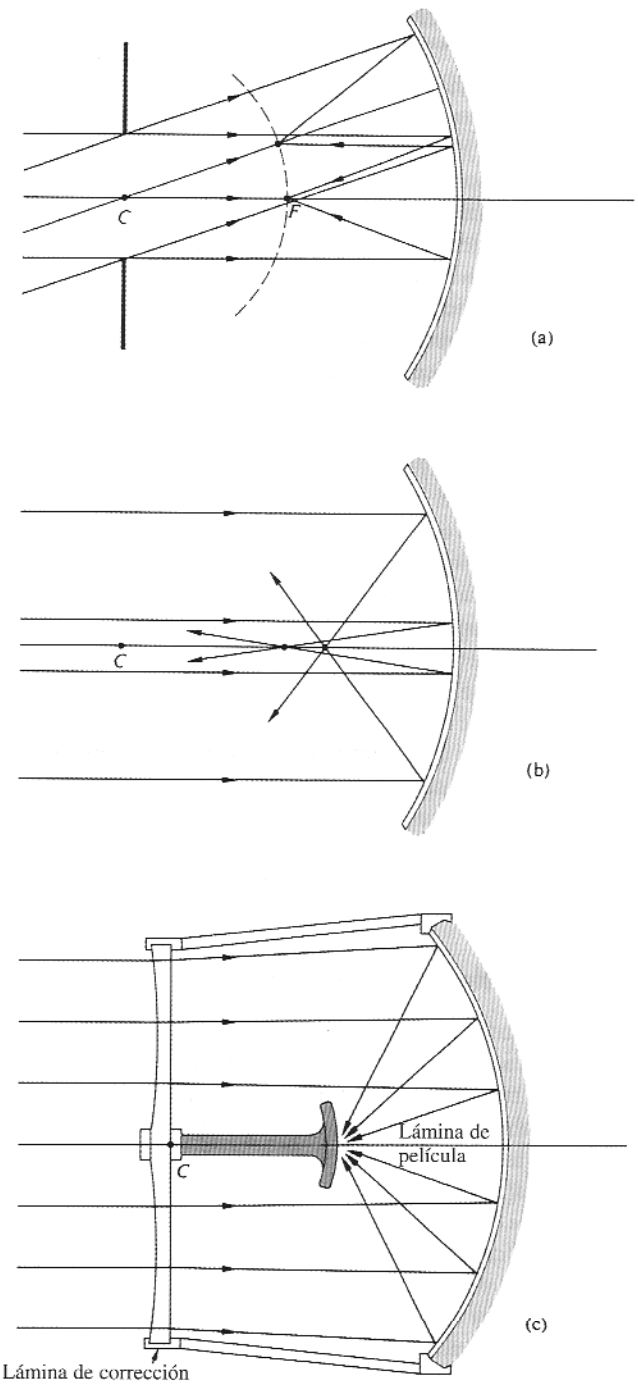


FIGURA 5.126 El sistema óptico Schmidt.

5.8 Conformación del frente de onda

Este capítulo se ha examinado como conformar los frentes de onda de una forma u otra, sin embargo los efectos producidos por las lentes y los espejos tradicionales son globales, afectando así toda la parte procesada del frente de onda más o menos de la misma manera. Por el contrario, por primera vez, ahora se puede escoger un frente de onda incidente y reconfigurar todas y cada una de sus partes de forma distinta para satisfacer necesidades específicas.

Consideremos una onda plana que atraviese bien sea un medio heterogéneo de índice $n(\mathbf{r})$ o un medio de espesor irregular —un trozo de vidrio de la mampara de una ducha podría servir (figura 5.127*a*)—. Los frentes de onda se quedan atrás esencial y proporcionalmente a la *LCO*, distorsionándose. Cuando, por ejemplo, esta onda arrugada es reflejada por un espejo plano normal y corriente, se aleja con dirección opuesta pero sin alterarse (figura 5.127*b*). Las regiones del frente de onda anteriores y posteriores siguen siendo las mismas, habiéndose invertido solamente la dirección de propagación: el frente de onda sigue estando distorsionado. La escena que se desarrolla detrás del cristal rugoso de la mampara de una ducha resulta borrosa tanto si se mira directamente como si se mira a través de un espejo.

De inventarse un espejo más complejo que pudiera volver a conformar los frentes de onda reflejados, podríamos eliminar esas distorsiones molestas cuya presencia es inevitable en numerosas situaciones. En este apartado se analizarán dos técnicas modernas cuyo objetivo es precisamente esto.

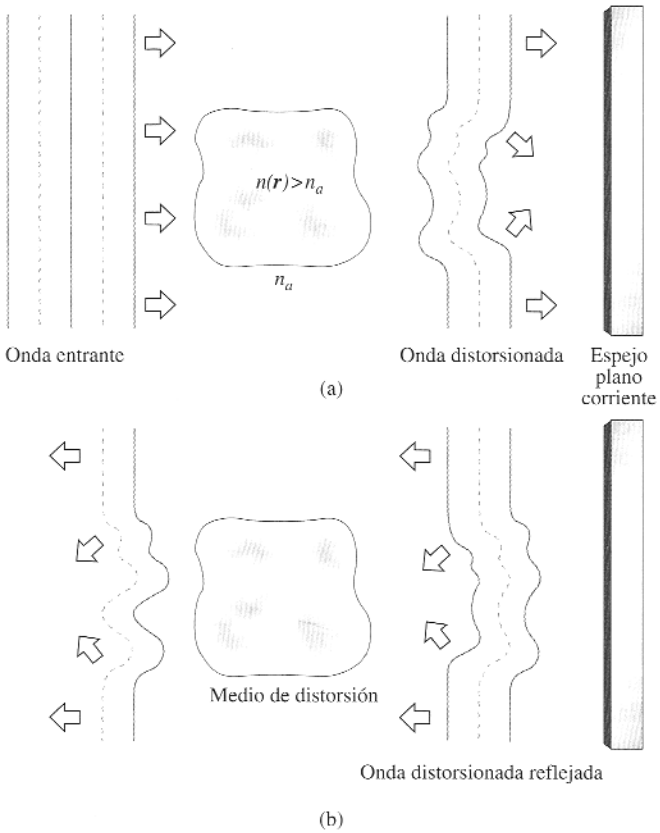


FIGURA 5. 127 (*a*) Una onda plana se distorsiona al pasar a través de un medio no homogéneo. (*b*) Cuando una onda tan arrugada se refleja en un espejo tradicional, cambia de dirección. Las regiones que iban delante o detrás siguen igual a medida que la onda, aún arrugada, se mueve hacia una nueva dirección. Al atravesar el medio no homogéneo por segunda vez aumenta su distorsión.

5.8.1 Óptica adaptativa

Uno de los adelantos recientes más extraordinarios en el campo de la técnica de los telescopios se denomina **óptica adaptativa** que ya ha proporcionado una manera para hacer frente al tremendo problema de la distorsión atmosférica. Como dijo Newton: «Si la teoría de fabricación de los telescopios se pudiera, a la larga, llevar plenamente a la práctica, quedarían sin embargo unos límites que los telescopios no podrían rebasar ya que el aire a través del cual miramos a las estrellas tiembla perennemente como puede verse por el movimiento trémulo de las sombras proyectadas por torres elevadas y por el centelleo de las estrellas fijas». La óptica adaptable es un método que se utiliza para controlar el «tremor perpetuo» —primero, midiendo las distorsiones de la luz incidente producidas por la turbulencia y, sucesivamente, utilizando dicha información para volver a conformar la onda luminosa, devolviéndole su condición primitiva como si nunca hubiera atravesado el remolino atmosférico (figura 5.128)—.

Accionada por la energía térmica del Sol, la atmósfera terrestre es un mar de aire turbulento en continuo movimiento. Las variaciones de su densidad se acompañan de las variaciones del índice de refracción y, por consiguiente, de la longitud de camino óptico. Los frentes de onda que fluyen de un punto en una estrella distante llegarán a la atmósfera casi seguramente como ondas planas cuya longitud de onda se situará por la mitad del visible, siendo de aproximadamente 0,5 μm. A medida que se deslizan rápidamente por las 100 millas o así del aire en movimiento, se introducen unas diferencias de camino óptico de unos

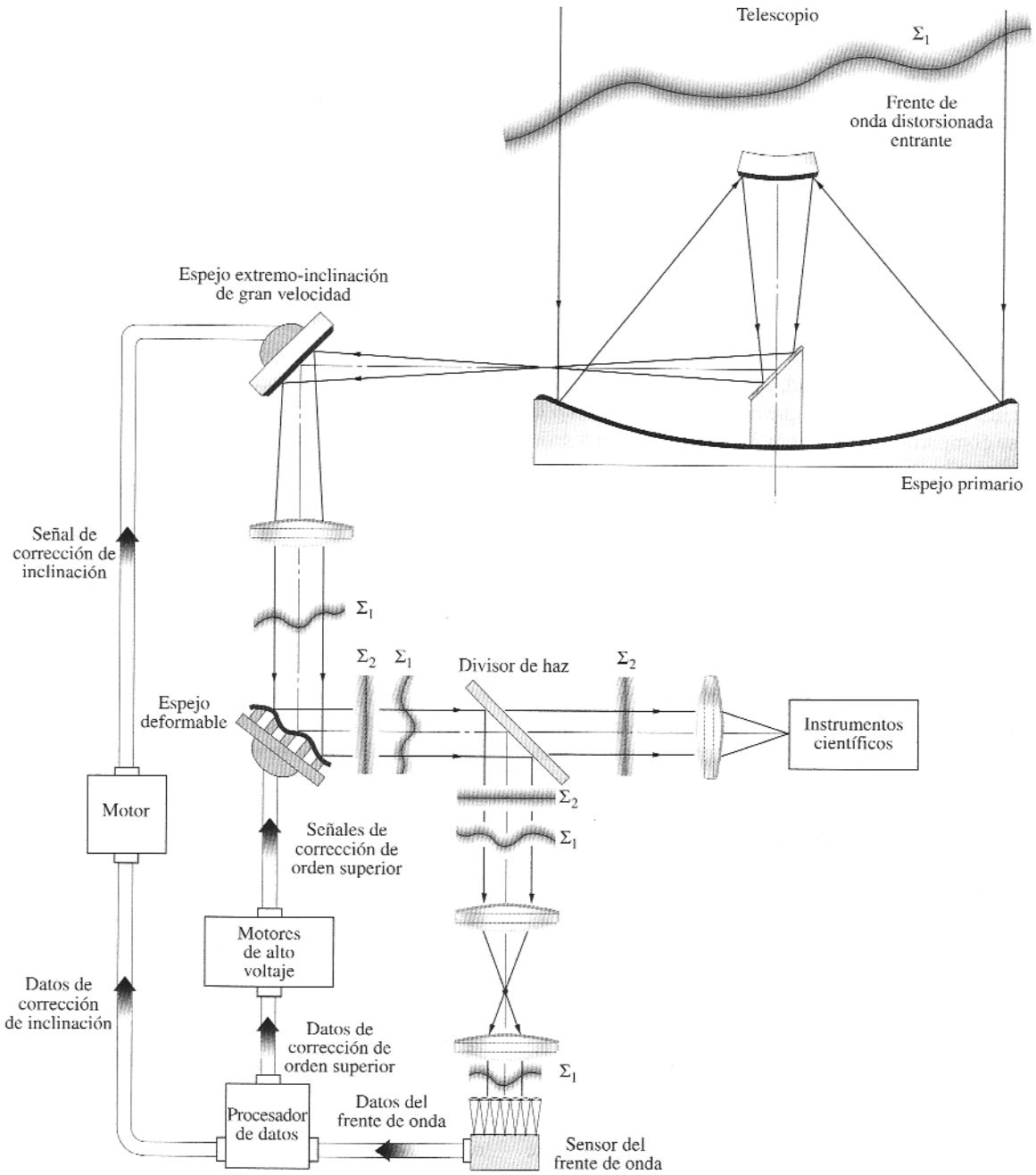


FIGURA 5.128 Sistema de óptica adaptativa. El frente de onda distorsionado Σ_1 se analiza y reconfigura. El frente de onda plano corregido se transmite a los instrumentos científicos.

pocos micrómetros y los frentes de onda se distorsionan en una superficie ondulada desigual. Lo que alcanza el nivel del suelo es una sucesión de frentes de onda marcadamente irregulares cuya forma se parece a lo que se obtendría al colocar unas baldosas de 10 cm en un suelo cubierto de diminutos escarabajos resistentes, es decir, baldosas contiguas ladeadas por doquier. La turbulencia cambia de manera impredecible en una escala de milisegundos mientras que la progresión de los frentes de onda que la atraviesan sigue torciéndose y combándose como si los escarabajos se desplazaran sin rumbo por debajo de las baldosas, levantándolas y moviéndolas.

La imagen de la baldosa, por más que parezca insólita, resulta útil porque en 1966 David L. Fried demostró que los resultados ópticos de la turbulencia atmosférica podían modelarse de forma bastante sencilla. En realidad, a causa de la elevada velocidad de la luz, se puede suponer que en cualquier momento la atmósfera se comporta como si fuera comprimida en una serie horizontal de regiones o celdas estables pequeñas, contiguas, refractoras y en forma de cuña. En cualquier punto del suelo, la porción local de un frente de onda estelar consta de numerosas áreas inclinadas al azar, de pequeño tamaño y bastante planas (cada una análoga a una baldosa). En el patio trasero de alguien, estas áreas miden, por lo general, 10 cm de ancho, si bien bajo las mejores condiciones (por ejemplo, en la cima de una montaña dotada de observatorio astronómico) pueden alcanzar los 20 o, a veces, los 30 cm «cuando la visión es buena». En cada una de estas **regiones isoplanáticas**, el frente de onda es bastante liso y con escasa curvatura: la diferencia entre las protuberancias anteriores y las depresiones posteriores es de $\lambda/17$ y es una regla empírica que si las distorsiones se sitúan por debajo de los $\lambda/10$, la calidad de la imagen será muy buena. Cuanta más turbulencia haya, menos estables serán las celdas y más pequeñas serán las regiones isoplanáticas correspondientes del frente de onda.

El efecto de la turbulencia en la imagen formada por un telescopio orientado hacia una estrella, depende en gran medida del tamaño de su apertura. Si la apertura del instrumento es tan sólo de unos centímetros, la pequeña porción que se admite del frente de onda (habiendo atravesado sólo una parte de una celda estable) será, probablemente, bastante plana. La turbulencia alterará en primer lugar la inclinación de la sección del frente de onda incidente que, de otra manera, sería plana. Esto significa que una imagen de Airy nítida podría formarse momentáneamente mediante esa sección pero la mancha de esa imagen de Airy seguirá vagando ya que la atmósfera cambia y cada sección sucesiva plana del frente de onda llegará con un ángulo distinto (nuestros escarabajos ya míticos siguen moviéndose). Por el contrario, en el caso de un telescopio de diámetro grande, cuyo ancho sea de unos metros, la amplia sección admitida del frente de onda es un mosaico hecho de muchas regiones planas e inclinadas. La imagen es, por lo tanto, una superposición simultánea de numerosas manchas de Airy móviles siendo el resultado un borrón trémulo. Lógicamente, al aumentar la apertura se captará una mayor cantidad de luz pero la resolución no aumentará proporcionalmente.

El tamaño crítico de la apertura donde es posible apreciar el borrón es una medida de la turbulencia, denominándose **parámetro de Fried** y que se representa casi a escala universal por el símbolo r_o. La elección del símbolo no ha sido muy acertada puesto que no se trata de un radio. Se pronuncia «*r cero*» y corresponde al tamaño de la región en la que el frente de onda incidente puede considerarse como plano. En las escasas ocasiones en las que r_o rebasa los 30 cm, la imagen «perfecta» de una estrella distante podrá formarse como un disco Airy. A medida que la turbulencia aumenta, r_o disminuirá; asimismo, al reducirse la longitud de onda, r_o aumentará: $r_0 \propto \lambda^{1,2}$. Se deduce que la resolución angular de un telescopio de gran tamaño situado en tierra es en realidad de $1{,}22\lambda/r_o$ y puesto que r_o rebasa muy pocas veces los 20 cm, resulta que la resolución del instrumento terrestre más potente es un poco más grande que la de un modesto telescopio de 6 pulgadas.

Cuando por encima del telescopio sopla el viento, éste desplazará las regiones isoplanáticas más allá de la apertura. Una brisa de 5 m/s arrastrará una región isoplanática con r_o = 10 cm en 20 ms. A fin de vigilar y responder en definitiva a semejantes cambios atmosféricos, un sistema de control electro-óptico-mecánico debería funcionar a una velocidad 10 ó 20 veces mayor, tomando datos de hasta 1.000 veces por segundo.

En la figura 5.128 se ilustra un gráfico esquemático de un típico sistema astronómico de óptica adaptativa en el que el telescopio está orientado hacia una estrella que servirá tanto de sujeto como guía para la corrección de las distorsiones. Antes de dar cualquier paso, se reduce el diámetro del haz de gran tamaño del espejo primario a unos pocos centímetros para que pueda manejarse más fácilmente. Durante este proceso, cada región isoplanática del espejo primario se enfocará reduciéndose a una región correspondiente de pequeño tamaño en el haz reducido.

El primer paso a dar es analizar el frente de onda distorsionado, Σ_1, transmitido por el telescopio y que ahora está presente en miniatura en el haz reducido. Esto se lleva a cabo recurriendo a un **sensor del frente de onda** del que existen varias clases; el que utilizamos aquí es un sensor Hartman (figura 5.129) que consiste de una serie compacta de miles de

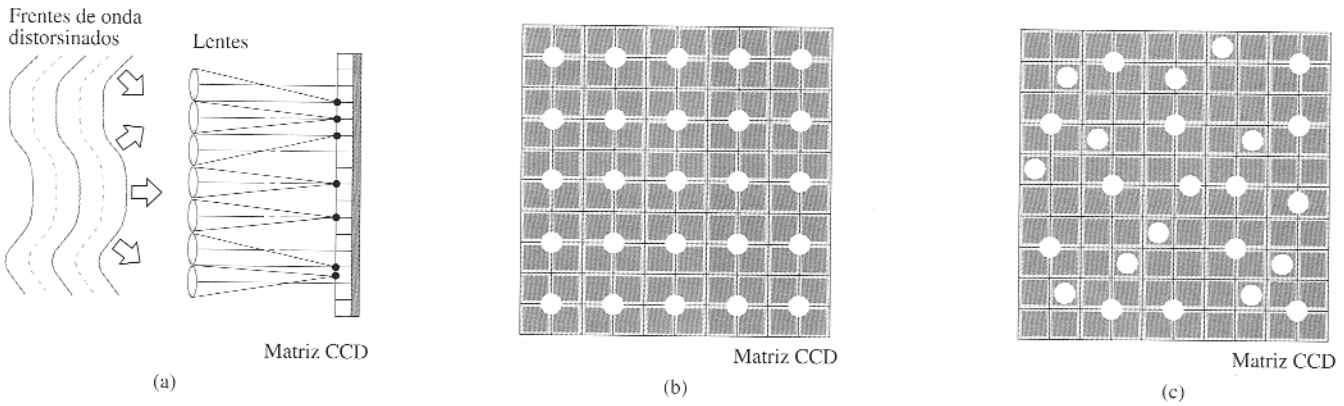


FIGURA 5.129 Sensor de frente de onda de Hartmann. (*a*) Las lentes enfocan la luz hacia abajo en una matriz CCD. Cada grupo cuadrado de cuatro elementos CCD forma un detector. (*b*) Cuando la onda incidente es plana, se forman manchas de imagen de Airy en puntos de nulo en el centro de cada detector de cuatro elementos. (*c*) Cuando el frente de onda está distorsionado, las manchas de imagen de Airy se desplazan de las posiciones de nulo.

detectores independientes estrechamente colocado uno cerca de otro. La luz incidente en el sensor primero chocará contra una lámina de lentes diminutas e idénticas sólidamente empaquetadas en cuyo plano focal existe un dispositivo CCD (figura 5.129*a*) que está colocado en el haz de manera que una lente tiene aproximadamente el tamaño de una región isoplanática. Cada lente sucesivamente forma una imagen diminuta de la estrella en un grupo de cuatro elementos de detectores individuales formando lo que se conoce como detector de cuadrantes CCD, agrupados alrededor de su eje óptico. Si el frente de onda óptico fuera perfectamente plano, si cada región isoplanática tuviera una inclinación cero y todas fueran paralelas, cada lente produciría una mancha de imagen de Airy en una posición nula entre sus cuatro elementos de construcción de imagen (figura 5.129*b*). Sin embargo, al inclinarse una región isoplanática, el punto de imagen correspondiente se mueve y los cuatro elementos de CCD registran una señal inestable que indica el desplazamiento exacto (figura 5.129*c*). El resultado de todos estos detectores se analiza por ordenador, Σ_1 se reconstruye teóricamente y se calculan las correcciones necesarias para aplanar el frente de onda.

En el supuesto de que se detectara una inclinación global, se enviará una señal al espejo plano de orientación rápida que recibe inicialmente la luz desde el primario, contrarrestando así esa inclinación. Ahora, el frente de onda derecho pero aún ondulado se dirige hacia un «espejo de goma», un reflector flexible que puede deformarse rápida y precisamente. Por ejemplo, podría constar de un reflector de plancha fina, montado en centenares de actuadores que le dan rápidamente la forma deseada. Accionado por las señales desde el ordenador, el espejo se dobla en una configuración opuesta a la del frente de onda. En efecto, los salientes del frente de onda inciden en las depresiones del espejo de adaptación y viceversa para reflejar un haz de frentes de onda libres de distorsiones, Σ_2, que corresponden a la condición de luz de las estrellas antes de que entrara en la atmósfera. Una pequeña fracción de la energía radiante vuelve al bucle de servocontrol del espejo-ordenador-detector para mantener continuamente el proceso de corrección mientras que la demás viaja a los instrumentos científicos.

Puesto que muchos de los objetos que despiertan el interés de los astrónomos —planetas, galaxias, nebulosas, etc.— se representan como objetos extendidos, no pueden utilizarse como guía para la óptica adaptativa. Sin embargo, si se desea examinar una galaxia, se podrá utilizar una estrella cercana como guía. Desgraciadamente, no habrá con frecuencia una estrella en las inmediaciones que sea lo suficientemente brillante, límite éste que podrá resolverse recurriendo a un haz láser a fin de crear una estrella artificial como guía (figura 5.130). Hasta la fecha, esto se ha llevado a cabo con éxito de dos maneras distintas. En una, se proyecta un pulso láser, enfocado a alturas que oscilan entre 10 y 40 km, a través del telescopio. Una porción de la luz se retrodispersa hacia abajo desde moléculas de aire a través de la dispersión de Rayleigh. Por otra parte, hay una capa de átomos de sodio (que quizás hayan sido depositado por los meteoritos) a una altura de 92 km., muy por encima de la turbulencia atmosférica y que puede

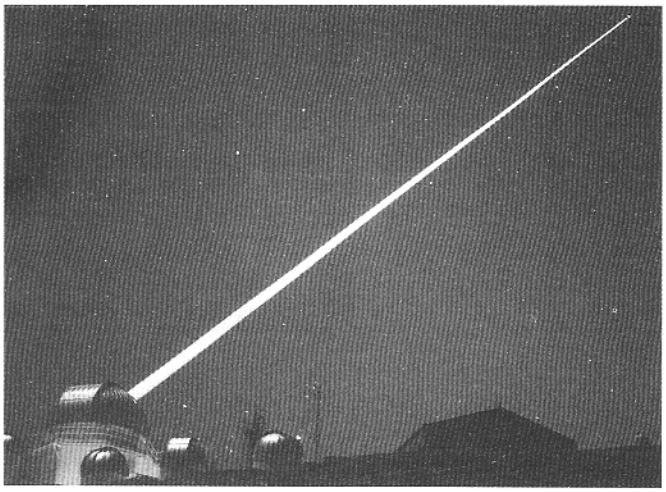
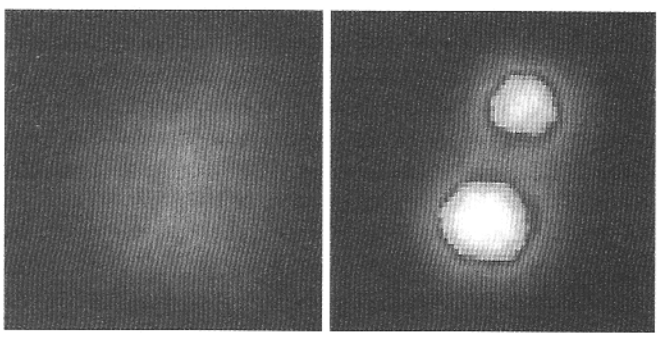


FIGURA 5.130 Creación de una estrella de guía láser en el Phillips Laboratory, base aérea de Kirtland, Nuevo Mexico. (Foto cedida por Phillips Laboratory, Departmento de las Fuerzas Aéreas de EE.UU.)



(a) (b)

FIGURA 5.131 Exposición de 1 segundo de la Osa Mayor 53 E con un telescopio de 1,5 m en el Phillips Laboratory. (Foto cedida por Phillips Laboratory, Departamento de las Fuerzas Aéreas de EE.UU.). (*a*) La imagen corriente sin compensar es indescifrable. (*b*) Empleando la óptica adaptativa, la imagen mejora radicalmente.

excitarse recurriendo a un láser sintonizado a 589 nm, produciendo así una pequeña baliza amarilla y brillante en cualquier parte del cielo.

Los resultados (figura 5.131) han sido tan alentadores [9] que la mayoría de los telescopios en el mundo entero utiliza ya o lo hará dentro de poco, la óptica adaptativa.

5.8.2 Conjugación de fase

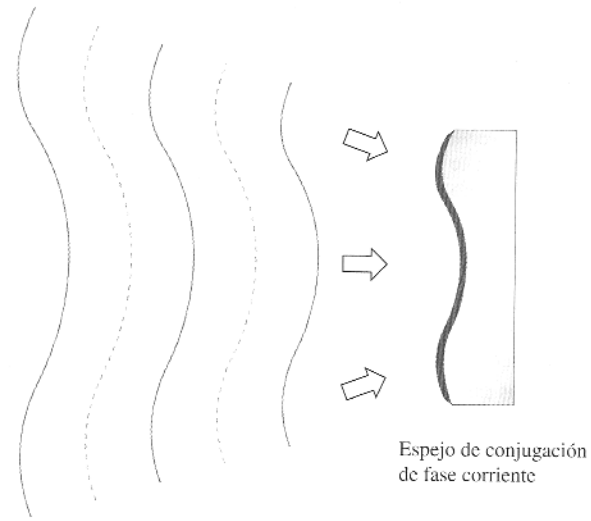
Otra técnica nueva importante para reconfigurar los frentes de onda es la denominada **conjugación de fase** en la que la onda se vuelve del revés durante una clase especial de reflexión.

Imaginemos un flujo de ondas planas que viajan a la derecha en dirección de z y que inciden perpendicularmente en un espejo plano normal, y corriente. La onda incidente (pág. 28) se expresa como $E_i = E_0 \cos(kz - \omega t)$ o utilizando una forma compleja, $\tilde{E}_i = E_0 e^{i(kz-\omega t)} = E_0 e^{ikz} e^{-i\omega t} = \tilde{E}(z) e^{-i\omega t}$, donde el espacio y el tiempo han sido separados. Gracias a este sencillo ejercicio de geometría, las ondas reflejadas se desplazan hacia atrás encima de las ondas incidentes; ***son idénticas excepto por la dirección de propagación***. La onda reflejada es $E_r = E_0 \cos(-kz - \omega t)$, or $\tilde{E}_r = E_0 e^{-ikz} e^{-i\omega t} = E^*(z) e^{-i\omega t}$. Cambiando el signo de la parte espacial de la fase, cambia también la dirección de la onda, lo cual se logra tomando el conjugado complejo en la fórmula exponencial. Por esta razón, la onda reflejada se denomina también **onda de conjugación de fase** u onda **conjugada**. Una situación parecida es la representada por el hecho que, al menos en principio, podríamos tomar una película cinematográfica de la misma que al mostrarse hacia delante o hacia atrás sería indistinguible. Por consiguiente, una onda de fase conjugada se dice que está **invertida en el tiempo**. Para las ondas monocromáticas, el cambiar el signo de la parte temporal (es decir, inversión del tiempo) equivale a invertir la dirección de propagación: $\cos[kz - \omega(-t)] = \cos(kz + \omega t) = \cos(-kz - \omega t)$.

Una reflexión muy sencilla y de fase conjugada se da cuando existe una fuente puntual en el centro de curvatura de un espejo esférico cóncavo. Las ondas fluyen, expandiéndose hasta el espejo, y al reflejarse se encogen hacia atrás hasta la fuente puntual. Una superficie reflectora convencional podría supuestamente hacerse para que igualara exactamente cualquier frente de onda en particular y, así, reflejar una conjugada para esa onda incidente determinada (figura 5.132). Es un planteamiento poco práctico, particularmente si no se puede anticipar la forma del frente de onda o si éste cambia por momentos.

Afortunadamente, en 1972 un equipo ruso de científicos descubrió un método para producir conjugación de fase para

[9] Véanse L. A. Thompson, «Adaptive Optics in Astronomy», *Phys. Today* **47**, 24 (1994); J. W. Hardy, «Adaptive Optics», *Sci. Am.* **60** (Junio de 1994); E. Q. Fugate y W. J. Wild, «Untwinkling the Stars-Part I», *Sky & Telescope* **24** (Mayo de 1994); W. J. Wild y R. Q. Fugate, «Untwinkling the Stars-Part II», *Sky & Telescope* **20** (Junio de 1994).



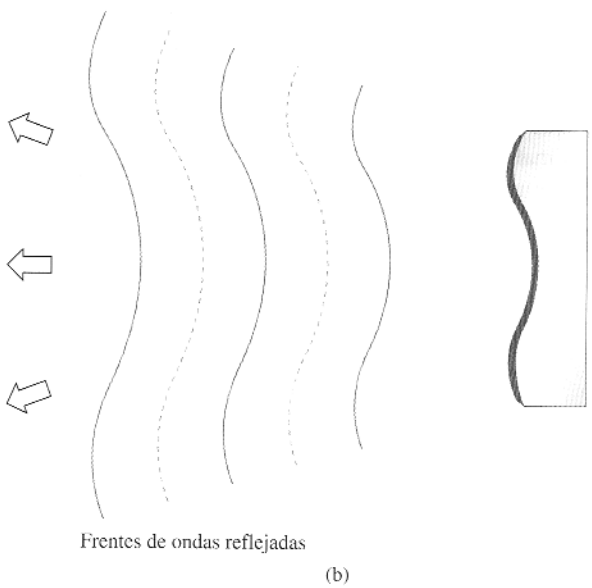


FIGURA 5.132 Operación de un espejo de conjugación de fase bastante limitado. Sólo funciona con los frentes de onda entrantes que se muestran en (*a*).

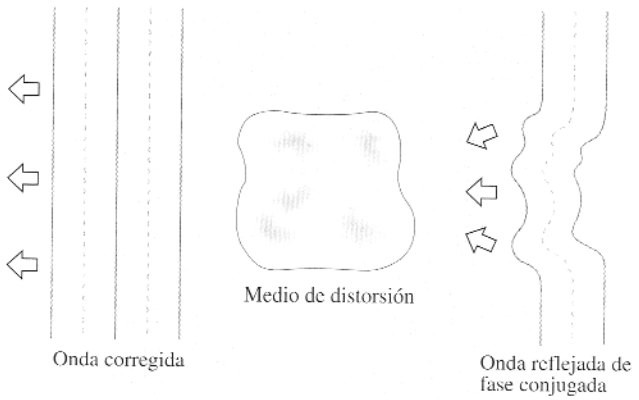


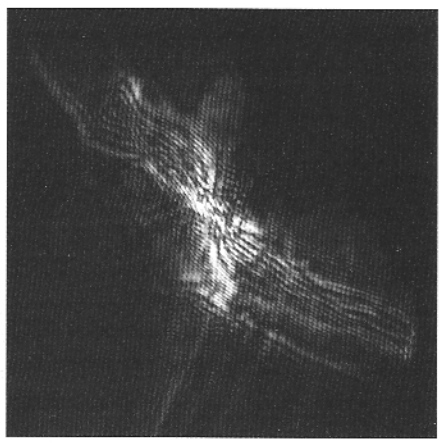
FIGURA 5.133 Cuando la onda distorsionada de la figura 5.127 se refleja por un espejo de conjugación de fase, se vuelve al revés o se conjuga. Compárese con la onda refleja convencionalmente de la figura 5.127*b*. Al atravesar el medio no homogéneo por segunda vez, las regiones del frente de onda que van delante serán retenidas y viceversa. La onda que emerge después de una vuelta completa será idéntica a la que entró al comienzo (figura 5.127*a*).

cualquier frente de onda incidente recurriendo a la dispersión de Brillouin. Dirigieron un potente haz láser en un tubo que contenía gas metano a elevada presión. Con unos niveles de potencia de aproximadamente un millón de vatios, se producen variaciones de densidad por presión convirtiéndose el medio en un espejo extraordinario que refleja hacia atrás casi toda la luz incidente. Los investigadores se quedaron sorprendidos por el hecho de que el haz que se difundía al salir del gas se caracterizaba por estar conjugado. El medio, en el caso que nos ocupa, el metano, se adapta a la presencia del campo electromagnético de tal manera que invirtiendo la onda retrorreflejada, las regiones que inicialmente se encontraban en posición anterior ahora se hallan retrasada. Hoy en día, existen varios métodos para alcanzar la misma finalidad que utilizan medios capaces de producir efectos ópticos no lineales. Hay un sinfín de aplicaciones desde técnicas para seguimiento de satélites hasta las de mejora de la calidad del haz láser.*

Para poner un ejemplo de lo que se puede realizar, considérese lo siguiente: si un haz que se ha distorsionado al atravesar un medio inhomogéneo (figura 5.127), se refleja desde un espejo normal y corriente y se le obliga a pasar otra vez por ese

* Véanse D. M. Pepper, "Applications of Optical Phase Conjugation", *Sci. Am.* **74** (Enero de 1986) y V. V. Shkunov y B. Ya. Zel'dovich, "Optical Phase Conjugation", *Sci. Am.* **54** (December 1985).

(a)



(b)

(c)

FIGURA 5.134 Empleo de la conjugación de fase para eliminar la distorsión. (*a*) Imagen de un gato reflejada por un espejo —no se introduce distorsión—. (*b*) El mismo gato después de atravesar el medio no homogéneo por dos veces. (*c*) Después de pasar por el medio no homogéneo, la onda había sido sometida a conjugación de fase y volvió a atravesar el medio otra vez. La mayoría de la distorsión de la imagen desapareció. (Foto cedida por Jack Feinberg, Universidad de California del Sur.)

medio, acabará distorsionándose aún más. Por el contrario, si lo mismo se realiza utilizando un espejo de conjugación de fase, al atravesar otra vez el medio de distorsión, el haz será devuelto a su condición primitiva. La figura 5.133 ilustra la técnica mientras que la figura 5.134 muestra los resultados de un experimento real. Se imprimió la imagen de un gato en un haz láser de iones de argón ($\lambda = 514{,}5$ nm) simplemente haciendo pasar el haz por una transparencia fotográfica del gato. Como estándar de referencia, la onda con la imagen fue transmitida, mediante un divisor de haz, a un espejo común donde se reflejó hacia atrás a través del divisor y, sucesivamente, en una pantalla de cristal esmerilado para que pudiera fotografiarse (figura 5.134*a*). Luego, un deformador de fase (por ejemplo, un trozo de cristal de una mampara de ducha) se intercaló entre el divisor y el espejo de manera que la onda lo atravesó dos veces. La imagen que devolvió el espejo era irreconocible (figura 5.134*b*). Finalmente, se quitó el espejo convencional, reemplazándose por un dispositivo conjugador de fase. Aunque la onda volvió a pasar dos veces a través del deformador, la imagen recobró su claridad primitiva (figura 5.134*c*).

PROBLEMAS

5.1 La forma de la interfaz que se recoge en la figura P.5.1 se denomina óvalo cartesiano por René Descartes que lo estudió en los primeros años del siglo XIX. Representa la configuración perfecta para llevar cualquier rayo desde S hasta la interfaz ya P. Demuestre que la ecuación que lo define es

$$\ell_o n_1 + \ell_i n_2 = \text{constant}$$

Demuestre que ésta equivale a

$$n_1(x^2 + y^2)^{1/2} + n_2[y^2 + (s_o + s_i - x^2)]^{1/2} = \text{constante}$$

donde x e y son las coordenadas del punto A.

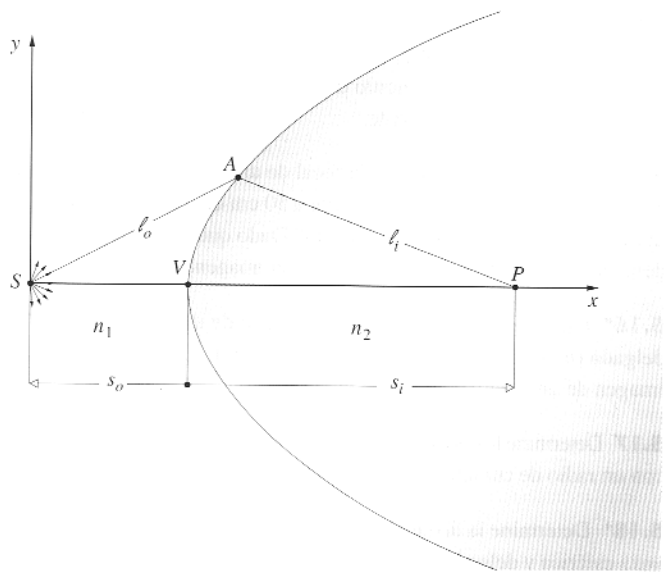


FIGURA P.5.1

5.2 Construya un óvalo cartesiano tal que los puntos conjugados estén separados por 11 cm cuando el objeto está a 5 cm del vértice. Si $n_1 = 1$ y $n_2 = \frac{3}{2}$, trace varios puntos en la superficie requerida.

5.3* Utilice la figura P.5.3 para demostrar que si una fuente puntual se coloca en el foco F_1 del elipsoide, del lado más distante saldrán unas ondas planas. Recuerde que el requisito para que una elipse sea tal es que la distancia neta desde uno de los focos hasta la curva y de nuevo hasta el otro foco sea constante.

5.4 Construya un diagrama de una lente esfera-elíptica positiva y de otra elíptico-esférica negativa mostrando los rayos y los frentes de onda a su paso por la lente. Haga lo mismo para una lente oval-esférica positiva.

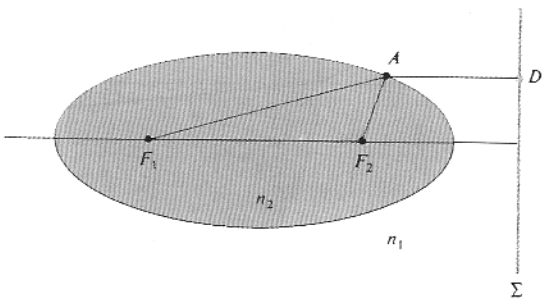


FIGURA P.5.3

5.5* Utilizando la figura P.5.5, la ley de Snell y el hecho de que en la región paraxial $\alpha = h/s_o$, $\varphi \approx h/R$, y $\beta \approx h/s_i$, deduzca la ecuación (5.8).

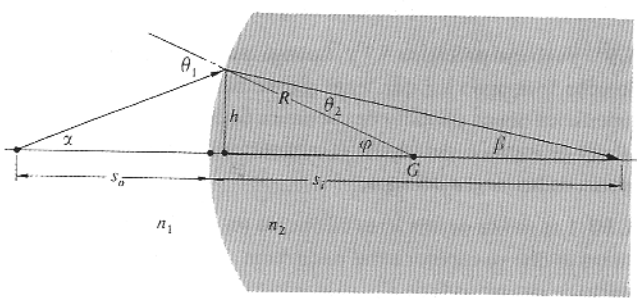


FIGURA P.5.5

5.6* Demuestre que en el campo paraxial, el aumento producido por una interfaz individual esférica entre dos medios continuos, como se demuestra en la figura P.5.6, viene dado por

$$M_T = -\frac{n_1 s_i}{n_2 s_o}$$

Utilice la aproximación de ángulo pequeño para la ley de Snell y aproxime los ángulos por sus tangentes.

5.7* Imagine una interfaz hemisférica cuyo radio de curvatura es de 5 cm que separa dos medios: aire a la izquierda y agua a la derecha. Un sapo con una altura de 3 cm se encuentra en el eje central, en el aire, frente a la interfaz convexa y a 3 cm de su vértice. ¿Dónde se

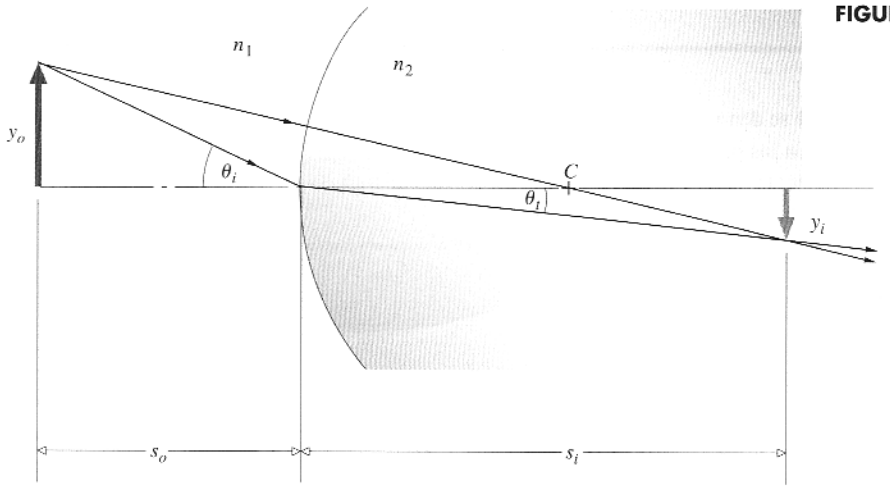


FIGURA P.5.6

verá su imagen en el agua? ¿Cómo de grande le parecerá a un pez en el agua? Utilice los resultados del problema anterior, si bien nuestro sapo fomenta la aproximación paraxial.

5.8 Localice la imagen de un objeto colocado a 1,2 m del vértice de una bola de cristal de gitana de 20 cm de diámetro (n = 1,5). Haga un gráfico (no de la gitana sino de los rayos).

5.9* Vuelva al problema 5.7 y suponga que cortamos el medio por la derecha formando así una lente gruesa biconvexa de agua; ambas superficies tienen un radio de curvatura de 5,00 cm. Si la lente mide 10 cm de espesor, determine el aumento total y todo lo que pueda acerca de la imagen del sapo.

5.10 Los radios de una lente bicóncava (n_l = 1,5) son de 20 y 10 cm mientras que su espesor axial mide 5 cm. Describa la imagen de un objeto de una pulgada de alto colocado a 8 cm del primer vértice. Utilice la ecuación de lentes delgadas para ver a qué distancia se halla la posición de la imagen final.

5.11 Demuestre que la separación mínima entre los puntos conjugados, objeto *real* e imagen, para una lente delgada positiva es $4f$.

5.12 Un objeto de 2 cm de alto se coloca a 5 cm a la derecha de una lente delgada positiva de 10 cm de distancia focal. Describa totalmente la imagen resultante usando *tanto* las ecuaciones gaussianas *como* las newtonianas.

5.13 Haga un gráfico aproximado de la ecuación gaussiana para las lentes, es decir, represente gráficamente s_i frente a s_o usando intervalos unitarios de f a lo largo de cada eje. (Obtenga ambos segmentos de la curva.)

5.14* Un haz de rayos paralelo de una fuente puntual muy lejana incide en una lente negativa delgada cuya distancia focal es de –50,0 cm. Los rayos forman un ángulo de 60° con el eje óptico de la lente. Localice la imagen de la fuente.

5.15 ¿Cuál debe ser la distancia focal de una lente negativa delgada a fin de que forme una imagen virtual a 50 cm de ella de una hormiga que se halla a una distancia de 100 cm? Dado que la hormiga está a la derecha de la lente, localice y describa su imagen.

5.16* Calcule la distancia focal en el aire de una lente biconvexa delgada (n_1 = 1,5) con radios de 20 y 40 cm. Localice y describa la imagen de un objeto a 40 cm de la lente.

5.17 Determine la distancia focal de una lente plano-cóncava (n_l = 1,5) con un radio de curvatura de 10 cm. ¿Cuál es su potencia en dioptrías?

5.18* Determine la distancia focal en el aire de una lente plano-convexa esférica y delgada con un radio de curvatura de 50 mm y un índice de 1,50. ¿Qué ocurriría, suponiendo que algo ocurra, a la distancia focal si la lente se colocara en una cisterna de agua?

5.19* Quisiéramos colocar un objeto a una distancia de 45 cm enfrente de una lente y que su imagen aparezca en una pantalla puesta a 90 cm detrás de la lente. ¿Cuál debe ser la distancia focal de la lente positiva adecuada?

5.20 El caballo de la figura 5.29 mide 2,25 m de alto y está colocado con su cara a 15 m del plano de la lente delgada cuya distancia focal es de 3 m.

(a) Determine la posición de la imagen de la nariz del equino.
(b) Describa la imagen detalladamente —clase, orientación y aumento.
(c) ¿Cuánto mide de alto la imagen?

(d) Si la cola del caballo está a 17,5 m de la lente ¿Cuánto mide la imagen del animal de la nariz a la cola?

5.21* Una vela alta 6 cm se halla a 10 cm de una lente cóncava delgada cuya distancia focal es de −30 cm. Determine la posición de la imagen y descríbala en detalle. Dibuje en diagrama de rayos apropiado.

5.22* La imagen proyectada por una lente equiconvexa ($n = 1{,}50$) de una rana con una altura de 5 cm y que se halla a 0,60 cm de una pantalla, tiene que medir 25 cm de alto. Calcule el radio que precisa la lente.

5.23* Un trozo fino de cable de 4 mm de largo se encuentra en un plano perpendicular al eje óptico a una distancia de 60 cm enfrente de una lente delgada. La imagen nítida del cable que se forma en la pantalla mide 2 mm de largo. ¿Cuál es la distancia focal de la lente? Al alejar la pantalla de la lente en 10 mm, la imagen se vuelve borrosa con un ancho de 0,80 mm. ¿Cuál es el diámetro de la lente? [*Sugerencia*: haga la imagen de una fuente puntual en el eje].

5.24 La distancia focal de una doble lente delgada convexa de vidrio cuyo índice es de 1,56, es de 10 cm mientras esté rodeada por aire. Al colocarla en el agua, cuyo índice es de 1,33, a 1 m detrás de un pez pequeño, ¿dónde se formará la imagen del pez?

5.25 Considere un sistema de proyección televisivo hecho en casa en el que se utiliza una lente positiva de gran tamaño para proyectar la imagen de la pantalla del televisor en una pared. La imagen proyectada se amplía tres veces y, si bien es débil, aparece bonita y clara. Si la distancia focal de la lente es de 60 cm, ¿cuál debería ser la distancia entre la pantalla y la pared? ¿Por qué recurrir a una lente de gran tamaño? ¿Cómo debería montarse el dispositivo con respecto a la lente?

5.26 Escriba una expresión para la distancia focal (f_{ag}) de una lente delgada sumergida en agua ($n_{ag} = \frac{4}{3}$) en términos de su distancia focal cuando está en aire (f_{aire}).

5.27* Observe los tres vectores **A**, **B** y **C** de la figura P.5.27, cada uno con una distancia de $0{,}10f$ donde f es la distancia focal de la lente delgada positiva. El plano formado por **A** y **B** se halla a una distancia de $1{,}10f$ de la lente. Describa la imagen de cada vector.

5.28* Una forma conveniente de medir la distancia focal de una lente positiva aprovecha el siguiente hecho. Si un par de puntos conjugados (S y P) objeto e imagen (real) están separados por una distancia $L > 4f$; habrá dos posiciones de la lente, separadas por una distancia d, para las cuales se obtiene el mismo par de conjugados. Demuestre que

$$f = \frac{L^2 - d^2}{4L}$$

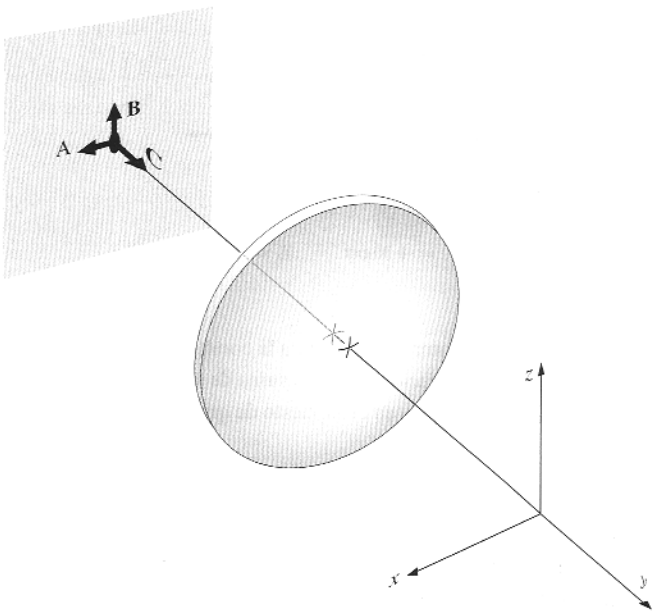


FIGURA P.5.27

Observe que esto evita llevar a cabo mediciones específicas desde el vértice que, por lo general, no son fáciles de realizar.

5.29*. Dos lentes positivas cuya distancia focal es de 0,30 cm y 0, 50 cm están separadas por una distancia de 0,20 m. Una pequeña mariposa descansa en el eje central a 0,50 m frente a la primera lente. Localice la imagen resultante con respecto a la segunda lente.

5.30 Al fabricar un doblete, se coloca una lente delgada equiconvexa L_1 en contacto íntimo con una lente negativa L_2, de tal forma que la distancia focal de esta combinación sea de 50 cm en aire. Si sus índices son de 1,50 y 1,55, respectivamente, y si la distancia focal de L_2 es de –50 cm, determine todos los radios de curvatura.

5.31 Verifique la ecuación (5.34) que proporciona M_T para una combinación de dos lentes delgadas.

5.32 Calcule la posición de la imagen y el aumento de un objeto a 30 cm del doblete frontal de la combinación de lentes delgadas de la figura P.5.32. Realice los cálculos encontrando el efecto de cada lente separadamente. Trace un diagrama de los rayos apropiados.

5.33* Dos lentes delgadas cuyas distancias focales son de +15,0 cm y –15,0 cm se hallan separadas por una distancia de 60,0 cm. Una página impresa se coloca a 25,0 cm delante de la lente positiva. Describa detalladamente la imagen de la impresión (es decir, suponiéndola paraxial).

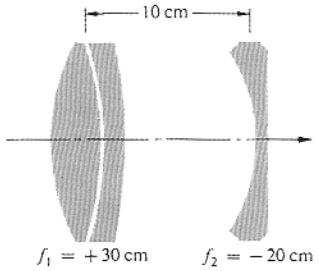


FIGURA P.5.32

5.34* Trace un diagrama de rayos para la combinación de dos lentes positivas donde su separación iguala la suma de sus distancias focales respectivas. Haga lo mismo en el supuesto de que una de las lentes sea negativa.

5.35 Trace de nuevo el diagrama de rayos para un microscopio compuesto (figura 5.111) pero trate esta vez la imagen intermedia como si fuera un objeto real. Este método debería resultar algo más simple.

5.36* Considere una lente positiva delgada L_1 y recurriendo a un diagrama de rayos, demuestre que si una segunda lente L_2 se colocara en el punto focal de L_1, el aumento no cambia. Es una buena razón para llevar gafas con lentes diferentes, a la distancia correcta del ojo.

5.37* Las figuras P.5.37*a* y P.5.37*b* se han extraído de un texto de introducción a la física. ¿Qué error se detecta en ellas?

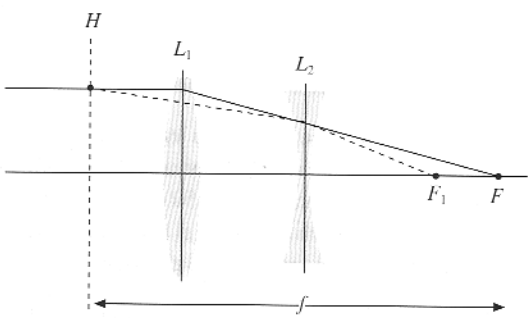


FIGURA P.5.37 *a*

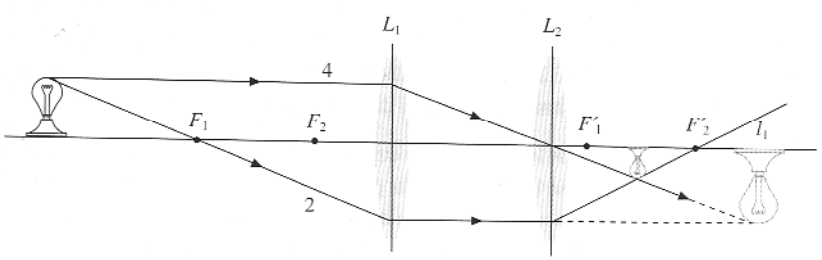


FIGURA P.5.37*b*

5.38 Considere el caso de dos lentes positivas delgadas L_1 y L_2 separadas por una distancia de 5 cm, cuyos diámetros son de 6 cm y 4 cm respectivamente y sus distancias focales son $f_1 = 9$ cm y $f_2 = 3$ cm. Si se coloca un diafragma con diámetro de 1 cm entre ellas, a 2 cm de L_2, encuentre: (a) el diafragma de apertura y (b) las posiciones y los tamaños de las pupilas para un punto axial, S, puesto a 12 cm delante de (a la izquierda de) L_1.

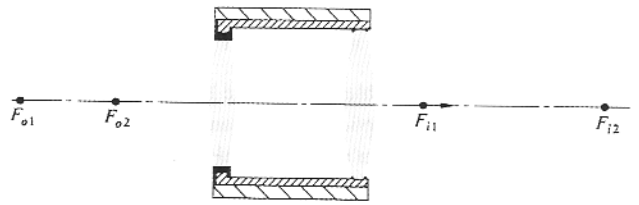


FIGURA P.5.39

5.39 Haga un esquema localizando aproximadamente el diafragma de apertura y las pupilas de entrada y salida para la lente de la figura P.5.39.

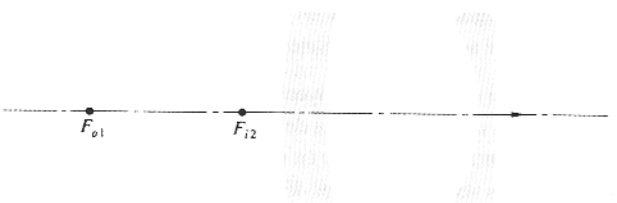
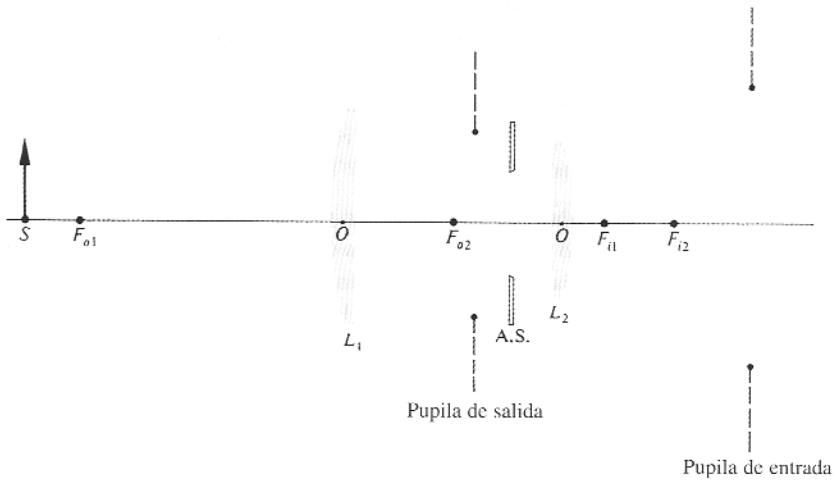


FIGURA P.5.40

5.40 Haga un esquema localizando aproximadamente el diafragma de apertura y las pupilas de entrada y salida para la lente de la figura P.5.40 suponiendo que el punto objeto está detrás (a la izquierda de) de F_{o1}.

5.41 La figura P.5.41 muestra un sistema de lentes, un objeto y las pupilas apropiadas. Localice la imagen con un diagrama.

FIGURA P.5.41



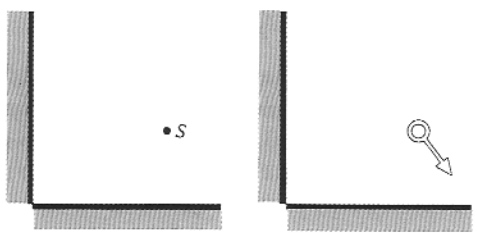


FIGURA P.5.42*a* **FIGURA P.5.42*b***

5.42 Trace un diagrama de rayos localizando las imágenes de una fuente puntual formadas por un par de espejos a 90° (figura P.5.42*a*). Ahora, realice un diagrama de rayos localizando las imágenes de la flecha que se muestra en la figura P.5.42*b*.

5.43 Examine la pintura de Velázquez *Venus en el Espejo* (figura P.5.43). ¿Está Venus viéndose a sí misma en el espejo? Explique.

5.44 En el cuadro *El Bar del Folies-Bergère* de Manet (figura P.5.44) se representa a una muchacha que está parada delante de un gran espejo plano en el que se refleja su espalda y un hombre elegantemente vestido, con quien ella parece estar hablando. Parece que Manet intentó dar la misteriosa sensación que el observador está para-

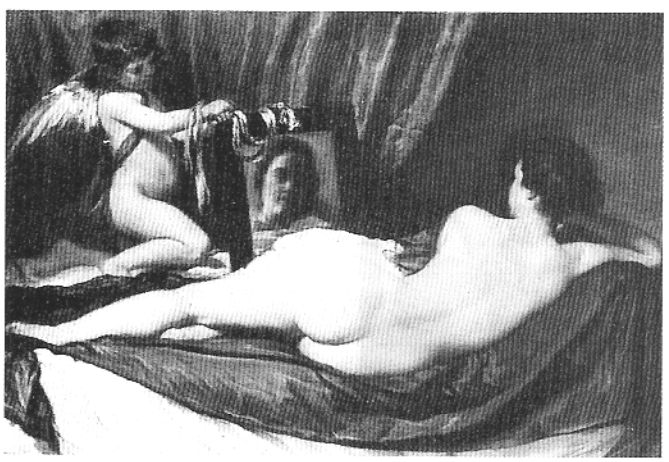


FIGURA P.5.43 *Venus en el espejo* de Diego Rodríguez de Silva y Velázquez. (Reproducción cedida por The Trustees, The National Gallery, Londres.)

FIGURA P.5.44 *El bar en el Folies Bergère* de Edouard Manet. (Courtauld Institute Galleries, Londres. Colección Courtauld.)

do en el lugar del caballero. De acuerdo con las leyes de la óptica geométrica, ¿cuál es el error?

5.45 Demuestre que la ecuación (5.48) para una superficie esférica se puede aplicar igualmente a un espejo plano.

5.46 Localice la imagen de un clip para papel a 100 cm de un espejo esférico convexo cuyo radio de curvatura es de 80 cm.

5.47* Imagine estar parado a una distancia de 5 pies de una bola de latón de 1 pie de diámetro hacia la cual está mirando directamente, que se halla delante de una casa de empeños. Describa la imagen que vería en la bola.

5.48 Un espejo esférico cóncavo forma la imagen de una rosa roja en una pantalla a una distancia de 100 cm. Si la rosa dista 25 cm del espejo, determine su radio de curvatura.

5.49 De la configuración de la imagen determine la forma del espejo que cuelga de la pared posterior en la pintura de Van Eyck *John Arnolfini y su esposa* (figura P.5.49).

5.50* Hay varias clases de retrorreflectores en el mercado, de las cuales una se compone de esferas transparentes cuya partes posteriores están plateadas. La luz se refracta en la superficie anterior, se enfoca en la superficie posterior siendo sucesivamente reflejada nuevamente en la dirección por la que llegó. Determine el índice de refracción necesario de las esferas suponiendo que la luz incidente esté colimada.

5.51* Diseñe el ojo de un robot con un espejo esférico cóncavo de tal manera que la imagen de un objeto con una altura de 1 m y colocado a una distancia de 10 m llene su detector fotosensible cuadrado de 1 cm (móvil para posibilitar la operación de enfoque). ¿Dónde debería estar ubicado dicho detector con respecto al espejo? ¿Cuál debería ser la distancia focal del espejo? Trace un diagrama de rayos.

5.52 Dibuje un pequeño espejo para dentista para colgar al final de un mango y que se utilizará para examinar la boca de algún paciente. Los requisitos son: (1) la imagen vista por el dentista tiene que estar derecha, (2) a una distancia de 1,5 cm de un diente, el espejo tendrá que reflejar una imagen dos veces el tamaño real.

5.53 Un objeto está posicionado a una distancia s_o de un espejo esférico de radio R. Demuestre que la imagen resultante se aumentará en una cantidad

$$M_T = \frac{R}{2s_o + R}$$

5.54* Un dispositivo que se utiliza para medir el radio de curvatura de la córnea del ojo se denomina queratómetro. Esta información resultará útil al adaptar lentes de contacto. En realidad, un objeto iluminado se coloca a una distancia conocida del ojo, observándose la imagen que se refleja de la córnea. Dicho dispositivo permite al operador medir el tamaño de la imagen virtual. Si el aumento resulta ser de 0,037× al establecer la distancia del objeto de 100 mm, ¿cuál es el radio de la curvatura?

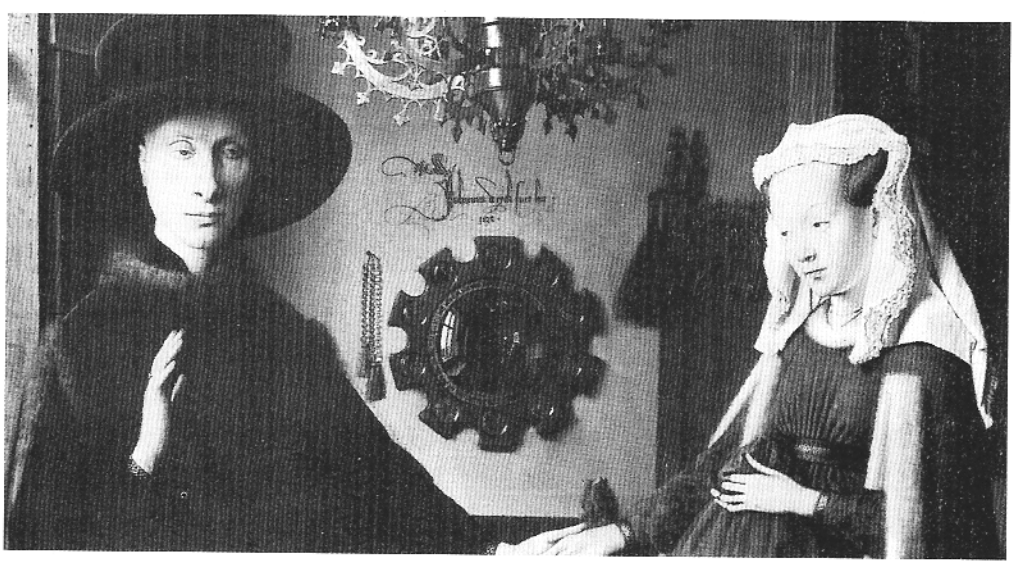


FIGURA P.5.49 *El matrimonio Arnolfini* de Jan Van Eyck. National Gallery, Londres. (Reproducción cedida por The Trustees, The National Gallery, Londres.)

5.55* Considerando la operación de un espejo esférico, demuestre que las posiciones del objeto y de la imagen son proporcionadas por

$$s_o = f(M_T - 1)/M_T \quad \text{y} \quad s_i = -f(M_T - 1)$$

5.56 Un hombre cuyo rostro dista 25 cm de una cuchara sopera que se mira en el cuenco de la misma, ve su imagen con un aumento de –0,064. Determine el radio de curvatura de la cuchara.

5.57* En un parque de atracciones un espejo esférico convexo y vertical se halla delante de un espejo plano a una distancia de 10 m. Una muchacha de 1 m de altura se encuentra a mitad de camino entre los dos, nota que su imagen reflejada en el espejo plano es dos veces más alta que la del espejo esférico. Dicho de otro modo, el ángulo subtendido en el observador por la imagen del espejo plano es dos veces el de la imagen del espejo esférico. ¿Cuál es la distancia focal de éste?

5.58* Un «teleobjetivo» fotográfico hecho en casa (figura P.5.58) consta de dos espejos esféricos. El radio de curvatura del primero es de 2 m y de 60 cm el del segundo. ¿A qué distancia del espejo más pequeño debería colocarse el plano fotográfico si el objeto es una estrella? ¿Cuál es la distancia focal efectiva del sistema?

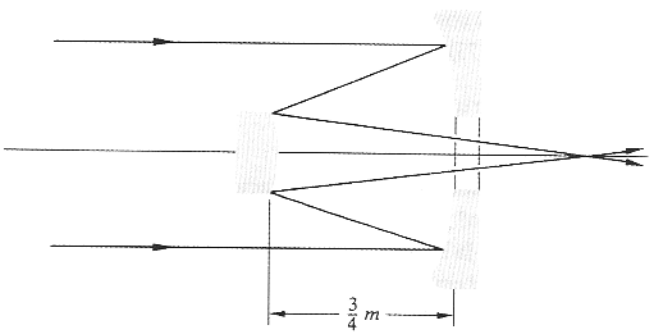


FIGURA P.5.58

5.59* Suponga que tiene un espejo esférico cóncavo cuya distancia focal es de 10 cm. ¿A qué distancia debería colocarse un objeto para que su imagen sea derecha y una vez y media más grande? Confronte con la tabla 5.5.

5.60 Describa la imagen que resultaría para un objeto de 3 pulgadas de alto colocado a 20 cm de un espejo esférico cóncavo para afeitarse cuyo radio de curvatura es de –60 cm.

5.61 Gire 90° el prisma de Duve de la figura 5.70, alrededor de un eje a lo largo de la dirección de los rayos. Haga un esquema de la nueva configuración y determine el ángulo de rotación de la imagen.

5.62 Determine la apertura numérica de una única fibra óptica con recubrimiento recubierta sabiendo que el índice del núcleo y del revestimiento es de 1,62 y 1,52 respectivamente. ¿Cuál es el máximo ángulo de aceptación cuando se sumerge en el aire? ¿Qué le pasaría a un rayo incidente a, digamos, 45°?

5.63 Dada una fibra de sílice fundida con una atenuación de 0,2 dB/km, ¿hasta qué distancia podrá viajar una señal por ella antes de que el nivel de potencia se reduzca a la mitad?

5.64 El número de modos en una fibra de salto de índice viene dado por la expresión

$$N_m \simeq \tfrac{1}{2}(\pi D \, \mathrm{NA}/\lambda_0)^2$$

Dada una fibra cuyo diámetro del núcleo es de 50 μm y $n_c = 1{,}482$ y $n_f = 1{,}500$, calcule N_m cuando la fibra está iluminada por un diodo electro-luminiscente cuya longitud central de emisión es de 0,85 μm.

5.65* Calcule el retraso intermodal (en ns/km) para una fibra de salto de índice cuyos revestimiento y núcleo tienen un índice de 1,485 y 1,500, respectivamente.

5.66 Usando la información sobre el ojo de la sección 5.7.1, calcule el tamaño aproximado (en milímetros) de la imagen de la Luna que se proyecta sobre la retina. El diámetro de la Luna es de 2.160 millas y ésta se halla a unas 230.000 millas de aquí aunque esto, por supuesto, varía.

5.67* La figura P.5.67 muestra una disposición en la que el haz se desvía en un ángulo constante σ, igual al doble del ángulo β entre los espejos planos, independientemente del ángulo de incidencia. Demuestre que efectivamente las cosas son así.

5.68 Un objeto a 20 m del objetivo ($f_o = 4$ m) de un telescopio astronómico tiene su imagen a 30 cm del ocular ($f_o = 60$ cm). Determine el aumento lineal total del sistema.

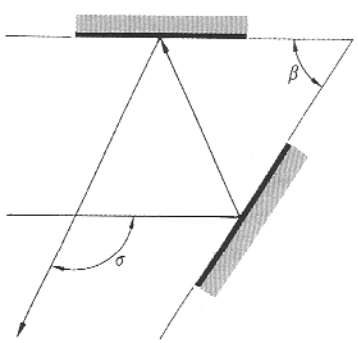


FIGURA P.5.67

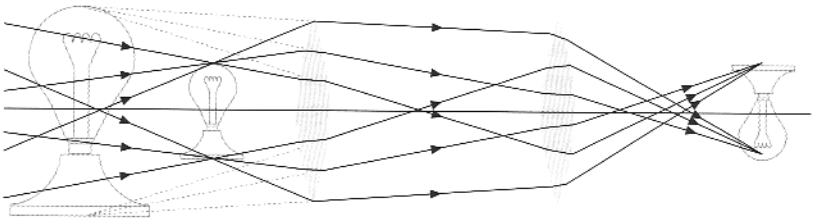


FIGURA P.5.69

5.69* La figura P.5.69, que pretende enseñar un sistema enderezador de lentes, está tomada de un viejo texto de óptica ya agotado. ¿Cuál es el error?

5.70* La figura P.5.70 muestra un pequeño agujero en una pantalla opaca que está siendo utilizada por algo práctico. Explique lo que está ocurriendo y por qué funciona. Inténtelo.

5.71* Si la foto de un carrusel está perfectamente expuesta, pero borrosa, a $\frac{1}{30}$ s y $f/11$, ¿cuál debe ser la posición del diafragma si la velocidad del obturador se eleva a $\frac{1}{120}$ s para «detener» el movimiento?

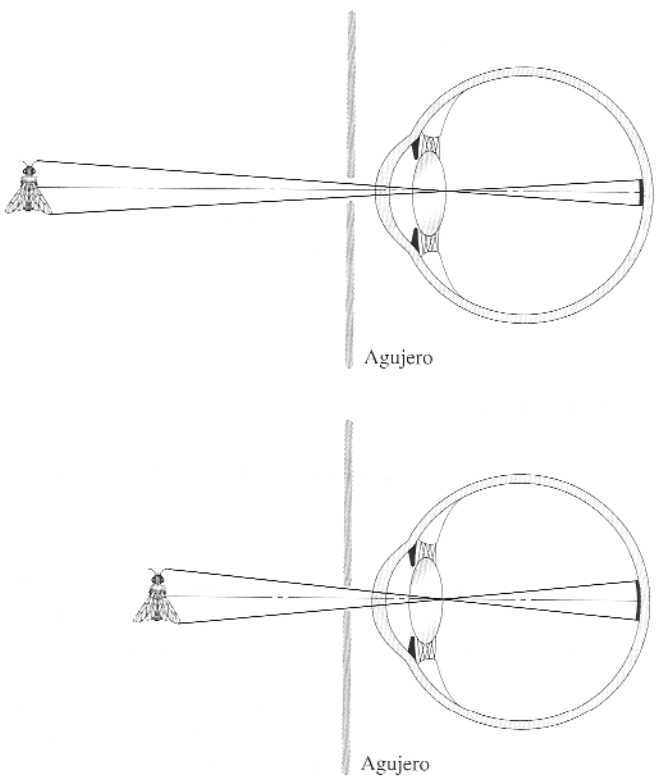


FIGURA P.5.70

5.72 El campo de visión de un telescopio astronómico simple de dos elementos está limitado por el tamaño del cristalino del ojo. Haga un esquema de rayos mostrando el viñetado que aparece.

5.73 Una *lente de campo,* como regla, es una lente positiva colocada en (o cerca) del plano de la imagen intermedia a fin de captar los rayos que de otra manera no pasarían por la siguiente lente del sistema. En realidad, aumenta el campo de visión sin modificar la potencia del sistema. Trace de nuevo el diagrama de rayos del problema anterior para incluir una lente de campo. Demuestre que a raíz de esto, la emergencia pupilar se reduce.

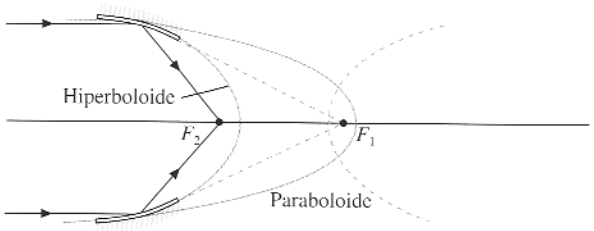
5.74* Describa íntegramente la imagen resultante de un insecto que está parado en el vértice de una lente delgada positiva. ¿Qué relación directa se establece con el funcionamiento de una lente de campo? (Véase problema 5.73)

5.75* Se establece que el punto próximo de un paciente es de 50m cm. Si el ojo mide unos 2 cm de largo

(a) ¿Cuál es la potencia del sistema refractor al enfocarlo hacia un objeto al infinito? ¿Y cuando se enfoca a 50 cm?
(b) ¿Cuál debe ser la acomodación para poder ver un objeto a una distancia de 150 cm?
(c) ¿Cuál debería ser la potencia del ojo para ver claramente un objeto a una distancia estándar del punto próximo de 25 cm?
(d) ¿Cuanta potencia debería añadirse al sistema de visión del paciente mediante una lente correctora?

5.76* Un optometrista descubre que el punto próximo de una persona hipermétrope es de 125 cm. ¿Qué potencia deberían tener las lentillas para que desplacen eficazmente ese punto hacia el interior a una distancia más factible de 25 cm desde la cual poder leer cómodamente un libro? Utilice el hecho de que si la imagen del objeto se forma en el punto próximo, puede verse claramente.

5.77 Una persona hipermétrope puede ver montañas muy distantes con ojos relajados llevando unas lentillas de +3,2 –D. Recete las lentes para unas gafas que llevadas a 17 mm delante de la córnea dieran el mismo resultado. Localice y compare el punto lejano en ambos casos.



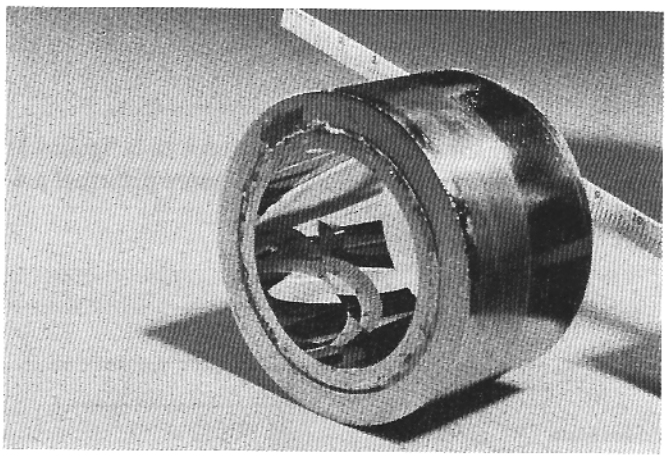


FIGURA P.5.80 a,b

5.78* Un joyero está examinando un diamante de 5 mm de diámetro con una lupa cuya distancia focal es de 25,4 mm.

(a) Determine el aumento angular máximo de la lupa.
(b) ¿Cómo de grande aparece la piedra bajo la lupa?
(c) ¿Cuál es el ángulo subtendido por el diamante en el ojo desnudo cuando se mantiene en el punto próximo?
(d) ¿Qué ángulo subtiende en el ojo desnudo?

5.79 Suponga que desea construir un microscopio (a utilizar con ojos relajados) con dos lentes positivas cuyas distancias focales son ambas de 25 mm. Suponiendo que el objeto esté colocado a 27 mm del objetivo,

(a) ¿A qué distancia deberían colocarse las lentes?
(b) ¿Qué aumento se prevería?

5.80* La figura P.5.80 ilustra un sistema de enfoque de rayos X de incidencia oblicua creado en 1952 por Hans Wolter. ¿Cómo funciona? Los microscopios que llevan esta clase de sistema se han utilizado para fotografiar, con rayos X, la implosión de pastillas de combustibles en la investigación sobre la fusión láser. Dispositivos ópticos de rayos X similares se han utilizado también en telescopios astronómicos (figura 3.47).

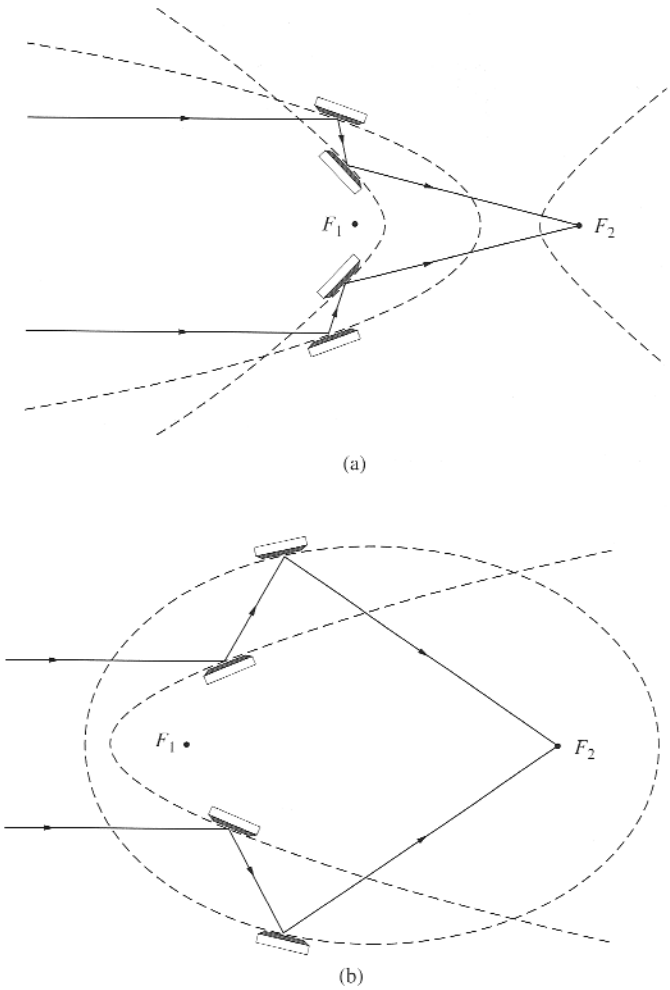


FIGURA P.5.81 *a,b*

5.81* Los dos sistemas de espejos asféricos de incidencia oblicua que se ilustran en la figura P.5.81 han sido creados para enfocar los rayos X. Explique el funcionamiento de cada uno: determine las formas de los espejos, analice las posiciones de sus focos, etc.

5.82* El telescopio espacial orbitante Hubble tiene un espejo primario de 2,4 m que supongamos esté limitado por la difracción. Imaginemos que quisiéramos utilizarlo para leer las letras colocadas en un lado de un satélite ruso distante. Supongamos que una resolución de 1 cm en el satélite vaya bien, ¿a qué distancia podría hallarse del HST?

6 Más sobre óptica geométrica

El capítulo anterior estaba relacionado, en su mayor parte, con la teoría paraxial aplicada a sistemas de lentes esféricas delgadas. Las dos aproximaciones más destacadas fueron, obviamente, que existían las lentes *delgadas* y que la teoría de primer orden era suficiente para explicarlas. Durante el diseño de un sistema óptico preciso, ninguna de estas dos hipótesis resulta sostenible, pero, consideradas en su conjunto, constituyen la base para una solución bastante aproximada. En este capítulo avanzaremos en nuestro estudio al examinar las lentes gruesas y las aberraciones, y aún así, no haremos otra cosa que comenzar. El advenimiento del diseño de lentes por ordenador ha hecho necesario un cambio en el orden de prioridades (¡quién necesita hacer ahora lo que un ordenador puede hacer mejor!) Por otro lado, la gran riqueza de material desarrollado a lo largo de siglos requiere un pequeño pero juicioso recorte para evitar un exceso de pedantería.

6.1 Lentes gruesas y sistemas de lentes

La figura 6.1 describe una lente gruesa, es decir, una cuyo espesor en ningún caso es despreciable. Como veremos más adelante, también podemos plantearlo de forma más genérica como un sistema óptico, y con ello concebir la posibilidad de que esté formada por varias lentes simples, y no solamente por una. Los puntos focales primero y segundo, o si se quiere, los focos objeto e imagen, F_o y F_i, pueden medirse oportunamente desde los dos vértices externos. En ese caso tendremos las conocidas distancia focal frontal y distancia focal posterior, indicadas como d.f.f y d.f.p. Al prolongar los rayos de entrada y salida, éstos se cruzarán en algunos puntos y sus intersecciones formarán una superficie curva que puede estar dentro o fuera de la lente. La superficie, aproximadamente un plano en la región paraxial, se denomina **plano principal** (véase sección 6.3.1). Los puntos donde los planos principales, primario y secundario (mostrados en la figura 6.1) cruzan el eje óptico, son conocidos como **punto principal pri-**

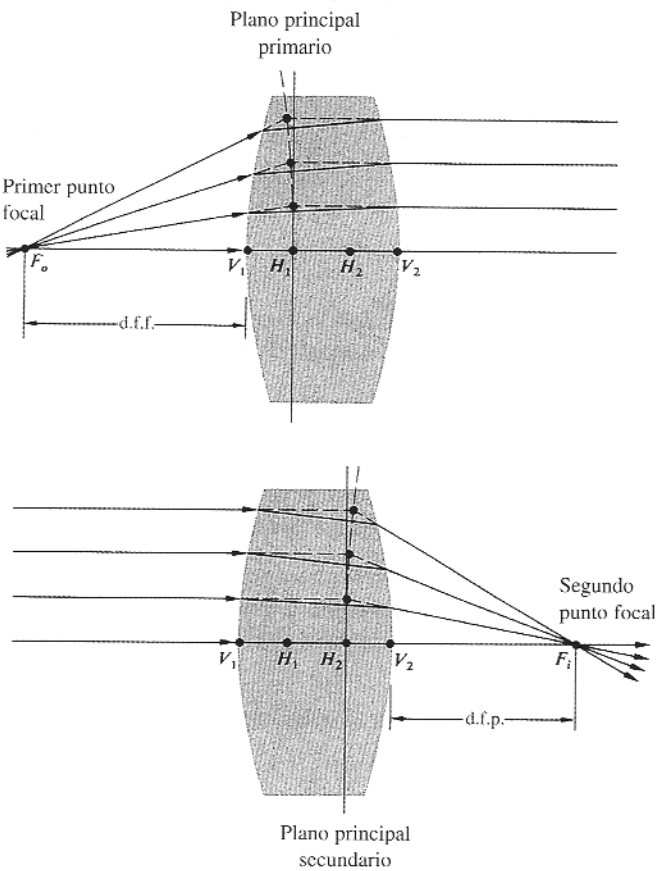


FIGURA 6.1 Lente gruesa.

mero y segundo, H_1 y H_2 respectivamente. Estos puntos constituyen un conjunto de referencias muy útil, a partir del cual es posible medir varios parámetros del sistema. Ya vimos anteriormente (figura 5.19, pág. 164) que un rayo atravesando una lente por su centro óptico emerge paralelo a su dirección de incidencia. Extendiendo ambos rayos de entrada y salida hasta cruzar el eje óptico, se localizan los llamados **puntos nodales**, N_1 y N_2 en la figura 6.2. ***Cuando la lente está rodeada a ambos lados por el mismo medio, generalmente aire, los puntos nodales y principales coinciden***. Los seis puntos —dos focales, dos principales y dos nodales— constituyen **los puntos cardinales** del sistema. Tal y como se muestra en la figura 6.3, los planos principales pueden encontrarse completamente fuera del sistema de lentes. En este caso, cada lente mostrada, aunque esté configurada de forma diferente, tiene la misma potencia. Obsérvese que en la lente simétrica los planos principales están, por lógica, simétricamente localizados. En el caso de las lentes plano-cóncavas o plano-convexas, un plano principal es tangente a la superficie curva, como cabe esperar de acuerdo con la definición (aplicada a la zona paraxial). Para una lente del tipo menisco, por el contrario, los puntos principales pueden estar fuera. Es frecuente hablar de esta sucesión de formas de igual potencia como ejemplo de *doblamiento de lentes.* Una regla de oro para lentes de vidrio normales en el aire es que la separación $\overline{H_1H_2}$ es aproximadamente igual a una tercera parte del grueso de la lente $\overline{V_1V_2}$.

Podemos considerar la lente gruesa como aquella formada por dos superficies refractoras separadas por una distancia d_l entre sus vértices, tal y como se mostraba en la sección 5.2.3, en la que dedujimos la ecuación para una lente delgada. Tras

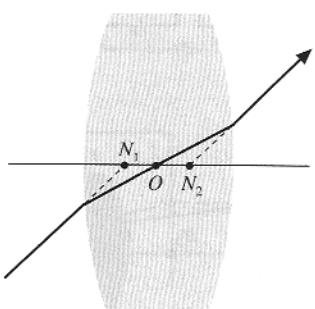


FIGURA 6.2 Puntos nodales.

[1] Para la deducción completa, véase Morgan, *Introduction to Geometric and Physical Optics*, pág. 57. En la sección 6.2.1, deduciremos gran parte de este material utilizando matrices.

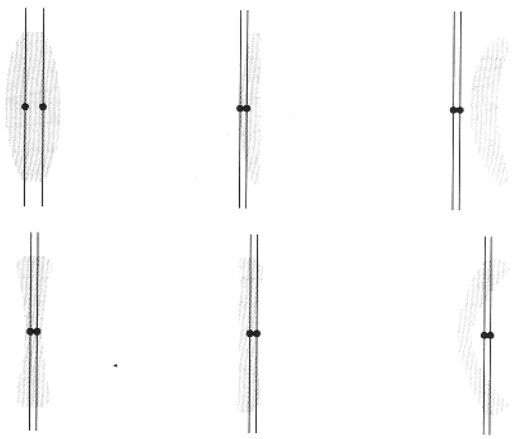


FIGURA 6.3 Doblamientos de una lente.

un laborioso trabajo algebraico [1], donde d_l no es despreciable, llegamos a un interesante resultado para la lente gruesa inmersa en aire. La expresión para los puntos conjugados es posible utilizar, una vez más, la fórmula gaussiana

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \tag{6.1}$$

siempre y cuando estas distancias objeto e imagen estén medidas desde los planos principales primero y segundo, respectivamente. Es más, la *distancia focal efectiva,* o, simplemente la *distancia focal, f,* también puede calcularse con respecto a los planos principales, de acuerdo con la siguiente fórmula

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{n_l R_1 R_2}\right] \tag{6.2}$$

Los planos principales están localizados a unas distancias $\overline{V_1H_1} = h_1$ y $\overline{V_2H_2} = h_2$, *distancias que serán positivas cuando los planos recaen a la derecha de sus respectivos vértices.* La figura 6.4 ilustra la disposición de las diversas cantidades. Los valores de h_1 y h_2 vienen dados por (problema 6.18)

$$h_1 = -\frac{f(n_l - 1)d_l}{R_2 n_l} \tag{6.3}$$

y

$$h_2 = -\frac{f(n_l - 1)d_l}{R_1 n_l} \tag{6.4}$$

También resulta válida la ecuación newtoniana de la fórmula de las lentes, tal y como evidencian los triángulos semejantes de la figura 6.4. Así pues,

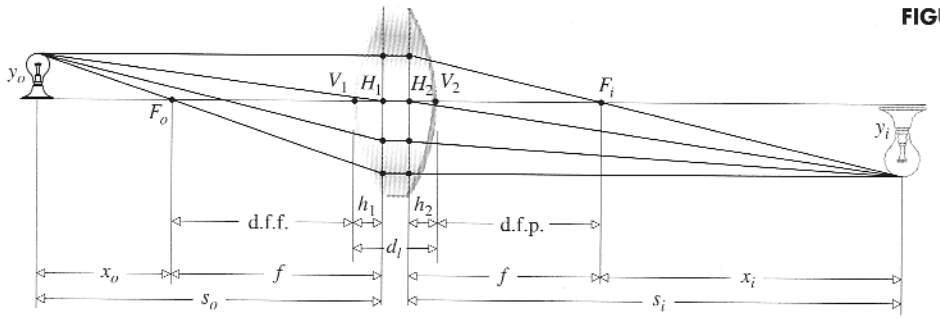


FIGURA 6.4 Geometría de una lente gruesa.

$$x_o x_i = f^2 \tag{6.5}$$

siempre que f tenga esta interpretación. Y de los mismos triángulos

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{x_i}{f} = -\frac{f}{x_o} \tag{6.6}$$

Obviamente, si $d_l \to 0$, las ecuaciones (6.1), (6.2) y (6.5) se transformarán en las expresiones de lentes delgadas de las ecuación (5.17), (5.16) y (5.23). Como ejemplo numérico, tratemos de encontrar la distancia imagen para un objeto situado a 30 cm del vértice de una lente biconvexa que posea unos radios de curvatura de 20 y 40 cm, un espesor de 1 cm y un índice de refracción igual a 1,5. De la ecuación (6.2), la distancia focal (en centímetros) es

$$\frac{1}{f} = (1{,}5 - 1)\left[\frac{1}{20} - \frac{1}{-40} + \frac{(1{,}5-1)1}{1{,}5(20)(-40)}\right]$$

$f = 26{,}8$ cm. Por otro lado,

$$h_1 = -\frac{26{,}8(0{,}50)1}{-40(1{,}5)} = +0{,}22 \text{ cm}$$

y

$$h_2 = -\frac{26{,}8(0{,}5)1}{20(1{,}5)} = -0{,}44 \text{ cm}$$

lo cual indica que H_1 está a la derecha de V_1, y H_2 está a la izquierda de V_2. Finalmente, $s_o = 30 + 0{,}22$, de donde

$$\frac{1}{30{,}2} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{26{,}8}$$

y $s_i = 238$ cm, medido desde H_2.

Los puntos principales son conjugados entre sí. En otras palabras, dado que $f = s_o s_i/(s_o + s_i)$, cuando $s_o = 0$, s_i será cero porque f es finita y por lo tanto un punto en H_1 tendrá su imagen en H_2. Asimismo, un objeto en el primer plano principal ($x_o = -f$) tendrá su imagen en el segundo plano principal ($x_i = -f$) con un aumento unidad ($M_T = 1$). Este es el motivo por el cual a veces se les denominan *planos unidad.* Cualquier rayo dirigido hacia un punto situado sobre el primer plano principal emergerá de la lente como si fuese originado en su punto correspondiente (a la misma distancia por encima o por debajo del eje) sobre el segundo plano principal.

Supongamos ahora que tenemos una lente compuesta que consta de dos lentes gruesas L_1 y L_2 (figura 6.5). Sean s_{o1}, s_{i1}, y f_1 y s_{o2}, s_{i2}, y f_2, las distancias objeto e imagen y las distancias focales de las dos lentes, todas ellas medidas con respecto

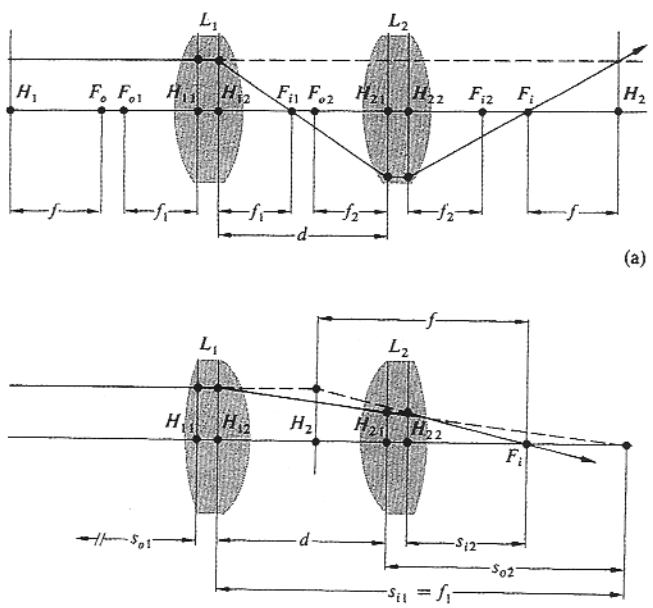


FIGURA 6.5 Lente gruesa compuesta.

a sus propios planos principales. Sabemos que el aumento lateral es el producto de los aumentos laterales de cada una de las lentes, es decir,

$$M_T = \left(-\frac{s_{i1}}{s_{o1}}\right)\left(-\frac{s_{i2}}{s_{o2}}\right) = -\frac{s_i}{s_o} \tag{6.7}$$

donde s_o y s_i son las distancias objeto e imagen para la combinación completa. Cuando s_o es igual a infinito $s_o = s_{o1}$, $s_{i1} = f_1$, $s_{o2} = -(s_{i1} - d)$, y $s_i = f$. Dado que

$$\frac{1}{s_{o2}} + \frac{1}{s_{i2}} = \frac{1}{f_2}$$

se deduce (problema 6.1), después de haber sustituido en la ecuación (6.7) que

$$-\frac{f_1 s_{i2}}{s_{o2}} = f$$

o
$$f = -\frac{f_1}{s_{o2}}\left(\frac{s_{o2} f_2}{s_{o2} - f_2}\right) = \frac{f_1 f_2}{s_{i1} - d + f_2}$$

Por lo tanto
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{6.8}$$

Esta es la distancia focal efectiva de la combinación de dos lentes gruesas, donde todas las distancias se miden respecto de los planos principales. Para un sistema global, estos planos pueden hallarse utilizando las expresiones

$$\overline{H_{11}H_1} = \frac{fd}{f_2} \tag{6.9}$$

y
$$\overline{H_{22}H_2} = \frac{fd}{f_1} \tag{6.10}$$

expresiones que no deduciremos aquí (véase sección 6.2.1). Lo que hemos hecho ha sido hallar una representación de la de lente compuesta equivalente a la lente gruesa. Obsérvese que si las lentes componentes son delgadas, los pares de puntos H_{11}, H_{12}, y H_{21}, H_{22} se unen y d se convierte en la separación entre los centros de cada una de las lentes, tal y como se representa en la sección 5.2.3. Por ejemplo, volviendo a las lentes delgadas de la figura 5.34 donde $f_1 = -30$ cm, $f_2 = 20$ cm, y $d = 10$ cm, como en la figura 6.6,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-30} + \frac{1}{20} - \frac{10}{(-30)(20)}$$

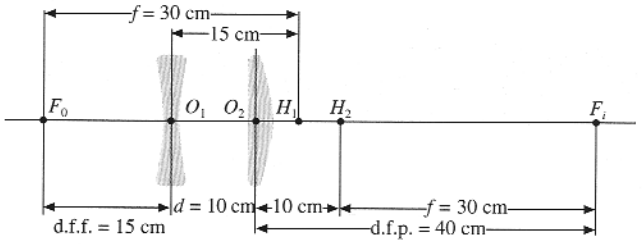


FIGURA 6.6 Lente compuesta.

por lo que $f = 30$ cm. Vimos anteriormente (pág. 170) que la d.f.p. = 40 cm y d.f.f. = 15 cm. Por otro lado, al tratarse de lentes delgadas, las ecuaciones (6.9) y (6.10) pueden escribirse como

$$\overline{O_1H_1} = \frac{30(10)}{20} = +15 \text{ cm}$$

y
$$\overline{O_2H_2} = -\frac{30(10)}{-30} = +10 \text{ cm}$$

Ambas son positivas y por lo tanto los planos estarán a la derecha de O_1 y O_2, respectivamente. Estos dos valores calculados coinciden con los resultados descritos en el diagrama. Si la luz entra por la derecha, el sistema se asemejará a un teleobjetivo que habrá de colocarse a 15 cm del plano de la película y sin embargo tendrá una distancia focal efectiva de 30 cm.

El mismo método puede ser aplicado a tres, cuatro o más lentes. En consecuencia

$$f = f_1\left(-\frac{s_{i2}}{s_{o2}}\right)\left(-\frac{s_{i3}}{s_{o3}}\right)\cdots \tag{6.11}$$

Del mismo modo, podemos considerar que las dos primeras lentes se combinan para formar una sola lente gruesa de la que calculamos sus puntos principales y su distancia focal. El resultado obtenido se combinará a su vez con una tercera lente y así sucesivamente con el resto de los elementos.

6.2 Trazado analítico de rayos

El trazado de rayos es, indudablemente, una de las principales herramientas para el diseñador óptico. Tras formular un sistema óptico sobre el papel, es matemáticamente posible enviar rayos a través del sistema y evaluar su comportamiento. Cualquier rayo, paraxial o de cualquier otra clase, puede ser trazado con exactitud mediante este sistema. Desde el punto de

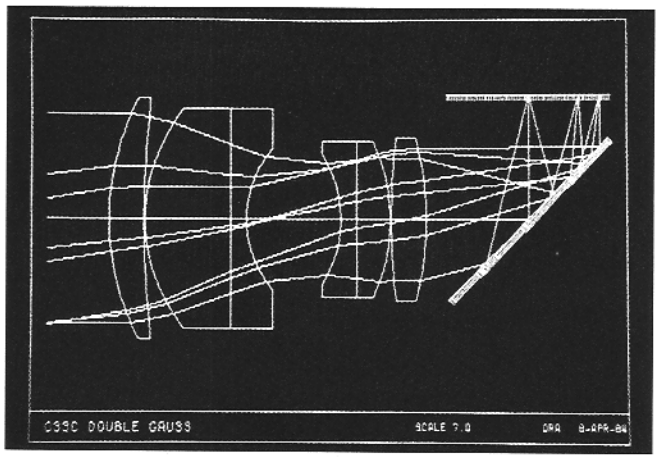


FIGURA 6.7 Trazado de rayos por ordenador. (Foto cedida por cortesía de Optical Research Associates, Pasadena, California).

vista conceptual, se trata simplemente de aplicar la ecuación de refracción

$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) \qquad [4.6]$$

a la primera superficie, localizar el punto donde el rayo transmitido incide sobre la segunda superficie, y aplicar la ecuación de refracción una vez más y así sucesivamente a través de todo el sistema. Durante algún tiempo únicamente se trazaban ***rayos meridionales*** (aquellos contenidos en el plano del eje óptico) porque los rayos no meridionales u ***oblicuos*** (aquellos que no cortan el eje) son mucho más difíciles de manejar matemáticamente. Para un ordenador, la diferencia no es importante (figura 6.7), ya que simplemente le tomará un poco más de tiempo realizar el trazado. Es decir, mientras que usando una calculadora, a una persona con experiencia le llevaría probablemente de 10 a 15 minutos hacer el trazado de un solo rayo oblicuo a través de una sola superficie, un ordenador necesitaría alrededor de una milésima de segundo para efectuar la misma tarea y, lo que no es menos importante, estaría lista para el siguiente cálculo sin haber perdido entusiasmo.

El caso más simple para ejemplificar el proceso del trazado de un rayo es el de un rayo paraxial y meridional que atraviesa una lente gruesa esférica. Al aplicar la ley de Snell para el punto P_1 de la figura 6.8, se obtiene

$$n_{i1}\theta_{i1} = n_{t1}\theta_{t1}$$

o

$$n_{i1}(\alpha_{i1} + \alpha_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + \alpha_1)$$

Dado que $\alpha_1 = y_1/R_1$, esto se transforma en

$$n_{i1}(\alpha_{i1} + y_1/R_1) = n_{t1}(\alpha_{t1} + y_1/R_1)$$

Reorganizando términos, tenemos

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \left(\frac{n_{t1} - n_{i1}}{R_1}\right) y_1$$

pero como vimos en la sección 5.7.2, la potencia de una sola superficie refractora es

$$\mathcal{D}_1 = \frac{(n_{t1} - n_{i1})}{R_1}$$

Por consiguiente

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \mathcal{D}_1 y_1 \qquad (6.12)$$

Este resultado se conoce normalmente como **ecuación de refracción** y pertenece a la primera interfaz. Tras experimen-

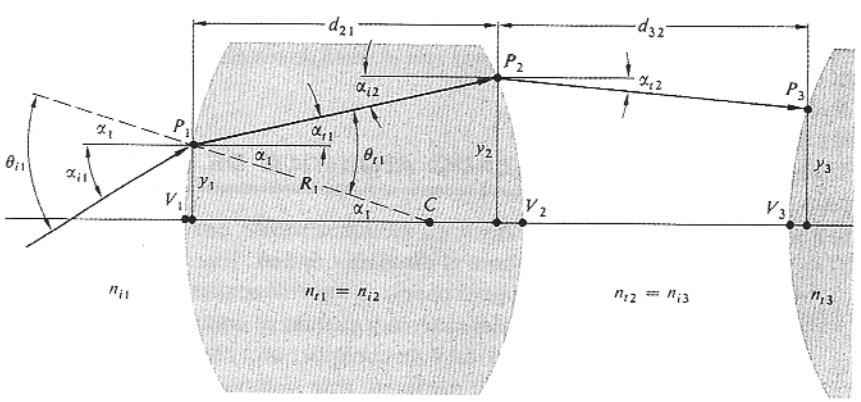


FIGURA 6.8 Geometría de rayo.

tar una refracción en el punto P_1, el rayo avanza a través del medio homogéneo de la lente hasta llegar al punto P_2 sobre la segunda interfaz. La altura de P_2 podría expresarse como

$$y_2 = y_1 + d_{21}\alpha_{t1} \tag{6.13}$$

tomando como base que la tan $\alpha_{t1} \approx \alpha_{t1}$. Esto se conoce como la **ecuación de transferencia** porque nos permite seguir el rayo de P_1 a P_2. Recordemos que los ángulos son positivos si los rayos tienen pendiente positiva. Dado que estamos trabajando con la región paraxial $d_{21} \approx \overline{V_2V_1}$ e y_2 puede calcularse con facilidad. Las ecuaciones (6.12) y (6.13) se utilizan sucesivamente para trazar un rayo que atraviese todo el sistema. Este rayo será, claro está, meridional y, teniendo en cuenta la simetría de las lentes situadas alrededor del eje óptico, permanecerá en el mismo plano meridional a lo largo de todo su recorrido. El proceso es bidimensional: hay dos ecuaciones y dos incógnitas α_{t1} e y_2. Por el contrario, un rayo oblicuo tendrá que ser considerado en tres dimensiones.

6.2.1 Métodos matriciales

En los albores de la década de los treinta, T. Smith formuló un método, muy interesante para el tratamiento de las ecuaciones para el trazado de rayos. La simple forma lineal de las expresiones y la manera repetitiva en la que éstas se aplican sugirieron el uso de matrices. A partir de ese momento, los procesos de refracción y transferencia podían efectuarse matemáticamente mediante operadores matriciales. Durante casi 30 años, estas primeras aportaciones no fueron apreciadas en todo su valor. Sin embargo, a principios de la década de los sesenta surgió de nuevo el interés por este enfoque [2]. En esta obra únicamente señalaremos algunos de los aspectos más destacados del método, y dejaremos para un estudio más detallado las referencias anotadas.

Análisis matricial de lentes

Empecemos por escribir las fórmulas

$$n_{t1}\alpha_{t1} = n_{i1}\alpha_{i1} - \mathcal{D}_1 y_{i1} \tag{6.14}$$

y

$$y_{t1} = 0 + y_{i1} \tag{6.15}$$

[2] Si se desea leer más sobre este punto, véase K. Hallbach, «Matrix Representation of Gaussian Optics», *Am. J. Phys.*, **32**, 90 (1964); W. Brouwer, *Matrix Methods in Optical Instrument Design*; E. L. O'Neill, *Introduction to Statistical Optics*; o A. Nussbaum, *Geometric Optics*.

las cuales no introducen nuevos conceptos puesto que solamente reemplazamos y_1 en la ecuación (6.12) por el símbolo y_{i1}; y, por consiguiente, sea $y_{t1} = y_{i1}$. Este último detalle es puramente superficial, tal y como veremos en breves instantes. Simplemente nos informa de que la altura del punto de referencia P_1, situado encima del eje en el medio incidente (y_{i1}) es la misma en el medio transmisor (y_{t1}), lo cual resulta obvio. Ahora podemos reformular el par de ecuaciones en forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Otra manera de escribirlo sería

$$\begin{bmatrix} \alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{i1}/n_{t1} & -\mathcal{D}_1/n_{t1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

de tal modo que la forma precisa de matrices columna de 2×1 es en realidad una cuestión de preferencia. En cualquier caso, éstas pueden considerarse como rayos sobre cada lado de P_1, una antes y otra después de la refracción.

De acuerdo con esto, si utilizamos $\mathbf{v}_{t1}$ y $\mathbf{v}_{i1}$ para los dos rayos, podemos escribir

$$\mathbf{v}_{t1} = \begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_{i1} \equiv \begin{bmatrix} n_{i1}\alpha_{i1} \\ y_{i1} \end{bmatrix} \tag{6.18}$$

La matriz 2×2 es la **matriz de refracción,** y se indica como

$$\mathbf{R}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

y podemos escribir la ecuación (6.16) en forma concisa como

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{R}_1\mathbf{v}_{i1} \tag{6.20}$$

la cual simplemente nos indica que $\mathbf{R}_1$ transforma el rayo $\mathbf{v}_{i1}$ en el rayo $\mathbf{v}_{t1}$ durante la refracción en la primera interfaz. Nótese que el modo en que dispusimos los términos en las ecuaciones (6.14) y (6.15) determinó la fórmula de la matriz de refracción. Por consiguiente, es posible encontrar en las fuentes bibliográficas diversas variaciones equivalentes de la matriz.

En la figura 6.8 tenemos $n_{i2}\alpha_{i2} = n_{t1}\alpha_{t1}$, es decir,

$$n_{i2}\alpha_{i2} = n_{t1}\alpha_{t1} + 0 \tag{6.21}$$

y

$$y_{i2} = d_{21}a_{t1} + y_{t1} \tag{6.22}$$

donde $n_{i2} = n_{t1}$, $\alpha_{i2} = \alpha_{t1}$; de este modo se usó la ecuación (6.13) con y_2 reescrita como y_{i2} para poner bien las cosas. Por consiguiente,

$$\begin{bmatrix} n_{i2}\,\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{t1}\alpha_{t1} \\ y_{t1} \end{bmatrix} \tag{6.23}$$

La **matriz de transferencia**

$$\mathscr{T}_{21} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

toma el rayo transmitido en P_1, es decir, $\mathscr{r}_{t1}$, y lo transforma en el rayo incidente en P_2:

$$\mathscr{r}_{i2} \equiv \begin{bmatrix} n_{i2}\,\alpha_{i2} \\ y_{i2} \end{bmatrix}$$

Así pues, las ecuación (6.21) y (6.22) se reducen a

$$\mathscr{r}_{i2} = \mathscr{T}_{21}\mathscr{r}_{t1} \tag{6.25}$$

Si utilizamos la ecuación (6.20), tenemos

$$\mathscr{r}_{i2} = \mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1\mathscr{r}_{i1} \tag{6.26}$$

La matriz 2×2 formada por el producto de las *matrices* de transferencia y refracción, $\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1$ tomará el rayo incidente en P_1 y lo transformará en el rayo incidente en P_2. Obsérvese que el determinante de $\mathscr{T}_{21}$, indicado como $|\mathscr{T}_{21}|$, es igual a 1, es decir, (l) (1) − (0)(d_{2l}/n_{t1}) = 1. Del mismo modo, $|\mathscr{R}_1| = 1$, y dado que el determinante de un producto matricial es igual al producto de cada uno de los determinantes por separado, $|\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1| = 1$. Esto nos sirve para comprobar rápidamente los cálculos realizados. Aplicando este método a la segunda interfaz (figura 6.8) de la lente, cuya matriz de refracción es $\mathscr{R}_2$, podemos deducir que

$$\mathscr{r}_{t2} = \mathscr{R}_2\mathscr{r}_{i2} \tag{6.27}$$

donde

$$\mathscr{R}_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la potencia de la segunda superficie es

$$\mathscr{D}_2 = \frac{(n_{t2} - n_{i2})}{R_2}$$

De la ecuación (6.26)

$$\mathscr{r}_{t2} = \mathscr{R}_2\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1\mathscr{r}_{i1} \tag{6.28}$$

El **sistema matricial A** queda definido como

$$\mathscr{A} \equiv \mathscr{R}_2\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1 \tag{6.29}$$

y tiene la forma

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{6.30}$$

Dado que

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{21}/n_{t1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D}_1 \\ \dfrac{d_{21}}{n_{t1}} & 1 - \dfrac{\mathscr{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{bmatrix}$$

podemos inferir que

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\mathscr{D}_2 d_{21}}{n_{t1}} & -\mathscr{D}_1 - \mathscr{D}_2 + \dfrac{\mathscr{D}_2\mathscr{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \\ \dfrac{d_{21}}{n_{t1}} & \dfrac{\mathscr{D}_1 d_{21}}{n_{t1}} \end{bmatrix}$$

y nuevamente $|\mathscr{A}| = 1$ (problema 6.17). Dado que solamente estamos trabajando con una lente, podemos simplificar un poco las anotaciones: sea $d_{21} = d_l$ y $n_{t1} = n_l$. Por consiguiente

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\mathscr{D}_2 d_l}{n_l} & -\mathscr{D}_1 - \mathscr{D}_2 + \dfrac{\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 d_l}{n_l} \\ \dfrac{d_l}{n_l} & 1 - \dfrac{\mathscr{D}_1 d_l}{n_l} \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

El valor de cada elemento en $\mathscr{A}$ es expresado en función de los parámetros físicos de la lente, tales como espesor, índice de refracción y radios de curvatura (vía $\mathscr{D}$). En consecuencia, los puntos cardinales que representan propiedades de la lente y que vienen determinados únicamente por su composición, deberían ser deducidos a partir de $\mathscr{A}$. La matriz del sistema en este caso, ecuación (6.31), transforma un rayo incidente en la primera superficie en un rayo que emerge en la segunda superficie; a modo de recordatorio, lo escribiremos como $\mathscr{A}_{21}$.

El concepto de formación de imagen entra directamente en juego (figura 6.9) tras introducir de forma adecuada los planos

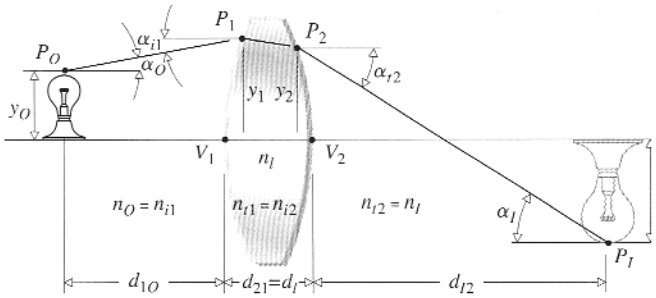


FIGURA 6.9 Geometría de una imagen.

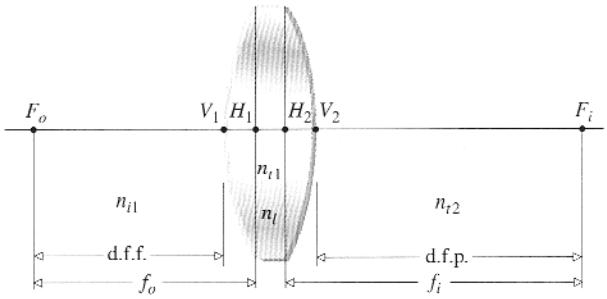


FIGURA 6.10 Planos principales y distancias focales.

objeto e imagen. Así, el primer operador $\mathscr{T}_{1O}$ transfiere el punto de referencia desde el objeto, es decir, de P_O a P_1. A continuación, el operador siguiente, $\mathscr{A}_{21}$, lleva el rayo a través de la lente, y una última transferencia $\mathscr{T}_{I2}$, lo lleva al plano imagen, es decir, P_I. Por consiguiente, el rayo en el punto imagen $\mathscr{r}_I$ viene dado por

$$\mathscr{r}_I = \mathscr{T}_{I2}\mathscr{A}_{21}\mathscr{T}_{1O}\mathscr{r}_O \tag{6.32}$$

donde $\mathscr{r}_O$ es el rayo en P_O. En forma de componentes esto es igual a

$$\begin{bmatrix} n_I\alpha_I \\ y_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{I2}/n_I & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d_{1O}/n_O & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_O\alpha_O \\ y_O \end{bmatrix} \tag{6.33}$$

Obsérvese que $\mathscr{T}_{1O}\mathscr{r}_O = \mathscr{r}_{i1}$ y que $\mathscr{A}_{21}\mathscr{r}_{i1} = \mathscr{r}_{t2}$, por lo que $\mathscr{T}_{I2}\mathscr{r}_{t2} = \mathscr{r}_I$. Los subíndices *0*, 1, 2,... *I* corresponden a los puntos de referencia P_0, P_1, P_2, etc., mientras que los subíndices *i* y *t* indican el lado del punto de referencia, es decir, el incidente o el transmitido. La operación mediante una matriz de refracción cambiará *i* a *t*, pero no la designación del punto de referencia. Por otra parte, la operación mediante una matriz de transferencia obviamente cambia este último.

Generalmente, los significados físicos de las componentes de $\mathscr{A}$ se hallan al desarrollar la ecuación (6.33), pero esta operación es bastante complicada para hacerla aquí. En lugar de esto, retomemos la ecuación (6.31) y examinemos algunos de sus términos. Por ejemplo,

$$-a_{12} = \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 - \mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 d_l/n_l$$

Si, para simplificar las cosas, suponemos que la lente está en aire, entonces

$$\mathscr{D}_1 = \frac{n_l - 1}{R_1} \quad \text{y} \quad \mathscr{D}_2 = \frac{n_l - 1}{-R_2}$$

como en las ecuaciones (5.70) y (5.71). Por lo tanto

$$-a_{12} = (n_l - 1)\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n_l - 1)d_l}{R_1 R_2 n_l}\right]$$

Pero ésta es la expresión para la distancia focal de una lente gruesa [ecuación (6.2)]; dicho de otro modo,

$$a_{12} = -1/f \tag{6.34}$$

De este modo, la potencia de la lente globalmente considerada viene dada por

$$-a_{12} = \mathscr{D}_l = \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2 - \frac{\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2 d_l}{n_l}$$

Si los medios de inmersión fueran diferentes en cada lado de la lente (figura 6.10), esto último pasaría a ser

$$a_{12} = -\frac{n_{i1}}{f_o} = -\frac{n_{t2}}{f_i} \tag{6.35}$$

Asimismo, se deja como problema verificar que

$$\overline{V_1H_1} = \frac{n_{i1}(1 - a_{11})}{-a_{12}} \tag{6.36}$$

y

$$\overline{V_2H_2} = \frac{n_{t2}(a_{22} - 1)}{-a_{12}} \tag{6.37}$$

que localizan los puntos principales.

Con el fin de ejemplificar el uso de esta técnica, vamos a aplicarla, por lo menos en principio, a la lente Tessar[3], la cual

[3] Escogimos este ejemplo en particular porque el libro *Geometric Optics* de Nussbaum incluye un programa simple de ordenador expresamente escrito para esta lente. Sería casi de tontos evaluar el sistema de matrices a mano.

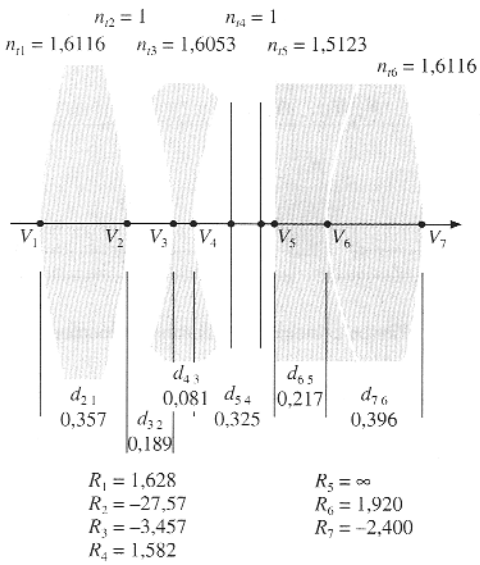


FIGURA 6.11 Un Tessar.

se muestra en la figura 6.11. El sistema de matrices tiene la forma

$$\mathscr{A}_{71} = \mathscr{R}_7\mathscr{T}_{76}\mathscr{R}_6\mathscr{T}_{65}\mathscr{R}_5\mathscr{T}_{54}\mathscr{R}_4\mathscr{T}_{43}\mathscr{R}_3\mathscr{T}_{32}\mathscr{R}_2\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1$$

donde

$$\mathscr{T}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{0{,}357}{1{,}6116} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathscr{T}_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{0{,}189}{1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{T}_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{0{,}081}{1{,}6053} & 1 \end{bmatrix}$$

y así sucesivamente. Por otra parte,

$$\mathscr{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1{,}6116 - 1}{1{,}628} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathscr{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1 - 1{,}6116}{-27{,}57} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1{,}6053 - 1}{-3{,}457} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etcétera. Multiplicando todas estas matrices, lo cual supone, obviamente, un cálculo horroroso aunque conceptualmente simple, supuestamente obtendremos

$$\mathscr{A}_{71} = \begin{bmatrix} 0{,}848 & -0{,}198 \\ 1{,}338 & 0{,}867 \end{bmatrix}$$

y de ahí tenemos $f = 5{,}06$, $\overline{V_1H_1} = 0{,}77$, y $\overline{V_7H_2} = -0{,}67$.

Lentes delgadas

Por último, es conveniente a veces considerar un sistema de lentes delgadas y usar la representación matricial, para lo cual hay que recurrir a la ecuación (6.31). Esta ecuación describe el sistema matricial para una sola lente y si permitimos que $d_l \to 0$, dicho sistema corresponderá al de una lente delgada. Esto equivale a hacer de $\mathscr{T}_{21}$ una matriz unitaria; por lo tanto

$$\mathscr{A} = \mathscr{R}_2\mathscr{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -(\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero tal y como vimos en la sección 5.7.2, la potencia de una lente delgada $\mathscr{D}$ es la suma de las potencias de sus superficies. En consecuencia

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathscr{D} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Además, para dos lentes delgadas separadas por una distancia d, en aire, la matriz del sistema

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o bien $$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 - d/f_2 & -1/f_1 + d/f_1f_2 - 1/f_2 \\ d & -d/f_1 + 1 \end{bmatrix}$$

Vemos claramente,

$$-a_{12} = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1f_2}$$

y de las ecuaciones (6.36) y (6.37)

$$\overline{O_1H_1} = fd/f_2 \qquad \overline{O_2H_2} = -fd/f_1$$

las cuales ya deberían resultarnos bastante familiares a estas alturas. Obsérvese cuán fácil sería encontrar con este enfoque la distancia focal y los puntos principales para una lente compuesta formada por tres, cuatro o más lentes delgadas.

Análisis matricial de espejos

Para deducir la matriz adecuada para reflexión, véase el espejo esférico cóncavo mostrado en la figura 6.12 y, a continuación, escriba dos ecuaciones que describan los rayos incidente y reflejado. Una vez más, la fórmula final de la matriz dependerá del modo en el que dispongamos estas dos ecuaciones, así como de los signos que asignemos a las diversas cantidades. Lo que necesitamos es una expresión que relacione los ángulos de los rayos y otra que relacione sus alturas en el punto donde se cruzan con el espejo.

Veamos, en primer lugar, los ángulos de los rayos. La ley de reflexión es $\theta_i = \theta_r$ así pues, según la geometría, tan $(\alpha_i - \theta_i) = y_i/R$, y

$$(\alpha_i - \theta_i) \approx y_i/R \tag{6.38}$$

Tomando estos ángulos como valores positivos, y será positivo pero R no, por lo que esta ecuación será errónea en cuanto introduzcamos un valor negativo para los radios. Así pues, volvamos a escribirla como $(\alpha_i - \theta_i) = -y_i/R$. Para introducir ahora α_r en el análisis, obsérvese que $\alpha_i = \alpha_r + 2\theta_i$ y $\theta_i = (\alpha_i - \alpha_r)/2$. Al sustituir esto en la ecuación (6.38), obtenemos $\alpha_r = -\alpha_i - 2y_i/R$, y multiplicándolo por n, el índice del medio circundante (donde normalmente $n = 1$), llegamos a

$$n\alpha_r = -n\alpha_i - 2ny_i/R$$

La segunda ecuación que necesitamos es simplemente $y_r = y_i$ de tal modo que

$$\begin{bmatrix} n\alpha_r \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n\alpha_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la matriz especular $\mathcal{M}$ para una configuración esférica viene dada por

$$\mathcal{M}_o = \begin{bmatrix} -1 & -2n/R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Hay que tener presente de la ecuación (5.49) que $f = -2/R$.

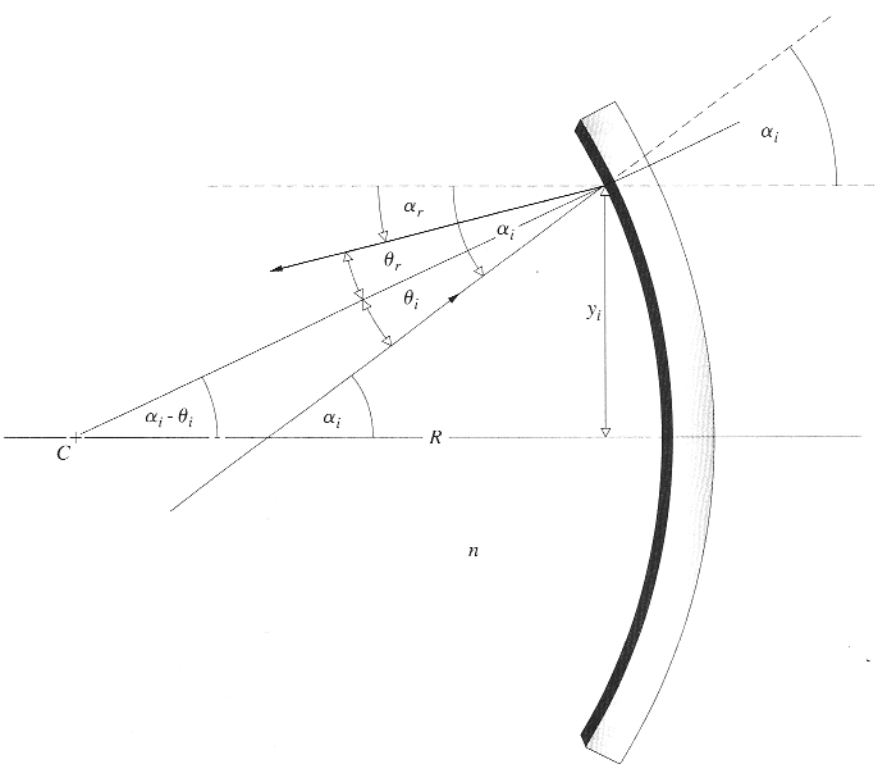


FIGURA 6.12 Geometría de la reflexión desde un espejo. Los ángulos del rayo α_i y α_r se miden desde la dirección del eje óptico.

Los espejos planos y la cavidad óptica plana

Para un espejo plano ($R \to \infty$) en aire ($n = 1$), la matriz será

$$\mathcal{M}_{|} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el signo menos en la primera posición invierte el rayo en el momento de la reflexión. En la figura 6.13 se muestran dos espejos planos que, colocados uno frente al otro, forman una **cavidad óptica** (pág. 597). La luz sale del punto O, atraviesa el espacio intermedio en la dirección positiva, se refleja en el espejo 1, retrocede el espacio intermedio en la dirección negativa y se refleja en el espejo 2. El sistema matricial queda así

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_{|2}\mathcal{T}_{21}\mathcal{M}_{|1}\mathcal{T}_{12}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -d & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2d & 1 \end{bmatrix}$$

donde de nuevo el determinante del sistema matricial es uno: $|\mathbf{A}| = 1$. Es de suponer que, si el rayo inicial era axial ($\alpha = 0$), el sistema matricial debería llevarlo de nuevo a su punto de partida de tal modo que el rayo final $\mathbf{r}_f$ sea idéntico al rayo inicial $\mathbf{r}_i$. Es decir,

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i$$

Éste es un tipo especial de relación matemática conocida como una ***ecuación de autovalores***, donde, de forma un poco más general,

$$\mathcal{A}\mathbf{r}_i = a\mathbf{r}_i$$

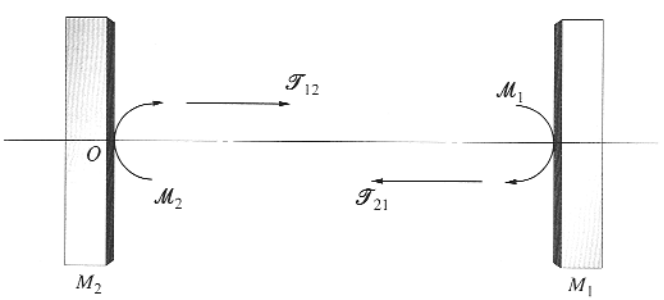


FIGURA 6.13 Representación esquemática de una cavidad plana formada por los espejos M_1 y M_2.

y a es una constante. Dicho de otro modo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2d & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_i \\ y_i \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} \alpha_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Si $\alpha_i = 0$ y el rayo inicial se traza axialmente, entonces $y_i = ay_i$, y de ello se deriva que $a = 1$. La matriz del sistema funciona como una matriz unitaria que lleva $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_i$ tras dos reflexiones. Los rayos de luz axiales se transmiten de un lado a otro, sin escapar, a través de la denominada **cavidad resonante**.

Las cavidades pueden construirse de muchas maneras diferentes utilizando una gran variedad de espejos (figura 13.12, pág. 601). Si después de atravesar una cavidad un cierto número de veces, el rayo de luz regresa a su ubicación y orientación originales, el haz de luz queda atrapado y se dice que la cavidad es *estable*; de ahí la importancia de todo lo dicho sobre el autovalor. Con el fin de analizar la *cavidad confocal* compuesta de dos espejos esféricos cóncavos enfrentados entre sí, véase el problema 6.24.

6.3 Aberraciones

A propósito, ya sabemos que la teoría de primer orden no es más que una buena aproximación: no cabe duda que un trazado exacto de rayos o incluso mediciones realizadas sobre un sistema prototipo mostraría algunas incongruencias con la correspondiente descripción paraxial. Tales diferencias respecto de las condiciones ideales de la óptica gaussiana se denominan **aberraciones**. Existen dos tipos principales: las **aberraciones cromáticas** (las cuales surgen del hecho que n es realmente una función de la frecuencia o color) y las **aberraciones monocromáticas**. Estas últimas tienen lugar incluso cuando la luz es altamente monocromática, y a su vez se dividen en dos subgrupos: están las aberraciones monocromáticas, tales como *aberración esférica, coma y astigmatismo*, las cuales deterioran la imagen haciéndola confusa. Por otro lado, están las aberraciones que deforman la imagen, como, por ejemplo, la *curvatura de campo de Petzval* y la *distorsión*.

Hemos visto anteriormente que las superficies esféricas producen en general imágenes perfectas únicamente en la región paraxial. Ahora debemos determinar el tipo y la extensión de las desviaciones resultantes cuando dichas superficies se usan con aberturas finitas. Por medio de un manejo adecuado de los parámetros físicos del sistema óptico (por ejemplo, las potencias, formas, grosores, tipos de vidrio, separaciones

entre las lentes, así como la localización de los diafragmas), estas aberraciones pueden minimizarse. De hecho, es posible anular totalmente los fallos más indeseables cambiando ligeramente la forma de una lente, o moviendo la posición de un diafragma (algo muy parecido a arreglar un circuito con pequeños condensadores variables, bobinas y resistencias variables). Una vez concluido todo esto, las deformaciones indeseables en el frente de onda producidas cuando éste pasa a través de una superficie, quedarán contrarrestadas, esperemos, cuando atraviese otras superficies posteriores.

Ya en 1950 se desarrollaban programas de trazado de rayos para los nuevos ordenadores digitales, y en 1954 ya había en curso varias iniciativas para crear software sobre diseño de lentes. A principios de los años sesenta, el diseño de lentes por ordenador constituía una herramienta comercial utilizada por todos los fabricantes del mundo. En la actualidad existen programas informáticos muy elaborados para diseñar y analizar «automáticamente» el comportamiento de cualquier sistema óptico por complicado que éste sea.

6.3.1 Aberraciones monocromáticas

El tratamiento paraxial se basó en la suposición de que el seno φ, tal y como se muestra en la figura 5.7, puede representarse satisfactoriamente sólo por φ; es decir, el sistema se restringió hasta operar en una región extremadamente estrecha alrededor del eje óptico. Obviamente, si los rayos de la periferia de una lente se incluyen en la formación de una imagen, la afirmación de que el sen $\varphi \approx \varphi$ ya no resulta satisfactoria. Recordemos que ocasionalmente escribimos la ley de Snell simplemente como $n_i\theta_i = n_t\theta_t$, lo cual tampoco resultaría apropiado. Sea como fuere, si los dos primeros términos en el desarrollo

$$\text{sen } \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots \qquad [5.7]$$

se conservan como una aproximación mejorada, tendremos la llamada *teoría de tercer orden*. Las diferencias que resultan con respecto a la teoría de primer orden quedan incluidas en las cinco *aberraciones primarias* (aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión), las cuales fueron estudiadas por primera vez en detalle por Ludwig von Seidel (1821-1896) en la década de los cincuenta del siglo pasado. De ahí que frecuentemente se conozcan como *aberraciones de Seidel*. Además de las dos primeras contribuciones, la serie incluye otros términos que, aun siendo más pequeños, merecen ser tomados igualmente en consideración. Existen, en consecuencia, las *aberraciones de orden superior*. La diferencia entre los resultados del trazado exacto de rayos y las aberraciones primarias calculadas por ordenador pueden pensarse como la suma de las contribuciones de todas las aberraciones de orden superior. En nuestro estudio nos limitaremos exclusivamente a las aberraciones primarias.

Aberración esférica

Volvamos por un momento a la sección 5.2.2 (pág. 156), donde calculamos los puntos conjugados para una interfaz refractora esférica. Vimos que, para la región paraxial,

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} \qquad [5.8]$$

Si mejoramos un poco las aproximaciones para ℓ_o y ℓ_i (problema 6.26), obtendremos la expresión de tercer orden:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R} + h^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{s_o} + \frac{1}{R}\right)^2 + \frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s_i}\right)^2\right] \qquad (6.40)$$

El término adicional, el cual varía aproximadamente como h^2, es claramente una medida de la desviación respecto a la teoría de primer orden. Tal y como se muestra en la figura 6.14, los rayos que inciden en la superficie a alturas considerables sobre el eje óptico (h) son enfocados más cerca del vértice. En pocas palabras, la aberración esférica o AE corresponde a la depen-

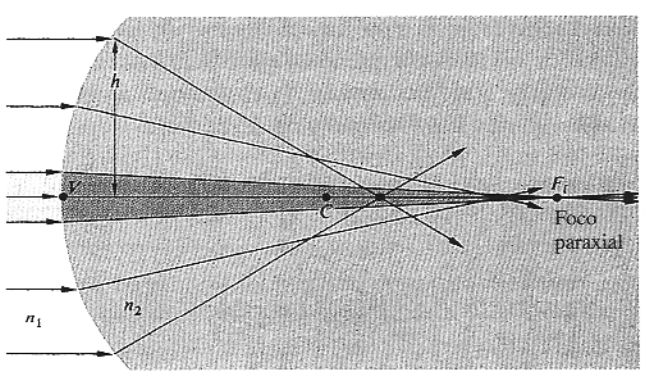


FIGURA 6.14 Aberración esférica resultante de la refracción en una sola superficie.

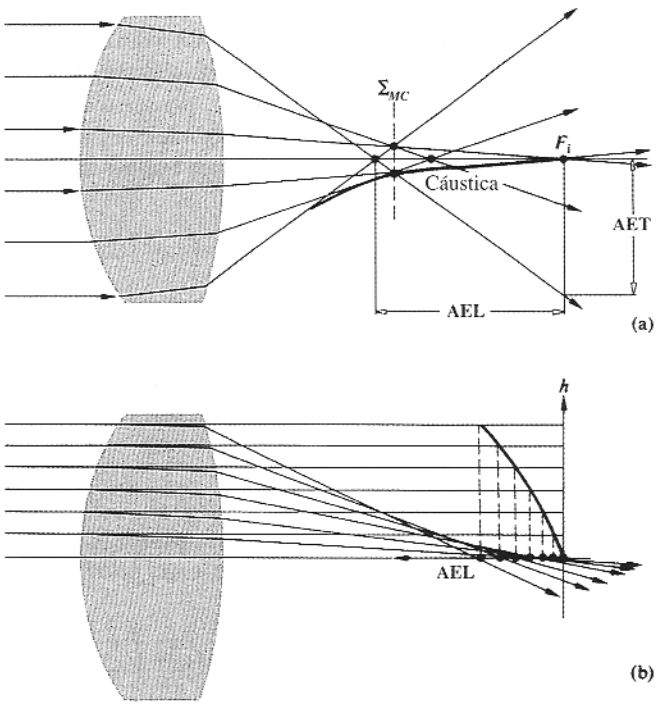


FIGURA 6.15 Aberración esférica de una lente. La envolvente de los rayos refractados se denomina cáustica. La intersección entre los rayos marginales y la cáustica indica la posición de Σ_{MC}.

dencia de la distancia focal con la abertura para rayos no paraxiales. Igualmente, para una lente convergente, como la de la figura 6.15, los rayos marginales se desviarán en exceso, de tal forma que serán enfocados delante del foco de los rayos paraxiales. Hay que tener en cuenta que la aberración esférica solamente hace referencia a puntos del objetivo ubicados en el eje óptico. La distancia comprendida entre la intersección de un rayo con el eje y el foco paraxial, F_i, es conocida como la **aberración esférica longitudinal** o AE L, de dicho rayo. En este caso, la AE es *positiva*. Por el contrario, los rayos marginales para una lente divergente cortarán el eje normalmente detrás del foco paraxial y su aberración esférica será, por lo tanto, *negativa*.

Para entender mejor cuál es el efecto de las aberraciones sobre los frentes de ondas, imaginemos que la luz surge de una fuente puntual y atraviesa un sistema óptico. En condiciones ideales, si en la pupila de salida el frente de ondas transmitido es una esfera centrada sobre el punto imagen gaussiano, entonces la imagen será perfecta; en caso contrario, se producirá una aberración. Las *aberraciones de onda* son las desviaciones que se producen en la trayectoria óptica entre el frente de onda real y el ideal; generalmente se especifican con los valores máximos indicados en micras, nanometros o longitudes de onda.

En condiciones ideales, una lente formará una imagen de una fuente puntual, que consistirá en un diminuto disco circular y brillante rodeado de anillos tan débiles que apenas serán perceptibles (figura 10.28); ésta será su distribución de Airy. La aberración esférica básicamente desplaza la luz del disco central a los anillos de alrededor, los cuales se hacen mucho más prominentes. Por ejemplo, Rayleigh estableció que un cuarto de onda de aberración esférica disminuye la irradiancia del disco imagen en un 20%.

Por consiguiente, si colocamos una pantalla en el punto F_i de la figura 6.15, la imagen de una estrella aparecerá como un punto central brillante sobre el eje, rodeado por un halo simétrico delineado por el cono de los rayos marginales. Para una imagen extendida, la AE reduciría el contraste y degradaría los detalles.

La altura a la que un rayo cruza esa pantalla por encima del eje óptico se denomina **aberración esférica transversal** (o **lateral**) o, de forma abreviada, AE T. Evidentemente, la AE puede reducirse cerrando la abertura —pero esto también reduce la cantidad de luz que entra al sistema—. Obsérvese que si movemos la pantalla a la posición designada como Σ_{MC}, la imagen borrosa alcanzará su diámetro más pequeño. Esto último es conocido como el ***círculo de mínima confusión***, y Σ_{MC}

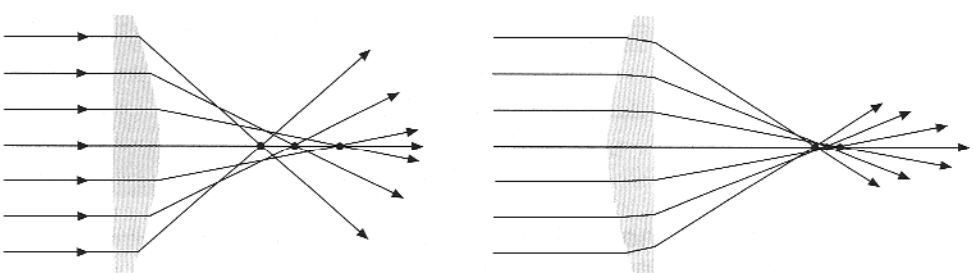


FIGURA 6.16 AE para una lente plano-convexa.

es generalmente el mejor lugar para observar la imagen. Si una lente muestra una AE considerable y la cerramos, tendrá que ser enfocada nuevamente porque la posición de Σ_{MC} se aproximará a F_i conforme la abertura disminuye.

La cantidad de aberración esférica, cuando la abertura y distancia focal están fijas, varía en función de la distancia a la que se encuentre el objeto y la forma de la lente. Para una lente convergente, los rayos no paraxiales son fuertemente desviados. Sin embargo, si imaginamos la lente como dos prismas unidos por su base, es evidente que *el rayo incidente sufrirá una desviación mínima cuando llegue, más o menos, al mismo ángulo que forma el rayo emergente* (sección 5.5.1). Un ejemplo muy ilustrativo lo tenemos en la figura 6.16 donde simplemente girando la lente 180°, la AE disminuye considerablemente. Cuando el objeto se encuentra en el «infinito», una lente simple cóncava o convexa cuya cara posterior sea casi pero no totalmente plana, sufrirá una aberración esférica muy pequeña. En forma semejante, si las distancias objeto e imagen son iguales ($s_o = s_i = 2f$), la lente debería ser equiconvexa para minimizar la A E. La combinación de una lente convergente con otra lente divergente (como en un doblete acromático) también puede emplearse para disminuir la aberración esférica.

Recordemos que las lentes asféricas de la sección 5.2.1 carecían totalmente de aberración esférica para un par específico de puntos conjugados. Es más, Huygens parece haber sido el primero en descubrir que tales puntos axiales existen también para superficies esféricas. Estos puntos se muestran en la figura 6.17*a*, la cual describe cómo los rayos nacen de P y salen de la superficie como si procedieran de P'. Dejamos para un problema el demostrar que las posiciones correctas de los puntos P y P' son las que se indican en la figura. Al igual que sucede con las lentes asféricas, las lentes esféricas pueden formarse con una AE igual a cero para el par de puntos P y P'. Uno simplemente genera otra superficie de radio $\overline{PA}$ centrada sobre P para formar una lente del tipo menisco, ya sea positiva o negativa. Este principio se aplica con grandes ventajas en los objetivos de microscopio de inmersión en aceite. Colocamos el objeto que vamos a estudiar en P y lo rodeamos de aceite con índice n_2, tal y como se muestra en la figura 6.18. P y P' son los puntos conjugados apropiados cuando la AE es cero para el primer elemento, mientras que P' y P'' son los que corresponden a la lente menisco.

Poco después de que el Telescopio Espacial Hubble (TEH) fuera puesto en órbita en el mes de abril de 1990, se vio claramente que algo estaba fallando estrepitosamente. Las imágenes que devolvía seguían borrosas a pesar de los innumerables

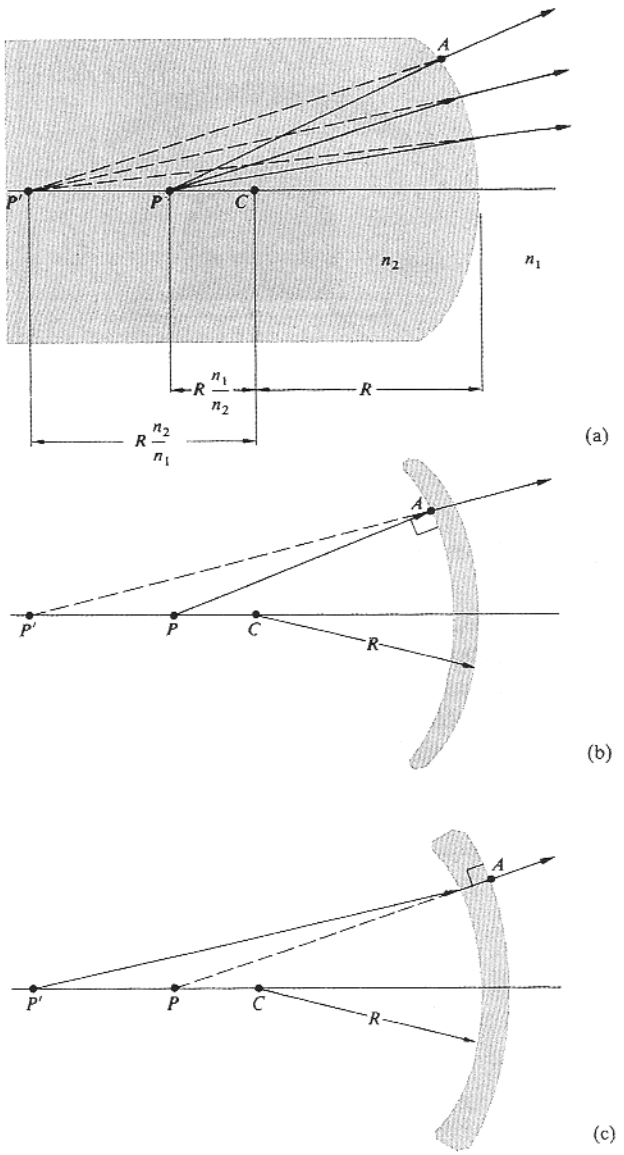


FIGURA 6.17 Puntos axiales correspondientes para los cuales la AE es cero.

intentos por ajustar la orientación y ubicación del espejo secundario (pág. 232). Para una estrella lejana, que básicamente constituía una fuente puntual, el tamaño del disco de la imagen se aproximaba al valor limitado por difracción esperado (alrededor de 0,1 segundos de arco, de diámetro); pero sólo quedaba un 12% de la energía radiante, en lugar del 70% esperado (siendo el

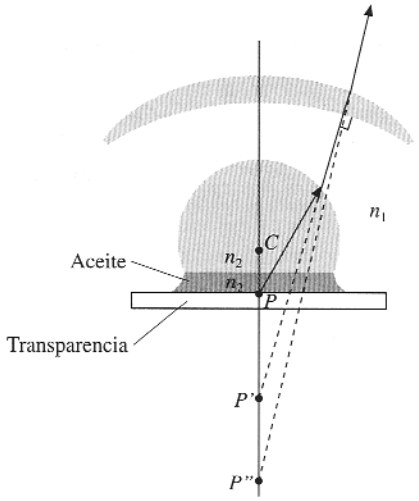
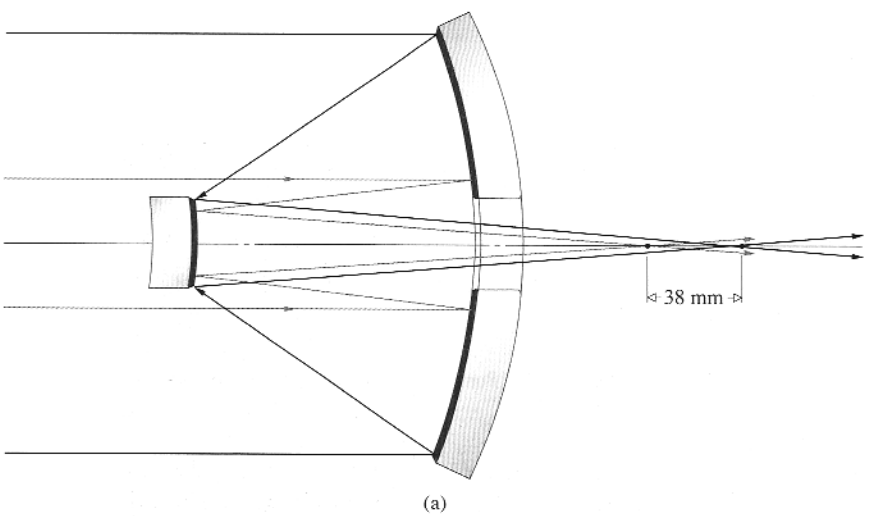


FIGURA 6.18 Un objetivo de microscopio de inmersión en aceite.

84% el límite ideal). El disco aparecía rodeado por un halo cuyo diámetro se extendía hasta 1,5 segundos de arco, y contenía aproximadamente un 70% de la luz. El resto de la energía radiante se distribuía inevitablemente más allá del halo formando una especie de anillo radial resultante de la combinación de la microrrugosidad del espejo y la difracción de las fijaciones que sujetan el espejo secundario (figura 6.19*b*). Esta situación constituía un ejemplo clásico de aberración esférica.

Más tarde, los científicos determinaron que el espejo primario había sido pulido de forma incorrecta: resultaba demasiado plano en su parte periférica en media longitud de onda. Los rayos procedentes de la región central se estaban enfocando en el eje óptico, ante los rayos procedentes de los bordes. El personal de Perkin-Elmer, la empresa que confeccionó el hiperboloide de 2,4 metros, lo había pulido magistralmente, pero con una forma o curvatura equivocadas. El error fue causado por una suma de desaciertos, que comenzaron con un error de 1,3 mm, en la posición de una pieza del dispositivo para probar la forma. El telescopio, valorado en 1.600 millones de dólares, acabó con una aberración esférica longitudinal debilitante de 38 mm (figura 6.19*a*).

En 1993, un grupo de astronautas del transbordador espacial *Endeavor* ejecutaron con éxito una dramática misión de reparación: instalaron una Cámara Planetaria de Apertura de Campo nueva (con su propia óptica correctiva que añade aproximadamente media longitud de onda en los bordes) y el módulo de Recambio Axial del Telescopio Espacial de Óptica Correctiva (COSTAR). La misión del COSTAR es dar nueva forma a los frentes de onda erróneos que entran en los tres instrumentos científicos restantes. Consiste en insertar un par de



(b)

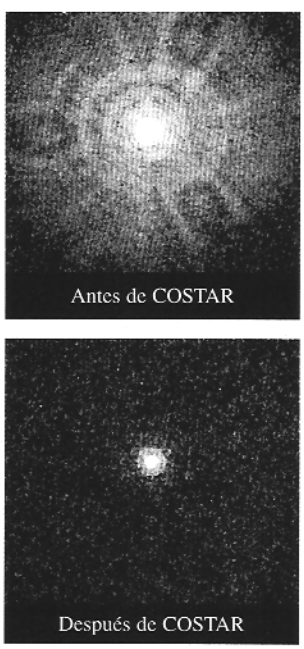


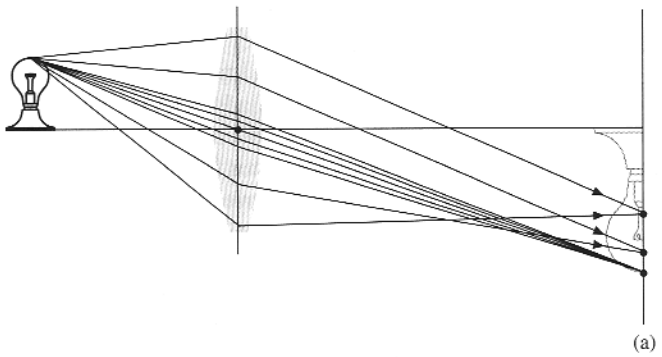
FIGURA 6.19 (a) Puesto que el espejo primario es demasiado plano, los rayos procedentes de los límites exteriores se encuentran en un punto a 38 mm detrás del punto donde los rayos internos convergen. (*b*) Imagen de una estrella formada por el telescopio espacial Hubble. (Foto cedida por la NASA.)

espejos pequeños (10 y 30 mm) en el haz de luz dirigido hacia cada apertura de instrumento. Uno de estos espejos simplemente redirige la luz al otro, que es un asférico asimétrico complejo. Este espejo corrector fuera del eje está configurado con el inverso de la aberración esférica del primario, de tal modo que en el momento de la reflexión, el frente de onda se reforma en una onda perfecta dirigida hacia la apertura prevista. Ahora, más del 70% de la energía luminosa reside en el disco de la imagen central, y los objetos celestiales son unas 6,5 veces más brillantes que antes. A la NASA le gusta señalar que con su visión más nítida que nunca (figura 6.20), y su mejorada habilidad para colectar la luz, el TEH podría actualmente descubrir una luciérnaga a una distancia equivalente a media vuelta alrededor de la tierra —es evidente que el insecto tendría que permanecer inmóvil a emisión máxima durante cerca de 90 minutos—. Por otro lado, el TEH podría distinguir dos de estas luciérnagas perseverantes siempre y cuando hubiera una separación entre ellas de al menos tres metros.

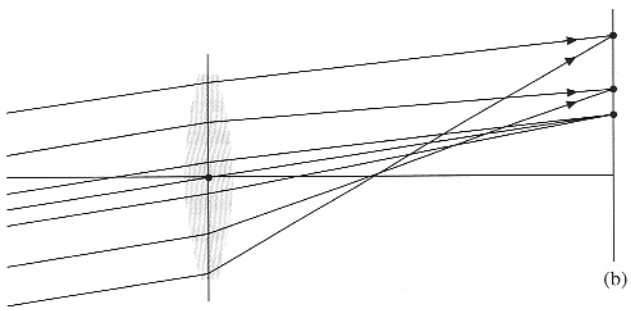
Coma

La **coma** *o aberración comática* es una aberración primaria monocromática que deteriora la imagen, asociada con un punto objeto apartado del eje aunque sea a una distancia corta. Su origen radica en el hecho de que los «planos» principales pueden ser considerados como planos solamente en la región paraxial, ya que realmente son superficies curvas principales (figura 6.1). Cuando no existe AE, un haz de rayos paralelos será enfocado en el punto axial F_i, a una distancia d.f.p. tomada desde del vértice posterior. Pero las distancias focales efectivas y, por lo tanto, los aumentos laterales, serán diferentes para aquellos rayos que cruzan la zona de la lente que se encuentra fuera del eje. Cuando el punto imagen está sobre el eje óptico, esta situación no tiene mayor trascendencia, pero cuando el haz es oblicuo y el punto imagen está fuera del eje, la coma es evidente.

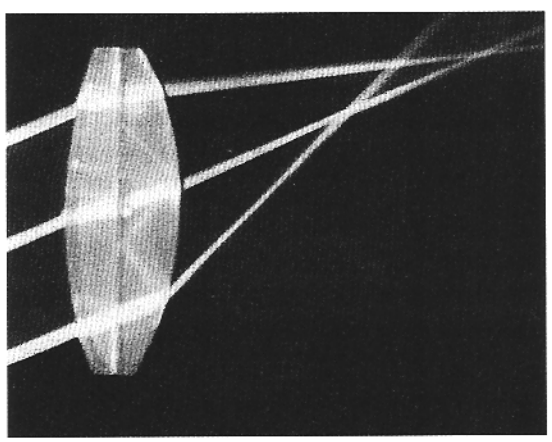
La dependencia de M_T con respecto a h, la altura del rayo en la lente, puede verse en la figura 6.21*a*. En ella vemos cómo



(a)



(b)



(c)

FIGURA 6.21 (*a*) Coma negativa. (*b*) y (*c*) Coma positiva. (Foto de E.H.)

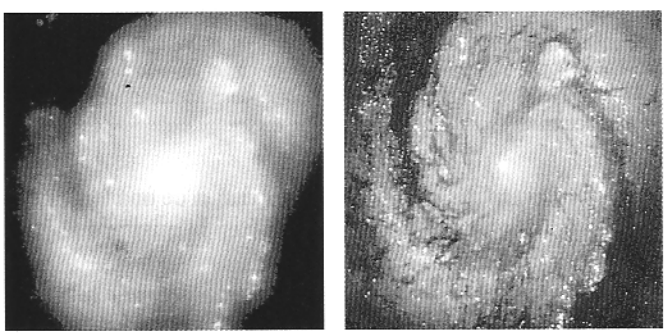


FIGURA 6.20 Imágenes del telescopio espacial Hubble de la galaxia 100 M con (antes de repararse) y sin (después de repararse) aberración esférica. (Fotos cedidas por la NASA.)

los rayos meridionales que cruzan las orillas de la lente llegan al plano imagen más cerca del eje que los rayos que se encuentran en las proximidades del *rayo principal* (es decir, el rayo que pasa por los puntos principales). En estas circunstancias, el aumento más pequeño está asociado con los rayos marginales, que formarán la imagen más pequeña; en este caso la coma será negativa. Comparativamente, la coma de la figura 6.21*b* y *c* será positiva ya que los rayos marginales se enfocarán a una distancia más alejada del eje.

A fin de ilustrar la formación de una imagen comática de un punto, en la figura 6.22 aparecen dibujados varios rayos oblicuos a partir de un punto objeto fuera del eje *S*. Obsérvese que cada cono circular de rayos, cuyos puntos finales (1-2-3-4-1-2-3-4) forman un anillo sobre la lente, proyecta una imagen en lo que H. Dennis Taylor denominó un *círculo comático* sobre Σ_i. Este caso corresponde a una coma positiva y, por consiguiente, cuanto más grande sea el anillo sobre la lente, mayor será la distancia que separa el círculo comático del eje. Cuando el anillo más externo es la intersección de los rayos marginales, la distancia de 0 a 1 en la imagen es la ***coma tangencial***, mientras que la longitud de 0 a 3 sobre Σ_i se denomina ***coma sagital***. Un poco más de la mitad de la energía en la imagen aparece aproximadamente en la región triangular entre 0 y 3. El destello de coma, que debe su nombre al parecido que tiene con la cola de un cometa, se considera la peor de todas las aberraciones debido, principalmente, a su configuración asimétrica.

Pese a que la óptica geométrica no abarca el estudio de las interferencias, cuando la luz alcanza la pantalla en la figura 6.22, es de esperar que tal interferencia se produzca. El cono de la coma, al igual que el punto imagen gaussiano, es una sobresimplificación. El punto imagen consiste realmente en un sistema de anillos de disco imagen, y el cono de la coma es una complicada distribución de difracción asimétrica. Cuanto mayor es la coma, más se aparta el cono de la distribución de Airy en una estructura de manchas y arcos alargados que sólo remotamente recuerdan la estructura de anillos de disco de la que han derivado (figura 6.23).

Igual que la AE, la coma depende de la forma de la lente. Por lo tanto, una lente tipo menisco, positiva y fuertemente cóncava) con el objeto en el infinito, tendrá una coma negativa muy grande. Si curvamos la lente hasta hacerla plano-convexa), luego equiconvexa), convexo-plana (, y por último, menisco-convexa (, la coma pasará de negativa a cero y posteriormente a positiva. El hecho de que pueda adoptar exactamente el valor cero para una sola lente con una determinada distancia objeto, es algo muy significativo. La forma concreta

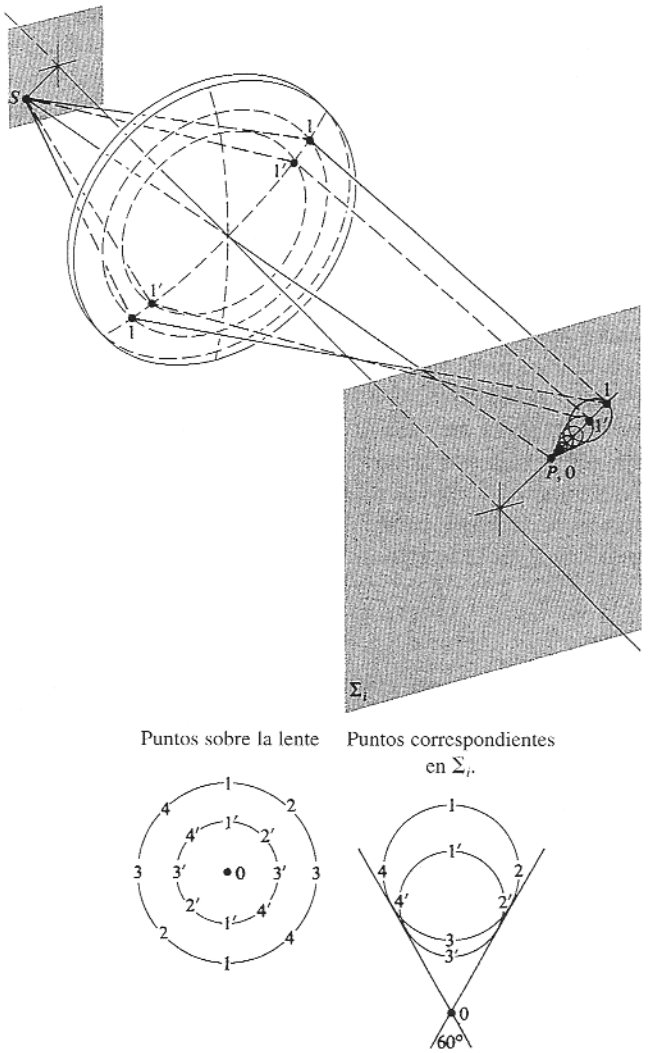
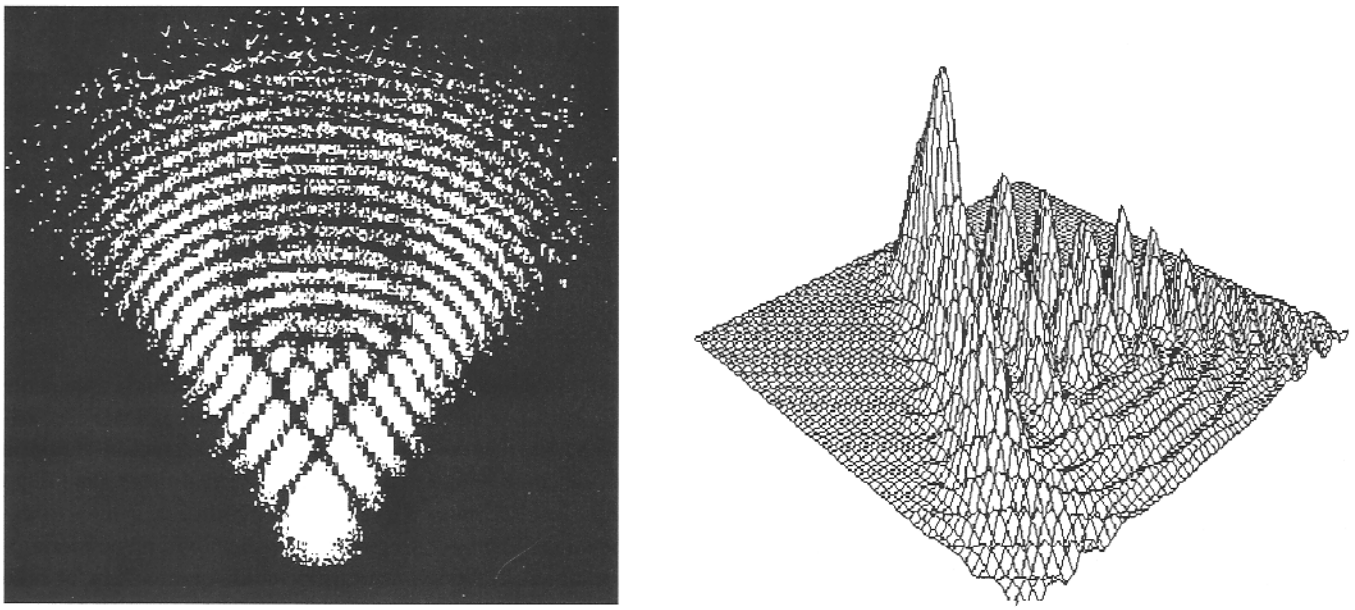


FIGURA 6.22 Imagen geométrica de la coma de una fuente puntual. La región central de la lente forma un punto imagen en el vértice del cono.

que entonces tendría para ($s_o = \infty$), es casi la de una lente convexo-plana cuya configuración sería casi la misma que para una AE mínima.

Es muy importante darse cuenta que *una lente que esté bien corregida para un caso en el que el punto conjugado está en el infinito* ($s_o = \infty$), *puede no funcionar satisfactoriamente cuando el objeto está cerca.* Sin embargo, se podrán obtener resultados satisfactorios si, utilizando lentes ya confeccionadas que



(a) (b)

FIGURA 6.23 Coma de tercer orden. (*a*) Diagrama hecho por ordenador de la imagen de una fuente puntual formada por un sistema óptico marcadamente astigmático. (*b*) Dibujo de la distribución de la irradiancia correspondiente. (Fotos cedidas por OPAL Group, San Petersburgo, Rusia.)

utilicen un sistema de puntos conjugados finitos, combinamos dos lentes corregidas para puntos conjugados al infinito, tal y como se muestra en la figura 6.24. En otras palabras, puesto que es difícil que haya en existencias una lente con la distancia focal deseada, que a su vez habrá sido corregida en concreto para estos puntos conjugados finitos, esta técnica de combinar dos lentes es una alternativa bastante satisfactoria.

La coma también puede eliminarse usando un diafragma en la posición apropiada, como W. Hyde Wollaston (1766-1828) descubrió en 1812. El orden de la lista de aberraciones primarias

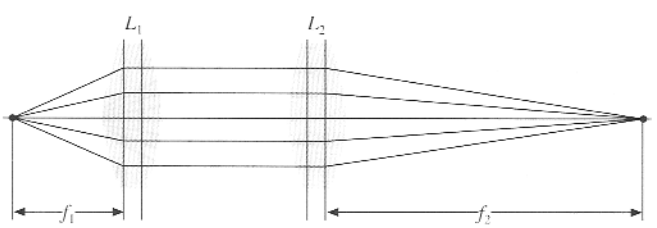


FIGURA 6.24 Combinación de dos lentes conjugadas al infinito que dan como resultado un sistema que funciona con conjugados finitos.

(AE, coma, astigmatismo, curvatura de campo de Petzval y distorsión) es importante porque cualquiera de ellas, excepto la AE y la curvatura de Petzval, se verán afectadas por la posición del diafragma siempre que alguna de estas últimas aberraciones se encuentre presente en el sistema. Así pues, mientras la AE es independiente de la localización del diafragma en el eje óptico, la coma no lo será siempre que exista una AE. Esto puede apreciarse mejor si examinamos la representación en la figura 6.25. Con el diafragma en Σ_1 el rayo 3 es el rayo principal, existe AE pero no coma; es decir, los pares de rayos se intersectan a lo largo del rayo 3. Si desplazamos el diafragma a la posición Σ_2, la simetría se rompe, el rayo 4 se convierte en el rayo principal y los rayos a ambos lados de él, como 3 y 5, no se cruzarán en el propio rayo 4, sino en un punto situado encima de él, lo cual producirá una coma positiva. Con el diafragma en Σ_3, los rayos 1 y 3 se cruzarán por debajo del rayo principal, 2, y la coma resultante será negativa. De esta forma es posible introducir dentro de una lente compuesta un número determinado de aberraciones con el fin de anular la coma en todo el sistema.

El **teorema del seno óptico** es una relación importante que presentaremos aquí aunque no contemos con el espacio nece-

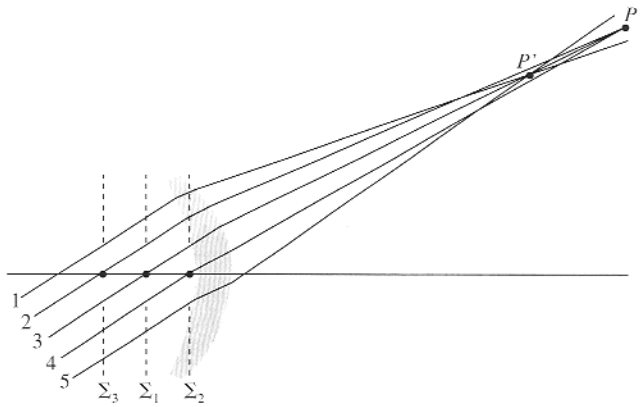


FIGURA 6.25 El efecto de la posición del diafragma en la coma.

sario para efectuar una demostración formal. Fue descubierto de manera independiente en 1873 por Abbe y Helmholtz, si bien R. Clausius (famoso en termodinámica), ya había formulado diez años antes una versión diferente del mismo. Dicho teorema establece que

$$n_o y_o \operatorname{sen} \alpha_o = n_i y_i \operatorname{sen} \alpha_i \qquad (6.41)$$

donde n_o, y_o, α_o y n_i, y_i, α_i representan el índice, la altura y el ángulo de la pendiente de un rayo en los espacios objeto e imagen, respectivamente, a cualquier tamaño de abertura [4] (figura 6.9). Si la coma es igual a cero,

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} \qquad [5.24]$$

ha de ser constante para todos los rayos. Supongamos que enviamos un rayo marginal y otro paraxial a través del sistema. El primero cumplirá la ecuación (6.41), y el último la versión paraxial de esta última ecuación (en la cual sen $\alpha_o = \alpha_{op}$, sen $\alpha_i = \alpha_{ip}$). Dado que M_T es constante para toda la lente, podemos igualar el aumento para ambos rayos, marginal y paraxial, obteniendo

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha_o}{\operatorname{sen} \alpha_i} = \frac{\alpha_{op}}{\alpha_{ip}} = \text{constante} \qquad (6.42)$$

conocido como **condición del seno**. Una condición necesaria para la ausencia de coma es que el sistema cumpla la condición del seno. Si no hay AE, cumplir la condición del seno será necesario y suficiente para una coma igual a cero.

La coma es bastante fácil de observar. De hecho, cualquiera que haya enfocado luz solar con una lente positiva simple habrá visto inexorablemente los efectos de esta aberración. La ligera rotación de una lente, de tal forma que los rayos casi colimados del Sol formen un ángulo con el eje óptico, hará que el punto enfocado se expanda y tome la forma característica de un cometa.

Astigmatismo

Cuando un punto objeto está situado a una distancia apreciable del eje óptico, el cono de rayos incidente sobre la lente será asimétrico, originando con ello la tercera aberración primaria conocida como **astigmatismo**. Este término procede del griego *a-*, que significa «no», y *stigma*, que significa «lugar» o «punto». Para facilitar su descripción, imaginemos el plano meridional (también llamado *plano tangencial)* que incluya el rayo

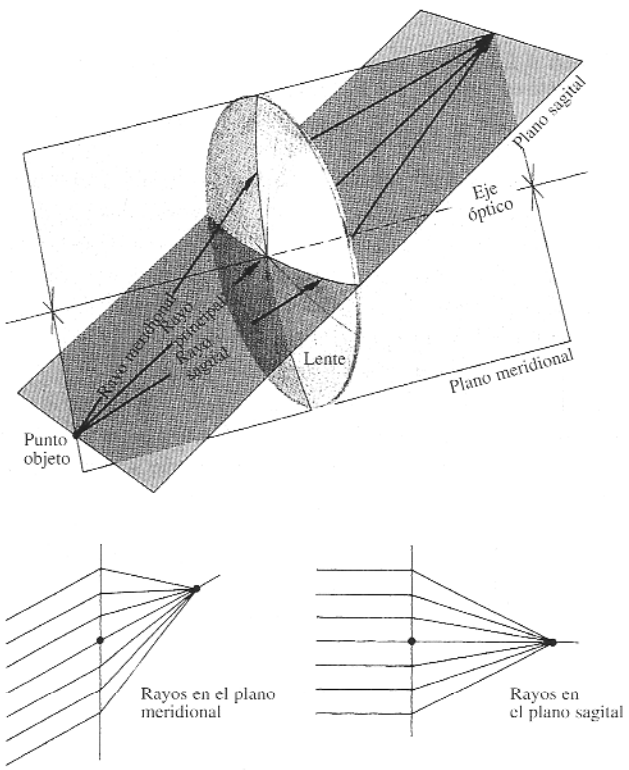
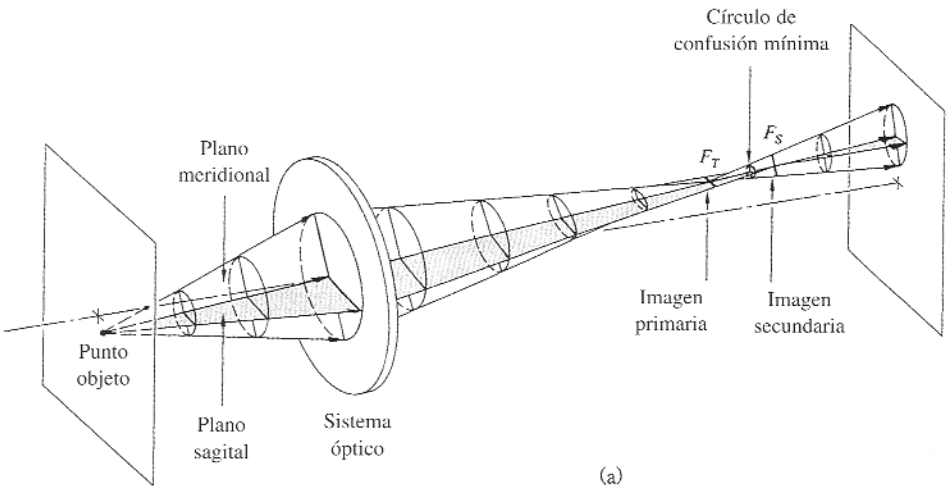
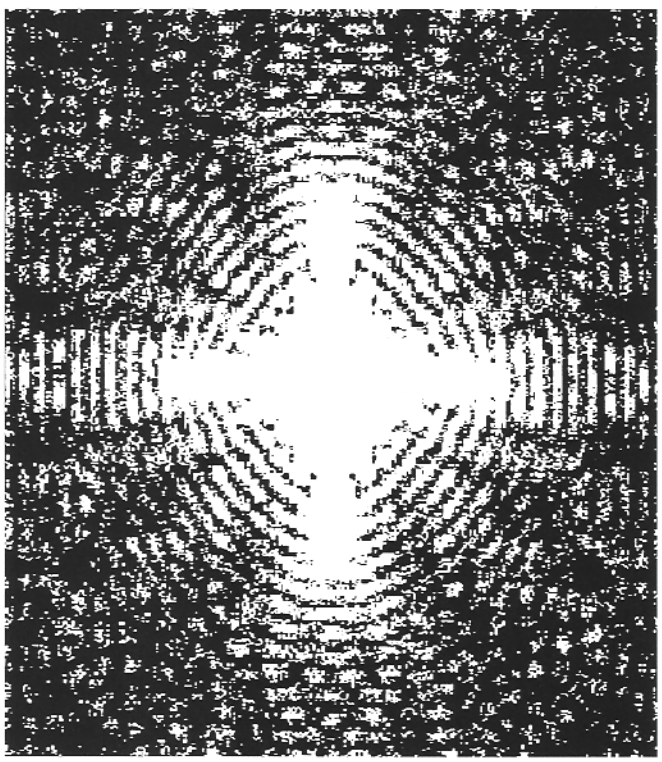


FIGURA 6.26 Planos meridionales y sagitales.

[4] Para ser precisos, el teorema del seno es válido para todos los valores de α_O únicamente en el plano sagital (del latín *sagitta* que significa "flecha"), sobre el que se hablará en la siguiente sección.



(a)



(b)

FIGURA 6.27 Astigmatismo. (*a*) La luz procedente de una fuente puntual monocromática se alarga por el efecto de una lente astigmática. (*b*) Un diagrama hecho por ordenador en que se muestra la distribución de la luz, es decir, la figura de difracción, cerca del círculo de mínima confusión, correspondiente a 0,8λ de astigmatismo. (Foto hecha por ordenador cedida por OPAL Group, San Petersburgo, Rusia.)

principal (es decir, el que pasa por el centro de la abertura) y el eje óptico. El *plano sagital* se define como el plano que contiene el rayo principal y, además, es perpendicular al plano meridional (figura 6.26). Al contrario que este último, que sigue siendo el mismo de principio a fin para cualquier sistema, por complicado que éste sea, el plano sagital generalmente cambia de pendiente conforme el rayo principal es desviado en los diferentes elementos. En consecuencia, para ser precisos debemos afirmar que existen varios planos sagitales, uno para cada región dentro del sistema. Sin embargo, todos los rayos oblicuos que parten del punto objeto y están contenidos en el plano sagital se denominan ***rayos sagitales***.

En el caso de un punto objeto axial, el cono de rayos es simétrico respecto a las superficies esféricas de una lente. No hay necesidad de diferenciar entre planos sagitales y meridionales. Las configuraciones de los rayos en todos los planos que contienen el eje óptico son idénticas. Cuando no existe aberración esférica, todas las distancias focales son iguales y, en consecuencia, los rayos llegarán a un foco común. En cambio, la configuración de un haz oblicuo de rayos paralelos será diferente en los planos meridional y sagital. Como resultado, las distancias focales en esos planos también serán diferentes. En efecto, en este caso los rayos meridionales se inclinan más con respecto a la lente que los rayos sagitales y tienen distancias focales más cortas. Usando el principio de Fermat, es posible demostrar [5] que la *diferencia en distancias focales* depende realmente de la potencia de las lentes (opuesta a la forma o al índice) y del ángulo de inclinación de los

[5] Véase A. W. Barton. A *Text Book on Light*, pág. 124.

rayos. Esta *diferencia astigmática,* como se le denomina frecuentemente, aumenta con rapidez conforme los rayos se hacen más oblicuos, es decir, a medida que el punto objeto se va alejando del eje óptico y es, por supuesto, cero sobre el eje.

Teniendo dos distancias focales diferentes, el haz cónico de rayos incidente sufre una considerable deformación después de refractarse (figura 6.27). La sección transversal del haz sale de la lente inicialmente con forma circular, pero gradualmente se va haciendo elíptica con el eje mayor en el plano sagital hasta que en *el foco tangencial o meridional* F_T la elipse degenera en una *«línea»* (por lo menos en la teoría de tercer orden). En realidad se trata de una complicada distribución alargada de difracción que se asemeja más a una línea cuanto mayor es el astigmatismo presente. Todos los rayos provenientes del punto objeto cruzan esta «línea», la cual se conoce como *imagen primaria.* Más allá de este punto la sección transversal del haz se abre rápidamente hasta hacerse circular de nuevo. En esa posición la imagen es una mancha circular conocida como el *círculo de mínima confusión.* Separándose más de la lente, la sección transversal se vuelve a deformar en una «línea» denominada *imagen secundaria.* Esta vez se encuentra sobre el plano meridional y en el *foco sagital Fs.*

La imagen de una fuente puntual formada por un sistema óptico ligeramente astigmático ($\approx 0{,}2\lambda$) en las proximidades del círculo de mínima confusión, se asemeja mucho a la distribución de Airy de anillos disco, aunque un poco asimétrica. A medida que aumenta el astigmatismo (por encima de $0{,}5\lambda$), la asimetría biaxial se hace más evidente. La imagen se transforma en una compleja distribución de zonas brillantes y oscuras (que recuerda a las figuras de difracción de Fresnel para aperturas rectangulares, pág. 497), y mantiene muy sutilmente una estructura curva que surge de la apertura circular. Recordemos que todo esto es válido cuando no hay AE ni coma.

Dado que el círculo de mínima confusión aumenta en diámetro a medida que se incrementa la diferencia astigmática, es decir, a medida que el objeto se aleja del eje óptico, la imagen se deteriorará perdiendo definición alrededor de los bordes. Obsérvese que la línea imagen secundaria cambiará de orientación con modificaciones en la posición objeto, pero siempre estará apuntando hacia el eje óptico, es decir, será radial. Igualmente, la «línea» imagen primaria variará en orientación pero siempre será perpendicular a la imagen secundaria. Este fenómeno causa el interesante efecto que se muestra en la figura 6.28, donde el objeto está formado por líneas radiales y tangenciales. Las imágenes primaria y secundaria están formadas, en efecto, de trazos transversales y radiales, que aumentan de tamaño conforme a la distancia del eje. En este último caso,

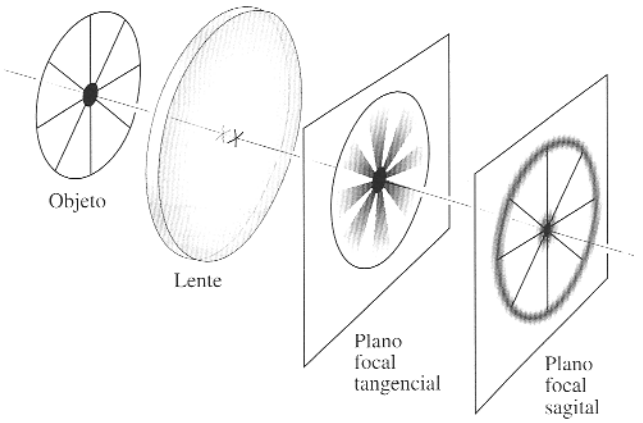


FIGURA 6.28 Imágenes en los planos focal, tangencial y sagital.

los trazos apuntan como flechas hacia el centro de la imagen —de ahí el nombre de *sagitta.*

La existencia de los focos sagital y tangencial puede verificarse directamente con una operación bastante simple. Coloquemos una lente positiva de distancia focal corta (alrededor de 10 ó 20 mm) en el haz de un láser de He-Ne. A una distancia considerable de la lente anterior, coloquemos otra lente positiva con una distancia focal algo mayor, de tal modo que el haz de luz divergente llene ahora dicha lente. A continuación pondremos entre las dos lentes un objeto adecuado, que puede ser una malla de alambre común (o una transparencia) y alinearemos los alambres horizontales a lo largo del eje x, y los verticales a lo largo del eje. Si rotamos la lente sometida a prueba 45° alrededor de la vertical (con los ejes *x, y, z* fijos en la lente), deberá observarse astigmatismo. El plano meridional es el plano *xz* (siendo *z* el eje de la lente, ahora a 45° respecto al eje del láser), mientras que el plano sagital corresponde al plano formado por *y* y el eje del láser. A medida que la malla de alambre se desplaza hacia la lente bajo prueba, se alcanzará un punto donde los alambres horizontales estén en foco sobre una pantalla, colocada a cierta distancia de la lente, mientras que los alambres verticales no lo estén. Ésta es la posición del foco sagital. Cada punto sobre el objeto tiene como imagen una línea corta en el plano meridional (horizontal), lo cual indica únicamente que los alambres horizontales están en foco. Aproximando la malla un poco más hacia la lente conseguiremos que las líneas verticales se vean definidas, mientras que las horizontales se verán borrosas. Éste es el foco tangencial. En cada una de las posiciones de foco podemos comprobar los efectos de la rotación de la malla sobre el eje central del láser.

Obsérvese que a diferencia del astigmatismo visual (pág. 214), el cual surge de una asimetría en las superficies del sistema óptico, la aberración de tercer orden del mismo nombre se aplica a lentes esféricas simétricas.

Los espejos, con la sola excepción de un espejo plano, también experimentan aberraciones monocromáticas similares a las de las lentes. Así tenemos que mientras un espejo parabólico está libre de AE para puntos objetos axiales en el infinito, sus imágenes fuera del eje son bastante malas debido a la coma y al astigmatismo. Esto reduce bastante su uso en instrumentos de campo pequeños tales como proyectores y telescopios astronómicos. Un espejo esférico cóncavo muestra AE, coma y astigmatismo. Es más, uno puede obtener resultados semejantes a los de la figura 6.27 reemplazando la lente por un espejo esférico iluminado oblicuamente. Este espejo, dicho sea de paso, presenta una AE considerablemente menor que una lente convexa de la misma distancia focal.

Curvatura de campo

Supongamos que tenemos un sistema óptico exento de todas las aberraciones hasta ahora consideradas. En él existirá entonces una correspondencia uno a uno entre los puntos de las superficies objeto e imagen (es decir, imágenes estigmáticas). Hemos mencionado anteriormente (sección 5.2.3) que un objeto plano, normal al eje, tendrá como imagen un plano sólo en la región paraxial. Para aperturas finitas, la curvatura resultante en las imágenes estigmáticas es la manifestación de la aberración primaria conocida como **curvatura de campo de Petzval**, en honor al matemático húngaro Josef Max Petzval (1807-1891). El efecto puede apreciarse rápidamente examinando las figura 5.22 (pág. 165) y 6.29. Un segmento esférico objeto σ_o tendrá una imagen a través de la lente como segmento esférico σ_i, ambos centrados en O. Si aplanamos σ_o en el plano σ'_o, cada punto objeto se desplazará hacia la lente a lo largo del correspondiente rayo principal, formando así una *superficie parabólica de Petzval* Σ_P. Mientras que para una lente positiva la superficie de Petzval se curva hacia *adentro,* hacia el plano objeto, para una lente negativa la superficie se curva hacia *afuera,* es decir, alejándose del plano. Evidentemente, una combinación adecuada de lentes positivas y negativas dará como resultado una curvatura de campo igual a cero. El desplazamiento Δx de un punto imagen de altura y_i sobre la superficie de Petzval, y a partir del plano imagen paraxial, vendrá dado por

$$\Delta x = \frac{y_i^2}{2} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{n_j f_j} \tag{6.43}$$

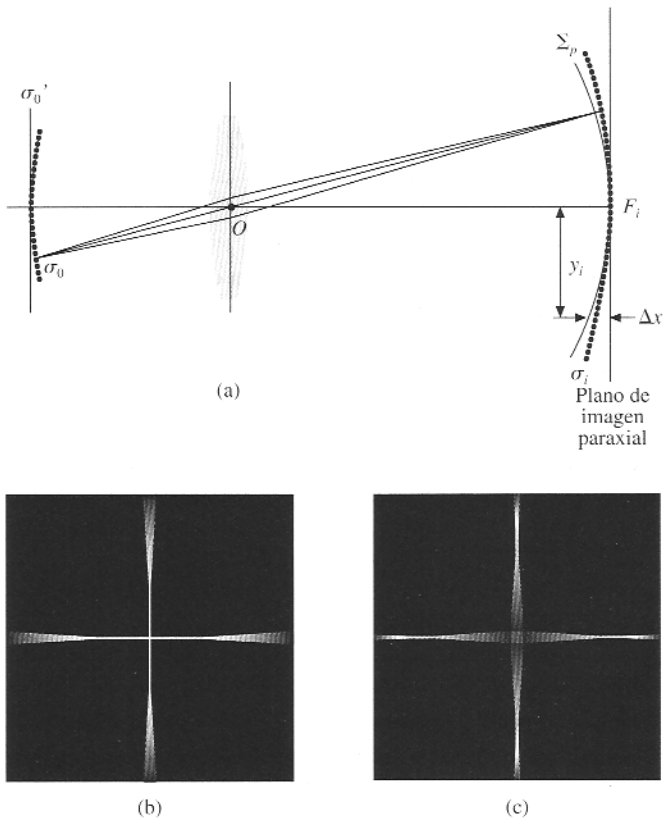


FIGURA 6.29 Curvatura del campo. (*a*) Cuando el objeto corresponde a σ'_o, la imagen corresponderá a la superficie Σ_P. (*b*) La imagen formada en una pantalla plana cerca del plano imagen paraxial estará enfocada tan sólo en su centro. (*c*) Al acercar la pantalla a la lente, se enfocarán los extremos.

donde n_j y f_j son los índices y distancias focales de las m lentes delgadas que forman el sistema. Esto implica que la superficie de Petzval es inalterable a los cambios en la posición o la forma de las lentes, o bien en la ubicación del diafragma, siempre y cuando los valores de n_j y f_j estén fijos. Obsérvese que para el caso sencillo de dos lentes delgadas ($m = 2$) teniendo cualquier separación, Δx *puede ser igual a cero* si se cumple que

$$\frac{1}{n_1 f_1} + \frac{1}{n_2 f_2} = 0$$

o, lo que es igual,

$$n_1 f_1 + n_2 f_2 = 0 \tag{6.44}$$

Ésta es la denominada **condición de Petzval**. Como ejemplo de su uso, supóngase que combinamos dos lentes delgadas,

una positiva y la otra negativa, tal que $f_1 = -f_2$ y $n_1 = n_2$. Dado que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \qquad [6.8]$$

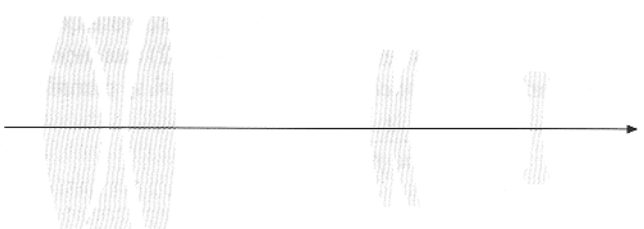
$$f = \frac{f_1^2}{d}$$

el sistema puede satisfacer la condición de Petzval, tener un campo plano y mantener además una distancia focal positiva finita.

En instrumentos visuales puede tolerarse una cierta curvatura porque el ojo puede acomodarse a ella. Para lentes fotográficas, la curvatura de campo es la posibilidad menos deseable porque las imágenes fuera de eje se hacen rápidamente borrosas en el plano de la película colocado en F_i. Un medio efectivo de anular la curvatura hacia adentro de una lente positiva, es colocar una lente negativa *aplanadora de campo* cerca del plano focal de la primera. Este sistema se aplica a menudo en objetivos fotográficos y de proyección cuando no existe otro método práctico de satisfacer la condición de Petzval (figura 6.30). En esta posición el aplanador tendrá poco efecto sobre otras aberraciones.

El astigmatismo está íntimamente ligado a la curvatura de campo. Si se produce la primera aberración mencionada, existirán *dos* superficies imágenes paraboloidales, la tangencial, Σ_T, y la sagital, Σ_S (tal y como podemos apreciar en la figura 6.31). Éstas son los lugares geométricos de todas las imágenes primarias y secundarias, respectivamente, mientras que el punto objeto esté vagando sobre el plano objeto. A una altura dada (y_i), un punto sobre Σ_T siempre estará tres veces más alejado de Σ_P que el punto correspondiente sobre Σ_S, y ambos estarán en el mismo lado de la superficie de Petzval (figura 6.31). Cuando no hay astigmatismo Σ_S y Σ_T coinciden sobre Σ_P. Es posible alterar las formas de Σ_S y Σ_T doblando o reubicando las lentes, o desplazando el diafragma. La configuración de la figura 6.31*b* es conocida como un campo *aplanado artificialmente*. Para lograr tal efecto, frecuentemente se usa un diafragma colocado justamente enfrente de una lente tipo menisco de una económica cámara de cajón. La superficie de mínima confusión, Σ_{MC}, es plana y la imagen en ella es tolerable, pero debido al astigmatismo irá perdiendo definición en los bordes. Es decir, aunque sus lugares geométricos formen Σ_{MC}, los círculos de mínima confusión aumentan en diámetro con la distancia fuera de eje. Los objetivos fotográficos modernos de buena calidad son ***anastigmáticos***, es decir, están diseñados para que Σ_S y Σ_T se entrecrucen dando como resultado un ángulo adicional fuera de eje donde el astigmatismo es cero. El Triplete Cooke, el Tessar, el Ortómetro y el Biotar (figura 5.117) son todos anastigmáticos, así como el relativamente rápido Sonnar de Zeiss, cuyo astigmatismo residual se ilustra gráficamente en la figura 6.32. Obsérvese el campo relativamente plano y el bajo nivel de astigmatismo que encontramos en la mayor parte del plano de la película.

(a) Lente de Petzval con aplanador de campo



(b) Lente de proyección de 16 mm

FIGURA 6.30 El aplanador de campo.

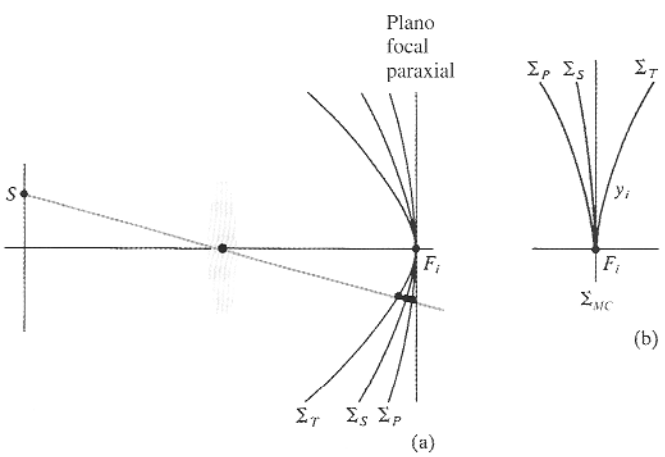


FIGURA 6.31 Superficies imagen tangencial, sagital y de Petzval.

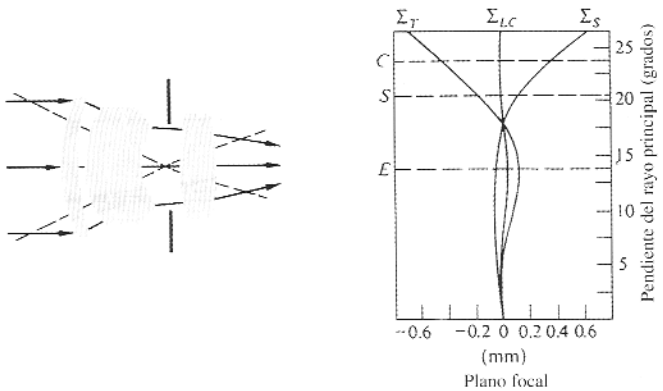


FIGURA 6.32 Un Sonnar típico. Las marcas *C*, *S* y *E* indican los límites del formato de la película de 35 mm (diafragma de campo), es decir, esquinas, lados y contornos. La familia de los Sonnar se halla entre el doble Gauss y el triplete.

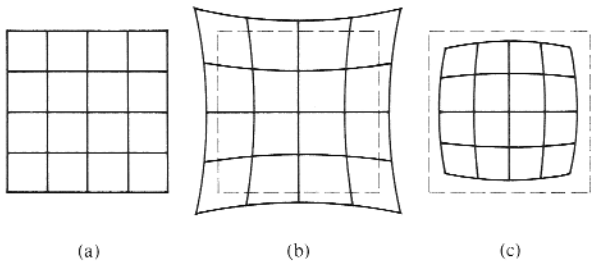


FIGURA 6.33 (*a*) Objeto sin distorsión. (*b*) Cuando el aumento en el eje óptico es inferior al aumento fuera del eje, el resultado es la distorsión en cojín. (*c*) Cuando es mayor en el eje que fuera la distorsión es de barril.

Volvamos por un momento a la cámara Schmidt de la figura 5.126 (pág. 233), dado que ahora estamos mejor preparados para entender su funcionamiento. Con un diafragma en el centro de curvatura del espejo esférico, todos los rayos principales, que por definición pasan por *C*, incidirán normalmente sobre el espejo. Además cada haz de rayos de un objeto puntual distante es simétrico respecto a su rayo principal. En efecto, cada rayo principal sirve de eje óptico y, por lo tanto, no hay puntos fuera de eje y en principio no hay coma ni astigmatismo. En lugar de intentar aplanar la superficie imagen, resolvemos el problema de la curvatura simplemente curvando la placa fotográfica.

Distorsión

La última de las cinco aberraciones monocromáticas primarias es la **distorsión**. Su origen radica en el hecho de que el aumento transversal, M_T, puede ser una función de la distancia de imagen descentrada al eje, y_i, distancia que puede diferir de la prevista en la teoría paraxial, donde M_T es constante. Es decir: la distorsión se produce cuando las diversas zonas de la lente poseen distancias focales y aumentos diferentes. Cuando no se presenta asociada a ninguna de las otras aberraciones, la distorsión se manifiesta como una deformación de la imagen en su conjunto, a pesar de que cada punto está nítidamente enfocado. En consecuencia, cuando procesamos la imagen con un sistema óptico que registre una ***distorsión positiva*** o ***de cojín***, una disposición cuadrada se deforma como en la figura 6.33*b*. En ese caso, cada punto imagen se desplaza radialmente hacia afuera del centro y, por lo tanto, los puntos más distantes se desplazan una distancia mayor, es decir, M_T aumenta con y_i. Asimismo, la ***distorsión negativa*** o ***de barril*** corresponde a la situación donde M_T disminuye con la distancia axial y, en efecto, cada punto en la imagen se mueve radialmente hacia adentro acercándose al centro (figura 6.33*c*). La distorsión puede apreciarse fácilmente mirando a través de una lente con aberración un papel pautado o cuadriculado. La distorsión en las lentes muy delgadas es esencialmente nula, mientras que en las lentes simples gruesas, positivas o negativas, la distorsión es positiva o negativa, respectivamente. La introducción de un diafragma en un sistema de lentes delgadas irá invariablemente acompañada de distorsión, tal y como se indica en la figura 6.34. Una excepción a esto se produce cuando el diafragma de apertura se encuentra en la lente, de tal modo que el rayo principal pasa por los puntos principales (en este caso, todos coinciden en *O*). Si el diafragma está enfrente de una lente positiva, como en la figura 6.34*b*, la distancia objeto medida a lo largo del rayo principal será mayor que cuando el diafragma estaba en la lente ($S_2A > S_2O$). Por lo tanto, x_o será más grande y [ecuación (5.26)] M_T será más pequeña, es decir, se producirá distorsión de barril. Dicho de otro modo, M_T para un punto fuera del eje será menor si colocamos un diafragma frontal. La diferencia es una medida de la aberración la cual, por cierto, existe independientemente del tamaño de la apertura. Del mismo modo, un diafragma posterior (figura 6.34*c*) disminuye x_o a lo largo del rayo principal (es decir, $S_2O > S_2B$), aumenta por lo tanto M_T y se produce una distorsión de cojín. Si para una lente y un diafragma determinados *intercambiamos el objeto y la imagen, el efecto obtenido será, en consecuencia, el cambio de signo de la distorsión.* Las posiciones del diafragma antes mencionadas producirán el efecto contrario cuando la lente sea negativa.

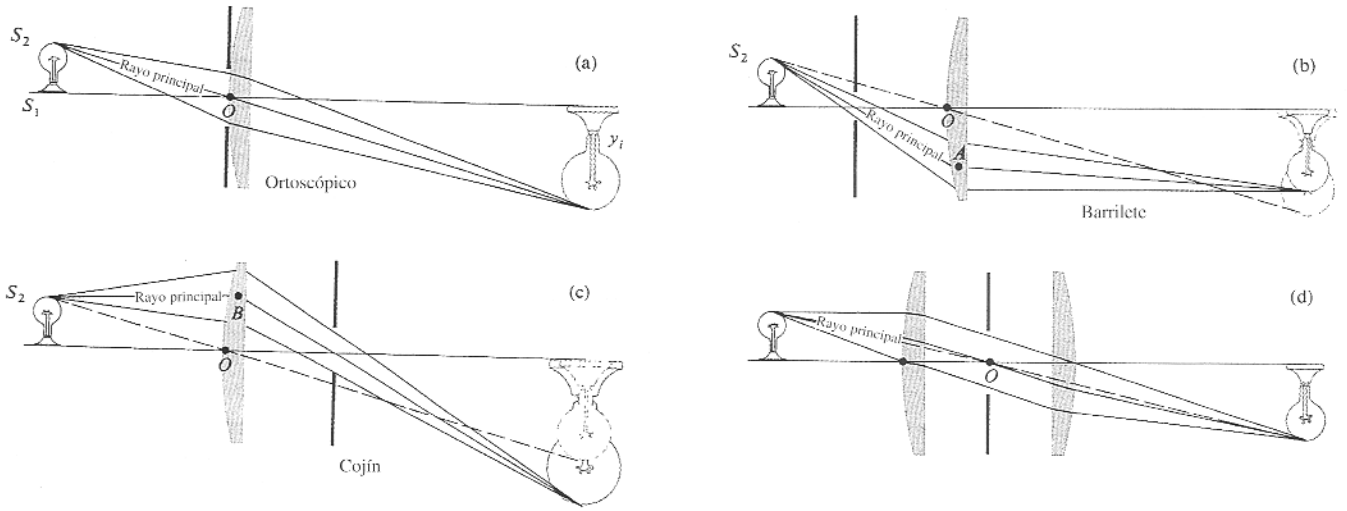


FIGURA 6.34 Efecto de la posición del diafragma en la distorsión.

Todo lo anterior indica el empleo de un diafragma situado justo en el medio de dos elementos de lente idénticos. La distorsión de la primera lente quedará anulada con la contribución de la segunda. Este método ha sido empleado para avanzar en el diseño de un gran número de lentes fotográficas (figura 5.117). Para estar seguros, si la lente es perfectamente simétrica y opera como en la figura 6.34*d*, las distancias objeto e imagen serán iguales y por lo tanto $M_T = 1$ (por cierto: la coma y el color lateral también serán cero). Esto se aplica a lentes de copiadora (conjugados finitos) usadas, por ejemplo, para grabar datos. Sin embargo, incluso cuando M_T no es igual a uno, es muy común construir un sistema más o menos simétrico alrededor del diafragma, ya que así las diferentes aberraciones se ven reducidas notablemente.

La distorsión puede surgir en sistemas de lentes compuestas, como, por ejemplo, en la disposición del teleobjetivo mostrado en la figura 6.35. Para un objeto puntual distante, el borde de la lente acromática positiva sirve como diafragma de apertura. Esta configuración es semejante a la de una lente negativa con un diafragma frontal y, por lo tanto, produce distorsión positiva o de cojín.

Supongamos que un rayo principal entra y sale de un sistema óptico con la misma dirección, como por ejemplo en la figura 6.34*d*. El punto en el cual el rayo cruza el eje es el centro óptico del sistema; pero, dado que estamos hablando del rayo principal, dicho punto es también el centro del diafragma de apertura. Esta es la situación que se muestra en la figura 6.34*a*, donde hemos puesto el diafragma contra la lente delgada. En ambas circunstancias, los segmentos del rayo principal que entran y salen son paralelos y hay distorsión cero, es decir, el sistema es *ortoscópico*. Esto implica asimismo que las pupilas de entrada y salida se corresponden con los planos principales (siempre que el sistema esté contenido en un solo medio; véase figura 6.2). Hay que tener en cuenta que el rayo principal es ahora un rayo que pasa por el punto principal. *Un sistema de lentes delgadas tendrá distorsión cero si su centro óptico coincide con el centro del diafragma de apertura.* Por ejemplo, en una cámara oscura, los rayos que unen los puntos conjugados objeto e imagen, son rectos y pasan a través del centro del diafragma de apertura. Los rayos de entrada y salida son obviamente paralelos —forman un único y solo rayo— y no hay distorsión.

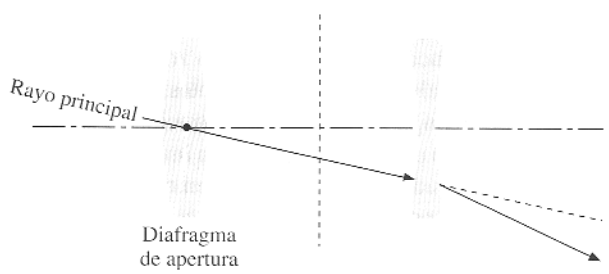


FIGURA 6.35 Distorsión en una lente compuesta.

6.3.2 Aberraciones cromáticas

Hasta el momento, hemos considerado las cinco aberraciones primarias o de Seidel desde el punto de vista de la luz monocromática. Sabemos a ciencia cierta que el hecho de que la fuente posea un ancho de banda espectral amplio, afecta a las aberraciones, pero los efectos serán de poca importancia, a menos que el sistema esté totalmente corregido. Existen, sin embargo, las **aberraciones cromáticas** que surgen específicamente con la luz policromática. Estas aberraciones son mucho más importantes que las anteriores. La ecuación de trazado de rayos (6.12) es una función de los índices de refracción, los cuales, a su vez, varían con la longitud de onda. Diferentes rayos «de colores» cruzan el sistema con diferentes trayectorias, lo cual constituye la quintaesencia de la aberración cromática.

Dado que la ecuación de lentes delgadas

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad [5.16]$$

depende de la longitud de onda a través de $n_l(\lambda)$, la distancia focal variará también con λ. En general (figura 3.37, pág. 72), $n_l(\lambda)$ disminuye con la longitud de onda en la región visible y, por lo tanto, $f(\lambda)$ aumenta con λ. El resultado se ilustra en la figura 6.36 donde los colores que componen un haz de luz blanca colimado son enfocados sobre diferentes puntos del eje. La distancia axial entre dos de dichos puntos focales, la cual comprende una determinada gama de frecuencias (por ejemplo, del azul al rojo) se denomina ***aberración cromática axial*** *(o longitudinal)*, AC A para abreviar.

Las aberraciones cromáticas, o AC, pueden observarse fácilmente con una lente convergente simple y gruesa. Cuando la iluminemos con una fuente puntual policromática (la llama de una vela servirá), la lente proyectará una imagen real rodeada por un halo. Si desplazamos el plano de observación más cerca de la lente, la periferia de la imagen borrosa tendrá un tinte naranja-rojo. Al alejarlo de nuevo de la lente, más allá de la mejor imagen, los contornos adquirirán un tinte azul violáceo. La localización del círculo de mínima confusión (es decir, el plano Σ_{LC}) corresponderá con la posición donde aparezca la mejor imagen. La coloración resultará mucho más evidente si observamos directamente la fuente a través de la lente.

La imagen de un punto fuera de eje estará formada por las componentes de frecuencia que la constituyen, y cada una llegará a una altura diferente por encima del eje (figura 6.37). En esencia, la dependencia con la frecuencia de f originará a su vez otra dependencia con la frecuencia del aumento lateral. La distancia vertical entre dos de dichos puntos imágenes (el azul y el rojo son los que se utilizan con mayor frecuencia) es una medida **de *aberración cromática lateral***, AC L, o ***color lateral***. En consecuencia, una lente con aberración cromática que esté iluminada por una luz blanca, llenará un volumen de espacio con un continuo de imágenes más o menos superpuestas, las cuales variarán en tamaño y color. Dado que el ojo es más sensible a la parte amarilla-verde del espectro, la tendencia es enfocar la lente hacia esa región. Con tal configuración, sería posible ver el resto de las imágenes de color superpuestas y ligeramente desenfocadas, produciendo un borrón blancuzco o una superposición turbia.

Cuando el foco azul, F_A se encuentra a la izquierda del foco rojo, F_R, se dice que la AC A es positiva, tal y como se muestra en la figura 6.36. Por el contrario, una lente negativa generará una AC A negativa, en la cual los rayos azules más fuertemente desviados procederán de un punto más a la derecha del foco rojo. Desde el punto de vista físico, lo que sucede es que la lente, ya sea convexa o cóncava, es prismática en forma, es decir, se hace más delgada o gruesa conforme la distancia radial con respecto al eje aumenta. Como bien sabemos, los rayos se desvían en dirección al eje o alejándose de él, respectivamente. En ambos casos, los rayos se desvían hacia la

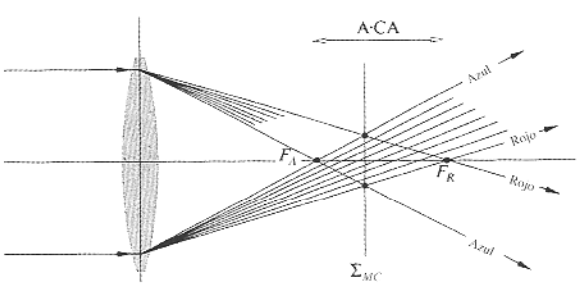


FIGURA 6.36 Aberración cromática axial.

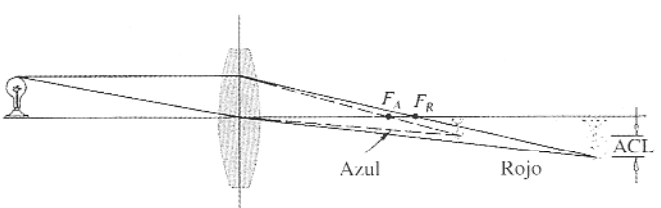


FIGURA 6.37 Aberración cromática lateral.

«base» más gruesa de la sección transversal prismática. La desviación angular, sin embargo, es una función creciente de n y por lo tanto decrece con λ. Así la luz azul es la que más se desvía y la que más cerca de la lente se enfoca. En otras palabras, en una lente convexa, el foco rojo será el más alejado y estará a la derecha; para una lente cóncava, será el más alejado y estará a la izquierda.

El ojo humano posee un importante nivel de aberración cromática que se compensa con diversos mecanismos psicológicos. No obstante, es posible apreciar el efecto con un pequeño punto morado: si lo sujetamos cerca del ojo, parecerá azul en el centro y rojo alrededor; si lo alejamos, nos parecerá rojo en el centro y azul alrededor.

Dobletes acromáticos delgados

Todo lo anterior parece sugerir que una combinación de dos lentes delgadas, una positiva y otra negativa, podría producir tal vez una superposición de F_R y F_B* (figura 6.38). Esta configuración se dice que está *acromatizada* para dos longitudes de onda específicas. Obsérvese que lo que realmente intentamos hacer es eliminar la dispersión total (es decir, el hecho de que cada color es desviado en cantidades diferentes) y no la desviación total propiamente dicha. Con las dos lentes separadas para una distancia d,

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \qquad [6.8]$$

En lugar de seguir operando con el segundo término de la ecuación de lentes delgadas [ecuación (5.16)], abreviemos la notación y escribamos $1/f_1 = (n_1 - 1)\rho_1$ y $1/f_2 = (n_2 - 1)\rho_2$, para los dos elementos. Entonces

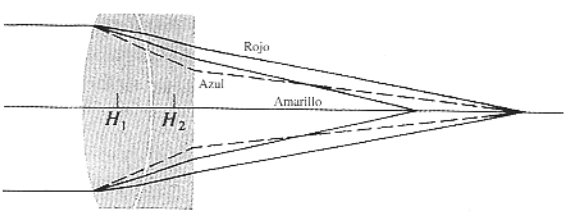


FIGURA 6.38 Un doblete acromático. Los caminos de los rayos se han exagerado mucho.

* N. del Revisor: Para no confundir las iniciales en los colores azul y amarillo conservamos la notación en inglés, en la cual R corresponde al rojo (red), B a azul (blue) y Y a amarillo (yellow).

$$\frac{1}{f} = (n_1 - 1)\rho_1 + (n_2 - 1)\rho_2 - d(n_1 - 1)\rho_1(n_2 - 1)\rho_2 \qquad (6.45)$$

Esta expresión dará las distancias focales del doblete para la luz roja (f_R) y el azul (f_B), cuando se introducen en ella los índices apropiados, a saber, n_{1R}, n_{2R}, n_{1B} y n_{2B}. Pero si f_R es igual a f_B, entonces

$$\frac{1}{f_R} = \frac{1}{f_B}$$

y, si utilizamos la ecuación (6.45),

$$(n_{1R} - 1)\rho_1 + (n_{2R} - 1)\rho_2 - d(n_{1R} - 1)\rho_1(n_{2R} - 1)\rho_2 = (n_{1B} - 1)\rho_1 + (n_{2B} - 1)\rho_2 - d(n_{1B} - 1)\rho_1(n_{2B} - 1)\rho_2 \qquad (6.46)$$

Un caso de especial relevancia es cuando $d = 0$; es decir, cuando las dos lentes están en contacto. Desarrollando la ecuación (6.46) con $d = 0$, tenemos

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{1B} - n_{1R}} \qquad (6.47)$$

La distancia focal (f_Y) de la lente compuesta puede ser definida correctamente como aquella asociada con la luz amarilla, aproximadamente en la mitad de los extremos azul y rojo. Para las lentes componentes para la luz amarilla, $1/f_{1Y} = (n_{1Y} - 1)\rho_1$ y $1/f_{2Y} = (n_{2Y} - 1)\rho_2$. Por lo tanto

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(n_{2Y} - 1)}{(n_{1Y} - 1)}\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} \qquad (6.48)$$

Igualando las ecuaciones (6.47) y (6.48) tenemos

$$\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} = -\frac{(n_{2B} - n_{2R})/(n_{2Y} - 1)}{(n_{1B} - n_{1R})/(n_{1Y} - 1)} \qquad (6.49)$$

Las cantidades

$$\frac{n_{2B} - n_{2R}}{n_{2Y} - 1} \quad \text{y} \quad \frac{n_{1B} - n_{1R}}{n_{1Y} - 1}$$

se conocen como los **poderes de dispersión** de los dos materiales que forman las lentes. Sus recíprocos, V_2 y V_1, se conocen de varias maneras, como son *índices de dispersión, números V,* o **números de Abbe**. A menor número de Abbe mayor es el poder dispersivo. En consecuencia

$$\frac{f_{2Y}}{f_{1Y}} = -\frac{V_1}{V_2}$$

o bien

$$f_{1Y}V_1 + f_{2Y}V_2 = 0 \qquad (6.50)$$

Dado que los poderes de dispersión son positivos, también lo son los números V. Esto implica, como ya apuntamos anteriormente, que una de las dos lentes debe ser negativa y la otra positiva si queremos obtener la ecuación (6.50), es decir, si f_R es igual a f_A.

En esta situación podríamos diseñar un *doblete acromático*, es más, deberíamos hacerlo, pero antes de eso, aún tenemos que puntualizar algunos aspectos. Calificar las longitudes de onda como roja, amarilla o azul es bastante impreciso desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas. En lugar de eso, lo normal es especificar líneas espectrales cuyas longitudes de onda se conocen con gran precisión. Las **líneas de Fraunhofer**, como comúnmente se las denomina, se utilizan como marcas de referencia en el espectro. En la tabla 6.1 aparecen listadas algunas de las que se emplean para la región visible. Las líneas F, C y d (es decir, D_3) son las que se usan con mayor frecuencia (para el azul, rojo y amarillo), y con luz d, generalmente se trazan rayos paraxiales. Los fabricantes de vidrio generalmente listan sus materiales en función del número de Abbe, tal y como se muestra en el gráfico de índices de refracción de la figura 6.39, frente a

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \tag{6.51}$$

(Véase asimismo la tabla 6.2.) De este modo, la ecuación (6.50) podría mejorarse de la siguiente manera

$$f_{1d}V_{1d} + f_{2d}V_{2d} = 0 \tag{6.52}$$

donde los subíndices numéricos aluden a los dos vidrios usados en el doblete, y los alfabéticos a la línea d.

TABLA 6.1 Diversas líneas intensas de Fraunhofer

Clasificación	Longitud de onda (Å)*	Fuente
C	6562,816 Rojo	H
D_1	5895,923 Amarillo	Na
D	Centro del doblete 5892,9	Na
D_2	5889,953 Amarillo	Na
D_3 o d	5875,618 Amarillo	He
b_1	5183,618 Verde	Mg
b_2	5172,699 Verde	Mg
c	4957,609 Verde	Fe
F	4861,327 Azul	H
f	4340,465 Violeta	H
g	4226,728 Violeta	Ca
K	3933,666 Violeta	Ca

*1 Å = 0,1 nm.

Abramos un paréntesis para decir que Newton, basándose en resultados experimentales con un número limitado de materiales existentes en aquel tiempo, concluyó erróneamente que el poder de dispersión era constante para todos los vidrios. Esto es tanto como decir [ecuación (6.52)] que $f_{1d} = -f_{2d}$ en cuyo caso el doblete tendría potencia cero. De acuerdo con estos resultados, Newton desvió la atención de sus estudios del telescopio refractor al reflector, lo cual, con el paso del tiempo, demostró ser una exitosa maniobra. El sistema acromático fue inventado alrededor del año 1733 por Chester Moor Hall, pero permaneció en el limbo hasta que fue supuestamente reinventado y patentado en 1758 por el óptico londinense John Dollond.

En la figura 6.40 se muestran varias formas del doblete acromático. Su configuración depende de los tipos de vidrio seleccionados, así como de la elección de las otras aberraciones susceptibles de ser controladas. Por cierto, cuando se compre una lente doblete ya confeccionada de origen desconocido, hay que tener cuidado en no comprar una que incluya ciertas aberraciones incluidas a propósito para compensar los errores del sistema original del que proviene. Tal vez el doblete más comúnmente usado es el doblete pegado tipo Fraunhofer. Este doblete está formado por una lente biconvexa *crown* [6] en contacto con una cóncavo-plana (o casi plana) *flint*. El uso de un elemento frontal de *crown* es bastante más común debido a su resistencia al desgaste. Dado que su forma global es más bien convexo-plana, si escogemos los vidrios apropiados, podremos corregir también las aberraciones esférica y de coma. Supongamos que queremos diseñar un doblete Fraunhofer con una distancia focal de 50 cm. Podemos obtener una idea aproximada de cómo escoger los vidrios resolviendo la ecuación (6.52) al mismo tiempo que la ecuación de lente compuesta

$$\frac{1}{f_{1d}} + \frac{1}{f_{2d}} = \frac{1}{f_d}$$

para obtener

$$\frac{1}{f_{1d}} = \frac{V_{1d}}{f_d(V_{1d} - V_{2d})} \tag{6.53}$$

y

$$\frac{1}{f_{2d}} = \frac{V_{2d}}{f_d(V_{2d} - V_{1d})} \tag{6.54}$$

En consecuencia, a fin de evitar valores pequeños de f_{1d} y f_{2d}, los cuales implicarían superficies fuertemente curvadas en las lentes,

[6] Tradicionalmente los vidrios en el rango aproximado de $n_d > 1{,}60$, $v_d > 50$ y $n_d < 1{,}60$, $V_d > 55$, son conocidos unos como *crowns* y los otros como *flints*. Obsérvese la designación con letras de la figura 6.39.

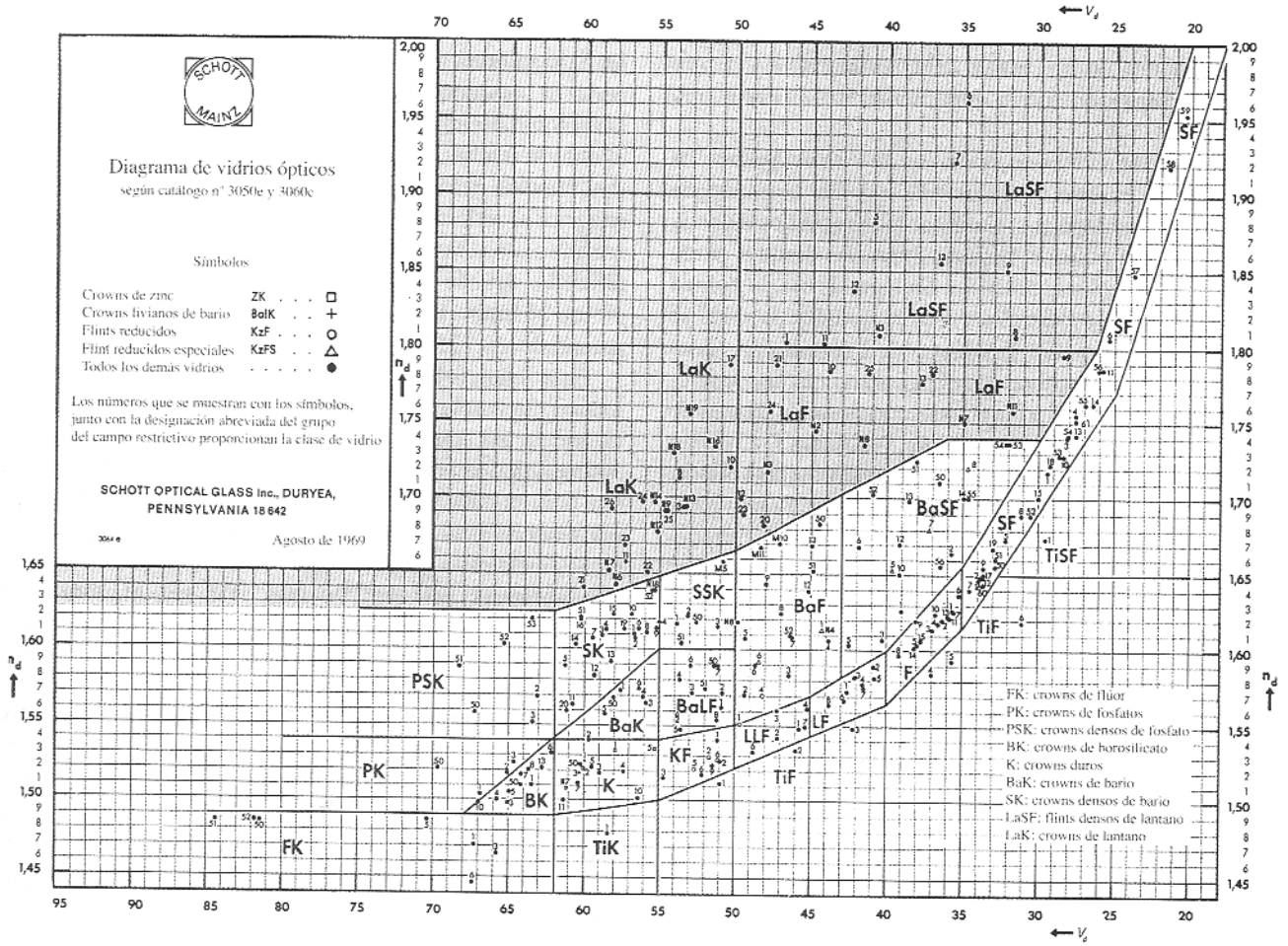


FIGURA 6.39 Índice de refracción frente al número de Abbe para varios vidrios. Los ejemplares en la parte superior sombreada son vidrios de tierras raras que tienen índices elevados de refracción y bajas dispersiones.

la diferencia V_{1d} y V_{2d} debe hacerse grande (del orden de 20 como mínimo). De la figura 6.39 (o su equivalente) escogemos, pongamos, BK1 y F2, cuyos índices de catálogo son $n_C = 1{,}50763$, $n_d = 1{,}51009$, $n_F = 1{,}51566$ y $n_C = 1{,}61503$, $n_d = 1{,}62004$ y $n_F = 1{,}63208$, respectivamente. Asimismo, sus números V se dan generalmente con bastante exactitud y no es necesario calcularlos. En este caso son $V_{1d} = 63{,}46$ y $V_{2d} = 36{,}37$, respectivamente. Las distancias focales, o si se quiere, las potencias de las dos lentes vienen dadas par las ecuaciones (6.53) y (6.54):

$$\mathscr{D}_{1d} = \frac{1}{f_{1d}} = \frac{63{,}46}{0{,}50(27{,}09)}$$

y

$$\mathscr{D}_{2d} = \frac{1}{f_{2d}} = \frac{36{,}37}{0{,}50(-27{,}09)}$$

Por lo tanto, $\mathscr{D}_{1d} = 4{,}685$ dioptrías y $\mathscr{D}_{2d} = -2{,}685$ dioptrías; la suma es igual a dos dioptrías lo cual es 1/0,5, como corresponde. Para facilitar la fabricación, haremos que la primera lente o lente positiva sea equiconvexa. En consecuencia, sus radios R_{11} y R_{12} tendrán igual magnitud. Es decir,

$$\rho_1 = \frac{1}{R_{11}} - \frac{1}{R_{12}} = \frac{2}{R_{11}}$$

TABLA 6.2 Vidrios ópticos

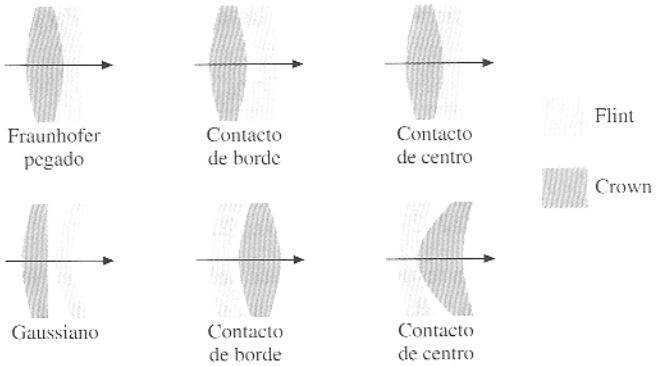
Tipo Número	Nombre	n_D	V_D
511:635	Crown de borosilicato—BSC-1	1,511 0	63,5
517:645	Crown de borosilicato—BSC-2	1,517 0	64,5
513:605	Crown—C	1,512 5	60,5
518:596	Crown	1,518 0	59,6
523:586	Crown—C-1	1,523 0	58,6
529:516	Crown de sílex—CF-1	1,528 6	51,6
541:599	Crown liviano de bario—LBC-1	1,541 1	59,9
573:574	Crown de bario—LBC-2	1,572 5	57,4
574:577	Crown de bario	1,574 4	57,7
611:588	Crown denso de bario—DBC-1	1,611 0	58,8
617:550	Crown denso de bario—DBC-2	1,617 0	55,0
611:572	Crown denso de bario—DBC-3	1,610 9	57,2
562:510	Flint liviano de bario—LBF-2	1,561 6	51,0
588:534	Flint liviano de bario—LBF-1	1,588 0	53,4
584:460	Flint de bario—BF-1	1,583 8	46,0
605:436	Flint de bario—BF-2	1,605 3	43,6
559:452	Flint extra liviano—ELF-1	1,558 5	45,2
573:425	Flint liviano—LF-1	1,572 5	42,5
580:410	Flint liviano—LF-2	1,579 5	41,0
605:380	Flint denso—DF-1	1,605 0	38,0
617:366	Flint denso—DF-2	1,617 0	36,6
621:362	Flint denso—DF-3	1,621 0	36,2
649:338	Flint extra denso—EDF-1	1,649 0	33,8
666:324	Flint extra denso—EDF-5	1,666 0	32,4
673:322	Flint extra denso—EDF-2	1,672 5	32,2
689:309	Flint extra denso—EDF	1,689 0	30,9
720:293	Flint extra denso—EDF-3	1,720 0	29,3

Extraído de T, Calvert, «Optical Components», *Electromechanical Design*, mayo de 1971. El número del tipo se obtiene de $(n_D - 1)$: $(10\ V_D)$, donde n_D se redondea hasta tres decimales. Para más detalles, véase Smith, *Modern Optical Engineering*, figura 7.5.

o lo que es igual a decir,

$$\frac{2}{R_{11}} = \frac{\mathcal{D}_{1d}}{n_{1d} - 1} = \frac{4{,}685}{0{,}510\,09} = 9{,}185$$

Así pues, $R_{11} = -R_{12} = 0{,}2177$ m. Además, como se ha especificado que las lentes deben estar en contacto, esto implica $R_{12} = R_{21}$, es decir, la segunda superficie de la primera lente



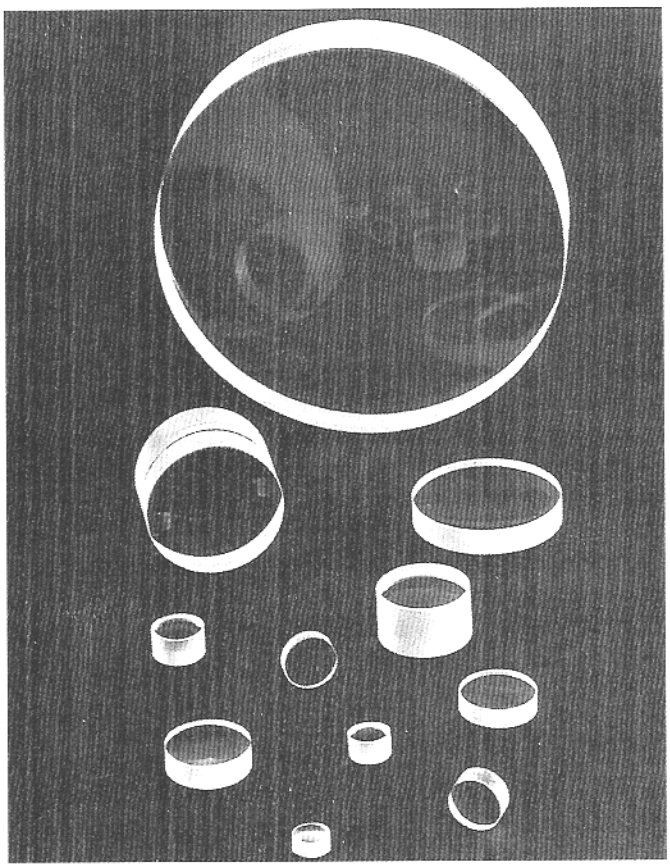


FIGURA 6.40 (*a*) Dobletes acromáticos. (*b*) Dobletes y tripletes. (Foto cedida por Melles Griot.)

coincide con la primera superficie de la segunda lente. Para la segunda lente

$$\rho_2 = \frac{1}{R_{21}} - \frac{1}{R_{22}} = \frac{\mathcal{D}_{2d}}{n_{2d} - 1}$$

o bien

$$\frac{1}{-0{,}2177} - \frac{1}{R_{22}} = \frac{-2{,}685}{0{,}620\,04}$$

$R_{22} = -3{,}819$ m. En resumen, los radios del elemento de *crown* son $R_{11} = 21{,}8$ cm y $R_{12} = -21{,}8$ cm, mientras que para la componente de *flint* $R_{21} = -21{,}8$ cm y $R_{22} = -381{,}9$ cm.

Obsérvese que para una combinación de lentes delgadas los planos principales coinciden de tal forma que la distancia focal acromatizada corrige la AC A y la AC L. En un doblete grueso, sin embargo, aun cuando las distancias focales para el azul y el rojo sean idénticas, los planos principales para diferentes longitudes de onda serán diferentes. En consecuencia, aunque el aumento es el mismo para todas las longitudes de onda, los puntos focales pueden no coincidir, es decir, AC L estará corregida pero AC A no.

En el análisis anterior únicamente se llevaron a un foco común los rayos *C* y *F*, y la línea *d* fue incluida a fin de establecer la distancia focal total del doblete. No es posible que *todas* las longitudes de onda que atraviesan un doblete tengan un mismo foco. El cromatismo residual obtenido se conoce como *espectro secundario*. La eliminación del espectro secundario es particularmente problemática cuando el diseño se limita a los tipos de vidrio que existen actualmente. A pesar de todo, un elemento de fluorita (CaF_2) combinado con otro de un índice apropiado, puede formar un doblete acromatizado en tres longitudes de onda y con un escaso espectro secundario. Sin embargo, los tripletes se usan con mucha frecuencia para la corrección de color en tres o incluso cuatro longitudes de onda. El espectro secundario de un binocular puede observarse fácilmente mirando a un objeto blanco distante. En los bordes veremos una especie de halo de color magenta y verde —se pueden hacer pruebas desplazando el foco hacia adelante y hacia atrás.

Dobletes Acromáticos Separados

También es posible acromatizar la distancia focal de un doblete compuesto por dos elementos compuesto del mismo tipo de vidrio y separados por una distancia considerable. Regresemos a la ecuación (6.46) y establezcamos $n_{1R} = n_{2R} = n_R$ y $n_{1B} = n_{2B} = n_B$. Después de ciertas manipulaciones algebraicas, obtenemos

$$(n_R - n_B)[(\rho_1 + \rho_2) - \rho_1\rho_2 d(n_B + n_R - 2)] = 0$$

o bien

$$d = \frac{1}{(n_B + n_R - 2)}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Nuevamente, al introducir la frecuencia de referencia para el amarillo, como ya hicimos anteriormente, a saber, $1/f_{1Y} = (n_{1Y} - 1)\rho_1$ y $1/f_{2Y} = (n_{2Y} - 1)\rho_2$, podemos reemplazar ρ_1 y ρ_2. Por consiguiente,

$$d = \frac{(f_{1Y} + f_{2Y})(n_Y - 1)}{n_B + n_R - 2}$$

Donde $n_{1Y} = n_{2Y} = n_Y$. Suponiendo que $n_Y = (n_B + n_R)/2$, tenemos

$$d = \frac{f_{1Y} + f_{2Y}}{2}$$

o en la línea *d*

$$d = \frac{f_{1d} + f_{2d}}{2} \tag{6.55}$$

Ésta es precisamente la fórmula adoptada por el ocular de Huygens (sección 5.7.4). Dado que las distancias focales para el azul y rojo son iguales, pero los correspondientes planos principales para el doblete no tienen por qué serlo, los dos rayos generalmente no se cruzarán sobre el mismo punto focal. Por lo tanto, la aberración cromática lateral del ocular está bien corregida, mientras que la aberración cromática axial no lo está.

Para obtener un sistema exento de ambas aberraciones cromáticas, los rayos azul y rojo deben salir paralelos el uno respecto del otro (no AC L) y deben cruzarse en el mismo punto del eje óptico (no AC A), lo cual significa que deben solaparse. Dado que éste es el caso de un doblete acromático delgado, esto implica que un sistema de muchos elementos estará compuesto, por regla general, de componentes acromáticos destinados a evitar que los rayos rojo y azul se separen (figura 6.41). Como pasa con todo, también aquí hay excepciones a la regla. El triplete Taylor (sección 5.7.7) es una de ellas. Los dos rayos de colores que lo acromatizan se separan dentro de la lente, pero posteriormente se recombinan y salen unidos.

6.4 Sistemas GRIN

Una lente común homogénea posee dos características físicas que influyen en la manera en que dicha lente reconfigura un

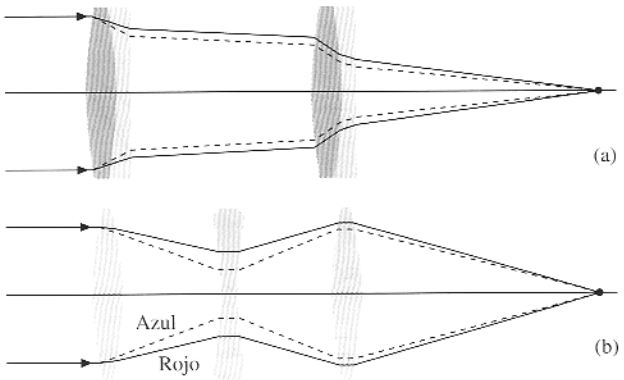


FIGURA 6.41 Lentes acromatizadas.

frente de ondas: la diferencia entre su índice de refracción y el del medio ambiente, y la curvatura de sus interfaces. Sin embargo, como ya vimos anteriormente, cuando la luz se propaga a través de un medio no homogéneo, los frentes de onda básicamente disminuyen su velocidad en zonas ópticamente más densas, y aceleran en zonas de menor densidad, lo cual provoca de nuevo una curvatura. Vemos pues que, en principio, debería ser posible fabricar una lente con un material no homogéneo, en el que haya un GRadiente en el ÍNdice de refracción; este mecanismo se conoce como **lente GRIN**. Una razón de peso para desarrollar este tipo de sistema es que proporciona al diseñador óptico un conjunto adicional de nuevos parámetros con los que controlar las aberraciones.

Para obtener una idea aproximada de cómo funciona una lente GRIN, consideremos el dispositivo dibujado en la figura 6.42, donde, para simplificar las cosas, hemos supuesto que $f > r$. Se trata de un disco plano de cristal tratado de tal modo que su índice $n(r)$ disminuye drásticamente, de manera aún indeterminada, desde un valor máximo de $n_{máx}$ en el eje óptico. Por consiguiente, se trata de un dispositivo **GRIN radial**. Un rayo que atraviesa el disco en el eje óptico pasa por una longitud de camino óptico $(LCO)_o = n_{máx}d$, mientras que un rayo que atraviese el disco a una altura r, despreciando la ligera curvatura en su trayectoria, $(LCO)_r \approx n(r)d$. Dado que un frente de onda plano se curva formando un frente de onda esférico, las LCO de uno a otro, sea cual sea el trazado, deberán ser iguales (pág. 150):

$$(OPL)_r + \overline{AB} = (OPL)_o$$

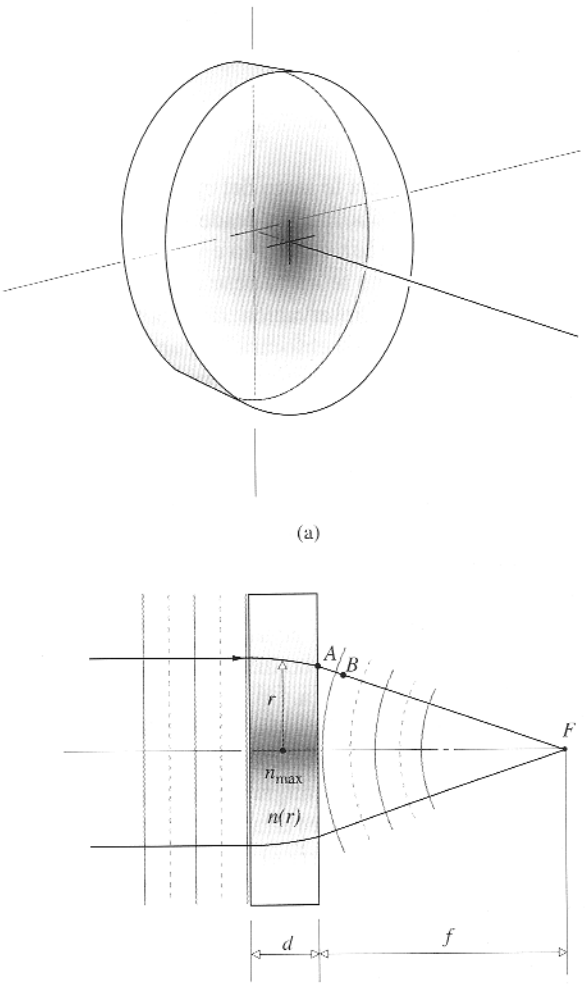


FIGURA 6.42 Un disco de vidrio transparente cuyo índice de refracción disminuye radialmente desde el eje central. (*b*) Geometría correspondiente al enfoque de los rayos paralelos de una lente GRIN.

y

$$n(r)d + \overline{AB} = n_{máx}d$$

sin embargo $\overline{AF} \approx \sqrt{r^2 + f^2}$; además, $\overline{AB} = \overline{AF} - f$ y, por lo tanto,

$$n(r) = n_{máx} - \frac{\sqrt{r^2 + f^2} - f}{d}$$

Al reescribir la raíz cuadrada utilizando el Teorema Binomial, $n(r)$ se convierte en

$$n(r) = n_{\text{máx}} - \frac{r^2}{2fd}$$

Todo esto nos indica que si, a lo largo del eje central, el índice de refracción decae parabólicamente desde su altura, la placa GRIN enfocará un haz de luz colimado en F y servirá como lente positiva. Este enfoque teórico, pese a resultar bastante simplista, confirma nuestra observación: una configuración de índice de refracción parabólico enfocará luz paralela.

Hoy en día es posible encontrar en el mercado una gran variedad de lentes GRIN radiales; de hecho, decenas de millones de éstas ya se están utilizando en impresoras láser, fotocopiadoras y máquinas de fax. La más popular de todas es un cilindro GRIN de unos pocos milímetros de diámetro, parecido cualitativamente a la fibra óptica mostrada en la figura 5.82*b*. Desde el punto de vista monocromático, proporciona un comportamiento en el eje casi de limitación por difracción. Desde el punto de vista policromático, ofrece grandes ventajas en asféricos.

Estas varillas GRIN de pequeño diámetro se fabrican normalmente mediante difusión iónica. Un cristal base homogéneo es sometido a un baño de sales licuadas durante muchas horas, en las cuales se produce paulatinamente una difusión o intercambio iónico. Un tipo de iones emigra del cristal y el otro surge del baño y cambia el índice de refracción. El proceso sigue su curso interno radialmente hacia el eje óptico, y el tiempo empleado es más o menos proporcional al diámetro de la varilla al cuadrado. En una configuración parabólica, esto establece el límite práctico del tamaño de la apertura. La distancia focal está determinada por el cambio de índice, Δn, y cuanto más rápida es la lente, mayor es Δn. Pese a todo, generalmente Δn no supera un valor de 0,10 por razones de producción. La mayoría de los cilindros GRIN poseen una configuración de índice parabólico expresada típicamente como

$$n(r) = n_{\text{máx}}(1 - ar^2/2)$$

La figura 6.43 muestra uno de dichas varillas GRIN radiales, con una longitud L, bajo una iluminación monocromática. Los rayos meridionales se desplazan por trayectorias sinusoidales dentro del plano de incidencia, el cual es perpendicular a la circunferencia. Estas sinusoides poseen un período en el espacio de $2\pi/\sqrt{a}$, donde la **constante de gradiente,** $\sqrt{a}$, es una función de λ y depende del material GRIN que se utilice en concreto. La vista transversal de la figura 6.43*a*, ilustra la manera

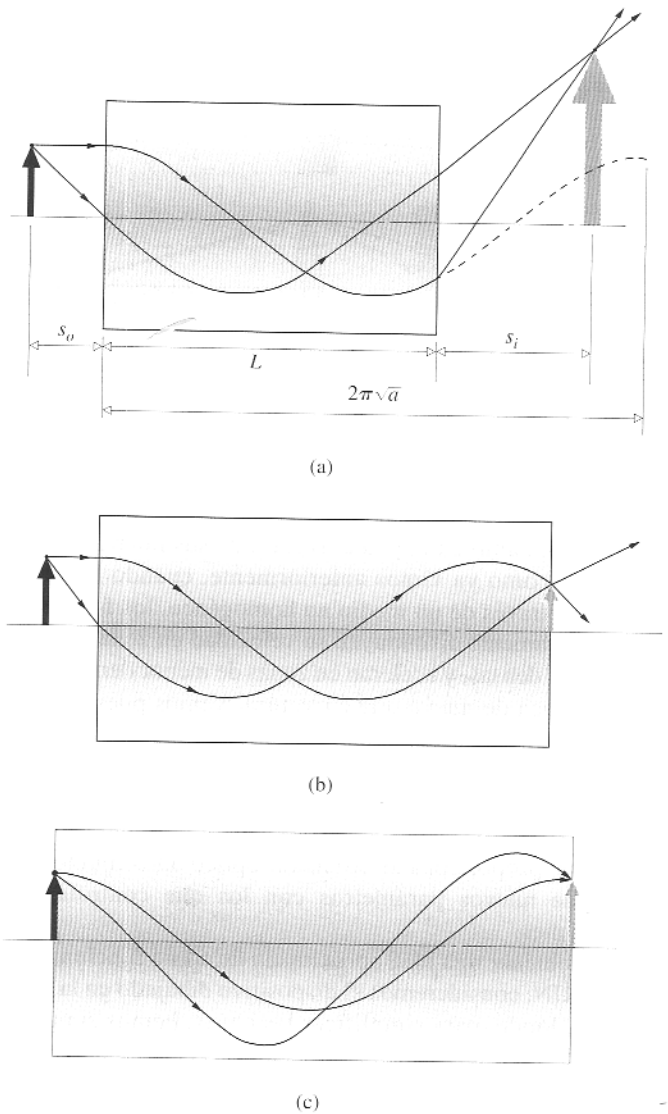


FIGURA 6.43 (*a*) Una varilla GRIN radial produciendo una imagen derecha, aumentada y real. (*b*) Aquí la imagen está formada en la cara de la varilla. (*c*) Este es un sistema oportuno para fotocopiadoras.

en que una lente GRIN radial puede formar una imagen derecha, real y aumentada. Cambiando la distancia objeto de la longitud L de la lente, podemos obtener una amplia gama de imágenes. Incluso es posible conseguir los planos objeto e imagen en la cara de la varilla (figura 6.43*b* y *c*).

En las lentes GRIN radiales, es frecuente especificar su longitud o, lo que es lo mismo, su **paso** (figura 6.44). Una varilla GRIN radial con un paso de 1,0 tiene un largo de una onda sinusoidal $L = 2\pi/\sqrt{a}$. Una varilla con un paso de 0,25 tiene una longitud de un cuarto de onda sinusoidal $(\pi/2\sqrt{a})$.

Una alternativa a la varilla GRIN radial de cara plana, es la lente GRIN axial que generalmente se pule con superficies esféricas. Como tal, es parecida a la biasférica, pero sin la dificultad de tener que crear las superficies complejas. Normalmente, un conjunto de placas de vidrio con índices apropiados se fusionan entre sí. A temperaturas altas, la mezcla de vidrios, al difundirse los unos en los otros, crean un bloque de cristal con un perfil de índice continuo que puede hacerse lineal, cuadrado o cúbico (figura 6.45*a*). Cuando tallamos dicho bloque a una lente, en el proceso se corta el vidrio y presenta toda una gama de índices. Cada uno de los anillos (concéntricos con respecto al eje óptico) que aparecen en la cara de la lente posee un índice que va cambiando gradualmente. Los rayos que inciden a diversas alturas por encima del eje óptico chocan contra el cristal con diferentes índices y se curvan como corresponde. La aberración esférica que se muestra en la figura 6.45*c* se produce porque los bordes de la lente esférica refractan con demasiada fuerza. Si disminuimos gradualmente el índice de refracción hacia los bordes, conseguiremos que la lente GRIN axial corrija la aberración esférica.

Por lo general, la inclusión de un elemento GRIN en el diseño de una lente compuesta simplifica enormemente el sistema, reduce el número de elementos en una tercera parte, y mantiene inalterado su comportamiento de base.

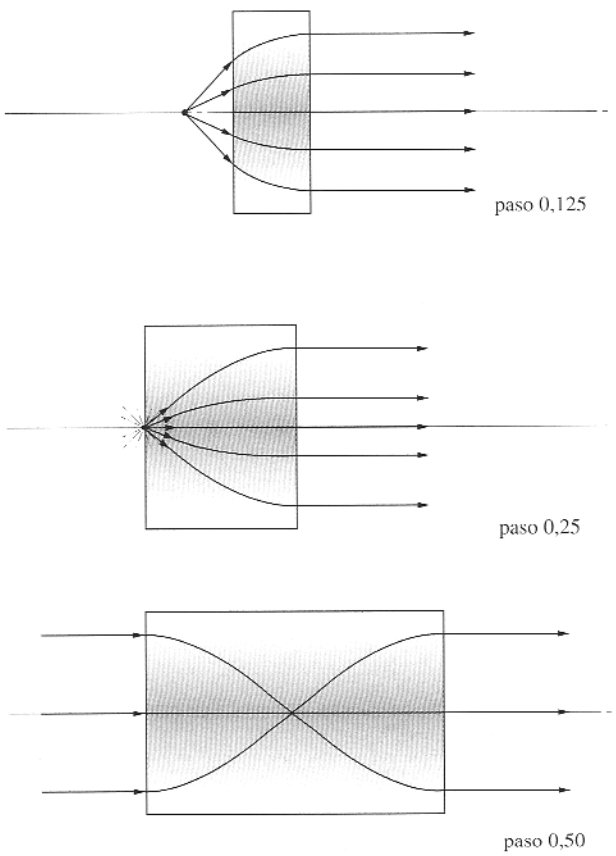


FIGURA 6.44 Lentes GRIN radiales con varias inclinaciones empleadas en algunas formas típicas.

6.5 Conclusiones

Por la razón práctica de facilitar la fabricación, la gran mayoría de los sistemas ópticos se limitan a las lentes con superficies esféricas. Existen, sin embargo, lentes tóricas, cilíndricas, así como muchos otros tipos de asféricas. Claro está que equipos finos, y por lo general, también muy caros, como las cámaras de reconocimiento a grandes alturas y los sistemas de rastreo pueden tener varias componentes asféricas. A pesar de ello, las lentes esféricas seguirán utilizándose y con ellas seguirán asociadas sus correspondientes aberraciones, que habrá que corregir satisfactoriamente. Como se ha visto, el diseñador (con su fiel compañera electrónica) debe manipular las variables del sistema (índices, formas, separaciones, diafragmas, etc.) hasta compensar las aberraciones existentes. Esta labor se lleva a cabo hasta el nivel que sea necesario y en el orden que resulte apropiado, de acuerdo con el sistema específico del que se trate. Así, se deberá tolerar más distorsión y curvatura en un telescopio común que en un buen objetivo fotográfico. Asimismo, no tenemos por qué preocuparnos de la aberración cromática si vamos a trabajar únicamente con luz de láser de casi una sola frecuencia. Sea como fuere, en este capítulo únicamente hemos esbozado los problemas (más para advertirlos que para resolverlos). Y ciertamente hemos evidenciado que dichos problemas pueden resolverse de forma satisfactoria, tal y como prueban explícitamente las fotos aéreas mostradas en la figura 6.46.

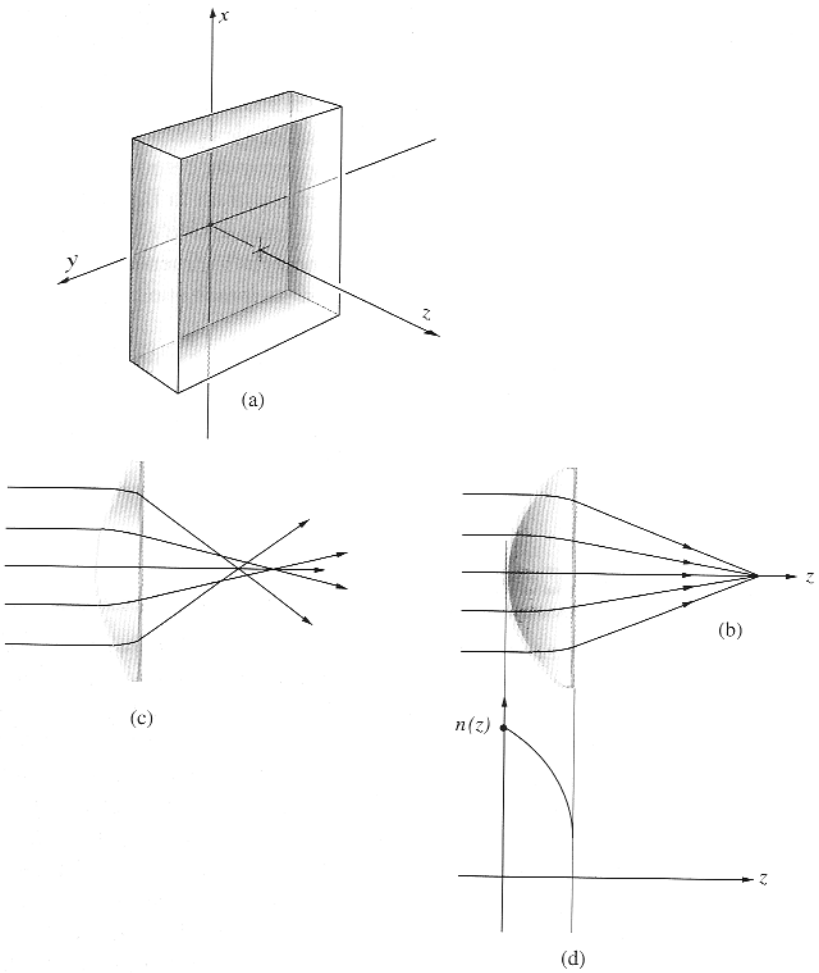
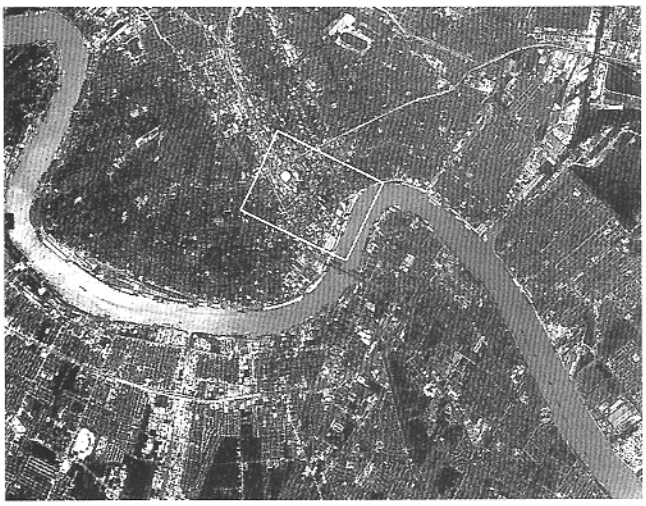
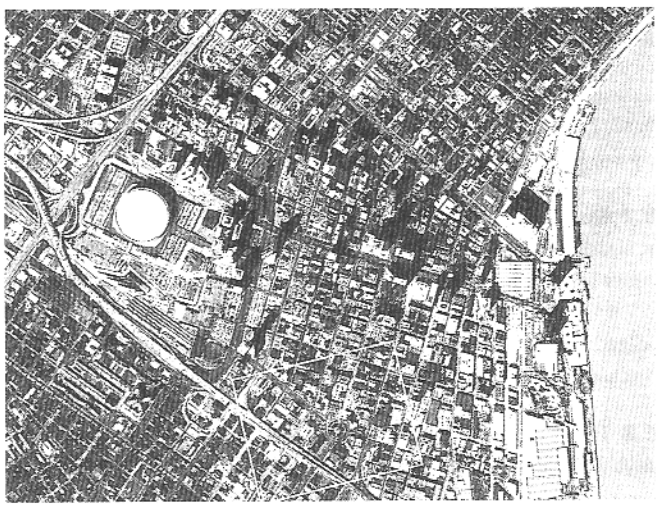


FIGURA 6.45 (*a*) Un bloque de material GRIN axial cuyo índice de refracción es *n(z)*. (*b*) Una lente de material GRIN axial libre de aberración esférica. (*c*) Una lente corriente con AE. (*d*) El perfil de índice.

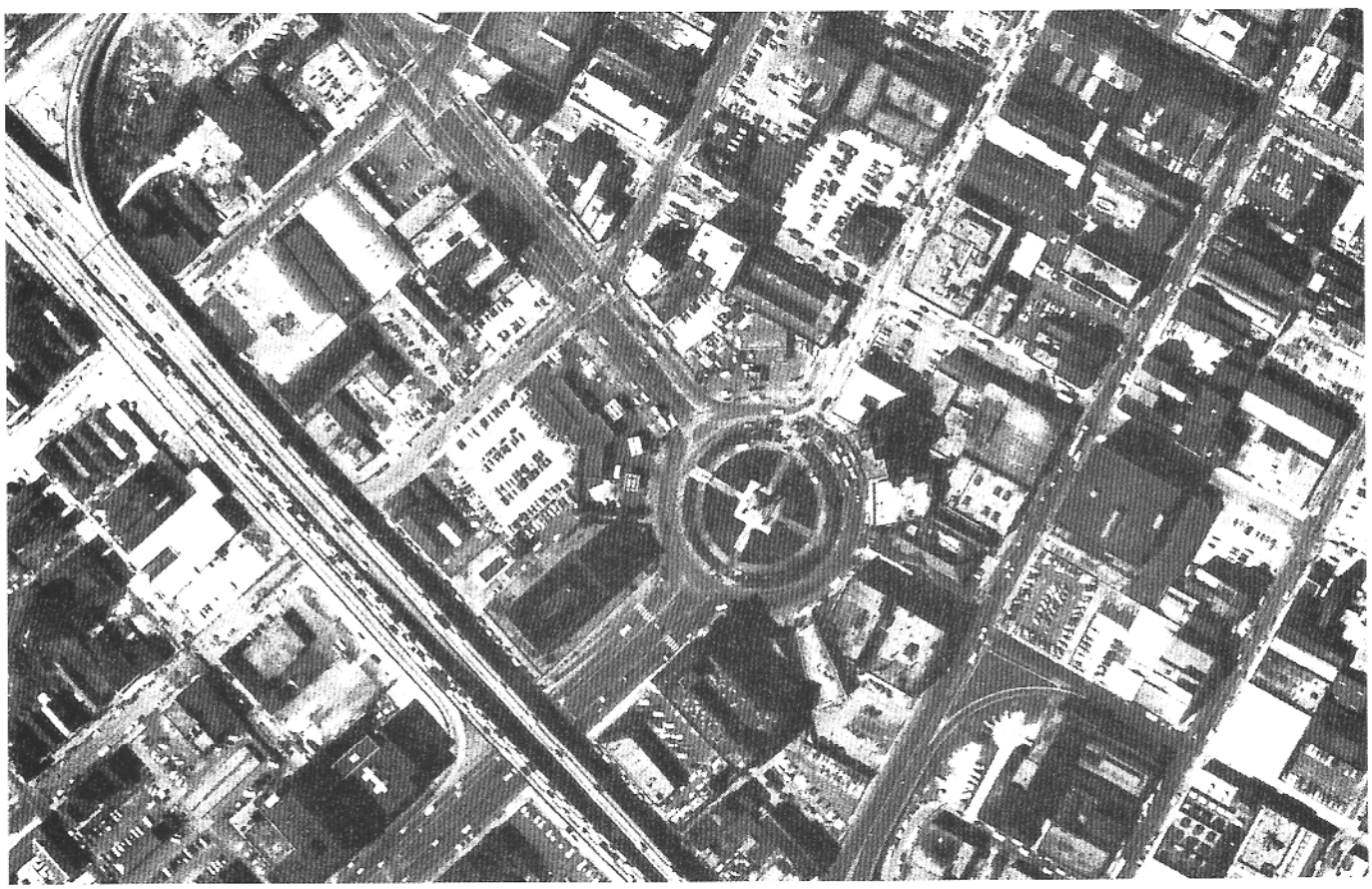
FIGURA 6.46 (*a*) New Orleans y el río Mississippi fotografiados desde 12.500 m (41.000 pies) con una cámara Metritek 21 de Itek (f = 21 cm). Resolución del terreno 1 m, escala 1:59.492. (*b*) Escala de la foto, 1:10.000. (*c*) Escala de la foto, 1:2.500. (Fotos cedidas por Litton/Itek Optical Systems.)



(a)



(b)



(c)

PROBLEMAS

6.1* Desarrolle todos los detalles necesarios hasta obtener la ecuación (6.8).

6.2 De acuerdo con el manual militar MIL-HDBK-141 (23.3.5.3), el ocular Ramsden (figura 5.106) está compuesto de dos lentes plano-convexas con igual distancia focal f' y separadas por una distancia $2f'/3$. Determine la distancia focal total f de la combinación de lentes delgadas y localice los planos principales y la posición del diafragma de campo.

6.3 Escriba una expresión para el grosor d_l de una lente biconvexa cuya distancia focal sea infinita.

6.4 Suponga que tenemos una lente del tipo menisco positiva con radios 6 y 10, y espesor 3 (cualquier unidad es válida siempre y cuando haya coherencia), y un índice de 1,5. Determine su distancia focal y la ubicación de sus puntos principales (compare con la figura 6.3).

6.5* Demuestre que si los puntos principales de una lente biconvexa de grosor d_l se solapan en un punto intermedio entre los vértices, la lente es esférica. Suponga que la lente está en el aire.

6.6 Utilizando la ecuación (6.2), desarrolle una expresión para la distancia focal de una lente esférica transparente y homogénea, de radio R. Localice sus puntos principales.

6.7* Una botella esférica de cristal de 20 cm de diámetro y con paredes extremadamente finas, está llena de agua. La botella se encuentra apoyada en el asiento trasero de un coche, y hace un día de sol resplandeciente. ¿Cuál es su distancia focal?

6.8* Teniendo en cuenta los dos problemas anteriores, calcule el aumento resultante al proyectar sobre una pared cercana la imagen de una flor situada a 4,0 m del centro de una lente esférica sólida de plástico transparente, con un diámetro de 0,20 m y un índice de refracción de 1,4. Describa la imagen detalladamente.

6.9* Una lente gruesa de cristal de índice 1,50 tiene radios de +23 cm y +20 cm, de tal modo que ambos vértices están a la izquierda de los correspondientes centros de curvatura. Dado un grosor de 9,0 cm, averigüe la distancia focal de la lente. Demuestre que, en general, $R_1 - R_2 = d/3$ para estas lentes afocales de potencia cero. Dibuje un diagrama donde se represente lo que le sucede a un haz de rayos axial, paralelo incidente, a medida que avanza por el sistema.

6.10 Se descubre que la luz del sol converge en un punto situado a 29,6 cm de la cara posterior de una lente gruesa, cuyos puntos principales, H_1 y H_2, se encuentran a + 0,2 cm y −0,4 cm, respectivamente. Determine la ubicación de la imagen de una vela situada a 49,8 cm delante de la lente.

6.11* Demuestre que la separación entre planos principales para una lente gruesa es aproximadamente una tercera parte de su grosor. La geometría más simple es con una lente plano-convexa trazando un rayo desde el foco objeto. Hable sobre la relación entre la distancia focal y el grosor de este tipo de lente.

6.12 Una lente biconvexa de vidrio *crown* tiene 4,0 cm de grosor, opera a una longitud de onda de 900 nm, y su índice de refracción es de 3/2. Dado que sus radios son 4,0 cm y 15 cm, localice sus puntos principales y calcule su distancia focal. Si colocamos una pantalla de televisión a un metro de distancia del frente de la lente, ¿dónde aparecerá la imagen real?

6.13* Imagine dos lentes gruesas biconvexas idénticas, separadas por una distancia de 20 cm entre sus vértices adyacentes. Sabiendo que todos los radios de curvatura miden 50, los índices de refracción 1,5, y el grosor de ambas lentes es 5,0 cm, calcule la distancia focal combinada.

6.14* Una lente compuesta está formada por dos lentes delgadas separadas por 10 cm. La primera de ellas posee una distancia focal de +20 cm y la segunda de –20 cm. Determine la distancia focal de la combinación y localice los correspondientes puntos principales. Dibuje un diagrama del sistema.

6.15* Una lente plano-convexa de índice 3/2 tiene un grosor de 1,2 cm y un radio de curvatura de 2,5 cm. Determine la matriz del sistema cuando la luz incide en la superficie curvada.

6.16* Una lente positiva del tipo menisco con un índice de refracción de 2,4, se encuentra inmersa en un medio de índice 1,9. La lente tiene un grosor axial de 9,6 mm y sus rayos de curvatura miden 50,0 mm y 100 mm. Calcule el sistema matricial cuando la luz es incidente sobre la cara convexa, y demuestre que su determinante es igual a uno.

6.17* Demuestre que el determinante de la matriz del sistema de la ecuación (6.31) es igual a 1.

6.18 Demuestre que las ecuaciones (6.36) y (6.37) son equivalentes a las ecuaciones (6.3) y (6.4), respectivamente.

6.19 Demuestre que la superficie plana de una lente cóncavo-plana o convexo-plana no intervienen en el sistema matricial.

6.20 Calcule la matriz del sistema para una lente gruesa biconvexa de índice 1,5, con radios de 0,5 y 0,25, y grosor 0,3 (en las unidades que usted desee). Compruebe que $|\mathscr{A}| = 1$.

6.21* La matriz del sistema para una lente gruesa biconvexa, en el aire, es

$$\begin{bmatrix} 0{,}6 & -2{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el primer radio es 0,5 cm, que el grosor es 0,3 cm y que el índice de la lente es 1,5, determine el valor del otro radio.

6.22* Una lente de vidrio ($n = 1{,}50$) cóncavo-plana, en el aire, tiene un radio de 10,0 cm y un grosor de 1,00 cm. Determine la matriz del sistema y compruebe que su determinante es uno. ¿Con qué ángulo positivo (en radianes medidos por encima del eje) debería incidir un rayo en la lente a una altura de 2,0 cm, si queremos que emerja de la lente a esa misma altura pero en dirección paralela al eje óptico?

6.23* Considerando la lente del problema 6.20, determine su distancia focal y la posición de los puntos focales con respecto a los vértices V_1 y V_2.

6.24* La figura P.6.24 muestra dos espejos esféricos cóncavos idénticos que forman una cavidad confocal. Sin especificar antes el valor de d, demuestre que tras atravesar la cavidad dos veces, la matriz del sistema es

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{2d}{r} - 1\right)^2 - \dfrac{2d}{r} & \dfrac{4}{r}\left(\dfrac{d}{r} - 1\right) \\ 2d\left(1 - \dfrac{d}{r}\right) & 1 - 2\dfrac{d}{r} \end{bmatrix}$$

A continuación, para el caso concreto de $d = r$, demuestre que tras cuatro reflexiones, el sistema retorna a su punto de partida y la luz vuelve a dibujar su trayectoria original.

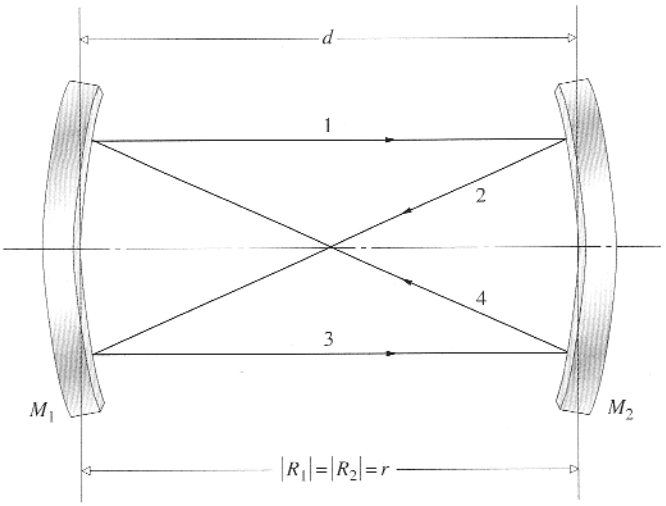


FIGURA P.6.24

6.25 Tomando nuevamente como referencia la figura 6.17, demuestre que cuando $\overline{P'P} = Rn_2/n_1$ y $\overline{PC} = Rn_1/n_2$, todos los rayos que salen de P parecen provenir de P'.

6.26 Empezando con la expresión exacta dada por la ecuación (5.5), demuestre que se obtiene la ecuación (6.40) en lugar de la ecuación (5.8) cuando las aproximaciones para ℓ_o y ℓ_i se mejoran ligeramente.

6.27 Suponiendo que vamos a producir una imagen de la figura 6.27 usando un sistema de lentes afectado únicamente por aberración esférica, haga un dibujo de tal imagen.

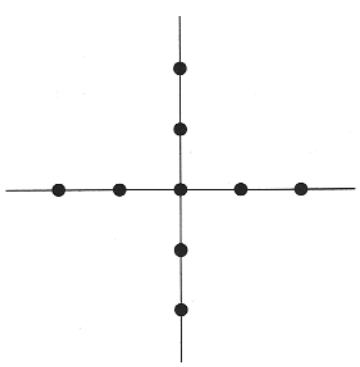
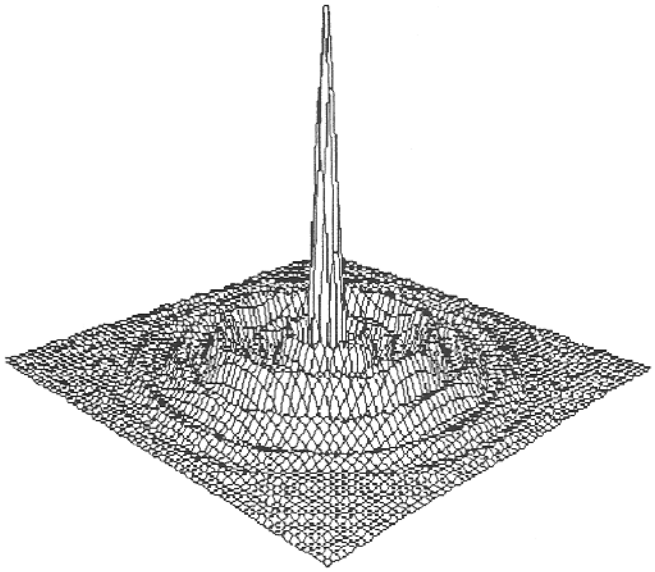
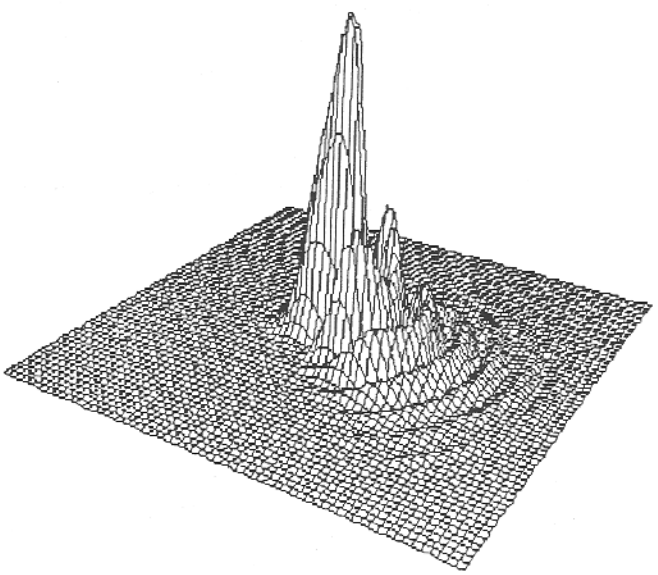


FIGURA P.6.27



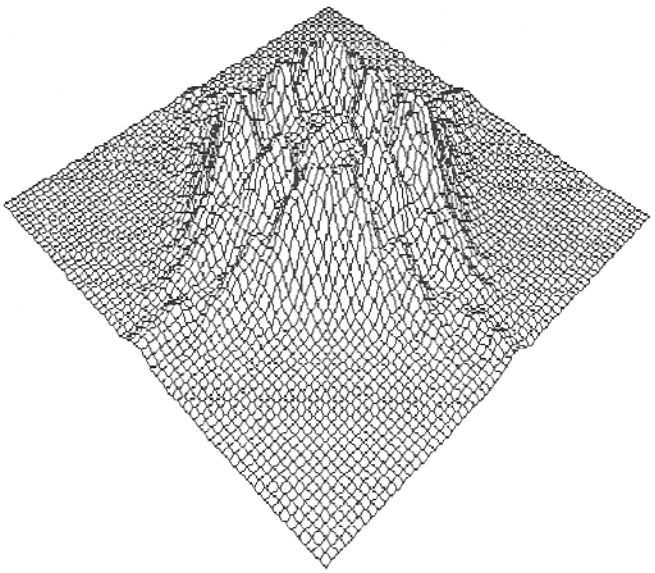
(a)

FIGURA P.6.28a



(b)

FIGURA P.6.28b

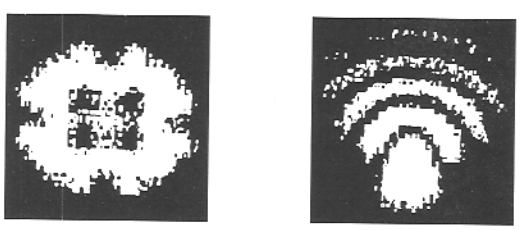


(c)

FIGURA P.6.28c

6.28* La figura P.6.28 muestra las distribuciones de la irradiancia de la imagen surgidas cuando una fuente puntual monocromática ilumina tres sistemas ópticos diferentes, y en cada uno de ellos sólo existe un único tipo de aberración. Identifique dicha aberración en cada caso y argumente su respuesta.

6.29* La figura P.6.29 muestra la distribución de la luz en la imagen surgida cuando una fuente puntual monocromática ilumina dos sistemas ópticos diferentes, y en cada uno de ellos existe un único tipo de aberración. Identifique la aberración en cada caso y argumente su respuesta.



(a) (b)

FIGURA P.6.28c

7 La superposición de ondas

En los capítulos siguientes estudiaremos los fenómenos de la polarización, interferencia y difracción. Todos ellos comparten una base conceptual común ya que, en su mayoría, tienen relación con varios aspectos del mismo proceso. De la manera más sencilla, diremos que nuestro mayor interés es lo que sucede cuando dos o más ondas luminosas se superponen en la misma región del espacio. Las circunstancias exactas a las que está supeditada dicha superposición determinan, por supuesto, la perturbación óptica final. Nos interesa descubrir, entre otras cosas, de qué manera las propiedades específicas de cada onda constitutiva (es decir, amplitud, fase, frecuencia, etc.) influyen en la forma definitiva de la perturbación compuesta.

Recordemos que cada componente del campo de una onda electromagnética (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y y B_z) satisface la ecuación de onda diferencial tridimensional escalar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \qquad [2.60]$$

Una característica muy significativa de esta expresión es que es *lineal*, es decir, $\psi(\mathbf{r}, t)$ y sus derivadas aparecen solamente con la primera potencia. Por lo tanto, si $\psi_1(\mathbf{r}, t)$, $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, ... , $\psi_n(\mathbf{r}, t)$ son soluciones individuales de la ecuación (2.59), *cualquier combinación lineal* de éstas será, a su vez, una solución. Por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \psi_i(\mathbf{r}, t) \qquad (7.1)$$

satisface la ecuación de onda, donde los coeficientes C_i son simplemente constantes arbitrarias. Esta propiedad, denominada ***Principio de superposición*** sugiere que la perturbación resultante en cualquier punto de un medio es la suma algebraica de sus ondas constitutivas separadas (figura 7.1). Ahora, sólo estamos interesados en sistemas lineales donde el princi-

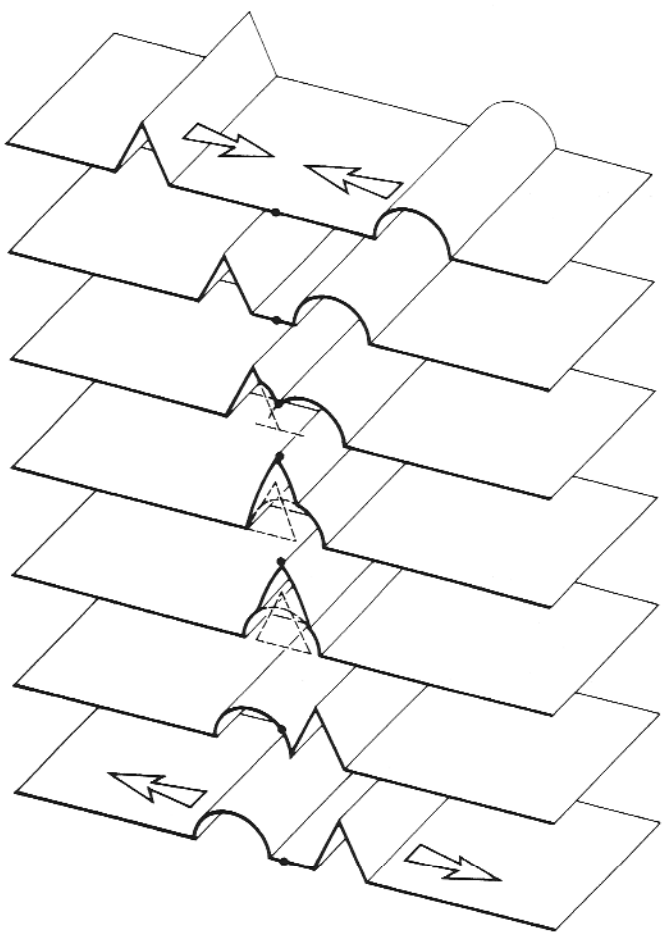


FIGURA 7.1 Superposición de dos perturbaciones.

pio de superposición sea de aplicación. Recuerden, sin embargo, que ondas de gran amplitud, bien sean ondas sonoras u ondas en una cuerda, pueden generar una respuesta no lineal. El haz de un láser de alta intensidad enfocado (donde el campo eléctrico podría alcanzar los 10^{10} V/cm) es capaz de lograr efectos no lineales (véase capítulo 13). Por comparación, la amplitud del campo eléctrico asociado con la luz solar aquí en la Tierra es de unos 10 V/cm.

Hay muchos casos en los que no necesitamos preocuparnos por la naturaleza vectorial de la luz y a ésos nos limitaremos de momento. Por ejemplo, si todas las *ondas* luminosas se propagan a lo largo de la misma línea, compartiendo un mismo plano constante de vibración, cada una de ellas podría describirse en términos de componente del campo eléctrico. Todas éstas podrían ser paralelas o antiparalelas en cualquier instante pudiendo, por consiguiente, considerarse como escalares. Mucho más se dirá acerca de este punto a medida de que progresemos; por ahora representemos la perturbación óptica como una función escalar $E(\mathbf{r}, t)$ que es una solución de la ecuación diferencial de onda. Este procedimiento lleva a una teoría escalar simple que resulta ser de gran utilidad siempre que se aplique con cuidado.

7.1 Suma de ondas de la misma frecuencia

Existen unos cuantos métodos equivalentes de sumar matemáticamente dos o más ondas superpuestas que tienen la misma frecuencia y longitud de onda. Detengámonos, entonces, en estos planteamientos diferentes para que, en una determinada situación, podamos recurrir al más apropiado.

7.1.1 El método algebraico

Una solución de la ecuación diferencial de onda puede escribirse de la siguiente forma

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sen} [\omega t - (kx + \varepsilon)] \tag{7.2}$$

donde E_0 es la amplitud de la perturbación armónica que se propaga a lo largo del eje x positivo. Para separar las partes de espacio y tiempo de la fase, sea

$$\alpha(x, \varepsilon) = -(kx + \varepsilon) \tag{7.3}$$

tal que

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{sen} [\omega t + \alpha(x, \varepsilon)] \tag{7.4}$$

Supongamos entonces que tenemos dos ondas de esta clase

$$E_1 = E_{01} \operatorname{sen} (\omega t + \alpha_1) \tag{7.5a}$$

y

$$E_2 = E_{02} \operatorname{sen} (\omega t + \alpha_2) \tag{7.5b}$$

ambas con la misma frecuencia y velocidad, coexistiendo en el espacio. La perturbación resultante es la superposición lineal de estas ondas:

$$E = E_1 + E_2$$

o, al desarrollar las ecuaciones (7.5a) y (7.5b)

$$E = E_{01} (\operatorname{sen} \omega t \cos \alpha_1 + \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha_1)$$

$$+ E_{02} (\operatorname{sen} \omega t \cos \alpha_2 + \cos \omega t \operatorname{sen} \alpha_2)$$

Al separar los términos que dependen del tiempo, la misma se transforma en

$$E = (E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2) \operatorname{sen} \omega t$$

$$+ (E_{01} \operatorname{sen} \alpha_1 + E_{02} \operatorname{sen} \alpha_2) \cos \omega t \tag{7.6}$$

Ya que los términos entre paréntesis son constantes en el tiempo, sea

$$E_0 \cos \alpha = E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2 \tag{7.7}$$

y

$$E_0 \operatorname{sen} \alpha = E_{01} \operatorname{sen} \alpha_1 + E_{02} \operatorname{sen} \alpha_2 \tag{7.8}$$

No se trata de una sustitución obvia pero será legítima siempre que podamos resolver E_0 y α. Para ello, elevemos al cuadrado y sumemos las ecuaciones (7.7) y (7.8) para obtener

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos (\alpha_2 - \alpha_1) \tag{7.9}$$

y dividamos la ecuación (7.8) por la (7.7) para tener

$$\tan \alpha = \frac{E_{01} \operatorname{sen} \alpha_1 + E_{02} \operatorname{sen} \alpha_2}{E_{01} \cos \alpha_1 + E_{02} \cos \alpha_2} \tag{7.10}$$

Con tal que se satisfagan los términos E_0 y α de estas dos últimas expresiones, la situación de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es válida. La perturbación total [ecuación (7.6)] queda entonces

$$E = E_0 \cos \alpha \operatorname{sen} \omega t + E_0 \operatorname{sen} \alpha \cos \omega t$$

o

$$E = E_0 \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \tag{7.11}$$

De la superposición de las ondas sinusoidales E_1 y E_2 resulta una perturbación individual. *La onda compuesta [ecuación (7.11)] es armónica y de la misma frecuencia que las constitutivas aunque su amplitud y fase sean diferentes.*

Cabe observar que cuando $E_{01} >> E_{02}$ en la ecuación (7.10), $\alpha \approx \alpha_1$ y cuando $E_{02} >> E_{01}$, $\alpha \approx \alpha_2$; la resultante está en fase con la onda componente dominante (véase otra vez la figura 4.11). La densidad de flujo de una onda luminosa es proporcional a su amplitud al cuadrado, en virtud de la ecuación (3.44). De la ecuación (7.9) se deduce que la densidad de flujo resultante no es simplemente la suma de las densidades de flujo componentes sino que hay una contribución adicional $2E_{01}E_{02} \cos (\alpha_2 - \alpha_1)$ denominada **término de interferencia**. El factor decisivo es la diferencia en fase entre las dos componentes E_1 y E_2, $\delta \equiv (\alpha_2 - \alpha_1)$. Cuando $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ la amplitud resultante es un valor máximo mientras que $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ da como resultado un valor mínimo (problema 7.3). En el primer caso, se dice que las ondas están en fase, cresta sobre cresta. En el segundo caso, las ondas están desfasadas en 180° y los valles se superponen a las crestas tal y como se muestra en la figura 7.2. Obsérvese que la *diferencia de fase* puede aparecer por una diferencia en la longitud del camino recorrido por las dos ondas o también por una diferencia en la fase inicial, es decir,

$$\delta = (kx_1 + \varepsilon_1) - (kx_2 + \varepsilon_2) \tag{7.12}$$

o

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{7.13}$$

Aquí, x_1 y x_2 son las distancias desde las fuentes de las dos ondas hasta el punto de observación y λ es la longitud de onda en el medio en que viajan. Si las ondas están inicialmente en fase en sus emisores respectivos, entonces $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ y

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2) \tag{7.14}$$

Esto también se aplicaría al caso donde dos perturbaciones de la misma fuente recorrieran diferentes rutas antes de llegar al punto de observación. Ya que $n = c/v = \lambda_0/\lambda$,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(x_1 - x_2) \tag{7.15}$$

La cantidad $n(x_1 - x_2)$ se denomina **diferencia de camino óptico** y se representará por la abreviatura D.C.O. o por el símbolo Λ. Es la diferencia entre las dos longitudes de camino óptico [ecuación (4.9)]. En situaciones más complejas, es posible que cada onda se desplace a través de varios medios diferentes de espesor diferente (véase problema 7.6). Obsérvese también que $\Lambda/\lambda_0 = (x_1 - x_2)/\lambda$ es el número de ondas en el medio correspondiente a la diferencia de camino: una

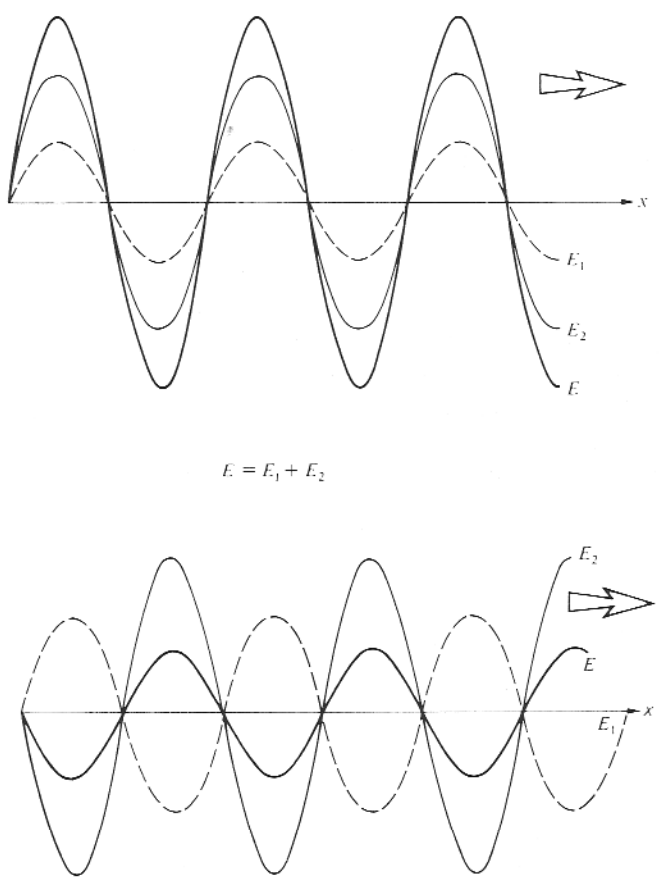


FIGURA 7.2 Superposición de dos ondas armónicas en fase y desfasadas.

trayectoria es varias longitudes de onda más larga que la otra. Ya que cada longitud de onda está asociada con un cambio de fase de 2π radianes, $\delta = 2\pi(x_1 - x_2)/\lambda$, o más brevemente

$$\delta = k_0 \Lambda \tag{7.16}$$

donde k_0 es el módulo del vector de onda en el vacío, es decir, $2\pi/\lambda_0$. Una trayectoria es esencialmente δ radianes más larga que la otra.

Las ondas para las que $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ es *constante*, independientemente de su valor, son **coherentes,** una situación que supondremos ser válida en casi todo este estudio.

Un caso especial bastante interesante es la superposición de ondas

$$E_1 = E_{01} \operatorname{sen} [\omega t - k(x + \Delta x)]$$

y

$$E_2 = E_{02} \operatorname{sen} (\omega t - kx)$$

donde especialmente $E_{01} = E_{02}$ y $\alpha_2 - \alpha_1 = k\,\Delta x$. Dejamos para el problema 7.7 demostrar que en este caso las ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.11) llevan a una onda resultante de

$$E = 2E_{01} \cos\left(\frac{k\,\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \tag{7.17}$$

Esto pone de manifiesto claramente el papel dominante que desempeña la diferencia de longitud de caminos, Δx, especialmente cuando las ondas se emiten en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)$. Se dan muchos casos prácticos donde se ajustan precisamente estas condiciones como veremos más tarde. Si $\Delta x << \lambda$, la resultante tiene una amplitud muy cercana al valor $2E_{01}$, mientras que si $\Delta x = \lambda/2$ es cero. Cabe recordar que la primera situación (pág. 21) recibe el nombre de **interferencia constructiva** y la segunda de **interferencia destructiva** (véase figura 7.3).

Por aplicaciones repetidas del procedimiento que se ha empleado para llegar a la ecuación (7.11), podemos demostrar que ***la superposición de cualquier número de ondas armónicas coherentes con una determinada frecuencia y que viajan en la misma dirección llevan a una onda armónica de la misma frecuencia*** (figura 7.4). Por simple casualidad hemos escogido representar esas dos ondas en términos de funciones seno, sin embargo se daría el mismo resultado si recurriéramos a las funciones coseno. Por lo general, la suma de N de ondas semejantes,

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_{0i} \cos (\alpha_i \pm \omega t)$$

viene proporcionada por

$$E = E_0 \cos (\alpha \pm \omega t) \tag{7.18}$$

donde

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2 \sum_{j>i}^{N} \sum_{i=1}^{N} E_{0i} E_{0j} \cos (\alpha_i - \alpha_j) \tag{7.19}$$

y

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \operatorname{sen} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{N} E_{0i} \cos \alpha_i} \tag{7.20}$$

Hagamos una pausa por un momento y quédese contento realmente con que estas relaciones son en efecto verdaderas.

Consideremos un número (N) de emisores atómicos que constituye una fuente normal (una bombilla incandescente,

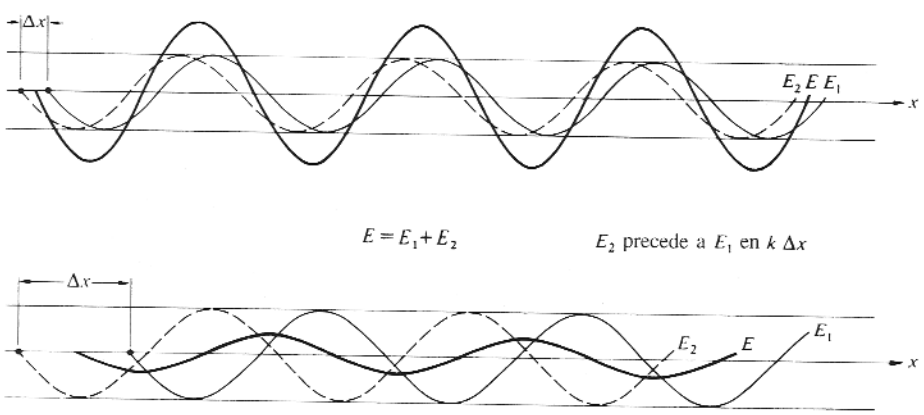


FIGURA 7.3 Ondas desfasadas en $k\Delta x$ radianes.

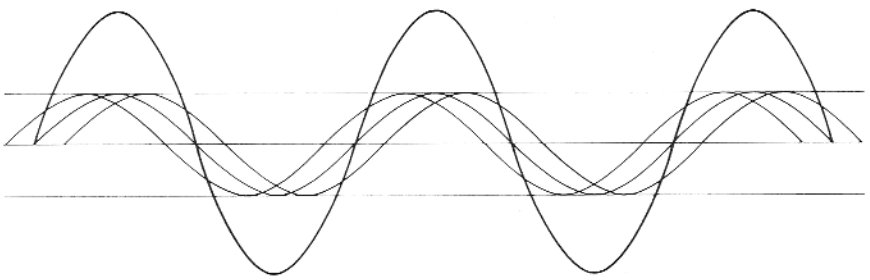


FIGURA 7.4 La superposición de tres ondas armónicas da como resultado otra onda armónica con la misma frecuencia.

una llama de vela o una lámpara de descarga luminosa). Se emite un flujo luminoso que supuestamente corresponde a un torrente de fotones que aparecen en masa en forma de forma de onda electromagnética. Para permanecer dentro de una perspectiva ondulatoria, imaginemos que el fotón esté de alguna forma asociado con un impulso ondulatorio oscilante de corta duración. Cada átomo es efectivamente una fuente independiente de trenes de onda fotónicos (sección 3.4.4) y éstos, a su vez, se extienden, en términos temporales, entre aproximadamente 1 y 10 ns. Dicho de otro modo, se puede considerar que los átomos emiten trenes de onda cuya fase se sostiene durante tan sólo 10 ns. Después de lo cual, un nuevo tren de onda podrá emitirse con una fase totalmente al azar que también se sostendrá durante menos de 10 ns, etc. En el conjunto, cada átomo emite una perturbación (compuesta por un flujo de fotones) cuya fase varía rápidamente y al azar.

En cualquier suceso, la fase de la luz de un átomo, $\alpha_i(t)$ permanecerá constante con respecto a la fase de otro átomo $\alpha_j(t)$ durante un tiempo máximo de 10 ns antes de que cambie al azar: los átomos son coherentes durante, como mucho, unos 10^{-8} s. Puesto que la densidad de flujo es proporcional al promedio temporal de E_0^2, calculado por lo general en un intervalo de tiempo bastante largo, se deduce que la segunda suma de la ecuación (7.19) proporcionará unos términos que son proporcionales a $\langle\cos[\alpha_i(t) - \alpha_j(t)]\rangle$ donde el promedio de cada cual equivaldrá a cero por la rapidez aleatoria de los cambios de fase. Solamente la primera suma quedará dentro del promedio temporal, siendo constantes sus términos. Si cada átomo emite unos trenes de onda de la misma amplitud E_{01}, entonces

$$E_0^2 = NE_{01}^2 \tag{7.21}$$

La densidad de flujo resultante debida a N fuentes cuyas fases al azar cambian rápidamente viene dada por N veces la densidad de flujo de cualquier fuente. Dicho de otro modo, *está definida por la suma de las densidades de flujo individuales.*

Una bombilla de una lámpara portátil, cuyos átomos emiten en tumulto desordenado, radia luz (como superposición de estos trenes de onda esencialmente «incoherentes») cuya fase también varía rápidamente y al azar. Por lo tanto, dos o más de estas bombillas emitirán luz básicamente incoherente (es decir, para duraciones superiores a unos 10 ns), luz cuya irradiancia total combinada equivaldrá sencillamente a la suma de las irradiancias con que cada bombilla individual contribuya. Eso también es válido para las llamas de vela, las bombillas fusibles y todas las fuentes térmicas distintas del láser. ***No se puede prever interferencia cuando las ondas luminosas procedentes de dos lámparas para lectura se solapan.***

En el otro extremo, si las fuentes son coherentes y están en fase en el punto de observación, es decir, $\alpha_i = \alpha_j$, la ecuación (7.19) quedará

$$E_0^2 = \sum_{i=1}^{N} E_{0i}^2 + 2\sum_{j>i}^{N}\sum_{i=1}^{N} E_{0i}E_{0j}$$

o, de manera equivalente,

$$E_0^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} E_{0i}\right)^2 \tag{7.22}$$

Suponiendo de nuevo que cada amplitud sea E_{01}, obtenemos

$$E_0^2 = (NE_{01})^2 = N^2E_{01}^2 \tag{7.23}$$

En este caso de fuentes coherentes en fase, tenemos una situación en la cual las amplitudes se suman primero y luego se elevan al cuadrado para determinar la densidad de flujo resultante. La superposición de ondas coherentes generalmente produce el efecto de alterar la distribución espacial de la energía pero no la cantidad total presente. Si existen unas regiones donde la densidad de flujo es mayor que la suma de las densidades de flujo individuales, habrá regiones donde será menor que esa suma.

7.1.2 El método complejo

A menudo, es matemáticamente oportuno recurrir a la representación compleja cuando hay que examinar la superposición de perturbaciones armónicas. La onda

$$E_1 = E_{01} \cos (kx \pm \omega t + \varepsilon_1)$$

o

$$E_1 = E_{01} \cos (\alpha_1 \mp \omega t)$$

se puede entonces escribir como

$$\tilde{E}_1 = E_{01} e^{i(\alpha_1 \mp \omega t)} \tag{7.24}$$

si recordamos que estamos solamente interesados en la parte real (véase sección 2.5). Supongamos que hay N de tales ondas superpuestas que tienen la misma frecuencia y que viajan en la *dirección positiva de x*. La onda resultante viene dada por

$$\tilde{E} = E_0 e^{i(\alpha + \omega t)}$$

que equivale a la ecuación (7.18) o, después de sumar las ondas componentes,

$$\tilde{E} = \left[\sum_{j=1}^{N} E_{0j} e^{i\alpha_j} \right] e^{+i\omega t} \tag{7.25}$$

La cantidad

$$E_0 e^{i\alpha} = \sum_{j=1}^{N} E_{0j} e^{i\alpha_j} \tag{7.26}$$

se denomina *amplitud compleja* de la onda compuesta y es simplemente la suma de las amplitudes complejas de las constitutivas. Ya que

$$E_0^2 = (E_0 e^{i\alpha})(E_0 e^{i\alpha})^* \tag{7.27}$$

podemos siempre calcular la irradiancia resultante de las ecuaciones (7.26) y (7.27). poer ejemplo, si $N = 2$,

$$E_0^2 = (E_{01} e^{i\alpha_1} + E_{02} e^{i\alpha_2})(E_{01} e^{-i\alpha_1} + E_{02} e^{-i\alpha_2})$$

por consiguiente

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + E_{01} E_{02} [e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} + e^{-i(\alpha_1 - \alpha_2)}]$$

o

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01} E_{02} \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$

que es idéntica a la ecuación (7.9).

7.1.3 Suma de fasores

La suma descrita en la ecuación (7.26) puede representarse gráficamente como la suma de vectores en el plano complejo (recordemos el análisis de la pág. 23). En el lenguaje de la ingeniería electrónica, la amplitud compleja se denomina **fasor** estando definido por su magnitud y fase y que a menudo se escribe simplemente como $E_0 \angle \alpha$. Imaginemos entonces que tenemos una perturbación descrita por

$$E_1 = E_{01} \text{ sen } (\omega t + \alpha_1)$$

En la figura 7.5*a* representamos la onda por un vector de longitud E_{01} que gira a izquierdas con una rapidez ω tal que su proyección en el eje vertical es E_{01} sen $(\omega t + \alpha_1)$. Si nos interesaran las ondas coseno, nos centraríamos en la proyección sobre el eje horizontal. Dicho de paso, el vector rotatorio es naturalmente un fasor $E_{01} \angle \alpha_1$ mientras que R e I denotan los ejes real e imaginario. Del mismo modo, una segunda onda

$$E_2 = E_{02} \text{ sen } (\omega t + \alpha_2)$$

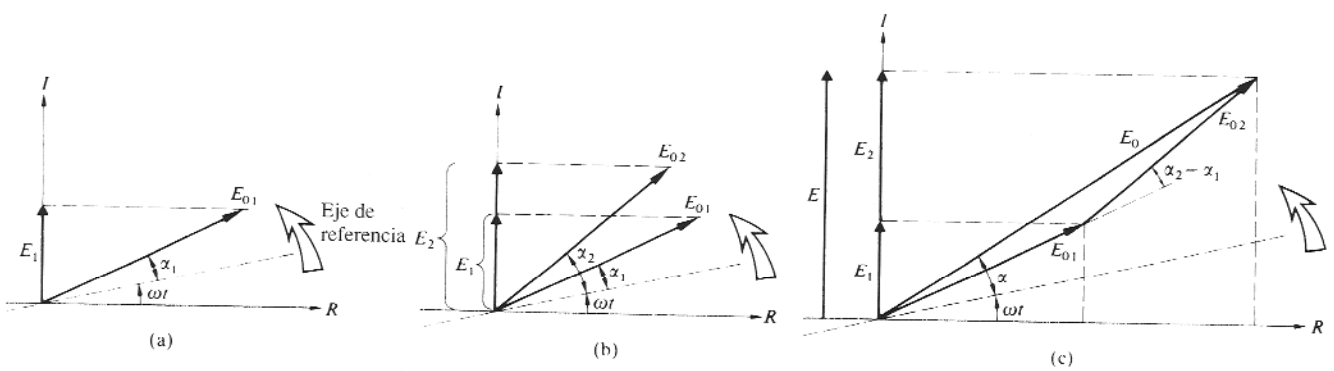


FIGURA 7.5 Suma de fasores.

se muestra junto con E_1 en la figura 7.5*b*. La suma algebraica $E = E_1 + E_2$ es la proyección en el eje I del fasor resultante determinado por la suma vectorial de los fasores componentes, como en la figura 7.5*c*. Al aplicar la ley del coseno al triángulo cuyos lados son E_{01}, E_{02} y E_0 se obtiene

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02}\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$$

donde se aprovechó el hecho de que $\cos[\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)] = -\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ que es igual a la ecuación (7.9), como debe ser. Usando el mismo diagrama, cabe observar que tan α viene dada también por la ecuación (7.10). Por lo general, nos interesa determinar más E_0 que $E(t)$ y como E_0 no se ve influenciado por el girar constante de todos los fasores, a menudo resultará oportuno poner $t = 0$ y así eliminar esa rotación.

Algunos esquemas muy interesantes como la *curva de vibración* y la *espiral de Cornu* (capítulo 10) se explicarán con la técnica de la suma de fasores. Como ejemplo final examinemos brevemente la onda resultante de la suma de

$$E_1 = 5\ \text{sen}\ \omega t$$

$$E_2 = 10\ \text{sen}\ (\omega t + 45°)$$

$$E_3 = \text{sen}\ (\omega t - 15°)$$

$$E_4 = 10\ \text{sen}\ (\omega t + 120°)$$

y

$$E_5 = 8\ \text{sen}\ (\omega t + 180°)$$

donde ω se expresa en grados por segundo. Los fasores apropiados $5\angle 0°$, $10\angle 45°$, $1\angle -15°$, $10\angle 120°$, y $8\angle 180°$ se representan gráficamente en la figura 7.6. Cabe observar que cada ángulo de desfase, bien sea positivo o negativo, está referido a la horizontal. Se tendrá simplemente que leer $E_0\angle\alpha$ con una regla y un portaángulos para obtener $E = E_0\ \text{sen}\ (\omega t + \alpha)$. Es evidente que esta técnica ofrece una ventaja tremenda en términos de velocidad y simplicidad si no de precisión.

7.1.4 Ondas estacionarias

Anteriormente (pág. 21) vimos que la suma de soluciones de la ecuación diferencial de onda es ella misma una solución. Por lo tanto, en general

$$\psi(x, t) = C_1 f(x - vt) + C_2 g(x + vt)$$

satisface dicha ecuación. Vamos a examinar especialmente *dos ondas armónicas con la misma frecuencia que se propagan en direcciones opuestas*. Una situación de interés práctico se da cuando la onda incidente se refleja hacia atrás por algún tipo de espejo; una pared rígida valdría para ondas sonoras o una lámina conductora para ondas electromagnéticas. Imaginemos entonces que una onda incidente que se desplaza a la izquierda,

$$E_I = E_{0I}\ \text{sen}\ (kx + \omega t + \varepsilon_I) \tag{7.28}$$

llega a un espejo en $x = 0$ y se refleja hacia la derecha en la forma

$$E_R = E_{0R}\ \text{sen}\ (kx - \omega t + \varepsilon_R) \tag{7.29}$$

La onda compuesta en la región, a la derecha del espejo es $E = E_I + E_R$. Dicho de otra forma, las dos ondas (una desplazándose a la derecha y la otra a la izquierda) existen simultáneamente en la región entre la fuente y el espejo.

Podríamos calcular la suma indicada y llegar a una resolución general [1] en forma muy parecida a la de la sección 7.1. Sin embargo, se puede profundizar en los conocimientos físicos adoptando un planteamiento ligeramente más restringido.

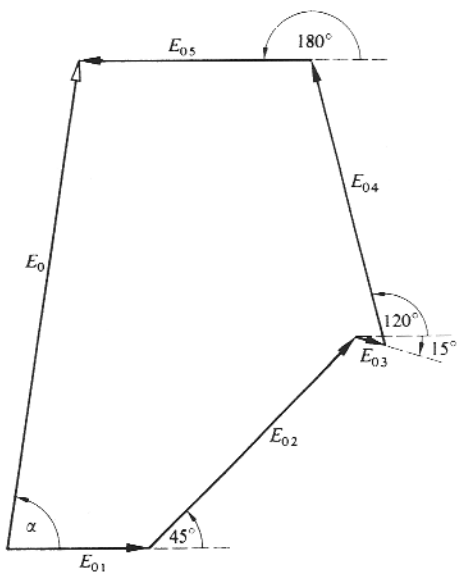


FIGURA 7.6 Suma de E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5.

[1] Véase, por ejemplo, J. M. Pearson, A *Theory of Waves*.

La fase inicial ε_I puede ponerse a cero simplemente poniendo en marcha nuestro reloj cuando $E_I = E_{0I}$ sen kx. Hay algunas cualidades determinadas por la disposición física que deberán ser satisfechas por la solución matemática y que se denominan ***condiciones de contorno***. Por ejemplo, si estuviéramos hablando de una cuerda con un extremo atado a una pared en $x = 0$, ese punto deberá tener siempre un desplazamiento cero. Las dos ondas superpuestas, una incidente y la otra reflejada, deben sumarse de tal manera que den una onda resultante cero en $x = 0$. Del mismo modo, en el límite de una lámina perfectamente conductora, la onda electromagnética resultante deberá tener una componente de campo eléctrico nula paralela a la superficie. Suponiendo que $E_{0I} = E_{0R}$, las condiciones de contorno exigen que en $x = 0$, $E = 0$ y puesto que $\varepsilon_I = 0$, de las ecuaciones (7.28) y (7.29) se deduce que $\varepsilon_R = 0$. La perturbación compuesta es entonces

$$E = E_{0I} [\text{sen } (kx + \omega t) + \text{sen } (kx - \omega t)]$$

Aplicando la identidad

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

el resultado es

$$E(x, t) = 2E_{0I} \text{ sen } kx \cos \omega t \qquad (7.30)$$

Esta es la ecuación de una **onda quieta** o **estacionaria**, en contraposición a una onda viajera (figura 7.7). Su perfil no se desplaza en el espacio y claramente no tiene la forma $f(x \pm vt)$. En cualquier punto $x = x'$, la amplitud es una constante igual a $2E_{0I}$ sen kx' y $E(x', t)$ varía armónicamente con cos ωt. En ciertos puntos, denominados **nodos** o *puntos nodales* (figura 7.8), a saber $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \ldots$, la perturbación será cero en todo instante. A medio camino entre cada nudo adyacente, es decir, en $x = \lambda/4, 3\lambda/4, 5\lambda/4, \ldots$, la amplitud tiene un valor máximo de $\pm 2E_{0I}$; esos puntos reciben el nombre de **antinodos**. La perturbación $E(x, t)$ será cero para todos los valores de x donde quiera que cos $\omega t = 0$, es decir, cuando $t = (2m + 1)\tau/4$ donde $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y τ es el período de las ondas componentes.

Si la reflexión del espejo no es perfecta, como acontece a menudo, la onda compuesta contendrá una componente viajera junta con la onda estacionaria. Bajo tales condiciones tendrá lugar una transferencia neta de energía mientras que para la onda estacionaria pura no habrá ninguna.

Si bien el análisis llevado a cabo anteriormente es esencialmente unidimensional, las ondas estacionarias se dan también en dos o tres dimensiones. Se trata de un fenómeno muy corriente: las ondas estacionarias se producen en una dimensión, en las cuerdas de una guitarra y trampolines, en dos dimensiones, en la

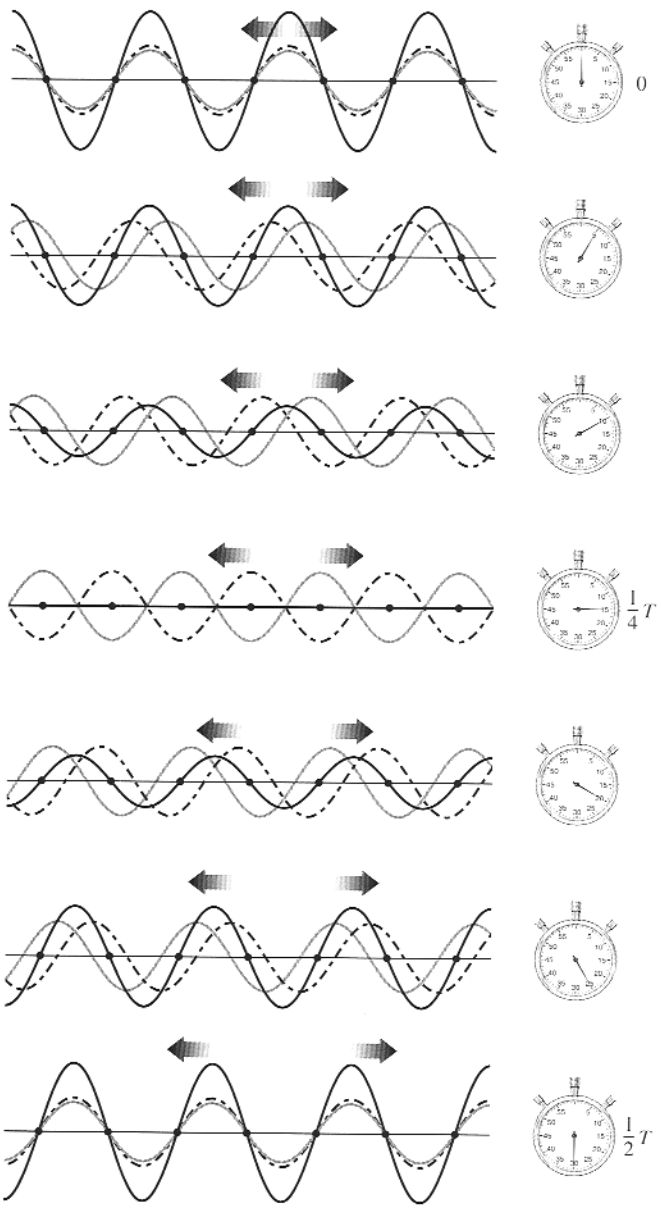


FIGURA 7.7 Formación de ondas estacionarias. Dos ondas con la misma amplitud y longitud de onda que se desplazan en direcciones opuestas forman una perturbación estacionaria que oscila en el sitio.

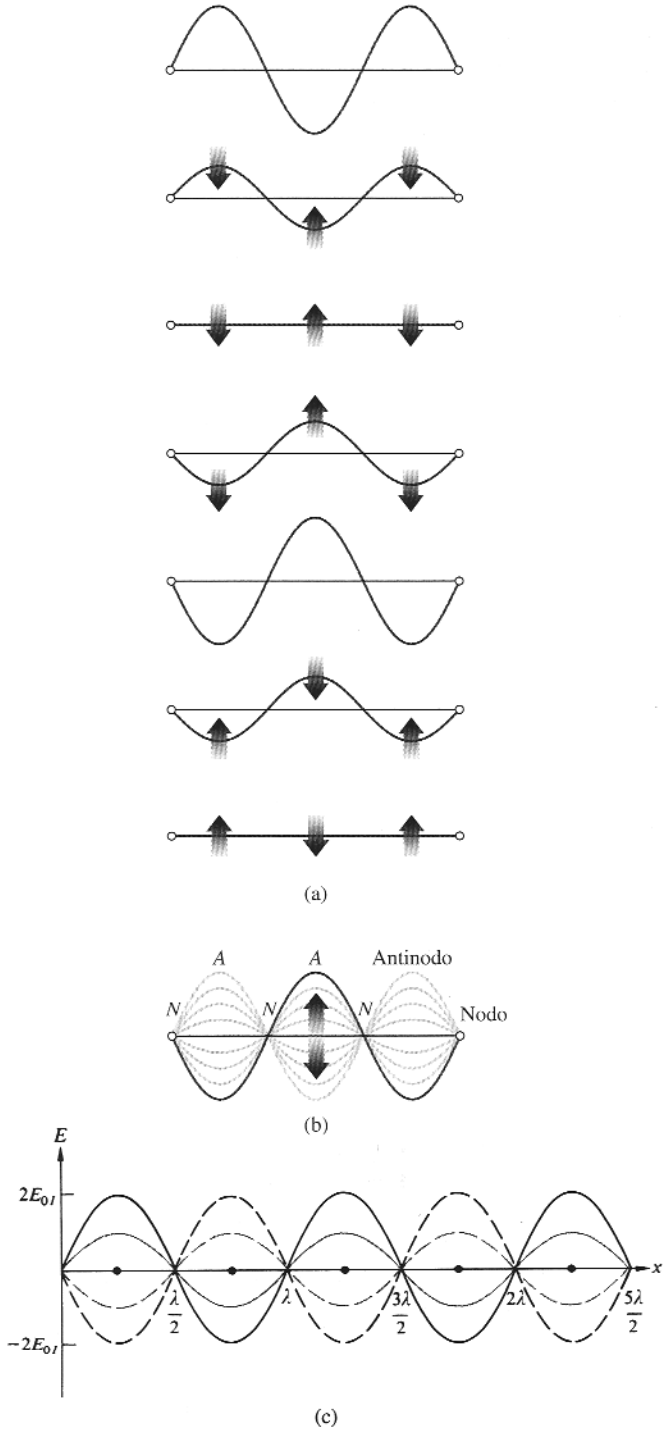


FIGURA 7.8 Una onda estacionaria a varios tiempos.

superficie de un tambor o en un cubo de agua que se sacude (figura 7.9) y, en tres dimensiones, cuando se canta en la cabina de una ducha. En realidad, las ondas estacionarias se crean en las cavidades de la cabeza toda vez que se canta, sin importar el lugar.

Si un sistema de ondas estacionarias es accionado por una fuente oscilante, absorberá eficazmente energía siempre que las vibraciones igualen a uno de sus modos de onda estacionaria. Este fenómeno se denomina resonancia y se producirá cada vez que una casa vibre cuando un avión vuela muy bajo por encima de ella o un camión pesado le pasa por delante. Si la fuente sigue suministrando energía, la onda continuará creciendo hasta que las pérdidas inherentes del sistema sean iguales a la energía absorbida, alcanzando así el equilibrio. Esta capacidad para sostener y simplificar la alimentación es una característica extremadamente importante de los sistemas de ondas estacionarias. El conducto auditivo del oído es precisamente tal cavidad resonante en donde los sonidos que se hallan en la gama entre $\approx$3 kHz y $\approx$4 kHz se amplifican casi en un 100%. Del mismo modo, la poderosa emisión del láser se incrementa en el interior de una cavidad de onda estacionaria (pág. 597). En la figura 7.10 se recoge la distribución de onda estacionaria que se produce cuando una barra reflectora se coloca delante de una antena que emite unas ondas electromagnéticas de $\approx$3 GHz.

Fue mediante la medición de las distancias entre los nodos de ondas estacionarias que Hertz logró determinar la longitud de onda de la radiación en sus históricos experimentos (véase

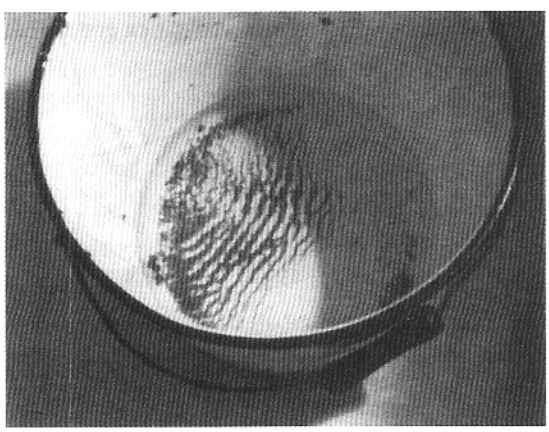


FIGURA 7.9 Un cubo que se utilizaba para limpiar el piso, contenía partículas finas de suciedad en suspensión en el agua. Al colocarlo en una pila curva, el cubo empezó a bambolear suavemente a lo largo de un eje fijo, creando ondas estacionarias y distribuyendo las partículas en crestas a medida que se asentaban en el fondo.

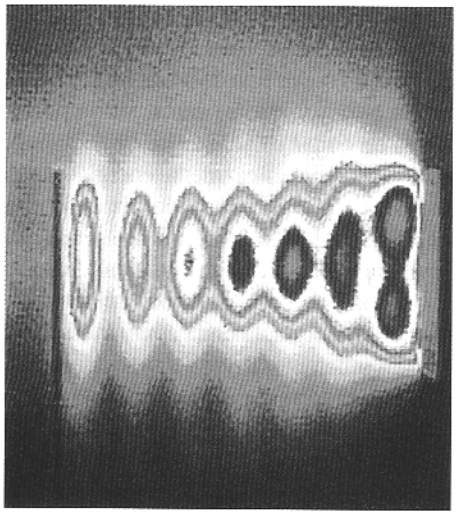


FIGURA 7.10 Una distribución de onda estacionaria bidimensional formada entre una fuente y un reflector. Las ondas EM procedentes de una antena de 3,9 GHz entran por la derecha. Se reflejan en una varilla de metal y vuelven otra vez a la antena. La distribución se hace visible absorbiendo la radiación de microondas y registrando la distribución de la temperatura resultante con una cámara de rayos infrarrojos. (Foto cedida por H. H. Pole, Phillips Laboratory, Base de las Fuerzas Aéreas de Kirtland).

sección 3.5.4). Unos pocos años más tarde, en 1890, Otto Wiener demostró por primera vez, recurriendo a una disposición que se ilustra en la figura 7.11, la existencia de ondas luminosas estacionarias. En dicha figura se muestra un haz paralelo incidente normal de luz cuasimonocromática que se refleja en la cara frontal de un espejo plateado. Una película fotográfica transparente y delgada de menos de $\lambda/20$ de espesor, colocada en una placa de vidrio se inclinó con respecto al espejo con un ángulo de 10^{-3} radianes. De esa forma la placa de la película atravesaba el patrón de ondas planas estacionarias. Después de revelar la emulsión, se encontró una serie de bandas ennegrecidas paralelas y equidistantes que correspondían a las regiones donde la película fotográfica había entrecortado los planos antinodales. Muy significativamente, no hubo ennegrecimiento de la emulsión en la superficie del espejo. Puede demostrarse que los nodos y antinodos de la componente de campo magnético de una onda electromagnética estacionaria se alternan con los del campo eléctrico (problema 7.10). Lo mismo podríamos suponer del hecho de que $t = (2m + 1)\tau/4$, $E = 0$ para todos los valores de x y así, a fin de conservar energía, se deduce que $B \neq 0$. De acuerdo con la teoría, Hertz (1888) previamente había establecido la existencia de un punto nodal de campo eléctrico en la superficie de su reflector. Por consiguiente, Wiener pudo concluir que las regiones ennegrecidas estaban asociadas con los antinudos del campo **E**. ***Es el campo eléctrico el que activa el proceso fotoquímico.***

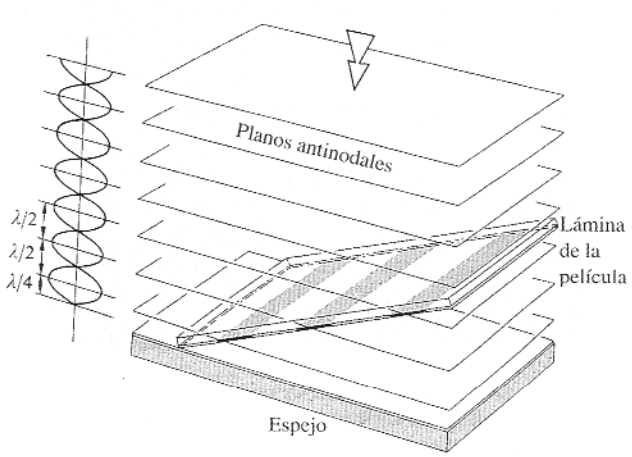


FIGURA 7.11 Experimento de Wiener.

En una forma muy parecida, Drude y Nernst demostraron que la fluorescencia se debe al campo **E**. Todas estas observaciones son comprensibles ya que la fuerza ejercida en un electrón por la componente del campo **B** de una onda electromagnética es despreciable, por lo general, en comparación con la del campo **E**. Por estas razones, el campo eléctrico recibe el nombre de *perturbación óptica* o *campo de luz*.

Las ondas estacionarias generadas por perturbaciones que se propagan en direcciones opuestas son un caso especial perteneciente al terreno más amplio de la interferencia de doble haz (pág. 384). Consideremos las dos fuentes puntuales que emiten ondas de la figura 7.12. Cuando el punto P, el punto de observación que se halla cerca del centro se encuentra lejos de la fuente, el ángulo ϕ es pequeño, las dos ondas se superponen y como resultado se obtiene una figura compleja de interferencia (se hablará de ello en el capítulo 9). Por ahora, baste con decir que el espacio que rodea las fuentes se llenará con un sistema de bandas claras y oscuras donde la interferencia se alterna de constructiva a destructiva. A medida que P se acerca más y que ϕ aumenta, las franjas se hacen más finas, es decir, más estrechas, hasta que P se halle a lo largo de la línea que une las fuentes y que $\phi = 180°$. Entonces, se han establecido las ondas estacionarias cuyas «franjas» serán las más finas que puedan tener, es decir, media longitud de onda, de pico a pico.

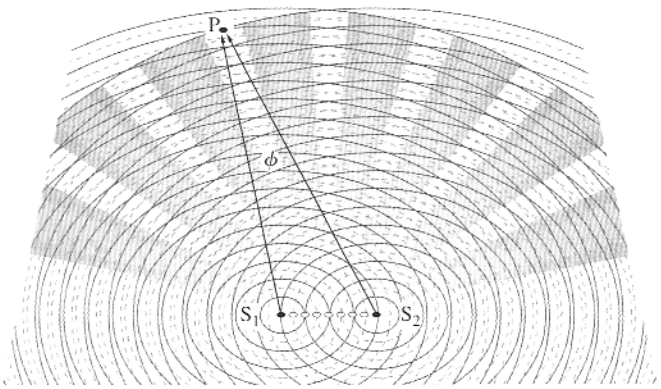


FIGURA 7.12 Dos fuentes puntuales monocromáticas. En un punto cualquiera P, la onda resultante tiene su valor máximo donde pico (—) se superpone a otro pico (—) o donde un valle (– –) se superpone a otro valle (– –). El valor mínimo se halla donde un pico se superpone a un valle. Los valores máximos que se forman a lo largo de la línea $\overline{S_1S_2}$ corresponden a ondas estacionarias.

7.2 Suma de ondas de diferente frecuencia

Hasta ahora el análisis se ha restringido a la superposición de ondas con la misma frecuencia. Sin embargo, en realidad nunca se dan perturbaciones de ninguna clase que sean estrictamente monocromáticas. Será bastante más realista, como veremos, hablar de luz cuasimonocromática que está compuesta de una estrecha gama de frecuencias. El estudio de tal luz nos llevará a abordar los importantes conceptos de ancho de banda y tiempo de coherencia.

La habilidad para modular la luz de manera eficaz (sección 8.11.3) hace posible acoplar sistemas electrónicos y ópticos según una forma que ha surtido y que ciertamente seguirá surtiendo efectos de gran alcance sobre toda la tecnología. Además, desde la aparición de las técnicas electro-ópticas, la luz desempeña un papel significativo como transportador de información. En este apartado se desarrollarán algunas de las ideas matemáticas que se necesitan para poder valorar este nuevo énfasis.

7.2.1 Batidos

Consideremos la perturbación compuesta procedente de una combinación de las ondas

$$E_1 = E_{01} \cos (k_1 x - \omega_1 t)$$

y

$$E_2 = E_{01} \cos (k_2 x - \omega_2 t)$$

que tienen amplitudes iguales y ángulos de desfase inicial cero. La onda neta

$$E = E_{01}[\cos (k_1 x - \omega_1 t) + \cos (k_2 x - \omega_2 t)]$$

puede formularse de nuevo como

$$E = 2E_{01} \cos \tfrac{1}{2}[(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t]$$
$$\times \cos \tfrac{1}{2}[(k_1 - k_2)x - (\omega_1 - \omega_2)t]$$

usando la identidad

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Definimos ahora las cantidades $\bar{\omega}$ y $\bar{k}$ que son *la* ***frecuencia angular promedio*** y el ***número de propagación promedio,*** respectivamente. Del mismo modo, las cantidades ω_m y k_m designan la ***frecuencia de modulación*** y el ***número de propagación promedio de modulación,*** respectivamente. Sea

$$\bar{\omega} \equiv \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \qquad \omega_m \equiv \tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \tag{7.31}$$

y

$$\bar{k} \equiv \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad k_m \equiv \tfrac{1}{2}(k_1 - k_2) \tag{7.32}$$

por lo tanto

$$E = 2E_{01} \cos (k_m x - \omega_m t) \cos (\bar{k}x - \bar{\omega}t) \tag{7.33}$$

La perturbación total puede considerarse como una onda viajera de frecuencia $\bar{\omega}$ que tiene una amplitud variable en el tiempo o modulada $E_0(x, t)$ tal que

$$E(x, t) = E_0(x, t) \cos (\bar{k}x - \bar{\omega}t) \tag{7.34}$$

donde

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos (k_m x - \omega_m t) \tag{7.35}$$

En las aplicaciones que interesan aquí, ω_1 y ω_2 serán siempre bastantes elevadas. Además, si son comparables entre sí, $\omega_1 \approx \omega_2$, entonces $\bar{\omega} >> \omega_m$ y $E_0(x, t)$ cambiarán lentamente, mientras que $E(x, t)$ variará muy rápidamente (figura 7.13). La irradiancia es proporcional a

$$E_0^2(x, t) = 4E_{01}^2 \cos^2 (k_m x - \omega_m t)$$

o

$$E_0^2(x, t) = 2E_{01}^2[1 + \cos (2k_m x - 2\omega_m t)]$$

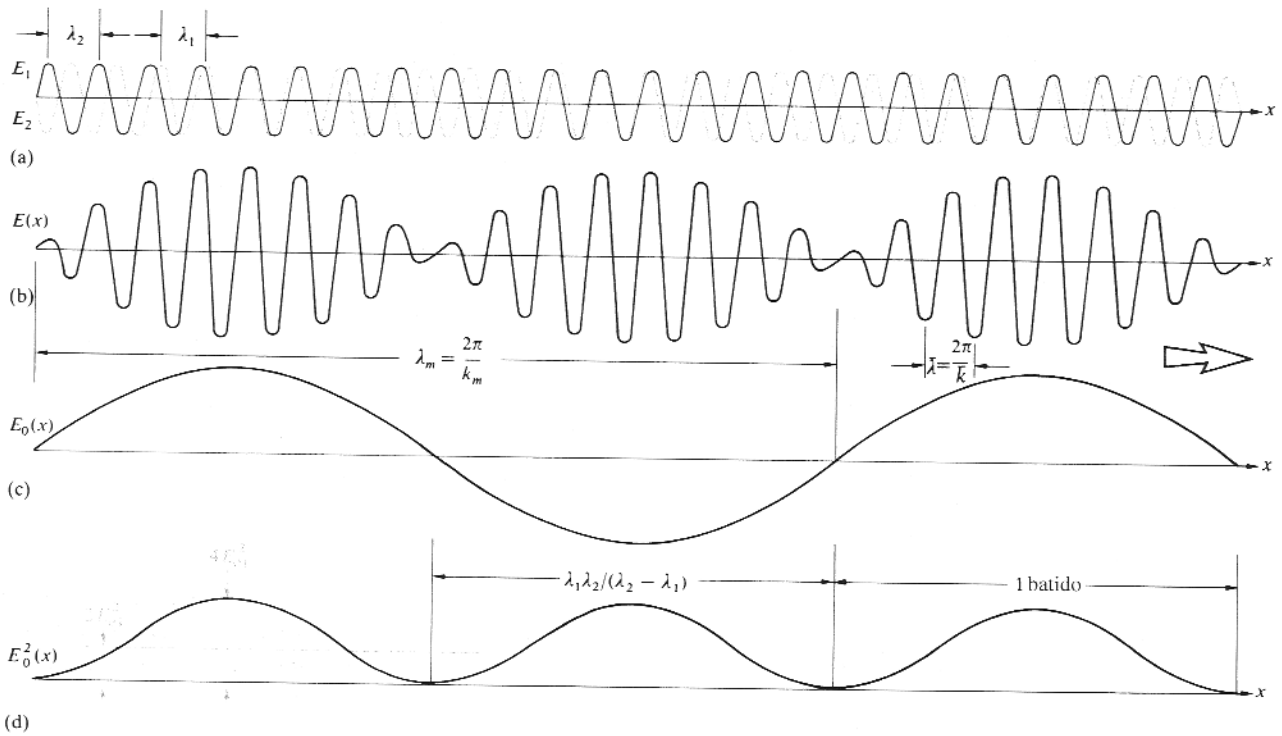


FIGURA 7.13 Superposición de dos ondas armónicas de diferente frecuencia.

Obsérvese que $E_0^2(x, t)$ oscila alrededor de un valor de $2E_{01}^2$ con una frecuencia angular de $2\omega_m$ o simplemente $(\omega_1 - \omega_2)$ que se denomina **frecuencia de batido**. Dicho de otra forma, E_0 varía según la frecuencia de modulación mientras que E_0^2 varía el doble de este valor, es decir, la frecuencia de batido.

Los batidos se observaron por primera vez en 1955 cuando Forrester, Gudmundsen y Johnson emplearon la luz [2] con el fin de obtener dos ondas de frecuencia ligeramente diferente recurriendo al efecto Zeeman. Cuando los átomos de una lámpara de descarga luminosa, en este caso mercurio, se someten a un campo magnético, sus niveles de energía se dividen, por lo tanto la luz emitida contendrá dos frecuencias componentes, ν_1 y ν_2, que difieren en proporción a la magnitud del campo aplicado. Cuando estas componentes se vuelven a combinar en la superficie de un tubo mezclador fotoeléctrico se genera la frecuencia de pulsación $\nu_1 - \nu_2$. El campo se ajustó especialmente de tal manera que $\nu_1 - \nu_2 = 10^{10}$ Hz, lo cual corresponde oportunamente a una señal de microondas de 3 cm. La corriente fotoeléctrica registrada tenía la misma forma que la curva $E_0^2(x)$ de la figura 7.13d.

Desde la invención del láser, la observación de los batidos mediante la luz se ha simplificado enormemente. Es posible examinar incluso un batido de unos pocos Hz sobre 10^{14} Hz como variación de la corriente del tubo fotoeléctrico. La observación de los batidos representa en la actualidad un medio particularmente simple y sensible de detectar pequeñas diferencias de la frecuencia. En el láser de anillo (sección 9.8.3.) que sirve como giróscopo, se emplean los batidos para medir las diferencias de frecuencia inducidas como resultado de la rotación del sistema. El efecto Doppler, que explica el desplazamiento de frecuencia cuando la luz se refleja en una superficie móvil, proporciona otra serie de aplicaciones de los batidos. Dispersando luz desde un objetivo, bien sea sólido, líquido o incluso gaseoso y mezclando sucesivamente las ondas original y reflejada, obtenemos una medida precisa de la velocidad del objetivo. De forma muy parecida en la escala atómica, la luz láser cambiará de fase al interaccionar con

[2] A. T. Forrester, R. A. Gudmundsen, y P. O. Johnson, «Photoelectric Mixing of Incoherent Light». *Phys. Rev.*, **99**, 1691 (1955).

ondas sonoras que se mueven en un material. Este fenómeno se llama esparcimiento de Brillouin. Por lo tanto, $2\omega_m$ se convierte en la medida de la velocidad del sonido en el medio.

7.2.2 Velocidad de grupo

La relación específica entre ω y k define v, la velocidad de fase de una onda. En un medio no dispersivo como el vacío [ecuación (2.33)] $v = \omega/k$ y **un diagrama de ω frente a k es una línea recta**; la frecuencia y la longitud de onda varían para que v permanezca constante. Todas las ondas de una clase determinada (por ejemplo, todas las ondas electromagnéticas) se desplazan con la misma velocidad de fase en un medio no dispersivo mientras que en un medio dispersivo, la velocidad de propagación depende de su frecuencia. Cuando varias ondas se combinan para formar una perturbación compuesta, la envolvente de modulación se desplazará a una velocidad distinta de la de las ondas constitutivas. Este fenómeno saca a relucir la noción importante de *velocidad de grupo* y su relación con la velocidad de fase.

La perturbación examinada en la sección anterior,

$$E(x, t) = E_0(x, t) \cos (\bar{k}x - \bar{\omega}t) \qquad [7.34]$$

consiste en una **onda portadora** ($\bar{\omega}$) de alta frecuencia *modulada en amplitud* por una función coseno. Supongamos, por un momento, que la onda en la figura 7.13b no estuviera modulada, es decir, E_0 = constante. Cada pequeña cresta en la onda de transmisión viajaría a la derecha con la velocidad de fase habitual. Dicho de otro modo,

$$v = -\frac{(\partial\varphi/\partial t)_x}{(\partial\varphi/\partial x)_t} \qquad [2.32]$$

De la ecuación (7.34) la fase viene dada por $\varphi = (\bar{k}x - \bar{\omega}t)$, por lo tanto

$$v = \bar{\omega}/\bar{k} \qquad (7.36)$$

Claramente, ésta es la velocidad de fase de la onda portadora tanto si está modulada como si no lo está. En el primer caso, las crestas simplemente cambian periódicamente de amplitud conforme van viajando.

Evidentemente, existe otro movimiento a tener en cuenta, a saber, la propagación de la envolvente de modulación. Regresemos a la figura 7.13a y supongamos que las ondas constitutivas, $E_1(x, t)$ y $E_2(x, t)$, avanzan con la misma velocidad, $v_1 = v_2$. Imaginemos que las dos ondas armónicas con diferentes longitudes de onda y frecuencias estén dibujadas en hojas separadas de plástico transparente. Cuando éstas se superponen de cierta manera [como en la figura 7.13*a*] la resultante es una distribución estacionaria de batidos. Si ambas hojas se mueven hacia la derecha con la misma velocidad para simular a unas ondas viajeras, los batidos obviamente se moverán con la misma velocidad. *La rapidez de desplazamiento de la envolvente de modulación* se denomina **velocidad de grupo** o simbólicamente como v_g. En este caso, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase de la onda portadora (la velocidad promedio, $\bar{\omega}/\bar{k}$). Dicho de otra forma, $v_g = v = v_1 = v_2$. Esto se aplica concretamente a medios no dispersivos donde la velocidad fásica es independiente de la longitud de onda de tal forma que las dos ondas pueden tener la misma velocidad.

Para una solución de aplicación más general examinemos la expresión para la envolvente de modulación:

$$E_0(x, t) = 2E_{01} \cos (k_m x - \omega_m t) \qquad [7.35]$$

La velocidad con la que se mueve esa onda viene dada de nuevo por la ecuación (2.32), pero ahora podemos olvidarnos de la onda portadora. La modulación avanza a una velocidad que depende de la fase de la envolvente $(k_m x - \omega_m t)$, y

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m}$$

o

$$v_g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Cabe observar, sin embargo, que ω puede depender de λ o de k. La función particular $\omega = \omega(k)$ se denomina *relación de dispersión*. Cuando la gama de frecuencia $\Delta\omega$, centrada alrededor de $\bar{\omega}$, es pequeña, $\Delta\omega/\Delta k$ es aproximadamente igual a la derivada de la relación de dispersión calculada en $\bar{\omega}$, es decir

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\bar{\omega}} \qquad (7.37)$$

La modulación o señal se *propaga con una velocidad v_g que puede ser mayor, igual o menor que la velocidad de fase, v, de la portadora.* La ecuación (7.37) es muy general y resultará válida también para cualquier grupo de ondas superpuestas siempre que su gama de frecuencia sea estrecha.

La representación gráfica de la relación de dispersión (figura 7.14) proporciona una curva que pasa por el origen que es convexa hacia arriba en el caso de dispersión normal y convexa hacia abajo para dispersión anómala (pág. 67). En ambos

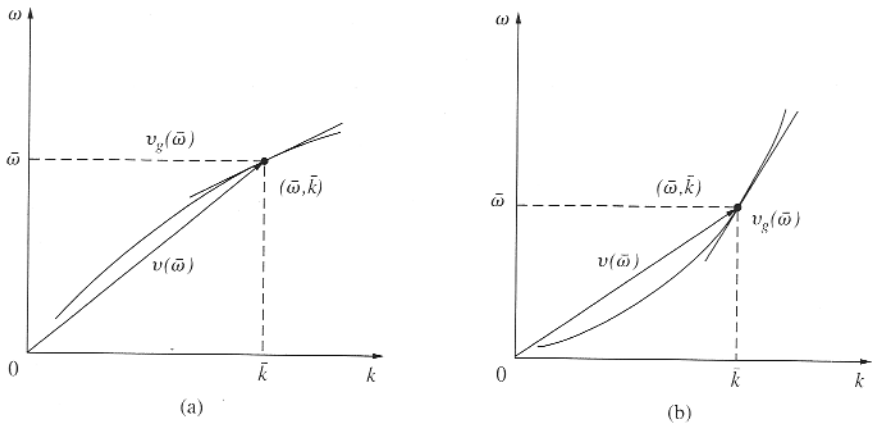


FIGURA 7.14 Representación gráfica de la relación de dispersión. (a) En dispersión normal $v(\bar{\omega}) > v_g(\bar{\omega})$ mientras que en (b) la dispersión anómala $v_g(\bar{\omega}) > v(\bar{\omega})$. La velocidad de fase v, de una onda de cualquier frecuencia ω, es la pendiente de la línea trazada desde el origen hasta ese punto. La velocidad de grupo es la pendiente de la tangente a la curva en $(\bar{\omega}, \bar{k})$ donde $\bar{\omega}$ es la frecuencia media de las ondas que componen el grupo.

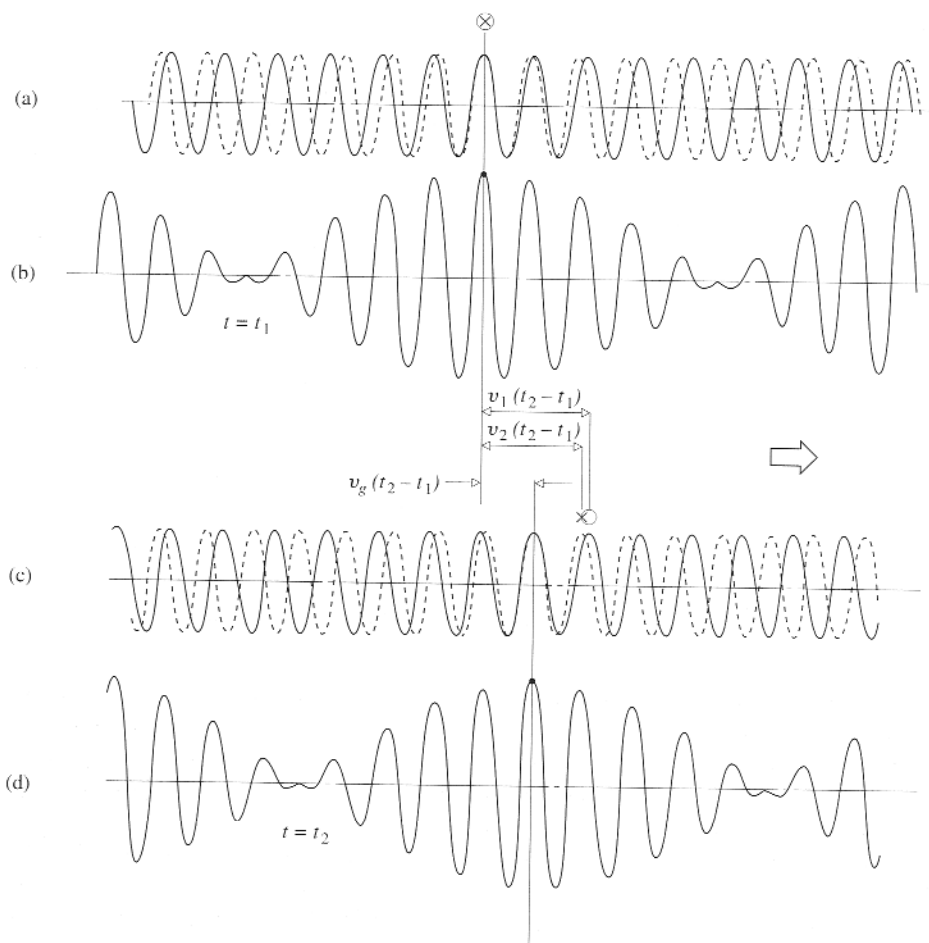


FIGURA 7.15 Velocidades de fase y de grupo. En (a) las dos ondas coinciden en el punto indicado por ⊗. Y en (b) el pico de la onda modulada se produce en ese punto. Pero las ondas se desplazan a velocidades diferentes en (c) y los dos picos originales (marcados por x y ○) se separan. Ahora, un par distinto coincide en (d) para dar lugar al punto elevado de la onda modulada que, por lo tanto, se desplaza a una velocidad aún diferente. Aquí, $v_1 > v_2 > v_g$ y puesto que $\lambda_1 > \lambda_2$, se trata de un caso de dispersión normal.

casos, la pendiente de una línea que une el origen con cualquier punto (ω, k) en la curva es la velocidad de fase a esa frecuencia. Del mismo modo, la pendiente de la curva en el punto $(\bar{\omega}, \bar{k})$ es $(d\omega/dk)_{\bar{\omega}}$ y esto representa la velocidad de grupo para la serie de ondas componentes que están centradas en $\bar{\omega}$. En la dispersión normal, las ondas sinusoidales de elevada frecuencia (por ejemplo, azul) tienen unos índices más amplios y viajan menos rápidamente que las ondas de baja frecuencia (por ejemplo, rojo). Asimismo, la pendiente de la curva de dispersión (v_g) es siempre menos marcada que la de la línea (v); es decir, $v_g < v$ mientras que en la dispersión anómala $v_g > v$.

Ya que $\omega = kv$, la ecuación (7.37) da

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk} \tag{7.38}$$

Por consiguiente, en medios no dispersivos donde v es independiente de λ, $dv/dk = 0$ y $v_g = v$. Concretamente en el vacío $\omega = kc$, $v = c$ y $v_g = c$. En medios dispersivos ($v_1 \neq v_2$, como en la figura 7.15), donde $n(k)$ es conocida, $\omega = kc/n$, siendo útil volver a formular v_g como

$$v_g = \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{dn}{dk}$$

o

$$v_g = v\left(1 - \frac{k}{n}\frac{dn}{dk}\right) \tag{7.39}$$

Para medios ópticos en regiones de dispersión normal, el índice de refracción aumenta con la frecuencia $(dn/dk > 0)$ y, por consiguiente, $v_g < v$. Claramente, debería definirse también un ***índice de refracción de grupo***

$$n_g \equiv c/v_g \tag{7.40}$$

que deberá distinguirse cuidadosamente de n. En 1885, A. A. Michelson calculó el valor de n_g en bisulfuro de carbono usando pulsos de luz blanca y obtuvo 1,758 en comparación con $n = 1{,}635$.

Como veremos dentro de poco, es posible crear un pulso ondulatorio de la misma clase que el de la figura 7.16 sumando convenientemente un número elevado de sinusoides de frecuencia, amplitud y fase correcta. Aquí, el medio tiene dispersión normal y la velocidad de fase se tomará como velocidad de la onda portadora, es decir, de la onda aproximadamente sinusoidal de frecuencia $\bar{\omega}$. Puesto que las crestas de la onda portadora se desplazan más rápidamente que el pulso en conjunto, parecen entrar por la izquierda, recorrerlo y desaparecer por la derecha. A pesar de que cada pico de la onda portadora cambia de altura a medida

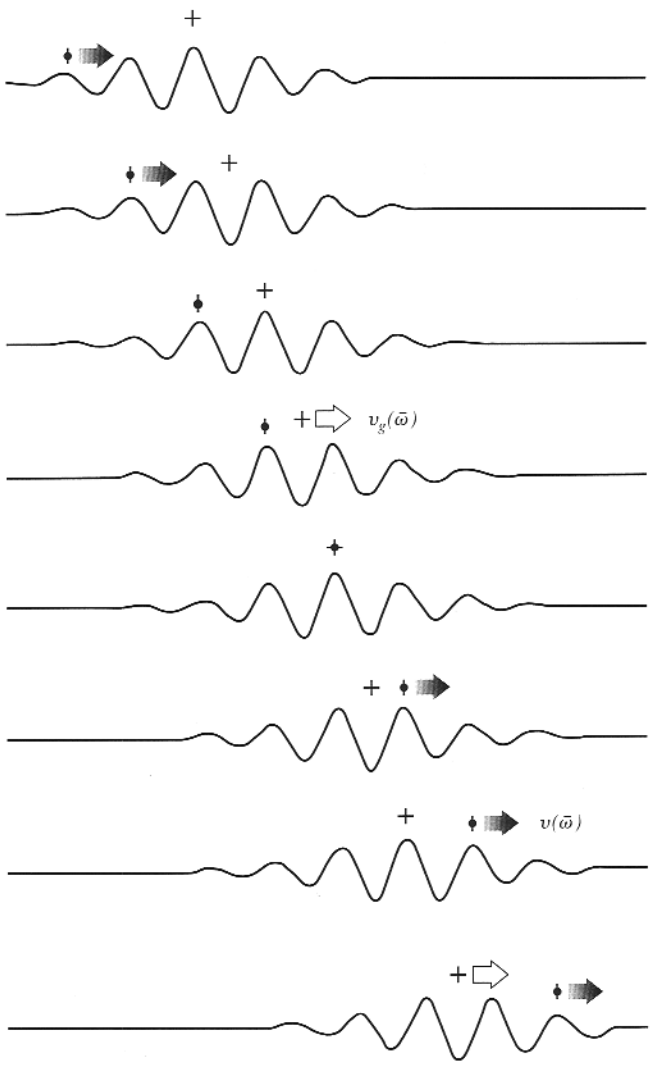


FIGURA 7.16 Un pulso ondulatorio en un medio dispersivo.

que va progresando a través de la pulsación, $v(\bar{\omega})$ es la velocidad de cualquier pico semejante siendo, por consiguiente, la velocidad asociada a la condición de fase constante. Por el contrario, la envolvente de modulación se desplaza a una velocidad $v_g(\bar{\omega}) = (d\omega/dk)_{\bar{\omega}}$ que, en este caso particular, es igual a un cuarto de $v(\bar{\omega})$. Cualquier punto en la envolvente (por ejemplo, el valor máximo en el centro de la pulsación) se mueve a una velocidad $v_g(\bar{\omega})$ que es la velocidad de la condición de magnitud constante.

La teoría de la relatividad especial deja patente que bajo ninguna circunstancia una señal podrá propagarse a una velocidad mayor que c. Sin embargo, ya hemos visto que bajo determinadas circunstancias (sección 3.5.1) la velocidad de fase puede exceder c. La contradicción es solamente aparente y se debe al hecho de que si bien la velocidad de una onda monocromática puede en efecto ser mayor que c, ella no podrá llevar información. Por el contrario, una señal en forma de una onda modulada cualquiera se propagará a la velocidad de grupo que es siempre menor que c en medios con dispersión normal [3].

7.3 Ondas periódicas anarmónicas

La figura 7.17 ilustra una perturbación procedente de la superposición de dos funciones armónicas con diferentes amplitudes y longitudes de onda. Obsérvese que se ha producido un hecho muy curioso: la perturbación compuesta es **anarmónica,** es decir, no es sinusoidal. Como ya hemos dicho, y ciertamente lo diremos de nuevo, las ondas *sinusoidales puras* no tienen existencia física real. Este hecho enfatiza el significado práctico de las perturbaciones anarmónicas y es la razón de buena parte del interés que despierta en nosotros.

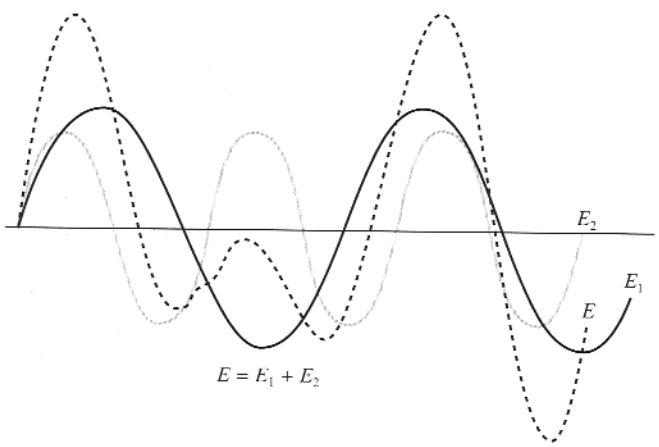


FIGURA 7.17 Superposición de dos ondas armónicas de diferente frecuencia. La onda resultante es periódica pero anarmónica.

[3] En regiones de dispersión anómala (sección 3.5.1) donde $dn/dk < 0$, v_g puede resultar mayor que c. Aquí, sin embargo, la señal se propaga con otra velocidad diferente, denominada *velocidad de señal*, v_s. Entonces $v_s = v_g$ excepto en una banda de absorción de resonancia. En todos los casos, v_s corresponde a la velocidad de transferencia energética y nunca excede c.

7.3.1 Serie de Fourier

La figura 7.17 sugiere que al emplear varias funciones sinusoidales cuyas amplitudes, longitudes de onda y fases relativas hayan sido juiciosamente seleccionadas, sería posible sintetizar algunos perfiles de onda muy interesantes. Una técnica matemática excepcionalmente bella que lleva precisamente a esto fue diseñada por el físico francés Jean Baptiste Joseph, Barón de Fourier (1768-1830). Su teoría radica en lo que se conoce como *teorema de Fourier* que establece que *una función $f(x)$ con un periodo espacial λ puede sintetizarse por la suma de funciones armónicas cuyas longitudes de onda son submúltiplos enteros de λ (es decir, λ, $\lambda/2$, $\lambda/3$, etc.)*. La fórmula matemática de esta representación en serie de Fourier es:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varepsilon_1\right) + C_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda/2}x + \varepsilon_2\right) + \cdots \qquad (7.41)$$

donde los valores C son constantes y, por supuesto, el perfil $f(x)$ puede corresponder a una onda viajera $f(x - vt)$. A fin de entender el funcionamiento de este esquema, obsérvese que si bien C_0 de por sí es un substituto mediocre de la función original, resultará ser oportuna en aquellos escasos puntos donde cruza la curva $f(x)$. De la misma manera, al añadir el siguiente término las cosas mejoran un poco, ya que la función

$$[C_0 + C_1 \cos(2\pi x/\lambda + \varepsilon_1)]$$

será escogida de tal forma que cruce la curva $f(x)$ incluso con más frecuencia. Si la función sintetizada [el lado derecho de la ecuación (7.41)] consta de un número infinito de términos, seleccionados de tal forma que intersecten la función anarmónica en un número infinito de puntos, presumiblemente la serie será idéntica a $f(x)$.

Por lo general, es más conveniente volver a formular la ecuación (7.41) recurriendo a la identidad trigonométrica

$$C_m \cos(mkx + \varepsilon_m) = A_m \cos mkx + B_m \operatorname{sen} mkx$$

donde $k = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda de $f(x)$, $A_m = C_m \cos \varepsilon_m$ y $B_m, = - C_m \operatorname{sen} \varepsilon_m$. Por consiguiente,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} mkx \quad (7.42)$$

El primer término se escribe como $A_0/2$ debido a la simplificación matemática a la cual llevará más tarde. El proceso que permite establecer los coeficientes A_0, A_m y B_m para una función periódica específica $f(x)$ recibe el nombre de **Análisis de Fourier**. Ahora, nos vamos a entretener un momento en deducir un conjunto de ecuaciones para estos coeficientes que podrán utilizarse de aquí en adelante. Para ello, integremos ambos lados de la ecuación (7.42) en cualquier intervalo especial igual a λ, por ejemplo, desde 0 hasta λ o desde $-\lambda/2$ hasta $+\lambda/2$ o, más generalmente, desde x' hasta $x' + \lambda$. Ya que en cualquiera de tales intervalos

$$\int_0^{\lambda} \operatorname{sen} mkx\, dx = \int_0^{\lambda} \cos mkx\, dx = 0$$

solamente hay un término diferente de cero a valorar, a saber

$$\int_0^{\lambda} f(x)\, dx = \int_0^{\lambda} \frac{A_0}{2}\, dx = A_0 \frac{\lambda}{2}$$

y entonces

$$A_0 = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x)\, dx \quad (7.43)$$

A fin de definir A_m y B_m usaremos la *ortogonalidad de las funciones sinusoidales* (problema 7.28), es decir, el hecho de que

$$\int_0^{\lambda} \operatorname{sen} akx \cos bkx\, dx = 0 \quad (7.44)$$

$$\int_0^{\lambda} \cos akx \cos bkx\, dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad (7.45)$$

$$\int_0^{\lambda} \operatorname{sen} akx \operatorname{sen} bkx\, dx = \frac{\lambda}{2} \delta_{ab} \quad (7.46)$$

donde a y b son números enteros positivos diferentes de cero y δ_{ab}, denominada *delta de Kronecker*, es una expresión abreviada igual a cero cuando $a \neq b$ e igual a 1 cuando $a = b$. Para calcular A_m multipliquemos ahora ambos lados de la ecuación (7.42) por $\cos \ell kx$, donde ℓ es un número entero positivo, y sucesivamente integremos sobre un período espacial. Solamente un término no se anula y esa es la contribución simple en la segunda suma que corresponde a $\ell = m$, en cuyo caso

$$\int_0^{\lambda} f(x) \cos mkx\, dx = \int_0^{\lambda} A_m \cos^2 mkx\, dx = \frac{\lambda}{2} A_m$$

Por tanto

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos mkx\, dx \quad (7.47)$$

Dicha expresión puede utilizarse para definir A_m *para todos los valores de m incluyendo* $m = 0$, como resulta ser evidente comparando las ecuaciones (7.43) y (7.47). Del mismo modo, multiplicando la ecuación (7.42) por $\operatorname{sen} \ell kx$ e integrando llegamos a

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} mkx\, dx \quad (7.48)$$

En resumen, entonces una función periódica $f(x)$ puede representarse como serie de Fourier

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mkx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} mkx \quad [7.42]$$

donde, conociendo $f(x)$, los coeficientes se calculan usando

$$A_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \cos mkx\, dx \quad [7.47]$$

y

$$B_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \operatorname{sen} mkx\, dx \quad [7.48]$$

Hay que ser consciente de la existencia de algunas sutilezas matemáticas relacionadas con la convergencia de la serie y el número de singularidades en $f(x)$, pero no nos ocuparemos aquí de esos asuntos.

Existen determinadas condiciones de simetría que vale la pena considerar porque proporcionan algunos atajos en los cálculos. Así, si una función $f(x)$ es *par*, es decir, si $f(-x) = f(x)$ o, de manera equivalente, si la misma es simétrica alrededor de $x = 0$, su serie de Fourier contendrá solamente términos coseno ($B_m = 0$ para todo m) los cuales son, de por sí, funciones pares. De la misma forma, las funciones *impares* que son antisimétricas alrededor de $x = 0$, es decir, $f(-x) = -f(x)$ tendrán desarrollos en serie que contienen sólo funciones seno ($A_m = 0$ para cualquier valor de m). En cualquiera de los dos casos, no es preciso calcular ambas series de coeficientes. Esto resulta ser particularmente útil cuando la posición del origen ($x = 0$) es arbitraria pudiendo escogerse para simplificar las cosas todo lo posible. No obstante, cabe recordar que muchas funciones comunes no son ni impares ni pares (por ejemplo, e^x).

Para poner un ejemplo de esta técnica, calculemos la serie de Fourier que corresponde a una onda cuadrada. Seleccionemos la posición del origen como se muestra en la figura 7.12 y así

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{cuando } 0 < x < \lambda/2 \\ -1 & \text{cuando } \lambda/2 < x < \lambda \end{cases}$$

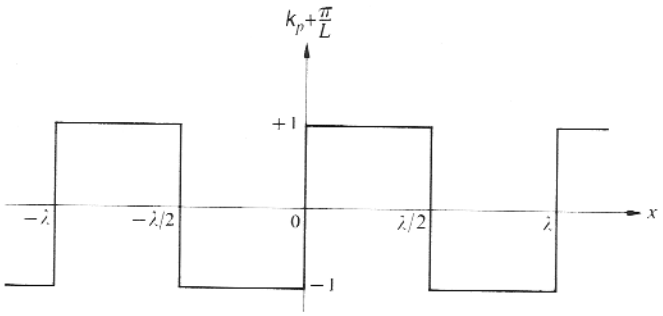


FIGURA 7.18 Perfil de una onda cuadrada periódica.

Como $f(x)$ es impar, $A_m = 0$, y

$$B_m = \frac{2}{\lambda}\int_0^{\lambda/2} (+1)\,\text{sen}\, mkx\, dx + \frac{2}{\lambda}\int_{\lambda/2}^{\lambda} (-1)\,\text{sen}\, mkx\, dx$$

por lo tanto

$$B_m = \frac{1}{m\pi}[-\cos mkx]_0^{\lambda/2} + \frac{1}{m\pi}[\cos mkx]_{\lambda/2}^{\lambda}$$

Recordando que $k = 2\pi/\lambda$, tendremos

$$B_m = \frac{2}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$

Los coeficientes de Fourier son por consiguiente

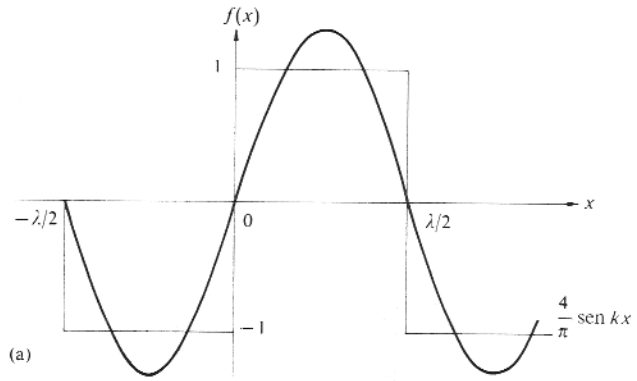
$$B_1 = \frac{4}{\pi}, \qquad B_2 = 0, \qquad B_3 = \frac{4}{3\pi},$$

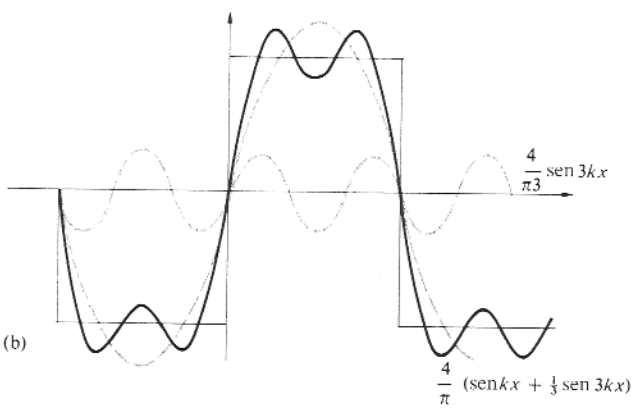
$$B_4 = 0, \qquad B_5 = \frac{4}{5\pi}, \ldots,$$

siendo la serie requerida simplemente

$$f(x) = \frac{4}{\pi}(\text{sen}\, kx + \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\, 3kx + \tfrac{1}{5}\,\text{sen}\, 5kx + \cdots) \quad (7.49)$$

La figura 7.19 es una representación gráfica de unas cuantas sumas parciales de la serie a medida que el número de términos aumenta. Podríamos ahora pasar al dominio temporal para definir $f(t)$ simplemente reemplazando kx por ωt. Supongamos que tenemos tres osciladores electrónicos corrientes cuyos voltajes de salida varían de forma sinusoidal siendo controlables tanto en frecuencia como en amplitud. Si éstos están conectados en serie con sus frecuencias cuyo valor es ω, 3ω y 5ω y si la señal total se examina en un osciloscopio, podríamos sintetizar cualquiera de estas curvas como en la figura 7.19*d*. Del mismo modo, podríamos presionar simultáneamente tres





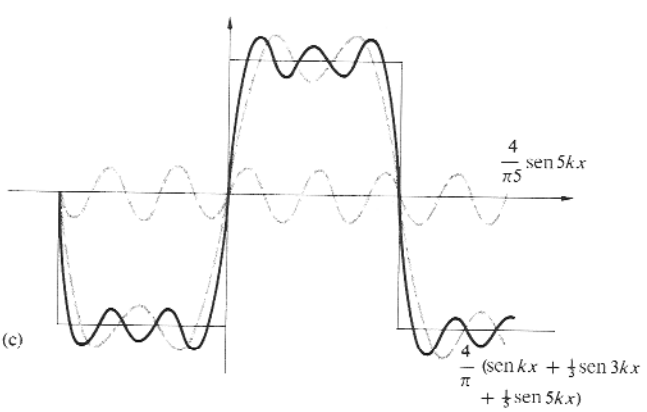


FIGURA 7.19 (Continúa).

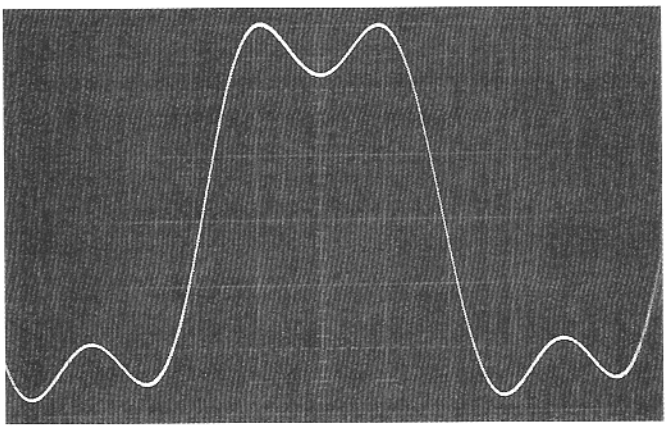


FIGURA 7.19 Síntesis del perfil de una onda cuadrada periódica. Obsérvese que todas las ondas constitutivas están en fase y a cero dondequiera que la onda cuadrada sea cero. Ya que todas las ondas sinusoidales están en fase en $x = 0$, todos los coeficientes B_m son positivos.

teclas de un piano afinado oportunamente, con la fuerza acertada en cada una para crear un acorde o una onda sonora compuesta, cuyo perfil es la curva de la figura 7.19*c*. No deja de despertar curiosidad el que el sistema auditivo humano oído-cerebro sea capaz de llevar a cabo un análisis de Fourier de una onda compuesta y determinar sus armónicos componentes —supuestamente hay gente que incluso puede nombrar cada nota del acorde.

Anteriormente, aplazamos cualquier consideración detallada de las funciones periódicas anarmónicas, tales como las de la figura 2.6 y restringimos nuestro análisis a las ondas sinusoidales puras. Ahora disponemos de una base lógica, convincente para haberlo hecho así. De ahora en adelante podemos visualizar este tipo de perturbación como superposición de constitutivas armónicas de diferentes frecuencias cuyo comportamiento individual puede estudiarse separadamente. Por lo tanto, podemos escribir

$$f(x \pm vt) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mk(x \pm vt) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \operatorname{sen} mk(x \pm vt) \qquad (7.50)$$

o equivalentemente

$$f(x \pm vt) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos [mk(x \pm vt) + \varepsilon_m] \qquad (7.51)$$

para cualquiera de tales *ondas periódicas anarmónicas*.

Como último ejemplo, analicemos ahora la onda cuadrada de la figura 7.20 en sus componentes de Fourier. Cabe observar que la función correspondiente al origen escogido tal y como se muestra es par, siendo todos los términos B_m igual a cero. Los coeficientes de Fourier apropiados (problema 7.29) son entonces

$$A_0 = \frac{4}{a} \quad \text{y} \quad A_m = \frac{4}{a}\left(\frac{\operatorname{sen} m2\pi/a}{m2\pi/a}\right) \qquad (7.52)$$

Al contrario de la función anterior, el valor de A_0 de ésta es diferente de cero. Quizá ya se observó que $A_0/2$ es en realidad el *valor medio* de $f(x)$ y como la curva se halla completamente arriba del eje, claramente no será cero.

La expresión (sen u)/u, que ya se estudió anteriormente (pág. 48), se denominó **sinc u** siendo sus valores los listados en la tabla 1 del apéndice. Ya que el límite de sinc u cuando u tiende a a cero es 1, A_m puede representar todos los coeficientes si establecemos $m = 0, 1, 2, \ldots$. Asimismo, cabe observar que a causa de los valores negativos de la función sinc, algunos de los coeficientes de A_m serán negativos. Esto significa que algunos de los cosenos de órdenes superiores estarán desfasados en 180° con respecto al término de coseno en que $m = 1$.

Las funciones de las figuras 7.18 y 7.20 se distinguen por tres cosas, teniendo por lo demás la misma forma: la posición del eje $x = 0$, la posición del eje $f(x) = 0$ y la altura de los escalones. Por consiguiente, además de la constante A_0, los términos armónicos componentes tienen que tener la misma relación con $f(x)$ cualquiera que esta sea al representarse gráficamente. Dicho de otro modo, al desplazar el eje $x = 0$ desde la posición de la figura 7.18 hasta la de la figura 7.20 los senos se convertirán en cosenos en el análisis, dejando por lo demás sin alterar las funciones armónicas constitutivas de la figura 7.19; las sinusoides que conforman la pulsación cuadrada de la figura 7.19 serán las cosinusoides que constituyen la figura 7.20. Estando el eje vertical en el medio del pico cuadrado, en la figura 7.19 está claro que los cosenos alternativos serán negativos en $x = 0$.

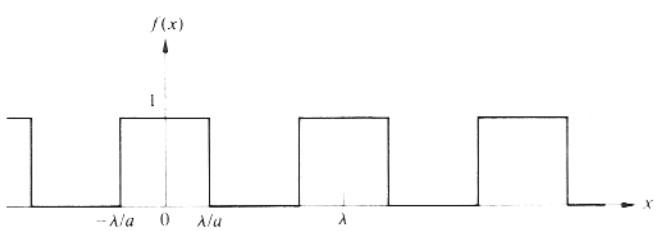


FIGURA 7.20 Onda periódica anarmónica.

El ancho del pico cuadrado, $2(\lambda/a)$ puede ser cualquier fracción de la longitud de onda total, dependiendo de a. La serie de Fourier es entonces

$$f(x) = \frac{2}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{a} \operatorname{sinc} m2\pi/a \cos mkx \qquad (7.53)$$

Si estuviéramos sintetizando la función correspondiente del tiempo, *f(t)*, con un pico cuadrado de ancho $2(\tau/a)$, se aplicaría la misma expresión, ecuación (7.53), reemplazando simplemente kx por ωt. Aquí ω es la *frecuencia angular temporal* de la función periódica *f(t)* denominada la **fundamental**. Se trata de la frecuencia más baja del término coseno y aparece cuando $m = 1$. Las frecuencias de 2ω, 3ω, 4ω, etc., reciben el nombre de ***armónicas*** de la fundamental y están asociadas con $m = 2$, 3, 4, etc. De forma muy parecida, ya que λ es el *período espacial*, $\kappa \equiv 1/\lambda$ es la **frecuencia espacial** y $k = 2\pi\kappa$ podría llamarse **frecuencia espacial angular**. Se hablará así nuevamente de armónicas, de frecuencia de $2k$, $3k$, $4k$, ..., donde éstas son alternancias espaciales. Evidentemente, las dimensiones de κ son ciclos por unidades de longitud (por ejemplo, ciclos por mm o, posiblemente, solo cm^{-1}) mientras que las de k son radianes por unidades de longitud. Por lo tanto, la frecuencia espacial de una valla podría ser de 1 piquete por pie mientras que la k de un peine podría ser de 10 dientes por pulgada.

Aclaremos unos puntos a fin de evitar la confusión que normalmente se produce acerca del uso de los términos *frecuencia espacial* y *periodo espacial* (o longitud de onda). En la figura 7.20 se recoge una función de onda cuadrada periódica unidimensional que se extiende en el espacio a lo largo del eje x. Podría tratarse del patrón visto en la pantalla de un osciloscopio o el perfil de una perturbación más bien extraordinaria que se desplaza a lo largo de una cuerda tensa. En ambos casos, se repite en el espacio por una distancia denominada longitud de onda y uno dividido por ésta es la frecuencia espacial.

Ahora, supongamos que el patrón corresponde a una distribución de la irradiancia, por ejemplo, una serie de franjas oscuras y brillantes parecidas a lo que podría verse mirando a través de una fisura estrecha horizontal contra el piquete de una valla o, mejor todavía, barriendo en una línea a través de un grupo de franjas claras y oscuras alternadas (figura 13.26) iluminadas por luz monocromática. El patrón tendrá nuevamente un período espacial y una frecuencia determinados por el ritmo al que se repite en el espacio. Como siempre, el campo luminoso también tendrá una frecuencia espacial angular (κ) y un período (λ) así como una frecuencia temporal y un período bastante distantes del otro. La longitud de onda (λ) de la distribución podría ser de 20 cm mientras que la de la luz (λ) que lo genera podría ser de 500 nm. Aquí es donde puede darse potencialmente la confusión. ***A partir de este momento, reservaremos los símbolos k y λ a la onda luminosa misma y utilizaremos k y λ para describir las distribuciones ópticas espaciales.***

Ahora, volvamos a la función cuadrada de la figura 7.20 donde $a = 4$ o, dicho de otro modo, el ancho del pico es de $\lambda/2$. En ese caso

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}(\cos kx - \tfrac{1}{3}\cos 3kx + \tfrac{1}{5}\cos 5kx - \cdots) \qquad (7.54)$$

A decir verdad, *si el diagrama de la función f(x) es tal que una línea horizontal lo puede dividir en segmentos con la misma forma, por encima y por debajo de esa línea, la serie de Fourier consistirá solamente de armónicas impares.*

Si fuéramos a representar gráficamente la curva que representa la suma parcial de los términos hasta $m = 9$, ésta se asemejaría mucho a la onda cuadrada. Por el contrario, si el ancho del pico se reduce, el número de términos que se necesitan en la serie para producir el mismo parecido general a *f(x)* aumentará. Esto puede apreciarse examinando la relación

$$\frac{A_m}{A_1} = \frac{\operatorname{sen}\ m2\pi/a}{m\ \operatorname{sen}\ 2\pi/a} \qquad (7.55)$$

Obsérvese que para $a = 4$, el noveno término, es decir $m = 9$, es bastante pequeño, $A_9 \approx 10\%\ A_1$. En comparación, para un pico 100 veces más estrecho, es decir $a = 400$, $A_9 \approx 99\%\ A_1$. Del mismo modo, si para reproducir la curva de la figura 7.19*b* cuando $a = 4$ serán precisos términos hasta $m = 4$, para producir aproximadamente el perfil equivalente cuando $a = 8$ serán precisos términos hasta $m = 8$. Al estrechar el pico se introducen armónicos de orden superior que, a su vez, tienen longitudes de onda más cortas. Podríamos entonces imaginar que lo verdaderamente importante no es tanto el número total de términos en la serie sino más bien las dimensiones relativas de las características más pequeñas que se estén reproduciendo y las longitudes de onda correspondientes disponibles [4]. Si hay detalles finos en el perfil, la serie deberá contener contribuciones de longitudes de onda comparativamente corta (o en el dominio temporal, de período corto).

Los valores negativos de A_m en la ecuación (7.53) y en la figura (7.21) deberían considerarse sencillamente como las

[4] Lógicamente, no se podrá construir un castillo de bloques a no ser que éstos sean mucho más pequeños que el castillo.

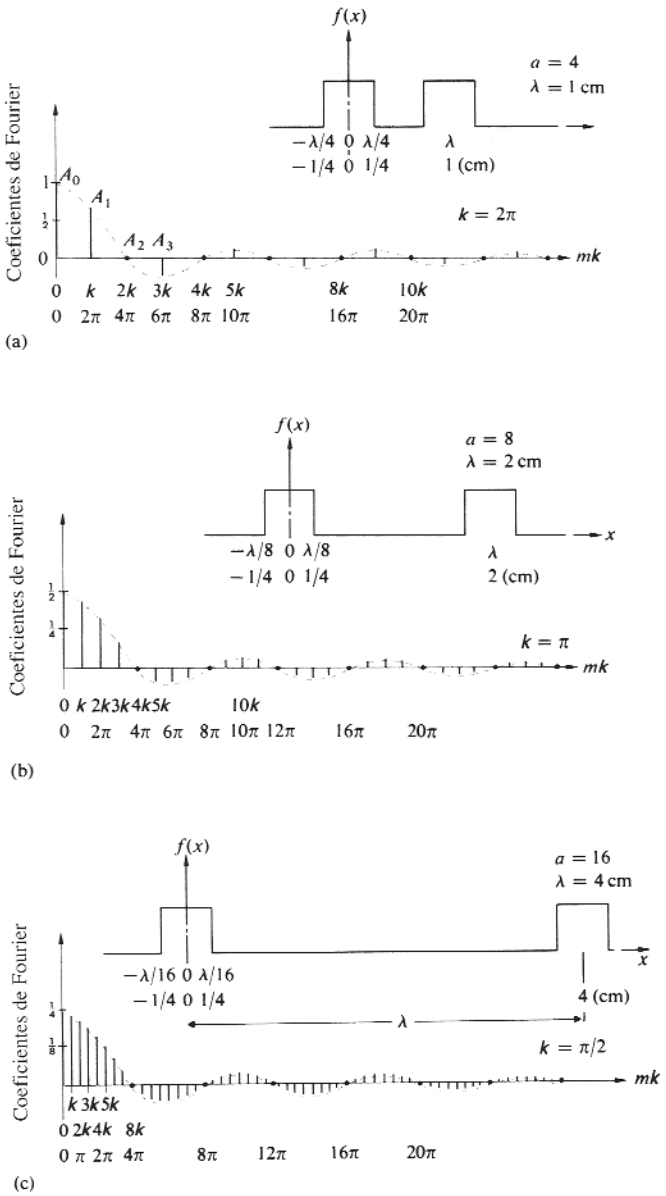


FIGURA 7.21 El pulso cuadrado como caso límite. Los coeficientes negativos corresponden a un desplazamiento de fase de π radianes.

amplitudes de aquellas contribuciones armónicas que deberán añadirse a la síntesis con sus fases desplazadas de 180°, en comparación con los términos positivos. La equivalencia entre una amplitud negativa y un desplazamiento de fase de π radianes se deduce claramente de $A_m \cos(kx + \pi) = -A_m \cos kx$.

7.4 Ondas no periódicas

Regresemos a la figura 7.20 e imaginemos que mantenemos constante el ancho del pico cuadrado mientras que λ se incrementa sin límite. Al acercarse λ a infinito, la función resultante ya no será periódica. Entonces tendríamos un pulso cuadrado único mientras que los picos adyacentes se habrán desplazado al infinito. Esto sugiere una forma posible de generalizar el método de las series de Fourier para incluir las funciones no periódicas, funciones que tienen un gran interés práctico en física, particularmente en la óptica y en la mecánica cuántica.

7.4.1 Las integrales de Fourier

Para ver cómo lograrlo, sea inicialmente $a = 4$ y escojamos algún valor de λ: cualquiera valdrá, digamos $\lambda = 1$ cm. El pico tendrá entonces un ancho de $\frac{1}{2}$ cm, es decir, $2(\lambda/a)$ centrado en $x = 0$, como se ilustra en la figura 7.21*a*. La importancia de cada frecuencia particular, mk, puede apreciarse examinando el valor del coeficiente de Fourier correspondiente, en este caso A_m. Los coeficientes pueden considerarse como factores de ponderación que acentúan oportunamente los distintos armónicos. En la figura 7.21*a* se recogen varios valores de A_m (donde $m = 0, 1, 2, ...$) frente a mk para la onda cuadrada anterior — tal curva se denomina ***espectro de frecuencias espaciales.***

Podemos considerar A_m como una función, $A(mk)$, de mk que puede ser diferente de cero solamente para valores de $m = 0, 1, 2, ...$ Si ahora la cantidad a se establece igual a 8 mientras que λ se aumenta hasta 2 cm, el ancho del pico se verá completamente inalterado siendo la única variación la duplicación del espacio entre los picos. Sin embargo, un cambio muy interesante en el espectro de frecuencias espaciales es evidente en la figura 7.21*b*. Obsérvese que la densidad de componentes a lo largo del eje mk ha aumentado notablemente. No obstante, $A(mk)$ es aún cero cuando $mk = 4\pi, 8\pi, 12\pi, ...$ pero ya que el valor de k es ahora π en lugar de 2π, habrá más términos entre estos puntos con valor cero. Finalmente, sea $a = 16$ y aumentemos λ a 4 cm. La forma de los picos individuales permanecerá inalterada pero los términos en el espectro de frecuencia están ahora aún más compactos. En efecto, el pulso, comparado con λ, se está haciendo cada vez más pequeño, por lo tanto se precisan frecuencias más elevadas para sintetizarlo.

Cabe observar que la envolvente de la curva, que era apenas perceptible en la figura 7.21*a* es bastante evidente en la figura

7.21c. En efecto, la envolvente es idéntica en cada caso excepto por un factor de escala, estando determinada solamente por la forma de la señal original, siendo muy diferente para otras configuraciones. Por consiguiente, podemos concluir que a medida que λ aumenta y que la función adquiere la apariencia de un pulso cuadrado simple, el espacio entre cada una de las contribuciones $A(mk)$ en el espectro decrecerá. Las líneas espectrales discretas, al disminuir su amplitud, se unirán gradualmente, haciéndose individualmente irresolubles. Dicho de otro modo, en el límite cuando λ se acerca a ∞, las líneas espectrales se aproximan infinitamente unas a otras. A medida que k se hace extremadamente pequeña, m debe por consiguiente hacerse extremadamente grande para que mk sea perceptible. Y así, cambiando la notación reemplazamos mk, la frecuencia angular de los armónicos, por k_m. Aunque formada de términos discretos, en el límite k_m se transformará en k, es decir, en una distribución continua de frecuencia. La función $A(k_m)$ en el límite se convertirá en la envolvente mostrada en la figura 7.21. Obviamente ya no tiene sentido hablar de la frecuencia fundamental y sus armónicos ya que el pulso que se está sintetizando, $f(x)$, no tiene frecuencia fundamental aparente.

Recordemos que una integral es en realidad el límite de una suma a medida que el número de elementos va al infinito y su tamaño se aproxima a cero. Entonces, no debería sorprender que la *serie de Fourier* haya de reemplazarse por la denominada **integral de Fourier** cuando λ va a infinito. Esa integral, que aquí proporcionamos sin demostración, es

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty A(k)\cos kx\,dk + \int_0^\infty B(k)\,\text{sen}\,kx\,dk\right] \tag{7.56}$$

siempre que

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos kx\,dx$$

y

$$B(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx \tag{7.57}$$

La similitud con la representación en serie debería ser obvia. Las cantidades $A(k)$ y $B(k)$ se interpretan como las amplitudes de las contribuciones seno y coseno en la gama de la frecuencia especial angular entre k y $k + dk$. Se trata de las **transformadas coseno** y **seno de Fourier**, respectivamente. En el ejemplo anterior de un pulso cuadrado, es la transformada coseno, $A(k)$, la que corresponde a la envolvente de la figura 7.21.

De un análisis cuidadoso de la figura 7.21 y de la ecuación (7.53) resulta que, salvo el término de frecuencia cero, las amplitudes de las contribuciones a la síntesis varían como $(4/a)$ sinc $m2\pi/a$: la envolvente de la curva es una función sinc. Recuerden que el primer término de la serie es $\frac{1}{2}A_0$ lo cual sugiere otra manera de representar el espectro de frecuencias. Ya que cos (mkx) = cos $(-mkx)$, podemos dividir la amplitud de cada contribución superior a $m = 0$ por la mitad y representarla gráficamente dos veces, la primera con un valor positivo de k y la segunda con un valor negativo (figura 7.22). Este artificio matemático proporciona una bonita curva simétrica que presentamos aquí pues es costumbre representar los espectros de la frecuencia de tal forma.

Como veremos en el capítulo 11, los métodos más poderosos de las transformadas de Fourier conllevan una representación compleja que ocasiona automáticamente una distribución simétrica de los términos positivos y negativos de frecuencia espacial. Por lo tanto, la frecuencia negativa es un instrumento matemático útil que nos permite describir sistemas físicos simétricos (que se desplazan en direcciones opuestas desde un punto central).

7.4.2 Pulsos y paquetes de onda

Determinemos ahora la representación de la integral de Fourier del pulso cuadrado de la figura 7.23 que es descrita por la función

$$f(x) = \begin{cases} E_0 & \text{cuando } |x| < L/2 \\ 0 & \text{cuando } |x| > L/2 \end{cases}$$

Por ahora, limitaremos el análisis a los valores positivos de k.

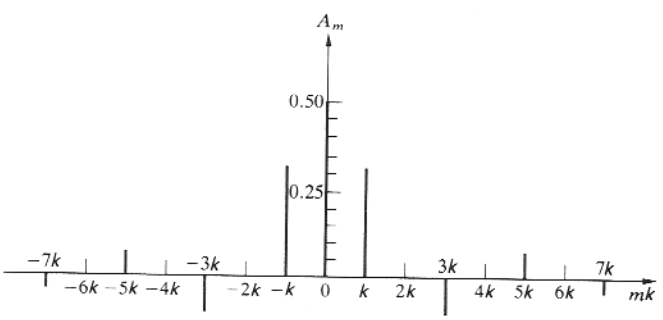


FIGURA 7.22 Espectro de frecuencias simétricas de la forma de onda de la figura 7.21a. Obsérvese que el término de orden cero es realmente $A_0/2$ que es de verdad la amplitud de la contribución $m = 0$ a la serie.

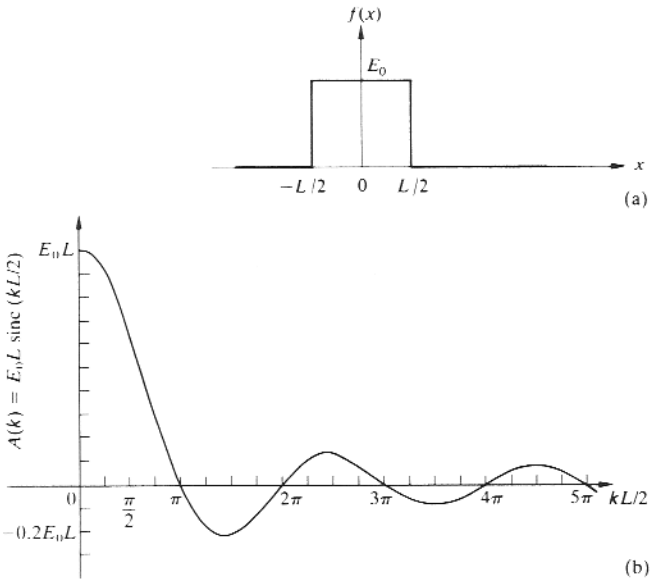


FIGURA 7.23 El pulso cuadrado y su transformada.

Como $f(x)$ es una función par, la transformada seno, $B(k)$, será cero. Siguiendo,

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx\, dx = \int_{-L/2}^{+L/2} E_0 \cos kx\, dx$$

Por consiguiente

$$A(k) = \frac{E_0}{k} \operatorname{sen} kx \Big|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{2E_0}{k} \operatorname{sen} kL/2$$

Multiplicando el numerador y el denominador por L y ordenando de nuevo los términos, obtenemos

$$A(k) = E_0 L \frac{\operatorname{sen} kL/2}{kL/2}$$

o, de manera equivalente,

$$A(k) = E_0 L \operatorname{sinc} (kL/2) \qquad (7.58)$$

La transformada de Fourier del pulso cuadrado se representa gráficamente en la figura 7.23*b* y debería compararse con la envolvente de la figura 7.21. Cabe observar que a medida que L aumenta, el espacio entre ceros sucesivos de $A(k)$ disminuye y viceversa. Además, cuando $k = 0$, de la ecuación (7.58) se deduce que $A(0) = E_0 L$.

Es muy sencillo escribir la representación integral de $f(x)$ usando la ecuación (7.56):

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} E_0 L \operatorname{sinc} (kL/2) \cos kx\, dx \qquad (7.59)$$

Una evaluación de esta integral se deja para el problema 7.33.

El tren de ondas coseno

Anteriormente, al hablar de ondas mocromáticas, señalamos que eran en realidad ficticias, al menos físicamente. Siempre habría algún punto en el tiempo cuando el generador, por más que fuera perfecto, se encendiera. La figura 7.24 ilustra un pulso armónico algo idealizado que corresponde a la función

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \cos k_p x & \text{cuando } -L \leq x \leq L \\ 0 & \text{cuando } |x| > L \end{cases}$$

Decidimos trabajar en el campo espacial pero ciertamente podríamos haber visualizado la perturbación como una función del tiempo. En efecto, estamos examinando el perfil espacial de la onda $E(x - vt)$ en $t = 0$ en lugar del perfil temporal en $x = 0$. La frecuencia espacial k_p es la de la región armónica del impulso mismo. Procediendo con el análisis, obsérvese que $E(x)$ es una función par, por lo tanto $B(k) = 0$ y

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \cos k_p x \cos kx\, dx$$

Esto es idéntico a

$$A(k) = \int_{-L}^{+L} E_0 \tfrac{1}{2} [\cos (k_p + k)x + \cos (k_p - k)x]\, dx$$

el cual se integra a

$$A(k) = E_0 L \left[\frac{\operatorname{sen} (k_p + k)L}{(k_p + k)L} + \frac{\operatorname{sen} (k_p - k)L}{(k_p - k)L} \right]$$

o, si se desea,

$$A(k) = E_0 L [\operatorname{sinc} (k_p + k)L + \operatorname{sinc} (k_p - k)L] \qquad (7.60)$$

Cuando hay muchas ondas en el tren ($\lambda_p << L$), $k_p L >> 2\pi$. Entonces $(k_p + k)L >> 2\pi$ y, por consiguiente, sinc $(k_p + k)L$ baja a valores bastantes pequeños. Por el contrario, cuando $k_p = k$ la segunda función sinc entre paréntesis alcanza su valor máximo de 1. Dicho de otro modo, se puede pensar que la función de la ecuación (7.60) tiene un pico en $k = -k_p$ tal y

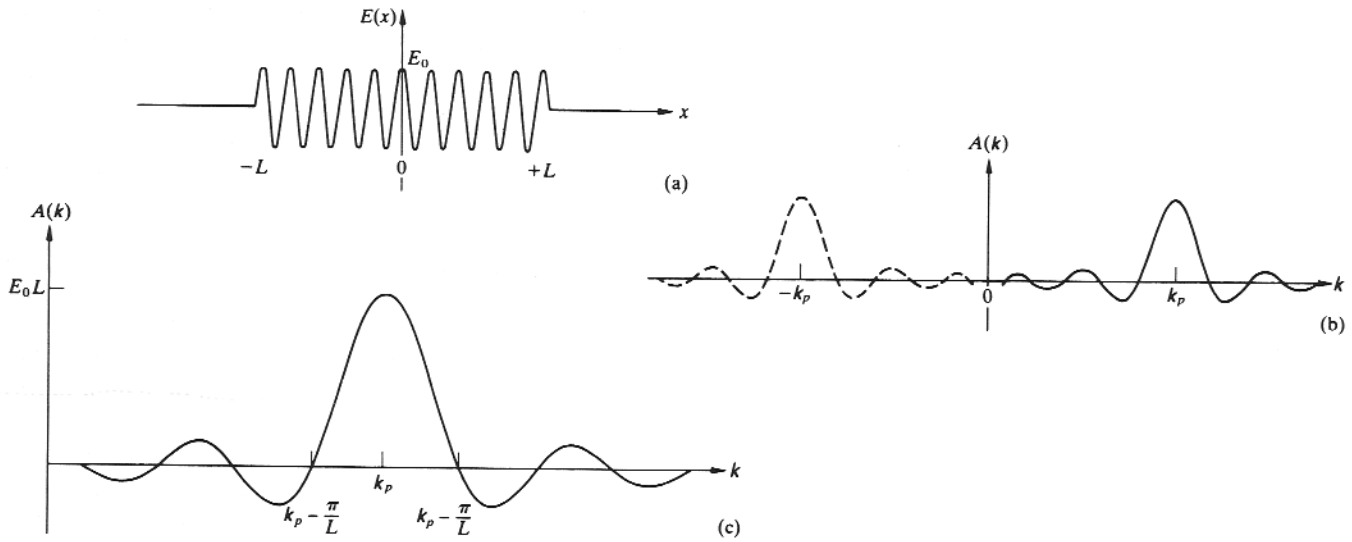


FIGURA 7.24 Perfil de un tren de onda cosenoidal finito y su transformada.

como se muestra en la parte (*b*) del diagrama. Si limitamos el análisis tan sólo a los valores positivos de k, solamente la cola de ese pico a la izquierda que cruza la región positiva k dará su contribución. Como acabamos de ver, tales contribuciones serán despreciables lejos de $k = -k_p$, particularmente cuando $L >> \lambda_p$ y los picos son estrechos y están muy espaciados. La cola positiva del pico a la izquierda disminuye rápidamente más allá de $k = -k_p$, pudiendo por lo tanto desestimar el primer sinc en este caso particular y escribir la transformada como

$$A(k) = E_0 L \text{ sinc } (k_p - k)L \tag{7.61}$$

(figura 7.24*c*). A pesar de la longitud del tren de onda, como no es infinitamente largo debe sintetizarse a partir de un rango continuo de frecuencias espaciales que puede considerarse como la onda compuesta de un conjunto infinito de ondas armónicas. En este contexto, uno se refiere a tales pulsos con el término de ***paquetes de onda*** o ***grupos de ondas***. Como se podía prever, la contribución dominante se asocia con $k = k_p$. Si el análisis hubiera sido llevado a cabo en el dominio temporal, se habrían obtenido los mismos resultados en los que la transformada estaría centrada alrededor de la frecuencia angular temporal ω_p. Lógicamente, a medida de que el tren de onda se hace infinitamente largo (es decir, $L \to \infty$), su espectro de frecuencia se encoge y la curva de la figura 7.24*c* se cierra formando una sola línea alta en k_p (o ω_p). Este es, obviamente, el caso límite de la onda monocromática idealizada.

Ya que podemos considerar $A(k)$ como la amplitud de las contribuciones a $E(x)$ en el rango de k a $k + dk$, $A^2(k)$ debe estar relacionada con la energía de la onda en ese rango (problema 7.34). Regresaremos a este punto en el capítulo 11 cuando consideremos el *espectro de potencia*. Por el momento, observemos simplemente (figura 7.24*c*) que la mayoría de la energía se transporta en el intervalo de frecuencias espaciales desde $k_p - \pi/L$ a $k_p + \pi/L$, extendiéndose entre los mínimos a cada lado del pico central. Un aumento de la longitud del tren de onda hace que la energía de la onda se concentre en un intervalo cada vez más estrecho de k alrededor de k_p.

El paquete de ondas en el campo temporal, es decir

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \cos \omega_p t & \text{cuando } -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{cuando } |t| > T \end{cases}$$

tiene la transformada

$$A(\omega) = E_0 T \text{ sinc } (\omega_p - \omega)T \tag{7.62}$$

donde ω y k están relacionadas por la velocidad de fase. El espectro de frecuencias, excepto por el cambio notacional de k a ω y de L a T es idéntico al de la figura 7.24*c*.

Ancho de la banda de frecuencia

Para el paquete de ondas específico que se está estudiando, el rango de frecuencias angulares (ω o k) que comprende la transformada es ciertamente no finito. Sin embargo, si quisiéramos hablar del *ancho* de la transformada ($\Delta\omega$ o Δk), la figura 7.24*c* sugiere que usemos $\Delta k = 2\pi/L$ o $\Delta\omega = 2\pi/T$. Por el contrario, la extensión espacial o temporal del impulso es inequívoca en $\Delta x = 2L$ o $\Delta t = 2T$, respectivamente. El producto del ancho del paquete en lo que podría llamarse el *espacio k* y su ancho en el *espacio x* es $\Delta k\,\Delta x = 4\pi$ o análogamente $\Delta\omega\,\Delta t = 4\pi$. Las cantidades Δk y $\Delta\omega$ son los **anchos de banda de frecuencia.** Si hubiéramos usado un pulso con diferente forma, el producto del ancho de banda y la longitud del impulso ciertamente podrían haber sido algo diferentes. La ambigüedad se manifiesta porque todavía no hemos escogido una de las alternativas para especificar $\Delta\omega$ y Δk. Por ejemplo, en lugar de emplear el primer mínimo de $A(k)$ (hay transformadas que están desprovistas de tal mínimo, tales como la función gaussiana de la sección 11.2), podríamos haber dejado que Δk fuera el ancho de $A^2(k)$ en un punto donde la curva hubiera disminuido a $\frac{1}{2}$ o posiblemente a $1/e$ de su valor máximo. En todo caso será suficiente, por el momento, observar que como $\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$,

$$\Delta\nu \approx 1/\Delta t \tag{7.63}$$

es decir, el ancho de banda de frecuencia es del mismo orden de magnitud del valor recíproco de la extensión temporal del impulso (problema 7.35). Si el paquete de onda tiene un ancho de banda estrecho, se extenderá sobre una amplia región del espacio y del tiempo. Por lo tanto, una radio sintonizada para recibir un ancho de banda $\Delta\nu$ podrá detectar impulsos cuya duración no sea inferior a $\Delta t \approx 1/\Delta\nu$.

Estas consideraciones son de enorme importancia en la mecánica cuántica donde los paquetes de onda describen partículas siendo la ecuación (7.63) análoga al principio de incertidumbre de Heisenberg.

7.4.3 Longitud de coherencia

Consideremos ahora la luz emitida por una, incorrectamente denominada fuente monocromática, por ejemplo, una lámpara de descarga de sodio. Cuando el haz pasa a través de una especie de analizador de espectros, se podrán observar todas sus componentes de frecuencia. Por lo general, se detecta que varios rangos de frecuencia bastantes estrechos contienen la mayoría de la energía y que los mismos están separados por unas regiones de oscuridad mucho más amplias. Cada una de tales bandas de color brillante se denomina **línea espectral**. Hay aparatos donde la luz entra a través de una rendija y cada línea es, en realidad, una imagen coloreada de tal rendija. Otros analizadores representan la distribución de frecuencias en la pantalla de un osciloscopio. En todo caso, las líneas espectrales individuales no son nunca infinitamente agudas pues siempre consisten en una banda de frecuencia, por más pequeña que sea (figura 7.25).

Las transiciones electrónicas responsables de la generación de luz tienen una duración del orden de $10^{-8} - 10^{-9}$s. Debido a que los trenes de onda emitidos son finitos habrá una amplitud de las frecuencias presentes, denominada **ancho de banda natural** (véase sección 11.3.4). Asimismo, ya que los átomos están en movimiento térmico al azar, el espectro de frecuencia se alterará por el efecto de Doppler. Los átomos, por su parte, sufren colisiones que interrumpen los trenes de onda tendiendo nuevamente a ensanchar la distribución de frecuencia. El efecto total de todos estos mecanismos es que cada línea espectral tiene un ancho de banda $\Delta\nu$ en lugar de una sola frecuencia. El tiempo que satisface la ecuación (7.63) recibe el nombre de **tiempo de coherencia** (en lo sucesivo se escribirá Δt_c) y la longitud Δl_c dada por

$$\Delta l_c = c\,\Delta t_c \tag{7.64}$$

es la **longitud de coherencia.** Como se pondrá de manifiesto dentro de poco, la longitud de coherencia es la extensión en el

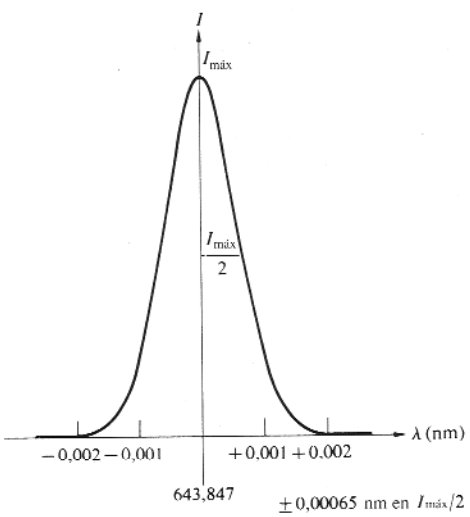


FIGURA 7.25 La línea espectral roja de cadmio ($\bar{\lambda}$ = 643,847 nm) de una lámpara de baja presión.

espacio en la que la onda tiene una bonita forma sinusoidal de tal manera que su fase pueda predecirse con seguridad. La duración temporal correspondiente es el tiempo de coherencia. Estos conceptos son muy importantes a la hora de considerar la interacción de las ondas y a ellos volveremos cuando analicemos la interferencia.

Si bien el concepto del tren de onda de fotones es ya conocido, estamos en condiciones, provistos de un pequeño análisis de Fourier, de llegar a alguna deducción acerca de su configuración. Esto puede llevarse a cabo trabajando hacia atrás desde la observación experimental según la cual la distribución de la frecuencia de una línea espectral de una fuente cuasimonocromática (no láser) puede representarse por una función gaussiana en forma de campana. Sección 2.1. Es decir, la irradiancia en función de la frecuencia es gaussiana. Pero la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud de campo eléctrico y como el cuadrado de la función gaussiana es una función gaussiana se deduce que la amplitud neta del campo de la luz tiene también forma de campana.

Supongamos que un tren de onda con un único fotón, uno de los N paquetes idénticos que forman el haz, se asemeja a la figura 7.26*a* en el sentido de que se trata de una función armónica modulada por una envolvente gaussiana siendo gaussiana también su transformada de Fourier $A(\omega)$. Imaginemos entonces que solamente observamos una componente de frecuencia armónica, la misma forma parte de cada tren de onda de fotones, por ejemplo, la que corresponde a ω', componente que, cabe recordar, es una sinusoide infinitamente larga y de amplitud constante. Si cada paquete es realmente idéntico, la amplitud de la componente de Fourier asociada con ω' será la misma en cada uno. En cualquier punto de un flujo de fotones estas ondas monocromáticas componentes de ω', una para cada tren de onda, tendrá una distribución de fase relativa al azar que varía rápidamente en el tiempo con la llegada de cada fotón. Por lo tanto, todas estas contribuciones juntas [ecuación (7.21)] corresponderán en promedio a una onda armónica de frecuencia ω' cuya amplitud es proporcional a $N^{1/2}$ que es la parte ω' del campo neto observado. Lo mismo valdrá para cualquier otra frecuencia que constituye los paquetes de onda, es decir, que la misma cantidad de energía está presente en cada frecuencia en el campo luminoso neto del haz como en la totalidad de los trenes de onda constitutivos separados. Asimismo, sabemos todo acerca de esta distribución de frecuencia energética: gaussiana, por lo tanto la transformada del tren de onda de fotones tendrá que ser gaussiana también. Dicho de otro modo, la línea espectral que se observa corresponde al espectro energético del haz y también al de un paquete de fotones individual. Si la irradiancia es gaussiana, el tren de onda de fotones será gaussiano.

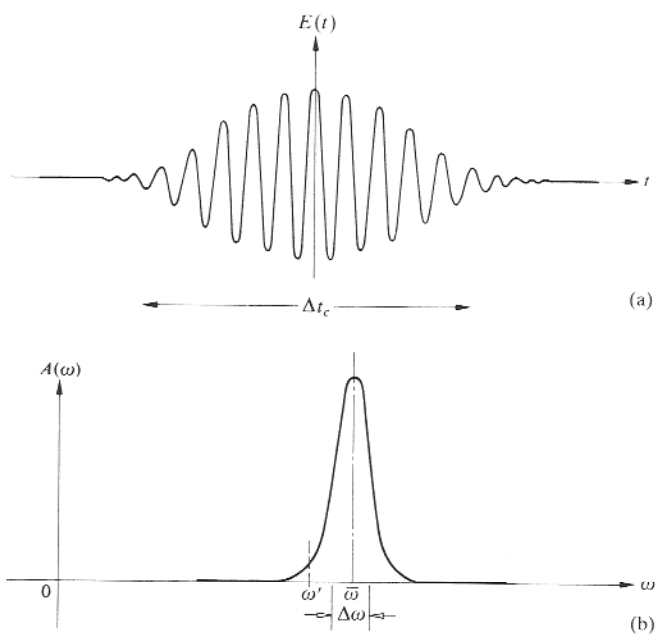


FIGURA 7.26 Un tren de onda cosenoidal modulado por una envolvente gaussiana junto con su transformada, también gaussiana.

Como resultado de la distribución al azar de los trenes de onda, las componentes armónicas individuales de la onda resultante no tendrán las mismas fases relativas como las tenían en cada grupo. Por lo tanto, el perfil de la resultante será diferente de aquella de los grupos de onda separados, aunque la amplitud de cada componente de frecuencia presente en la resultante sea simplemente $N^{1/2}$ veces su amplitud en un paquete cualquiera. La línea espectral observada corresponde al espectro energético del haz resultante con toda seguridad, pero también corresponde al espectro energético de un paquete individual. Por lo general, habrá un número muy elevado de grupos de onda superponiéndose arbitrariamente de tal forma que la envolvente de la resultante raramente será, si acaso, cero. Si la fuente es cuasimonocromática, es decir, si el ancho de banda es pequeño comparado con la frecuencia media $\bar{\nu}$, podemos visualizar la resultante como «casi» sinusoidal.

Resumiendo, la onda compuesta puede imaginarse como en la figura 7.27. Podemos imaginar que la frecuencia y la amplitud varían al azar, la primera sobre una gama $\Delta\nu$ centrada en $\bar{\nu}$. Por lo tanto, la **estabilidad de frecuencia** definida como $\Delta\nu/\bar{\nu}$

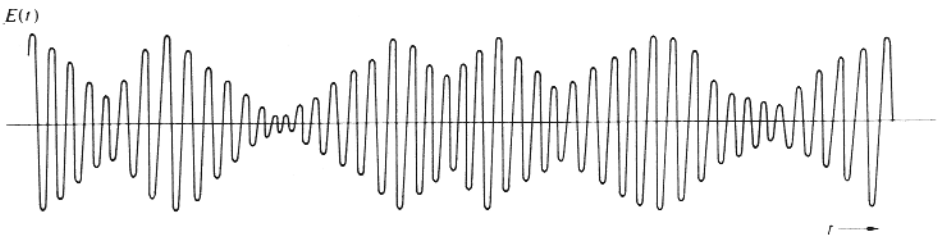


FIGURA 7.27 Onda de luz cuasimonocromática.

es una medida útil de la pureza espectral. Incluso un tiempo de coherencia tan corto como 10^{-9} s corresponde aproximadamente a unos millones de longitudes de onda de una portadora que oscila rápidamente ($\bar{\nu}$), así que cualquier variación de amplitud o frecuencia ocurrirán muy lentamente en comparación. Del mismo modo, podemos introducir un factor de fase variable en el tiempo tal que la perturbación puede escribirse como

$$E(t) = E_0(t) \cos [\varepsilon(t) - 2\pi\bar{\nu}t] \tag{7.65}$$

donde la separación entre las crestas de onda varía en el tiempo.

La duración promedio de un grupo de onda es Δt_c, por lo tanto dos puntos en la onda de la figura 7.27 separados por un valor superior de Δt_c deben hallarse en trenes de onda contribuyentes diferentes que no tendrán ninguna relación entre sus fases. Dicho de otro modo, si determinamos el campo eléctrico de la onda compuesta al pasar por un detector idealizado, podríamos predecir su fase de manera bastante precisa para valores temporales menores que Δt_c más tarde, pero de ninguna manera para tiempos mayores que Δt_c. En el capítulo 12 también consideraremos el *grado de coherencia* que se aplica también a la región entre estos extremos.

El rango de frecuencias de la luz blanca oscila entre $0{,}4 \times 10^{15}$ Hz hasta alrededor de $0{,}7 \times 10^{15}$ Hz, esto es, un ancho de banda de alrededor de $0{,}3 \times 10^{15}$ Hz. El tiempo de coherencia es entonces aproximadamente 3×10^{-15} s, lo que corresponde [ecuación (7.64)] a trenes de onda cuya extensión espacial es de solamente unas pocas longitudes de onda (tabla 7.1). Por lo tanto, *la luz blanca puede visualizarse como una sucesión al azar de pulsos muy cortos.* Si fuéramos a sintetizar luz blanca, tendríamos que superponer un rango ancho y continuo de componentes armónicas a fin de producir los grupos de onda muy cortos. Inversamente, podemos hacer pasar luz blanca a través de un analizador de Fourier, tal como una red de difracción o un prisma y al hacerlo generar esas componentes.

El ancho de banda disponible en el espectro visible (≈300 THz) es tan amplio que representa algo así como un «país de las maravillas» para el ingeniero de comunicaciones. Por ejemplo, un canal de televisión característico ocupa una gama de 4 MHz en el espectro electromagnético ($\Delta\nu$ se define por la duración de los pulsos que se necesitan para controlar el barrido del haz de electrones). Por lo tanto, la región visible podría transportar unos 75 millones de canales de televisión. Huelga decir que se trata de un área de investigación muy viva (véase sección 8.11).

Los anchos de banda de las lámparas de descarga normales son relativamente grandes, llevando a longitudes de coherencia del orden solamente de varios milímetros. Por el contrario, las líneas espectrales emitidas por las lámparas de isótopos de baja presión tales como Hg^{198} (λ_{aire} = 546,078 nm) o el estándar internacional Kr^{86} (λ_{aire} = 605,616 nm) tienen anchos de banda de unos 1.000 MHz. Las longitudes de coherencia correspondientes son del orden de 0,3 m y los tiempos de coherencia de alrededor de 1 ns. La estabilidad de frecuencia es aproximadamente una parte en un millón —estas fuentes son ciertamente cuasimonocromáticas.

TABLA 7.1 Longitudes aproximadas de coherencia de varias fuentes

Fuente	Longitud de onda media $\bar{\lambda}$(nm)	Ancho* de línea $\Delta\lambda$ (nm)	Longitud de coherencia Δl_c
IR térmico (8.000–12.000 nm)	10.000	≈4.000	≈25.000 nm = $2{,}5\bar{\lambda}$
IR medio (3.000–5.000 nm)	4.000	≈2.000	≈8.000 nm = $2\bar{\lambda}$
Luz blanca	550	≈300	≈900 nm = $1{,}6\bar{\lambda}$
Arco de mercurio	546,1	≈1,0	≈ 0,03 cm
Lámpara de descarga Kr^{86}	605,6	$1{,}2 \times 10^{-3}$	0,3 m
Láser He-Ne estabilizado	632,8	$\approx 10^{-6}$	≈ 400 m
Láser especial He-Ne	1.153	$8{,}9 \times 10^{-11}$	15×10^6 m

*Para encontrar el ancho de banda de la frecuencia correspondiente, utilícese, $\Delta\nu/\Delta\lambda_0 = \nu/\bar{\lambda}_0$.

De todas las fuentes modernas, la más espectacular es el láser. En condiciones óptimas, después de haberse eliminado escrupulosamente las variaciones de temperatura y las vibraciones, se puso en función un láser muy cerca de su límite teórico de constancia de frecuencia. Se logró una estabilidad de frecuencia de corto plazo de unas 8 partes por 10^{14} con un láser [5] de gas continuo de He-Ne con $\lambda_0 = 1.153$ nm. Esto corresponde a un ancho de banda considerablemente estrecho de unos 20 Hz. Valores de la estabilidad de frecuencia de varias partes por 10^9 son más comunes y no muy difíciles de lograr. En el mercado se encuentran láseres de CO_2 que proporcionan una relación $\Delta\nu/\overline{\nu}$ a corto plazo ($\approx 10^{-1}$ s) de 10^{-9} y un valor a largo plazo ($\approx 10^{3}$ s) de 10^{-8}.

7.4.4 La transformada de Fourier discreta

Una función que describe procesos físicos de alguna clase puede analizarse con el método de Fourier, pudiendo establecer su transformada analíticamente. Ya hemos analizado los fundamentos de dicho proceso y volveremos a profundizar sobre el mismo en el capítulo 11. Antes de cerrar este tema, es importante extender los conceptos del análisis de Fourier a situaciones donde no existen representaciones funcionales de los datos. A menudo, se dispone de una serie de datos o, quizás, una curva creada con un trazador de curvas o por ordenador. En cualquier caso, la información puede codificarse en dígitos, es decir, los números pueden asociarse con puntos en la curva a intervalos oportunos. Para establecer el contenido de frecuencia de una serie tan limitada de datos, se emplea una técnica numérica que recibe el nombre de **transformada de Fourier discreta**. Puesto que se trata de un análisis que se lleva a cabo por ordenador, en nuestro caso bastará con que entendamos el esquema general pudiendo así valorar sus resultados.

Hasta ahora, hemos estudiado funciones tales como $f(x)$ — que representan algo interesante como un campo eléctrico— que proporcionaban valores para todas las x. Ahora, supongamos que tenemos un número finito de puntos, N, situados en 0, x_1, x_2, ... x_{N-1}, así como los valores específicos correspondientes de la cantidad que se esté estudiando: f_0, f_{x_1}, f_{x_2}, etc. Cuando los puntos de muestreo se hallan a una distancia igual unos de otros correspondiente al intervalo x_0, pueden representarse por la secuencia f_0, f_{x_0}, f_{2x_0}, etc. En esencia, cada transformada integral de Fourier [ecuación (7.57)] se aproxima por una suma que se realiza sucesivamente punto por punto en la gama de los datos disponibles: f_0, f_{x_0}, f_{2x_0} ... La figura 7.28 ilustra un impulso trazado a mano y su transformada discreta de Fourier correspondiente calculada por ordenador (visualizada con valores de frecuencia positivos y negativos como en la figura 7.22).

Es bastante sencillo (sección 11.2.2) extender el análisis de Fourier a funciones de dos dimensiones, $f(x, y)$. Por ejemplo, mientras que la figura 7.29*b* es la transformada del pulso unidimensional cuadrado unitario en términos de la frecuencia espacial angular k, la figura 7.29*d* es la transformada del pulso bidimensional cuadrado unitario en términos de las frecuencias espaciales angulares k_x y k_y.

Es natural para los físicos el pensar en los procesos en relación a la energía, especialmente a la hora de realizar mediciones. La energía asociada con una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud y puesto que la transformada nos proporciona las amplitudes de todas las sinusoides que conforman la señal de entrada, el cuadrado de la transformada proporciona una medida de la distribución de energía, o potencia, en cada una de las frecuencias componentes. Por consiguiente, el cuadrado de la transformada es una

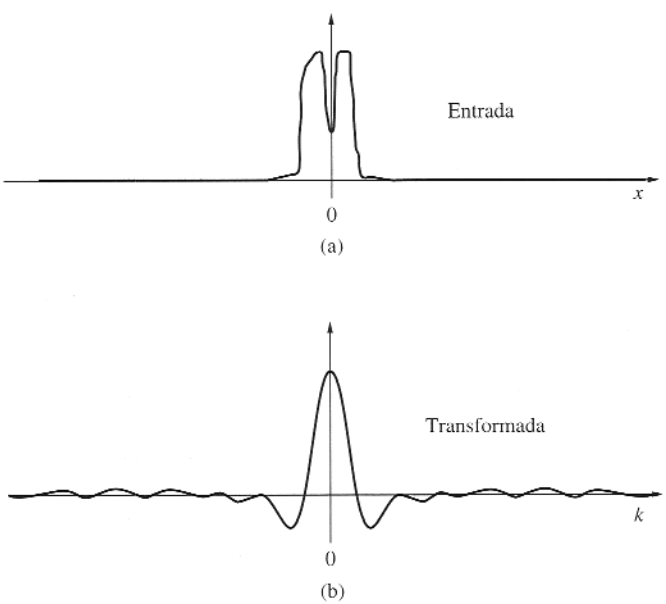


FIGURA 7.28 Señal de entrada y su transformada de Fourier discreta .

[5] T. S. Jaseja A. Javan y C. H. Townes, «Frequency Stability of Helium-Neon Lasers and Measurements of Length» *Phys. Rev. Letters*, **10**, 165 (1963).

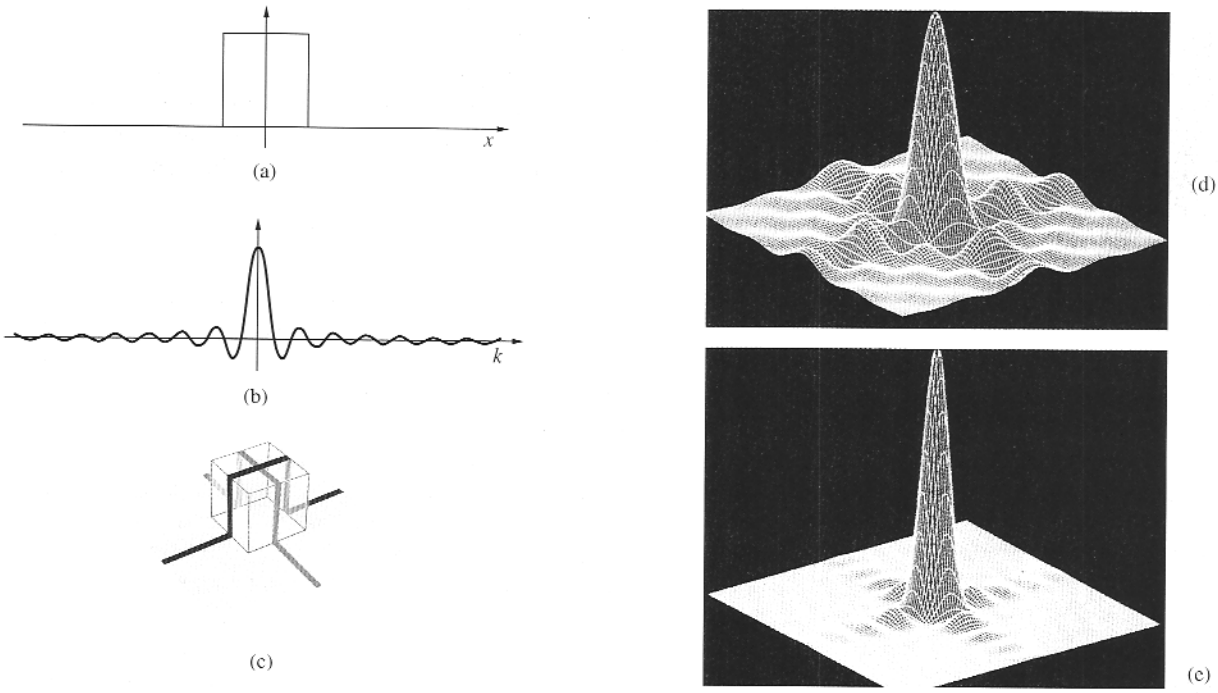


FIGURA 7.29 (a) Pulso cuadrado unidimensional y (b) su transformada. (c) Pulso cuadrado bidimensional y (d) su transformada. (e) El espectro de potencia de la transformada en (d) representado gráficamente en el espacio k bidimensional. (Foto cedida por R. G. Wilson, Illinois Wesleyan University).

función de la frecuencia espacial que se denomina **espectro de potencia**. Ya que la transformada se escribirá en la mayoría de los casos como cantidad compleja, el espectro de potencia puede definirse como el producto de la transformada y de su conjugada compleja, dado en unidades de W/m^{-2} ó $W \cdot m^2$.

La figura 7.29*e* es una representación gráfica (en el espacio *k*) del espectro de potencia para el pulso cuadrado bidimensional. Obsérvese que es positivo en todas partes, contrariamente a la transformada. El espectro de potencia pone de manifiesto que la mayoría de la energía de la señal está asociada con frecuencias relativamente bajas —la frecuencia aumenta radialmente desde el centro de la distribución—. Como el espectro de potencia es siempre positivo, resultará útil representarlo gráficamente como una especie de diagrama puntual con formato bidimensional; cada punto entonces corresponde a la contribución a una determinada frecuencia. Sucesivamente (pág. 543) escribiremos la transformada en términos de las coordenadas (*Y, Z*) en una pantalla de visualización distante y estableceremos que la transformada al cuadrado es idéntica a la distribución de la irradiancia en la figura de difracción en la pantalla. Expresada de esta manera, la transformada al cuadrado (en unidades de W/m^2) puede denominarse *espectro de irradiancia*. Si bien existe una distinción matemática entre los espectros de irradiancia y de potencia, si se mostrara una representación sin especificar de cada uno (la primera dibujada en el espacio *k* y los segundos en la coordenada espacial normal) sería difícil distinguir entre ellos.

Cuando no se dispone de funciones analíticas, se podrán lograr resultados parecidos con la transformada de Fourier discreta. Un campo de datos bidimensional (por ejemplo, el cuadro de Mona Lisa de la figura 7.30*a*) puede hacerse de un barrido, digitalizarse y calcularse la transformada discreta. También el diagrama de la transformada de una señal tan compleja resultará algo complejo, razón por la cual se muestra su espectro de potencia (figura 7.30*b*). A causa de la manera en la que se introdujeron las frecuencias negativas, el patrón es simétrico a lo largo de cualquier diagonal. La cruz central brillante y estrecha emerge de los bordes límite abruptos de la pintura. (Como veremos más adelante, el borde horizontal produce la línea vertical y el vertical la línea horizontal —véase la

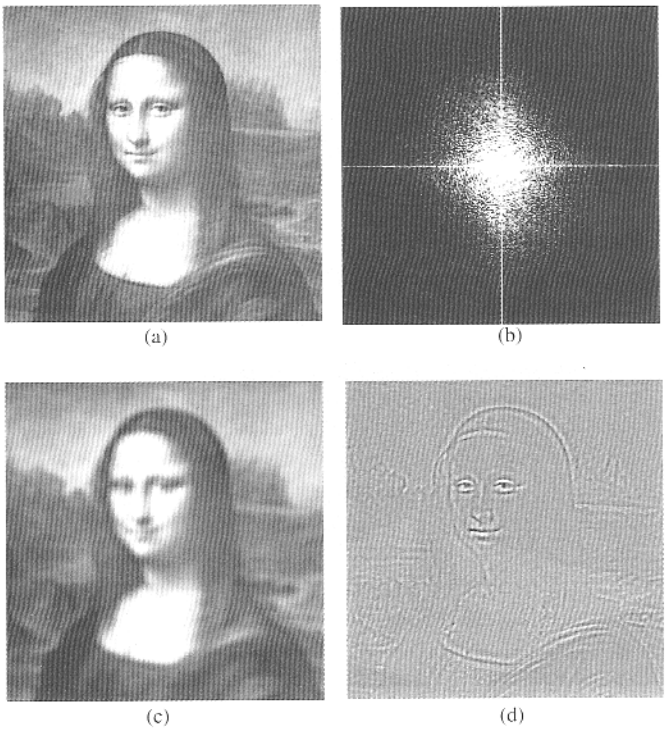


FIGURA 7.30 (a) Mona Lisa (b) y la parte central de su espectro de potencia. (c) Mona, después de eliminarse sus frecuencias espaciales elevadas. (d) Mona, después de eliminarse sus frecuencias espaciales bajas. (Fotos cedidas por Synoptics Image Processing Systems, Cambridge, UK).

figura 13.37). Si se filtran los términos de frecuencias espaciales más elevadas que llevan los detalles más finos (aquellos que se hallan lejos del centro) y se reconstruye el cuadro con lo que queda, se obtendrá una figura ligeramente borrosa (figura 7.30*c*). Por otro lado, si se eliminan los términos de baja frecuencia espacial tapando el centro de la transformada, las altas frecuencias que permanecen darán lugar a una reconstrucción de bordes afilados (figura 7.30*d*).

La forma de los elementos en el interior de una determinada imagen define su transformada y, por lo tanto, su espectro de potencia. Las fotografías 7.31 se crearon por ordenador con un patrón sinusoidal vertical superpuesto para ilustrar el punto. La idea era aislar sucesivamente varias subregiones de la fotografía para estudiar sus transformadas y para eliminarlas. La modulación periódica vertical genera un retículo sinusoidal o **red** que tiene una única frecuencia espacial fija (κ_0). Su presencia aparece en el espectro de potencia realizado por orde-

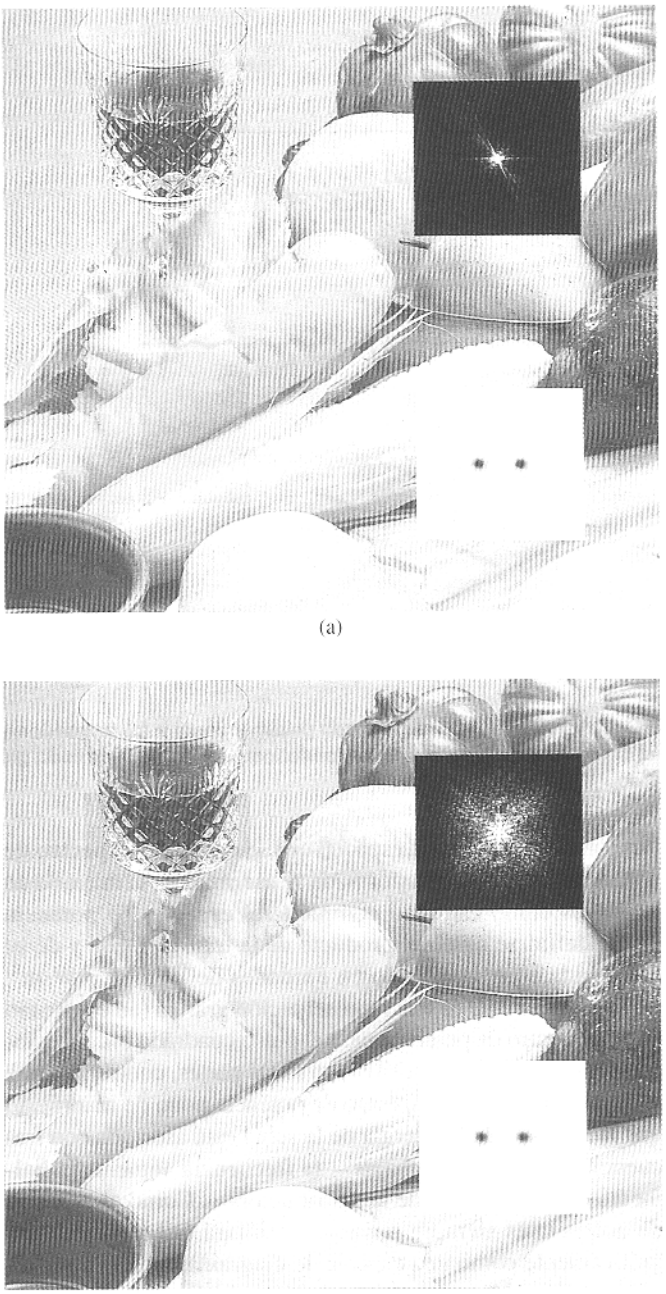


FIGURA 7.31 Dos imágenes procesadas por ordenador. Las pequeñas piezas añadidas de la izquierda se crearon al filtrar la modulación sinusoidal. La pieza añadida blanca es el filtro mientras que la negra es el espectro de potencia filtrado en cada caso. (Fotos cedidas por MountainGate, Reno, Nevada).

nador de cualquier parte de la fotografía, esencialmente como dos puntos luminosos en el eje horizontal en $\pm\kappa_0$. ***Idealmente, el espectro energético de una señal con forma de red sinusoidal es considerablemente sencillo. Consta de tan sólo dos puntos, uno para el valor positivo y el otro para el valor negativo de la frecuencia de la red.***

El filtro (representado por el cuadrado blanco con dos puntos negros) se empleó para crear las pequeñas imágenes que se insertaron en cada foto y sirvió para eliminar las frecuencias $+\kappa_0$ y $-\kappa_0$ de cada espectro de potencia (cuyas versiones filtradas se muestran arriba a la derecha). Las imágenes de la subregión se reconstruyeron utilizando los espectros de potencia filtrados. Cada una de las imágenes «limpiadas», sin sinusoides, se volvieron a colocar en su sitio en el original. Obsérvese como son diferentes estos dos espectros —las facetas de la copa de vidrio tallado domina el espectro de la figura 7.31*b*—. Lógicamente, el contenido de la frecuencia de una fotografía, que se extiende delante nuestro en forma de la transformada de Fourier o de espectro de potencia, proporciona una manera maravillosa de pensar en las imágenes.

El análisis de Fourier y la difracción

Hablar del análisis de imágenes por ordenador, una clase de óptica virtual, puede resultar fascinante pero anuncia también un aspecto mucho más esencial de la difracción que en este capítulo podrá tan sólo abordarse. La transparencia fotográfica de Mona Lisa (sea una diapositiva de Mona Lisa) mostrada en la figura 7.32*a* es una grabación bidimensional de la distribución de la luz que antes era una imagen de la pintura. La información almacenada puede leerse como señal iluminando la diapositiva, que es lo que se hace aquí con unas ondas planas monocromáticas. Cada punto en la superficie de la diapositiva es un dispersor de donde los rayos emergen en una amplia gama de direcciones (figura 7.32*b*). Para cada onda plana que se emite con cierto ángulo por encima del eje, hay otra que se aleja por debajo del eje. Cada onda plana (o haz de rayos paralelo) que se desplaza en una determinada dirección κ_i, es una componente de la frecuencia espacial de Fourier. Una lista de todas estas ondas planas componentes constituye la transformada del campo óptico transmitido en la transparencia. ***La transformada de Fourier del campo eléctrico en la diapositiva es una función de ponderación que proporciona la amplitud relativa con que cada componente de frecuencia interviene en la formación de ese campo y, por lo tanto, cada flujo de ondas planas que sale de la apertura.*** La suma total de todas las ondas planas *es* toda la luz transmitida y tendrá que ser equivalente al frente de onda complejo de Mona Lisa que sale de la diapositiva que también es luz transmitida.

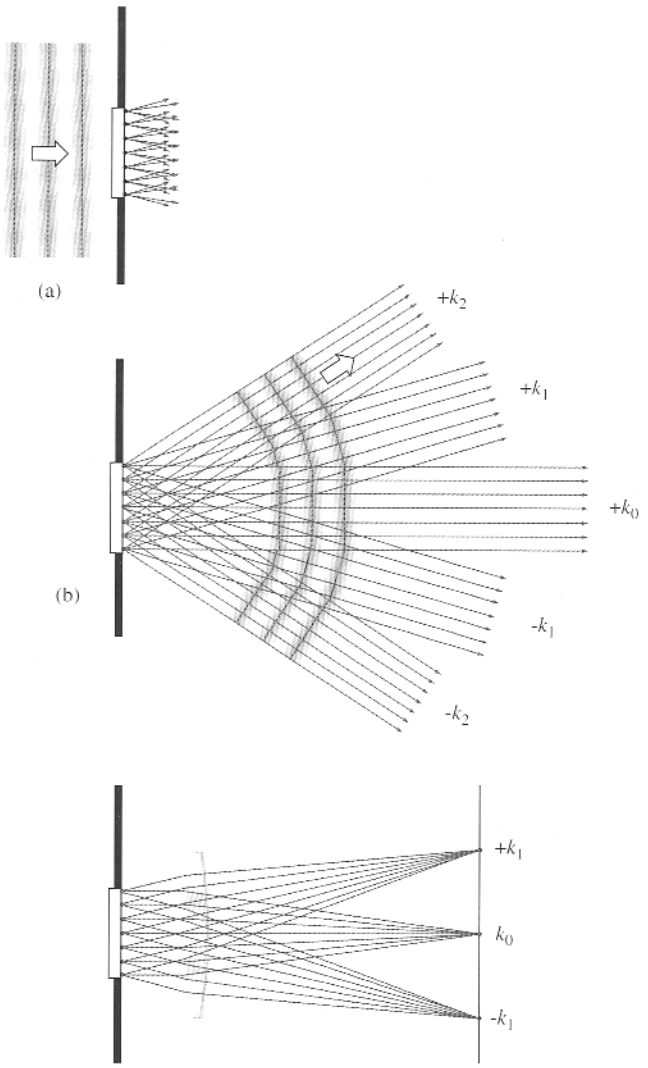


FIGURA 7.32 Transparencia iluminada. *(a)* Ondas planas monocromáticas incidentes. *(b)* Haces paralelos difusos de rayos (onda plana). *(c)* Proyección del espectro de potencia en una pantalla de observación.

Otra manera interesante de visualizar lo que sucede es suponer que cada elemento de la imagen con frecuencia

espacial en cualquier dirección en el plano de la foto actúa como una red sinusoidal. Asimismo, cada red difracta la luz en dos flujos simétricos de ondas planas que se mueven con ángulos proporcionales a la frecuencia de la red (pág. 476).

La región a la derecha de la diapositiva está repleta de ondas que se superponen cada vez más a medida que la distancia de la diapositiva aumenta. En las inmediaciones, la luz incidente en una pantalla de visualización mostraría a Mona Lisa de forma bastante clara, pero al alejar la pantalla la imagen se volvería confusa y cambiaría hasta ser totalmente irreconocible al poco rato. La región detrás de la diapositiva contiene una distribución compleja de la luz, la figura de difracción de la transparencia. Matemáticamente hablando, existen dos regímenes: la *difracción de Fresnel* que aparece cerca de la apertura (es decir, la diapositiva) y que se extiende hasta la región de *difracción de Fraunhofer*, que nace muy lejos de la apertura de donde seguirá (pág. 445).

Una lente colocada a distancia focal de la diapositiva, como en la figura 7.32*c*, enfocará oportunamente los haces de rayos paralelos (que producen la difracción de Fraunhofer más allá de una distancia tan grande que puede considerarse como infinita) en una pantalla cercana. Allí, cada punto luminoso en la distribución bidimensional resultante diagonalmente simétrica de la irradiancia corresponde a un valor específico de la frecuencia espacial. ***La amplitud del campo eléctrico en toda dirección en la figura de difracción de Fraunhofer corresponde a la transformada de Fourier de la señal de entrada, es decir, la distribución de campo eléctrico en la apertura,*** si bien ninguna se puede medir directamente.

El fenómeno que se observa es la distribución bidimensional de la irradiancia que es idéntica al cuadrado de la transformada de Fourier del campo de entrada (pág. 543). Es también un mapa del contenido de la frecuencia espacial de Mona Lisa y «coincide» con el espectro de potencia que se ilustra en la figura 7.30*b*. Como veremos (pág. 619), es posible filtrar espacialmente la transformada óptica alterando de esta manera la imagen reconstruida, como se hizo con el ordenador para elaborar las figuras 7.30*c* y *d*.

PROBLEMAS

7.1 Determine la resultante de la superposición de las ondas paralelas $E_1 = E_{01}$ sen $(\omega t + \varepsilon_1)$ y $E_2 = E_{02}$ sen $(\omega t + \varepsilon_2)$ cuando $\omega = 120\pi$, $E_{01} = 6$, $E_{02} = 8$, $\varepsilon_1 = 0$ y $\varepsilon_2 = \pi/2$. Represente gráficamente cada función y la resultante.

7.2* Considerando la sección 7.1, suponga que empezamos el análisis con el fin de calcular $E = E_1 + E_2$ con dos funciones coseno $E_1 = E_{01} \cos(\omega t + \alpha_1)$ y $E_2 = E_{02} \cos(\omega t + \alpha_2)$. Para facilitar algo la tarea, sea $E_{01} = E_{02}$ y $\alpha_1 = 0$. Sume las dos ondas algebraicamente y utilice la conocida identidad trigonométrica $\cos\theta + \cos\Phi = 2\cos\frac{1}{2}(\theta + \Phi)\cos\frac{1}{2}(\theta - \Phi)$ para demostrar que $E = E_0 \cos(\omega t + \alpha)$, donde $E_0 = 2E_{01}\cos\alpha_2/2$ y $\alpha = \alpha_2/2$. Ahora demuestre que estos mismos resultados se deducen de la ecuación (7.9) y (7.10).

7.3* Demuestre que cuando las dos ondas de la ecuación (7.5) están en fase, la amplitud al cuadrado resultante es un valor máximo igual a $(E_{01} + E_{02})^2$ mientras que cuando están desfasadas, es un valor mínimo igual a $(E_{01} - E_{02})^2$.

7.4* Demuestre que la *longitud de camino óptico*, definido como la suma de los productos de varios índices multiplicados por los espesores de los medios atravesados por un haz, es decir, $\Sigma_i n_i x_i$, equivale a la longitud del recorrido en el vacío que el haz tardaría el mismo tiempo en atravesar.

7.5 Conteste las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántas longitudes de onda de $\lambda_0 = 500$ nm de luz se extienden en un espacio de 1 m en el vacío?
(b) ¿Cuántas ondas se extienden en el espacio cuando una placa de vidrio de 5 cm de espesor ($n = 1{,}5$) se inserta en el camino?
(c) Determine la DCO entre las dos situaciones.
(d) Compruebe que Λ/λ_0 corresponde a la diferencia entre las soluciones de (a) y (b) arriba indicadas.

7.6* Determine la diferencia de camino óptico para las dos ondas *A* y *B* cuyas longitudes de onda en el vacío, ilustradas en la figura P.7.6, son ambas de 500 nm; el tanque de vidrio ($n = 1{,}52$) se llena con

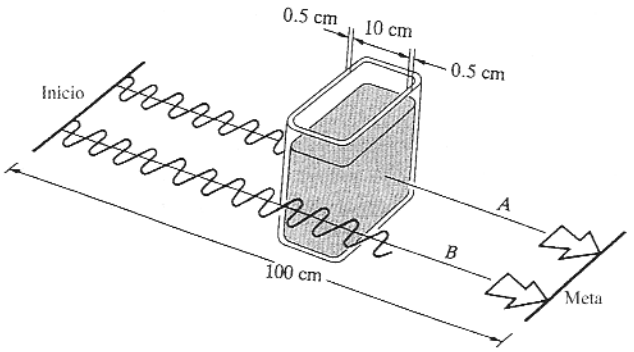


FIGURA P.7.6

agua ($n = 1{,}33$). Si las ondas comienzan en fase y todos los números anteriores son exactos, encuentre su diferencia de fase relativa en la línea de meta.

7.7* Usando las ecuaciones (7.9), (7.10) y (7.11) demuestre que la resultante de las dos ondas

$$E_1 = E_{01} \operatorname{sen} [\omega t - k(x + \Delta x)]$$

y

$$E_2 = E_{01} \operatorname{sen} (\omega t - kx)$$

es

$$E = 2E_{01} \cos\left(\frac{k\,\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen}\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \qquad [7.17]$$

7.8 Sume directamente las dos ondas del problema 7.7 para encontrar la ecuación (7.17).

7.9 Use la representación compleja para calcular la resultante de $E = E_1 + E_2$, donde

$$E_1 = E_0 \cos (kx + \omega t) \quad \text{y} \quad E_2 = -E_0 \cos (kx - \omega t)$$

Describa la onda compuesta.

7.10 El campo eléctrico de una onda electromagnética estacionaria plana viene dado por

$$E(x, t) = 2E_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t \qquad [7.30]$$

Deduzca una expresión para $B(x, t)$. (Quizá desee examinar de nuevo la sección 3.2.). Haga un esquema de la onda estacionaria.

7.11* Considerando el experimento de Wiener (figura 7.11) en luz monocromática cuya longitud de onda es de 550 nm, si el plano de la película estuviera inclinado en 1° con respecto a la superficie de reflexión, determine el número de franjas brillantes por centímetro que aparecerán en el plano.

7.12* Microondas con frecuencia de 10^{10} Hz se emiten directamente sobre un reflector de metal. Sin tener en cuenta el índice de refracción del aire, determine el espaciamiento entre nodos sucesivos en la distribución de onda estacionaria resultante.

7.13* Una onda estacionaria viene dada por

$$E = 100 \operatorname{sen} \tfrac{2}{3}\pi x \cos 5\pi t$$

Determine dos ondas que puedan superponerse para crearla.

7.14* Imagine que golpeamos dos diapasones, uno con frecuencia de 340 Hz y el otro de 342 Hz. ¿Qué oiremos?

7.15 La figura 7.22 muestra una portadora de frecuencia ω_c que está siendo modulada en amplitud por una onda sinusoidal de frecuencia ω_m, es decir

$$E = E_0(1 + a \cos \omega_m t) \cos \omega_c t$$

Demuestre que esto es equivalente a la superposición de tres ondas de frecuencias ω_c, $\omega_c + \omega_m$, y $\omega_c - \omega_m$. Al estar presentes varias frecuencias moduladoras, escribimos E como una serie de Fourier y sumamos todos los valores de ω_m. Los términos $\omega_c + \omega_m$ constituyen lo que se denomina *banda lateral superior* mientras que la totalidad de los términos $\omega_c - \omega_m$ forma la *banda lateral inferior.* ¿Qué ancho de banda haría falta a fin de transmitir la gama audible completa?

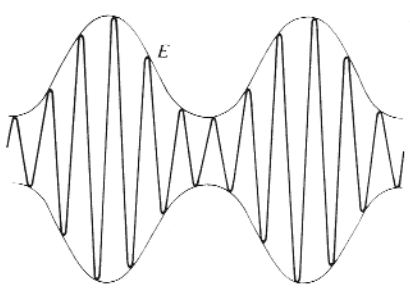


FIGURA P.7.15

7.16 Dada la relación de dispersión $\omega = ak^2$, calcule tanto la velocidad de fase como la de grupo.

7.17* Empleando la relación $1/v_g = d\kappa/dv$, demuestre que

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{v} - \frac{\nu}{v^2}\frac{dv}{d\nu}$$

7.18* En el caso de ondas luminosas, demuestre que

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\nu}{c}\frac{dn}{d\nu}$$

7.19 La velocidad de propagación de una onda superficial en un líquido cuya profundidad es mucho mayor que λ viene dada por

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\Upsilon}{\rho\lambda}}$$

donde g = aceleración de la gravedad, λ = longitud de onda, ρ = densidad, Υ = tensión superficial. Calcule la velocidad de grupo de un pulso en el límite mayor de la longitud de onda (éstas reciben el nombre de *ondas gravitacionales).*

7.20* Demuestre que la velocidad de grupo puede escribirse como

$$v_g = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$$

7.21 Demuestre que la velocidad de grupo puede escribirse como

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

7.22* Calcule la velocidad de grupo de las ondas cuando la velocidad de fase varía inversamente a la longitud de onda.

7.23* Demuestre que la velocidad de grupo puede escribirse como

$$v_g = \frac{c}{n} + \frac{\lambda c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}$$

7.24* De una onda que se propaga en una estructura periódica donde $\omega(k) = 2\omega_0 \operatorname{sen}(k\ell/2)$, calcule tanto la fase como las velocidades de grupo, escribiendo la primera como función sinc.

7.25* Un gas ionizado o un plasma sirve como medio dispersor para ondas electromagnéticas. Puesto que la ecuación de dispersión es

$$\omega^2 = \omega_p{}^2 + c^2k^2$$

donde ω_p es la frecuencia constante del plasma, determine las expresiones tanto de la fase como de las velocidades de grupo y demuestre que $vv_g = c^2$.

7.26 Usando la ecuación de dispersión

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\sum_j\left(\frac{f_j}{\omega_{0j}^2 - \omega^2}\right) \qquad [3.71]$$

demuestre que la velocidad de grupo viene dada por

$$v_g = \frac{c}{1 + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e\omega^2 2}$$

para ondas electromagnéticas de alta frecuencia (por ejemplo, rayos X). Recuerde que dado que f_j son los factores de ponderación, $\Sigma_j f_j = 1$. ¿Cuál es la velocidad fásica? Demuestre que $vv_g \approx c^2$.

7.27* Determine analíticamente la resultante cuando las dos funciones $E_1 = 2E_0 \cos \omega t$ y $E_2 = \frac{1}{2}E_0 \operatorname{sen} 2\omega t$ se superponen. Dibuje E_1, E_2 y $E = E_1 + E_2$. ¿La resultante es periódica? ¿Si lo es, cuál es su periodo en términos de ω?

7.28 Demuestre que

$$\int_0^\lambda \operatorname{sen} akx \cos bkx\, dx = 0 \qquad [7.44]$$

$$\int_0^\lambda \cos akx \cos bkx\, dx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab} \qquad [7.45]$$

$$\int_0^\lambda \operatorname{sen} akx \operatorname{sen} bkx\, dx = \frac{\lambda}{2}\delta_{ab} \qquad [7.46]$$

donde $a \neq 0$, $b \neq 0$ y a y b son números enteros positivos.

7.29 Calcule las componentes de la serie de Fourier para la función periódica que se muestra en la figura 7.20.

7.30* Dada la función $f(x) = A \cos(\pi x/L)$, determine su serie de Fourier.

7.31* Considere la función $f(\theta) = \theta^2$ en el intervalo $0 < \theta < 2\pi$ y suponga que se repita con un período de 2π. Ahora, demuestre que la expansión de Fourier de la función es

$$f(x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{4}{m^2}\cos m\theta - \frac{4\pi}{m}\operatorname{sen} m\theta\right)$$

7.32* Demuestre que la representación de la serie de Fourier de la función $f(\theta) = |\operatorname{sen}\theta|$ es

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{4m^2 - 1}$$

7.33 Cambie el límite superior de la ecuación (7.59) de ∞ a a y calcule la integral. Deje la respuesta en términos de la denominada *integral del seno.*

$$\operatorname{Si}(z) = \int_0^z \operatorname{sinc} w\, dw$$

cuyos valores se encuentran comúnmente recogidos en tablas.

7.34 Escriba una expresión para la transformada $A(\omega)$ de la pulsación armónica de la figura P.7.34. Compruebe que sinc u es un 50% o más grande para valores de u *aproximadamente* menores que $\pi/2$. Teniendo en cuenta esto, demuestre que $\Delta\nu\ \Delta t \approx 1$ donde $\Delta\nu$ es el ancho de banda de la transformada a la mitad de su amplitud máxima. Verifique que $\Delta\nu\ \Delta t \approx 1$ también a la mitad de su espectro energético. El motivo aquí es obtener algún sentido del tipo de aproximaciones empleadas en el análisis.

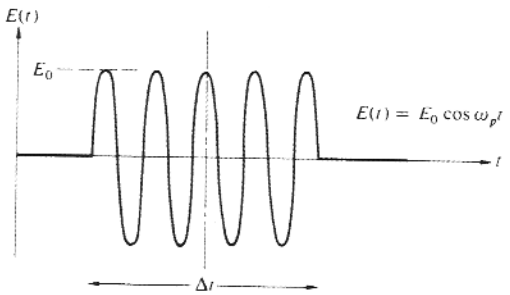


FIGURA P.7.34

7.35 Deduzca una expresión para la longitud de coherencia (en el vacío) para un tren de ondas cuyo ancho de banda en frecuencias es $\Delta\nu$: exprese su respuesta en términos del *ancho de la línea* $\Delta\lambda_0$ y la longitud de onda promedio $\overline{\lambda}_0$ del tren.

7.36 Considere un fotón en la región visible del espectro emitido durante una transición atómica de unos 10^{-8} s. ¿Cuán largo es el paquete de ondas? Recordando los resultados del problema anterior (si lo ha resuelto), estime el ancho de línea del paquete ($\overline{\lambda}_0 = 500$ nm). ¿Qué puede decirse acerca de su monocromaticidad, como lo indica su estabilidad de frecuencia?

7.37 El primer experimento [6] en el que se midió directamente el ancho de banda de un láser (en este caso un láser diodo de onda continua $Pb_{0.88}Sn_{0.12}$ Te) se llevó a cabo en 1969. El láser, que funcionaba $\lambda_0 = 10.600$ nm, se heterodinó con un láser de CO_2, detectándose unos anchos de banda de 54 kHz. Calcule la estabilidad de frecuencia y la longitud de coherencia correspondientes para el láser de telururo de plomo y estaño.

7.38* Se ha patentado una técnica de campo magnético para estabilizar un láser de He-Ne a dos partes en 10^{10}. A 632,8 nm, ¿cuál será la longitud de coherencia de un láser con tal estabilidad de frecuencia?

7.39 Imagine que cortamos un haz láser continuo (suponiendo que sea monocromático a $\lambda_0 = 632{,}8$ nm) en pulsos de 0,1 ns usando algún tipo de obturador. Calcule el ancho de línea resultante $\Delta\lambda$, el ancho de banda y la longitud de coherencia. Determine el ancho de banda y el ancho de línea que resultaría si pudiéramos cortar a 10^{15} Hz.

7.40* Suponga que tenemos un filtro con un paso de banda de 1,0 Å centrado en 600 nm y que iluminamos con luz solar. Calcule la longitud de coherencia de la onda que emerge.

7.41* Un filtro deja pasar luz cuya longitud de onda promedio es $\overline{\lambda}_0 =$ 500 nm. Si los trenes de onda que emergen tienen una longitud de unas $20\overline{\lambda}_0$, ¿cuál es el ancho de banda en frecuencia de la luz saliente?

7.42* Suponga que difundimos luz blanca en un abanico de longitudes de onda mediante una red de difracción y que luego hacemos pasar una pequeña región selecta de dicho espectro a través de una rendija. Debido al ancho de la rendija, emerge una banda de longitudes de onda con ancho de 1,2 nm centrada en 500 nm. Determine el ancho de banda de la frecuencia así como la longitud de coherencia de dicha luz.

[6] D. Hinkley and C. Freed, *Phys. Rev. Letters* **23**, 277 (1969).

8 Polarización

8.1 La naturaleza de la luz polarizada

Ya hemos establecido que la luz se puede tratar como una onda electromagnética transversal. Hasta ahora solamente hemos considerado luz **linealmente polarizada** o **plano-polarizada**, es decir, luz cuya orientación del campo eléctrico es constante aunque su magnitud y signo varían con el tiempo (figura 3.9). En este caso, el campo eléctrico o la perturbación óptica reside en lo que se conoce como el **plano de vibración**. Ese plano fijo contiene tanto a **E** como a **k**, el vector de campo eléctrico y el vector de propagación en la dirección del movimiento.

Imaginemos dos ondas de luz armónicas, linealmente polarizadas, de la misma frecuencia, moviéndose a través de la misma región del espacio, en la misma dirección. Si sus vectores de campo eléctrico son colineales, las perturbaciones superpuestas se combinarán simplemente para formar una onda resultante linealmente polarizada. Su amplitud y fase serán examinadas en detalle, bajo una diversidad de condiciones, en el siguiente capítulo cuando consideremos el fenómeno de la interferencia. Por otro lado, si las dos ondas de luz son tales que las direcciones de sus campos eléctricos respectivos son perpendiculares entre sí, la onda resultante puede o no ser linealmente polarizada. Cuál será exactamente la forma que tome la luz (es decir, *su estado de polarización)*, y cómo la podemos observar, producir, cambiar y utilizar será el tema de este capítulo.

8.1.1 Polarización lineal

Podemos representar las dos perturbaciones ópticas ortogonales que fueron consideradas antes en la forma

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \hat{\mathbf{i}}\, E_{0x} \cos(kz - \omega t) \tag{8.1}$$

y

$$\mathbf{E}_y(z, t) = \hat{\mathbf{j}}\, E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \tag{8.2}$$

donde ε es la diferencia de fase relativa entre las ondas, ambas viajando en la dirección z. Recuerden desde el comienzo que puesto que la fase tiene la forma $(kz - \omega t)$, la adición de un ε *positivo* significa que la función coseno de la ecuación (8.2) no podrá alcanzar el mismo valor que el coseno de la ecuación (8.1) sino hasta más tarde (ε/ω). Por lo tanto, E_y queda detrás de E_x en $\varepsilon > 0$. Naturalmente, si ε es una cantidad negativa, E_y precede a E_x en $\varepsilon < 0$. La perturbación óptica resultante es la suma vectorial de estas dos ondas perpendiculares:

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_x(z, t) + \mathbf{E}_y(z, t) \tag{8.3}$$

Si ε es cero o un múltiplo entero de $\pm 2\pi$, se dice que las ondas están en fase. En ese caso la ecuación (8.3) queda

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}} E_{0x} + \hat{\mathbf{j}} E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \tag{8.4}$$

La onda resultante tiene por consiguiente una amplitud fija igual a $(\hat{\mathbf{i}} E_{0x} + \hat{\mathbf{j}} E_{0y})$ es decir, ella también es linealmente polarizada (figura 8.1). Las ondas avanzan hacia un plano de observación cuyos campos tendrán que medirse. Ahí, se podrá ver una onda resultante **E** que oscila a lo largo de una línea inclinada, según una cosinusoide en el tiempo (figura 8.1*b*). El campo **E** progresa a través de un ciclo oscilatorio completo mientras que la onda avanza por el eje z a través de una longitud de onda. Este proceso se puede llevar igualmente a cabo a la inversa, es decir, podemos resolver cualquier onda linealmente polarizada en dos componentes ortogonales.

Supongamos ahora que ε sea un múltiplo entero impar de $\pm\pi$. Las dos ondas están desfasadas 180° y

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{i}} E_{0x} - \hat{\mathbf{j}} E_{0y}) \cos(kz - \omega t) \tag{8.5}$$

Esta onda está de nuevo linealmente polarizada pero se ha girado el plano de vibración (y no necesariamente en 90°) respecto al de la condición previa, como se indica en la figura 8.2.

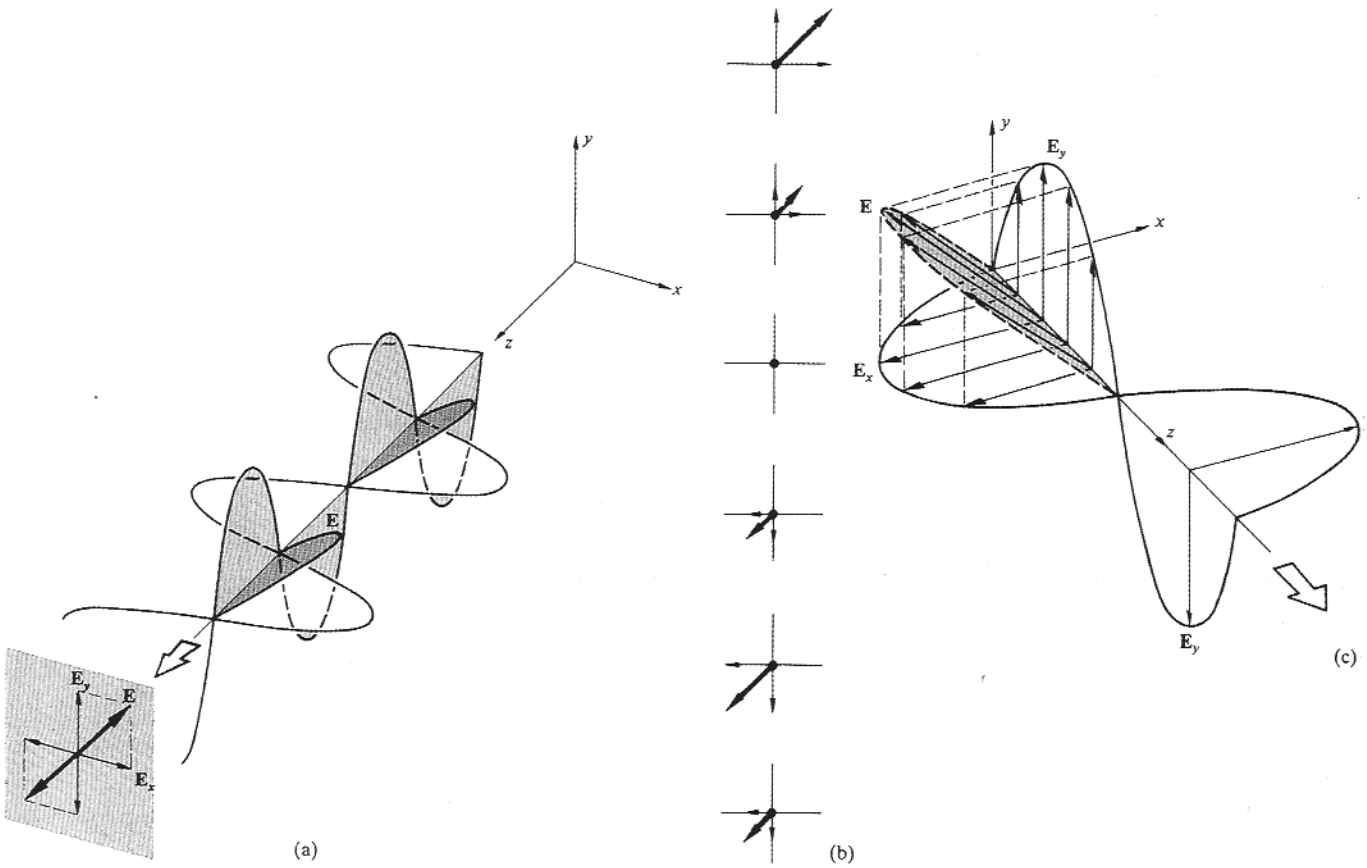


FIGURA 8.1 Luz lineal. *(a)* El campo *E* polarizado linealmente en el primer y tercer cuadrante. *(b)* El mismo campo oscilante visto de frente. *(c)* Luz polarizada linealmente en el segundo y cuarto cuadrante.

8.1.2 Polarización circular

Otro caso especial de interés particular aparece cuando ambas ondas constitutivas tienen igual amplitud (es decir, $E_{ox} = E_{oy} = E_o$) y además, su diferencia de fase relativa $\varepsilon = -\pi/2 + 2m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2...$ Dicho de otra forma, $\varepsilon = -\pi/2$ o cualquier valor aumentado o disminuido desde $-\pi/2$ en múltiplos enteros de 2π. Por lo tanto

$$\mathbf{E}_x(z, t) = \hat{\mathbf{i}} E_0 \cos(kz - \omega t) \tag{8.6}$$

y

$$\mathbf{E}_y(z, t) = \hat{\mathbf{j}} E_0 \operatorname{sen}(kz - \omega t) \tag{8.7}$$

La onda siguiente es

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}} \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen}(kz - \omega t)] \tag{8.8}$$

(figura 8.3). Obsérvese que ahora la amplitud escalar de **E**, es decir $(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})^{1/2} = E_0$ es una constante. Pero la dirección de **E** es variable con el tiempo y no está restringida, como antes, a un solo plano. La figura 8.4 muestra lo que sucede en algún punto arbitrario z_o en el eje. En $t = 0$ **E** se sitúa a lo largo del eje de referencia en la figura 8.4*a* y así

$$\mathbf{E}_x = \hat{\mathbf{i}} E_0 \cos kz_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_y = \hat{\mathbf{j}} E_0 \operatorname{sen} kz_0$$

Más tarde $t = kz_0/\omega$, $\mathbf{E}_x = \hat{\mathbf{i}} E_0$, $\mathbf{E}_y = 0$, y **E** se sitúa a lo largo del eje x. El vector de campo eléctrico resultante **E** gira en el sentido de las agujas del reloj con una frecuencia angular ω vista por un observador hacia quien la onda se está moviendo (es decir, mirando hacia la fuente). Tal onda tiene **polarización circular a derechas** (figura 8.5) y, por lo general, uno se refie-

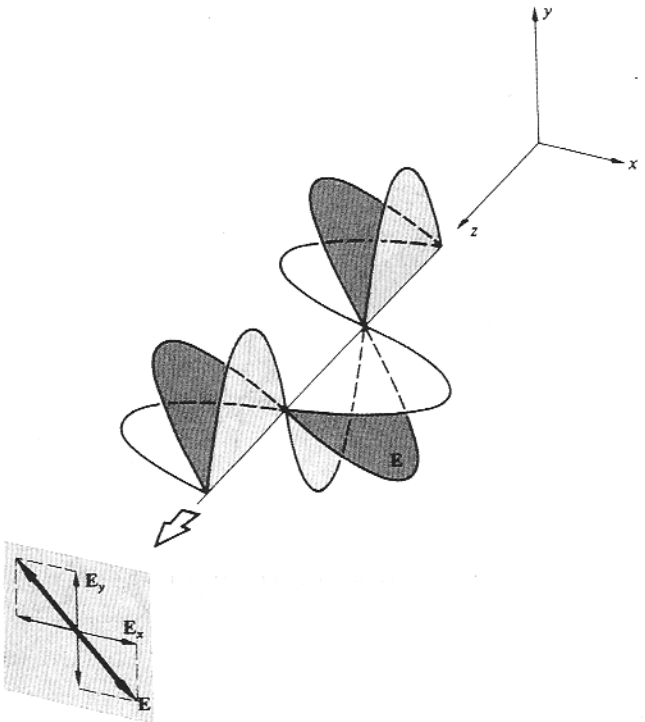


FIGURA 8.2 Luz lineal.

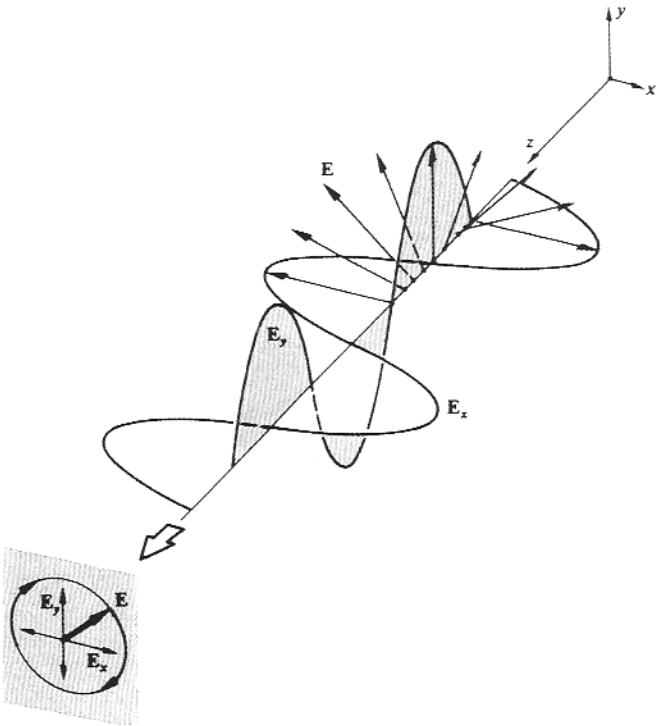


FIGURA 8.3 Luz circular a derechas.

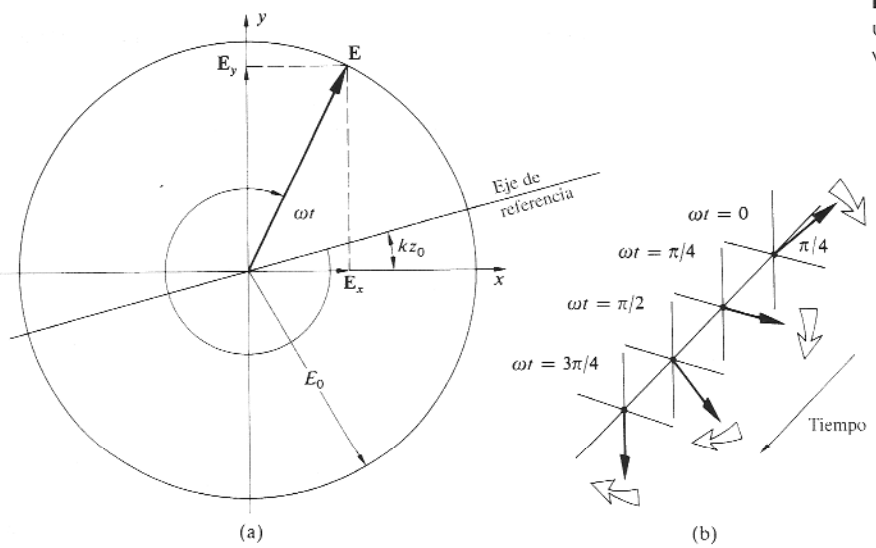


FIGURA 8.4 Rotación del vector eléctrico en una onda circular a derechas. Obsérvese que la velocidad de rotación es ω y $kz = \pi/4$.

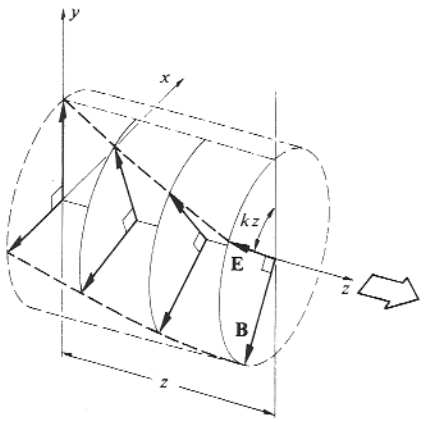


FIGURA 8.5 Luz circular a derechas.

re simplemente a ella denominándola *luz circular a derechas*. El vector **E** realiza una rotación completa cuando la onda avanza a través de una longitud de onda. En comparación, si $\varepsilon = \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2$, etc., (es decir, $\varepsilon = \pi/2 + 2m\pi$, donde $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3,\ldots$), entonces

$$\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{i}} \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen}(kz - \omega t)] \qquad (8.9)$$

La amplitud no se ve afectada, pero ahora **E** gira a izquierdas y la onda tiene **polarización circular a izquierdas**.

Una onda linealmente polarizada se puede sintetizar partiendo de dos ondas con polarización circular opuesta de igual amplitud. En concreto, si sumamos la onda circular a derechas de la ecuación (8.8) a la onda circular a izquierdas de la ecuación (8.9) obtenemos

$$\mathbf{E} = 2E_0\hat{\mathbf{i}} \cos(kz - \omega t) \qquad (8.10)$$

que tiene un vector de amplitud constante $2E_0\hat{\mathbf{i}}$ siendo, por consiguiente linealmente polarizado.

8.1.3 Polarización elíptica

Por lo que a la descripción matemática se refiere, tanto la luz lineal como circular se pueden considerar como casos especiales de luz **elípticamente polarizada** o más simplemente *luz elíptica*. Esto significa que, en general, el vector de campo eléctrico resultante **E** girará cambiando también su magnitud. En tales casos el extremo de **E** trazará una elipse, en un plano fijo perpendicular a **k**, cuando la onda avanza. Podemos verlo mejor escribiendo una expresión para la curva trazada por la punta de **E.** Con este fin recordemos que

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \qquad (8.11)$$

y

$$E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \qquad (8.12)$$

La ecuación de la curva que estamos buscando no debe ser función ni de la posición ni del tiempo, es decir, debemos poder librarnos de la dependencia de $(kz - \omega t)$. Desarrollemos la expresión para E_y en

$$E_y/E_{0y} = \cos(kz - \omega t) \cos\varepsilon - \operatorname{sen}(kz - \omega t) \operatorname{sen}\varepsilon$$

y combinémosla con E/E_o para que dé

$$\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos\varepsilon = -\operatorname{sen}(kz - \omega t) \operatorname{sen}\varepsilon \qquad (8.13)$$

De la ecuación (8.11) se deduce que

$$\operatorname{sen}(kz - \omega t) = [1 - (E_x/E_{0x})^2]^{1/2}$$

y así la ecuación (8.13) nos lleva a

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos\varepsilon\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right] \operatorname{sen}^2\varepsilon$$

Finalmente, al ordenar los términos, tenemos

$$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right) \cos\varepsilon = \operatorname{sen}^2\varepsilon \qquad (8.14)$$

Esta es la ecuación de una elipse que forma un ángulo α con el sistema coordenado (E_x, E_y) (figura 8.6) tal que

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos\varepsilon}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2} \qquad (8.15)$$

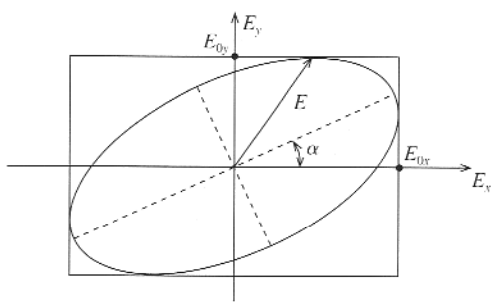


FIGURA 8.6 Luz elíptica.

La ecuación (8.14) podría reconocerse un poco más si los ejes principales de la elipse estuvieran alineados con los ejes coordenados, es decir, $\alpha = 0$ o de manera equivalente, $\varepsilon = \pm\pi/2$, $\pm 3\pi/2$, $\pm 5\pi/2$..., en cuyo caso tenemos la forma conocida

$$\frac{E_y^2}{E_{0y}^2} + \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} = 1 \tag{8.16}$$

Además si $E_{oy} = E_{ox} = E_o$ esto se reduce a

$$E_y^2 + E_x^2 = E_0^2 \tag{8.17}$$

lo cual, de acuerdo con nuestros resultados anteriores, es un círculo. Si ε es un múltiplo par de π, la ecuación (8.14) resulta en

$$E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \tag{8.18}$$

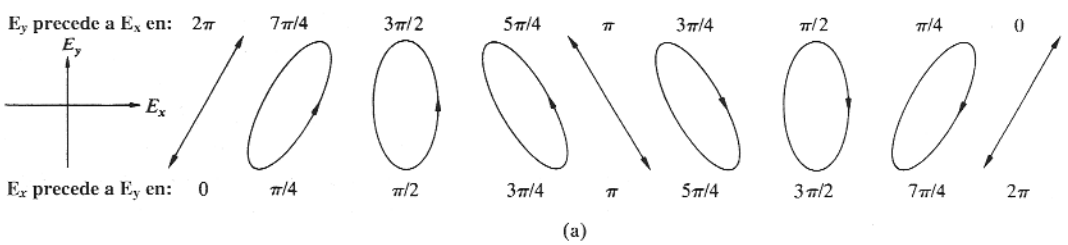
de manera similar para múltiplos impares de π

$$E_y = -\frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x \tag{8.19}$$

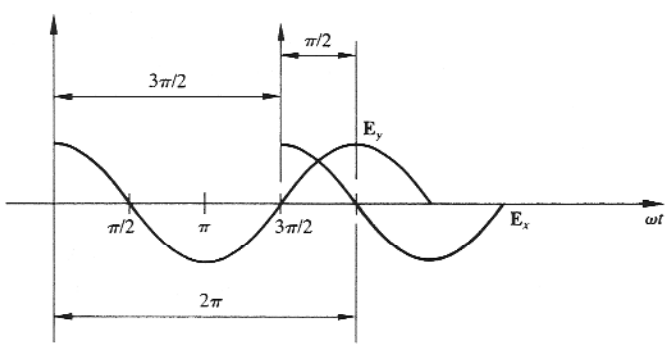
Ambas son líneas rectas con pendientes de $\pm E_{0y}/E_{0x}$ es decir, tenemos luz lineal.

La figura 8.7 resume mediante un diagrama la mayoría de estas conclusiones. Este diagrama muy importante lleva la etiqueta «E_x precede a E_y en: 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$...», donde éstos son los valores positivos de ε que hay que utilizar en la ecuación (8.2). Se dará la misma serie de curvas si «E_y precede a E_x en: 2π, $7\pi/4$, $3\pi/2$, $5\pi/4$...», y esto ocurre cuando ε equivale a -2π, $-7\pi/4$, $-3\pi/2$, $-5\pi/4$, etc. La figura 8.7*b* muestra cómo E_x que precede a E_y en $\pi/2$ equivale a E_y que precede a E_x en $3\pi/2$ (donde la suma de estos dos ángulos equivale a 2π). Esto nos seguirá interesando al modificar las fases relativas de las dos componentes ortogonales que constituyen la onda.

Podemos ahora referirnos a una onda de luz particular en términos de su *estado* **específico de polarización**. Diremos que la luz lineal polarizada o la luz polarizada en un plano está en un estado $\mathscr{P}$, mientras que la luz circular derecha o izquierda está en un estado $\mathscr{R}$ o $\mathscr{L}$, respectivamente. De manera similar, la condición de polarización elíptica corresponde a un *estado* $\mathscr{E}$. Ya hemos visto que un estado $\mathscr{P}$ se puede representar como una superposición de estados $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$ [ecuación 8.10] y lo mismo es cierto para un estado $\mathscr{E}$. En este caso, como se ve en la figura 8.8, las amplitudes de las dos ondas circulares son diferentes. (Se deja para el problema 8.3 un tratamiento analítico.)



(a)



(b)

FIGURA 8.7 *(a)* Varias configuraciones de polarización. La luz sería circular con $\varepsilon = \pi/2$ ó $3\pi/2$ si $E_{0x} = E_{0y}$ pero aquí por cuestión de generalidad E_{0y} se consideró más grande que E_{0x}. *(b)* E_x precede a E_y (o E_y sigue a E_x) en $\pi/2$ o, de otra forma, E_y precede a E_x (o E_x sigue a E_y) en $3\pi/2$.

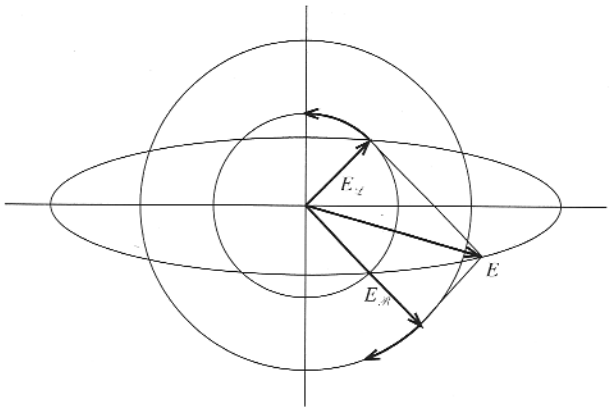


FIGURA 8.8 Luz elíptica como superposición de un estado $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$.

8.1.4 Luz natural

Una fuente de luz ordinaria consiste en un número muy grande de emisores atómicos orientados al azar. Cada átomo excitado emite un tren de onda polarizado durante aproximadamente 10^{-8} s. Todas las emisiones que tienen la misma frecuencia se combinarán para formar una onda polarizada resultante que no persiste por más de 10^{-8} s. Se emiten constantemente nuevos trenes de onda y el estado de polarización global cambia de una forma totalmente impredecible. Si estos cambios tienen lugar tan rápidamente que es imposible distinguir cualquier estado de polarización resultante, nos referimos a la onda como **luz natural**. Si bien se conoce también como *luz no polarizada,* se trata de una denominación incorrecta dado que en realidad la luz está compuesta por una sucesión rápidamente variable de diferentes estados de polarización. Quizás, sería más correcto referirnos a ella con el término de *luz polarizada al azar.*

Podemos representar matemáticamente la luz natural en términos de dos ondas arbitrarias de igual amplitud, linealmente polarizadas, ortogonales, *incoherentes* (es decir, ondas para las cuales su diferencia relativa de fase varía rápidamente y al azar).

Recordemos que una onda plana monocromática ideal debe mostrarse como un tren de onda infinito. Si esta perturbación se resuelve en dos componentes ortogonales perpendiculares a la dirección de propagación ellas, a su vez, deben tener la misma frecuencia, estar infinitamente extendidas y ser por consiguiente mutuamente coherentes (es decir, ε = constante). Dicho de otra forma, ***una onda plana perfectamente monocromática está siempre polarizada***. En efecto, las ecuaciones (8.1) y (8.2) son precisamente las componentes cartesianas de una onda plana armónica transversal ($E_z = 0$).

Generalmente la luz, bien sea de origen natural o artificial, no es ni completamente polarizada ni no polarizada; ambos casos son extremos. Más a menudo, el vector de campo eléctrico varía de una forma que no es ni totalmente regular ni totalmente irregular, siendo tal perturbación **parcialmente polarizada**. Una forma útil de describir este comportamiento es visualizarlo como el resultado de la superposición de cantidades específicas de luz natural y de la polarizada.

8.1.5 Momento angular y la imagen de fotones

Ya hemos visto que una onda electromagnética que incide sobre un objeto puede impartirle tanto energía como momento lineal a ese cuerpo. Además, si la onda plana incidente está circularmente polarizada, podemos esperar que los electrones dentro del material se pongan en movimiento circular como respuesta a la fuerza generada por el campo rotatorio **E**. Alternativamente, podríamos visualizar el campo como compuesto de dos estados ortogonales que están desfasados 90°. Estos impulsan simultáneamente al electrón en dos direcciones perpendiculares con una diferencia de fase de $\pi/2$. El movimiento resultante es de nuevo circular. En efecto el momento de torsión ejercido por el campo **B** se promedia a cero en una órbita y el campo **E** impulsa al electrón con una velocidad angular ω igual a la frecuencia de la onda electromagnética. La onda impartirá entonces momentum angular a la sustancia en la que los electrones están sumergidos y a la cual están ligados. Podemos tratar el problema muy simplemente sin tener que entrar, en realidad, en los detalles de la dinámica. La potencia suministrada al sistema es la energía transferida por unidad de tiempo, $d\mathscr{E}/dt$. Además, la potencia generada por el par de fuerzas Γ actuando en un cuerpo en rotación es justamente $\omega\Gamma$ (que es análoga a vF para el movimiento lineal), por lo tanto

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \omega\Gamma \tag{8.20}$$

Como el par de fuerzas es igual a la rapidez temporal de cambio del momento angular L, se deduce que en promedio

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \omega\frac{dL}{dt} \tag{8.21}$$

Una carga que absorbe una cantidad de energía $\mathscr{E}$ de una onda circular incidente absorberá simultáneamente una cantidad de momento angular L tal que

$$L = \frac{\mathscr{E}}{\omega} \tag{8.22}$$

Si la onda incidente se encuentra en un estado $\mathscr{R}$ su vector **E** gira a derechas, mirando hacia la fuente. Esta es la dirección en la que una carga positiva en el medio absorbente giraría y el vector momento angular se toma por consiguiente apuntando en la dirección opuesta a la dirección de propagación [1] como se muestra en la figura 8.9.

De acuerdo con la descripción cuántica, una onda electromagnética transfiere energía en paquetes cuantificados o fotones tales que $\mathscr{E} = h\nu$. Entonces $\mathscr{E} = \hbar\omega$ (donde $\hbar \equiv h/2\pi$) y el momento angular *intrínseco o espín* de un fotón es bien $-\hbar$ o $+\hbar$, donde los signos indican sentido a derechas o a izquierdas respectivamente. Obsérvese que el *momento angular de un fotón es completamente independiente de su energía.* Siempre que una partícula cargada emite o absorbe radiación electromagnética junto con sus cambios de energía y momento lineal, sufrirá un cambio $\pm\hbar$ en su momento angular. [2]

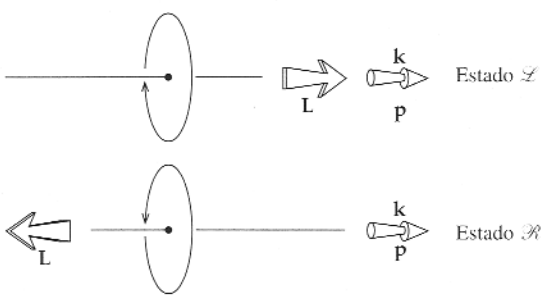


FIGURA 8.9 Momento angular de un fotón.

La energía transferida a un objetivo por una onda electromagnética monocromática incidente puede visualizarse como transportada en la forma de un flujo de fotones idénticos. Podemos anticipar un transporte correspondientemente cuantificado de momentum angular. Una onda plana con polarización circular a izquierdas impartirá un momento angular al objetivo como si todos los fotones que constituyen el haz tuvieran sus espines alineados en la dirección de propagación. Si se cambia la luz a circular a derechas se invierte la orientación del espín de los fotones así como el momento de torsión ejercido por ellos en el objetivo. Usando un péndulo de torsión muy sensible, Richard A. Beth pudo desarrollar tales medidas en 1935 [3].

Hasta ahora no hemos tenido ninguna dificultad en describir luz polarizada circular a derechas e izquierdas con el modelo de fotones; pero, ¿qué es la luz polarizada linealmente o elípticamente? Según la concepción clásica, la luz en el estado $\mathscr{P}$ se puede sintetizar con la superposición coherente de cantidades iguales de luz en los estados $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$ (con una diferencia de fase apropiada). Cualquier fotón individual cuyo momento angular se mida de alguna manera tiene su espín totalmente paralelo o antiparalelo a **k**. Un haz de luz lineal interaccionará con la materia como si estuviera compuesto, en ese instante, de un número igual de fotones a derechas y a izquierdas. Aquí cabe aclarar un punto sutil. No podemos decir que el haz conste en realidad de exactamente la misma cantidad de fotones izquierdos y derechos bien definidos; los fotones son todos idénticos. Más bien, cada fotón individual existe simultáneamente en ambos estados del espín con la misma probabilidad. Si midiéramos el momento angular de los fotones constitutivos, $-\hbar$ resultaría tan frecuentemente como $+\hbar$. Esto es todo lo que podemos observar. No nos interesa lo que el fotón hace antes de la medida (si en realidad existe antes de la medida). En conjunto, un haz de luz polarizado linealmente no impartirá un momentum angular total al objetivo.

Por el contrario, si el fotón no ocupa ambos estados del espín con la misma probabilidad, se descubrirá que un momentum angular, digamos $+\hbar$, ocurre con algo más de frecuencia que el otro, $-\hbar$. En este caso, al objetivo se le imparti-

[1] La terminología que se ha seleccionado es sin duda un poco extraña. Sin embargo, su uso en la óptica es muy difundido aunque sea completamente antitética a la convención más razonable adoptada en la física de partículas elementales.

[2] Como ejemplo simple aunque muy importante, consideremos el átomo de hidrógeno. Está compuesto de un protón y un electrón, cada uno con un espín de $\hbar/2$. El átomo tiene ligeramente más energía cuando los espines de ambas partículas están en la misma dirección. Es posible, sin embargo, que una vez cada mucho tiempo, aproximadamente 10^7 años, uno de los espines se voltee para ser antiparalelo al otro. El cambio en el momento angular del átomo es entonces $\hbar$ y éste es impartido a un fotón emitido que al mismo tiempo se lleva también el pequeño exceso de energía. Este es el origen de la emisión de microondas de 21 cm que es tan importante en radioastronomía.

[3] Richard A. Beth, «Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light», *Phys. Rev.*, **50**, 115 (1936).

rá un momento angular positivo neto. El resultado *global* es luz elípticamente polarizada, es decir, una superposición de cantidades desiguales de luz $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$ que mantiene una relación particular de fase.

8.2 Polarizadores

Ahora que tenemos alguna idea de lo que es la luz polarizada, el siguiente paso lógico es comprender las técnicas que se han utilizado para generarla, cambiarla y manipularla para satisfacer nuestras necesidades. Un aparato óptico cuya energía de entrada es la luz natural y cuya salida es alguna forma de luz polarizada es un **polarizador**. Por ejemplo, recordemos que una representación posible de la luz no polarizada es la superposición de dos estados $\mathscr{P}$ ortogonales, incoherentes y de igual amplitud. Un instrumento que separa estas dos componentes, descartando una y dejando pasar la otra, se conoce como *polarizador lineal*. Dependiendo de la forma de la salida podríamos también tener *polarizadores circulares o elípticos*. Todos estos sistemas varían en efectividad hasta lo que podríamos llamar polarizadores *parciales* o con pérdidas.

Los polarizadores toman configuraciones muy diferentes, pero todos ellos se fundamentan en uno de los cuatro mecanismos físicos esenciales: *dicroísmo o* absorción selectiva, *reflexión, esparcimiento y birrefringencia* o doble refracción. Hay, sin embargo, una propiedad fundamental que todos comparten: *tiene que haber alguna forma de asimetría asociada con el proceso.* Esto es ciertamente comprensible ya que el polarizador debe, de alguna manera, seleccionar un estado de polarización particular, descartando todos los demás. En verdad, la asimetría puede ser sutil y estar relacionada con el ángulo de visión o de incidencia pero más comúnmente es una anisotropía en el material del polarizador mismo.

8.2.1 Ley de Malus

Antes de seguir debemos aclarar una cuestión: ¿Cómo podemos determinar experimentalmente si un dispositivo es o no en realidad un polarizador lineal?

Por definición, si la luz natural es incidente en un polarizador lineal ideal como en la figura 8.10, se transmitirá solamente la luz en un estado $\mathscr{P}$ que tendrá una orientación paralela a una dirección específica que llamaremos el **eje de transmisión** del polarizador. Sólo la componente del campo óptico paralela al eje de transmisión pasará a través del sistema sin quedar afectada. Si el polarizador de la figura 8.10 se gira alrededor del eje z, la lectura en el detector (por ejemplo, una fotocélula) permanecerá sin cambios debido a la simetría completa de la luz no polarizada. Recordemos que estamos tratando con ondas pero debido a la frecuencia tan elevada de la luz, nuestro detector medirá sólo la irradiancia incidente. Ya que ésta es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico [ecuación (3.44)], sólo nos interesa la amplitud.

Ahora supongamos que introducimos un segundo polarizador ideal idéntico, o **analizador**, cuyo eje de transmisión es vertical (figura 8.11). Si la amplitud del campo eléctrico trans-

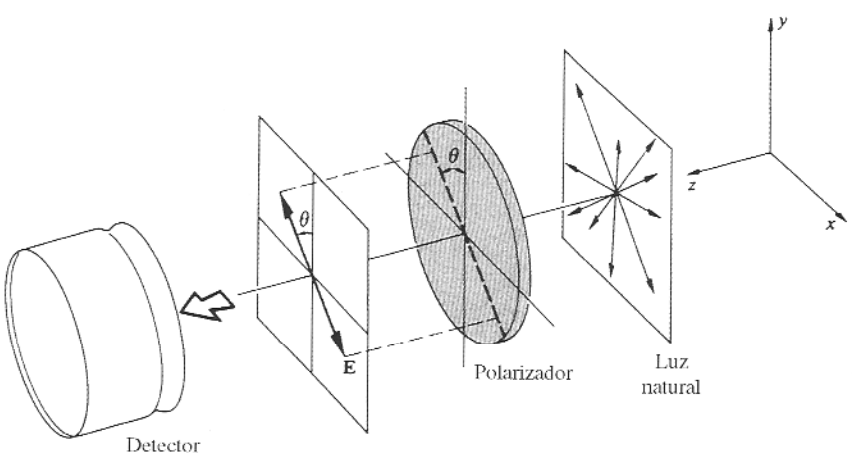


FIGURA 8.10 Polarizador lineal.

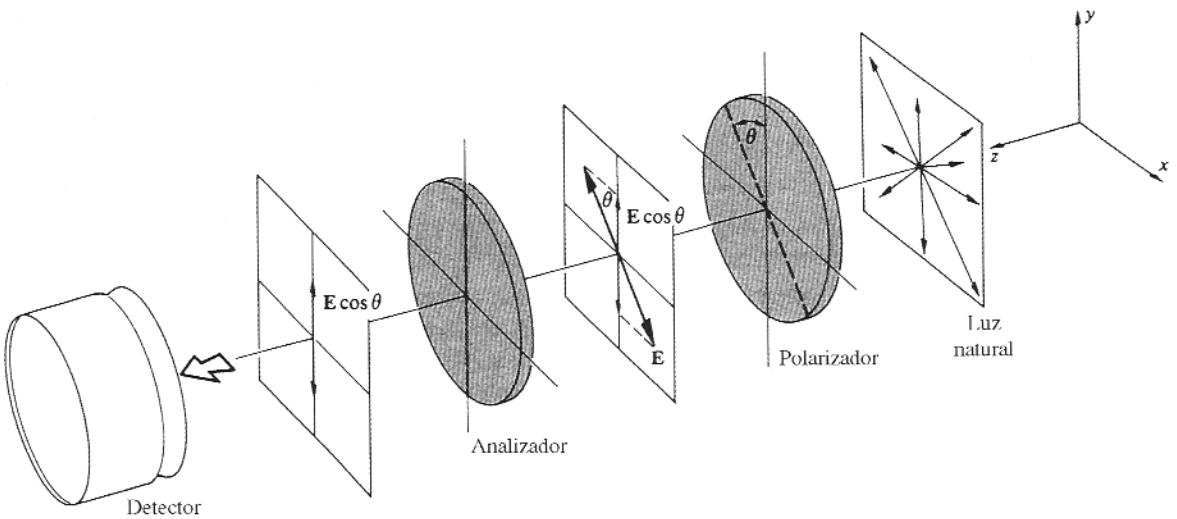


FIGURA 8.11 Polarizador lineal y analizador —Ley de Malus.

mitido por el polarizador es E_0 solamente su componente E_0 cos θ, paralela al eje de transmisión del analizador, pasará al detector (suponiendo que no haya absorción). De acuerdo con la ecuación (3.44) la irradiancia que llega al detector está dada entonces por

$$I(\theta) = \frac{c\epsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2\theta \tag{8.23}$$

La irradiancia máxima, $I(0) = c\epsilon_0 E_0^2/2$, ocurre cuando el ángulo θ entre los ejes de transmisión del analizador y el polarizador es cero. Por lo tanto, la ecuación (8.23) se puede volver a escribir como

$$I(\theta) = I(0) \cos^2\theta \tag{8.24}$$

Esto se conoce como **ley de Malus** que se publicó por primera vez en 1809 por Étienne Malus, un ingeniero militar y capitán en el ejército de Napoleón.

Obsérvese que $I(90°) = 0$. Esto se debe al hecho de que el campo eléctrico que ha pasado a través del polarizador es perpendicular al eje del analizador (los dos dispositivos así dispuestos se definen como *cruzados*). El campo es por consiguiente paralelo a lo que se llama *eje de extinción* del analizador y no tiene ninguna componente a lo largo del eje de transmisión. Podemos utilizar la disposición de la figura 8.11 junto con la ley de Malus para determinar si un dispositivo particular es o no un polarizador lineal.

8.3 Dicroísmo

En su acepción más amplia el término **dicroísmo** se refiere a la absorción selectiva de una de las dos componentes ortogonales del estado $\mathcal{P}$, de un haz incidente. El polarizador dicroico es en sí mismo físicamente anisótropo, produciendo una fuerte asimetría o absorción preferencial de una componente del campo mientras que es esencialmente transparente para la otra.

8.3.1 El polarizador de rejilla de alambre

El sistema más simple de este tipo es una rejilla de alambres conductores paralelos como se muestra en la figura 8.12. Imaginemos

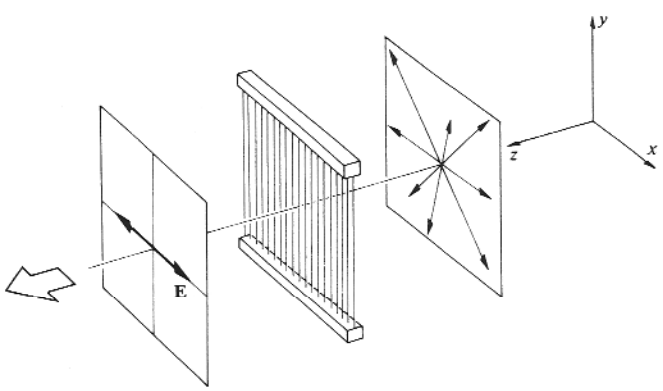


FIGURA 8.12 Polarizador de rejilla de alambre.

que una onda electromagnética no polarizada incida sobre la rejilla por la derecha. El campo eléctrico se puede resolver en las dos componentes ortogonales usuales; en este caso, una se escoge paralela a los alambres y la otra perpendicular a ellos. La componente y del campo impulsa los electrones de conducción a lo largo de cada alambre, generando así una corriente. A su vez, los electrones chocan con los átomos del retículo impartiéndoles energía y calentando así los alambres (calor Joule). De esta manera, la energía se transfiere del campo a la rejilla. Además, los electrones que se aceleran a lo largo del eje y radian tanto hacia adelante como hacia atrás. Como es de esperar, la onda incidente tiende a anularse con la onda rerradiada hacia adelante, con una transmisión resultante escasa o nula de la componente y del campo. La radiación que se propaga hacia atrás aparece simplemente como una onda reflejada. Por el contrario, los electrones no son libres de moverse muy lejos en la dirección x y la componente correspondiente del campo de la onda queda esencialmente inalterada al propagarse por la rejilla. **El eje de transmisión de la rejilla es perpendicular a los alambres**. Muy a menudo nos equivocamos cuando pensamos ingenuamente que la componente y del campo se desliza de alguna manera a través de los espacios entre los alambres.

Podemos confirmar fácilmente nuestras conclusiones usando unos microondas y una rejilla hecha de alambre eléctrico corriente. Sin embargo, no es tan fácil fabricar una rejilla que polarice la luz aunque se haya logrado. En 1960, George R. Bird y Maxfield Parrish Jr [4] construyeron una rejilla que tenía el increíble número de 2.160 alambres por milímetro. Su hazaña se logró evaporando un flujo de átomos de oro (y otras veces de aluminio) con incidencia casi rasante en una réplica de una red de difracción plástica (véase Sección 10.2.7). El metal acumulado a lo largo de los bordes en cada escalón de la red formó «alambres» microscópicos cuyo ancho y espaciamiento era menor que una longitud de onda.

Aunque la rejilla de alambre es útil sobre todo en el infrarrojo, la mencionamos aquí más por razones pedagógicas que prácticas. Otros polarizadores dicroicos más corrientes comparten el principio fundamental.

8.3.2 Cristales dicroicos

Hay ciertos materiales que son inherentemente dicroicos debido a una anisotropía en sus respectivas estructuras cristalinas. Probablemente el más conocido de éstos es el mineral natural *turmalina,* una piedra semipreciosa a menudo usada en joyería. En realidad, hay varias turmalinas, que son silicatos de boro de composición química diferente [por ejemplo, $NaFe_3B_3Al_6Si_6O_{27}(OH)_4$]. Para esta substancia hay una dirección específica dentro del cristal que se conoce como eje principal u *óptico* que está determinado por su configuración atómica. La componente del campo eléctrico de una onda de luz incidente que es perpendicular al eje principal es fuertemente absorbida por la muestra. Cuanto más grueso es el cristal más completa es la absorción (figura 8.13). Una lámina de un cristal de turmalina cortada paralelamente a su eje principal y de varios milímetros de espesor servirá como polarizador lineal. En este caso el eje principal del cristal es el eje de transmisión del polarizador. Pero la utilidad de la turmalina está muy limitada por el hecho de que sus cristales son más bien pequeños. Además, también la luz transmitida sufre cierta absorción. Para complicar las cosas, esta absorción indeseable depende fuertemente de la longitud de onda y la muestra por consiguiente estará coloreada. A la luz natural blanca, un cristal de turmalina puede aparecer verde (se presenta también en otros colores) cuando se observa normalmente a su eje principal, apareciendo casi negra cuando se observa a lo largo de ese eje, donde todos los campos $\mathbf{E}$ son perpendiculares a él (de aquí el término dicroico que significa dos colores).

Hay varias substancias que muestran características similares. Un cristal del mineral hipersteno, un silicato ferromagnésico, podría aparecer verde bajo luz blanca polarizada en una dirección y rosa con una dirección de polarización diferente.

Podemos obtener un modelo cualitativo del mecanismo que da lugar al dicroísmo cristalino considerando la estructura microscópica de la muestra (quizás sea necesario ver de nuevo la Sección 3.5). Recordemos que los átomos dentro de un cristal están fuertemente enlazados entre sí por fuerzas de corto alcance para formar una red periódica. Los electrones, que son los responsables de las propiedades ópticas, se pueden visualizar como elásticamente ligados a sus posiciones de equilibrio respectivas. Los electrones asociados con un átomo dado están también bajo la influencia de los átomos cercanos que los rodean, los cuales, a su vez, puede que no estén simétricamente distribuidos. Como resultado, las fuerzas elásticas que unen los electrones serán distintas en diferentes direcciones. Por lo tanto, su respuesta al campo eléctrico armónico de una onda electromagnética incidente variará con la dirección

[4] G. R. Bird y M. Parrish, Jr., «The Wire Grid as a Near-Infrared Polarizer», J. *Opt. Soc.*, Am., **50**, 886 (1960).

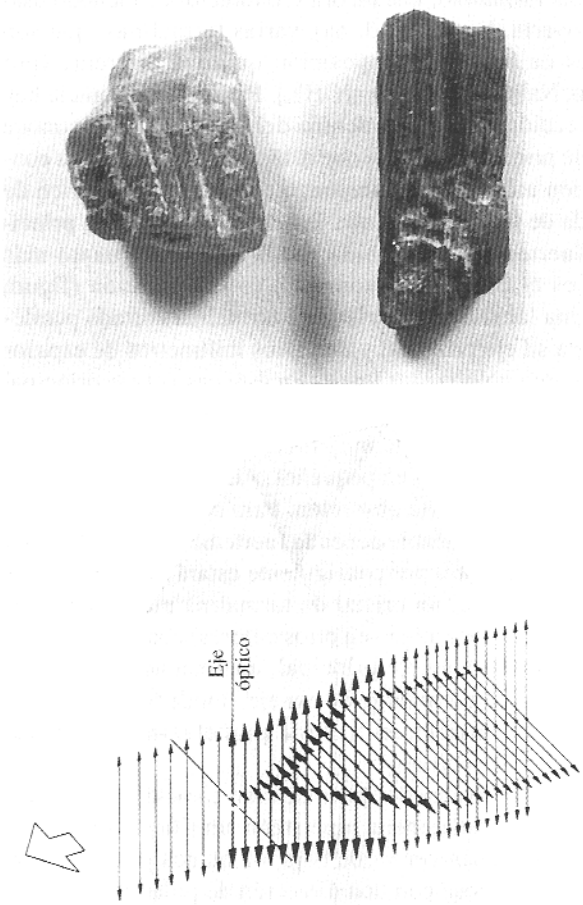


FIGURA 8.13 Cristal dicroico. Los surcos naturales evidentes en la foto de los cristales de turmalina corresponden al eje óptico.

de **E**. Si además de ser anisótropo el material es absorbente, un análisis detallado tendría que incluir una conductividad dependiente de la orientación. Existirán corrientes y la energía de la onda se convertirá en calor Joule. La atenuación, además de variar en dirección, puede depender también de la frecuencia. Esto significa que si la luz blanca incidente está en un estado $\mathcal{P}$, el cristal aparecerá coloreado y el color dependerá de la orientación de **E**. Las substancias con dos o hasta tres colores distintos se definen dicroicas o tricroicas, respectivamente [5].

8.3.3 Polaroide

En 1928 Edwin Herbert Land, entonces un estudiante universitario de primer grado de 19 años del Harvard College, inventó el primer polarizador de hoja dicroica conocido comercialmente con el nombre de *hoja polaroide J* que incorporaba una substancia llamada *herapatita o peryoduro sulfatado de quinina* [6]. La explicación retrospectiva que él facilitó acerca de sus primeros trabajos es muy rica en información y hace que la lectura sea fascinante. Es particularmente interesante seguir los orígenes, algunas veces caprichosos, de lo que es ahora, sin duda, el grupo de polarizadores más ampliamente usado. Lo siguiente es un extracto de los comentarios de Land:

> «En la literatura algunos puntos particularmente importantes en el desarrollo de los polarizadores, concretamente el trabajo de William Bird Herapath, un médico de Bristol, Inglaterra, cuyo alumno cierto Sr. Phelps, había descubierto que al verter yodo a gotas en la orina de un perro al que se le había dado quinina, en el líquido de la reacción se formaban unos pequeños cristales verdes centelleantes. Phelps se dirigió a su maestro quien entonces hizo algo que yo [Land] creo que era curioso en esas circunstancias: miró los cristales con un microscopio y observó que en aquellos lugares donde se superponían eran claros y en algunos otros eran oscuros. Fue lo suficientemente inteligente como para reconocer que se trataba de un fenómeno importante, un nuevo material polarizador [conocido ahora como herapatita]...
>
> El trabajo de Herapath llamó la atención de Sir David Brewster, quien entonces estaba trabajando en el caleidoscopio... Brewster, el inventor del caleidoscopio, escribió un libro sobre éste, en el que comentó que le gustaría utilizar cristales de herapatita para la lente ocular. Al leer este libro entre 1926 y 1927, encontré su referencia a estos cristales interesantes lo cual despertó mi interés por la herapatita.»

[5] Se facilitará más información acerca de estos procesos más tarde cuando consideremos la birrefringencia. Baste decir por ahora que para los cristales clasificados como *uniáxicos* hay dos direcciones distintas y por consiguiente las muestras *absorbentes* pueden exhibir dos colores. Los cristales *biáxicos* tienen tres direcciones distintas, pudiendo distinguirse por tres colores .

[6] E.H. Land, «Some Aspects of the Developments of Sheet Polarizers» *J. Opt. Am.* **41,** 957 (1951).

El método inicial de Land para crear una nueva forma de polarizador lineal fue moler herapatita en millones de cristales submicroscópicos que afortunadamente tenían una forma natural de aguja. Su pequeño tamaño redujo el problema del esparcimiento de la luz. En sus primeros experimentos, los cristales se alineaban casi paralelos unos a otros usando campos magnéticos o eléctricos. Más tarde descubrió que se podían alinear mecánicamente al expulsar una suspensión coloidal viscosa de las agujas de herapatita a través de una rendija angosta. La hoja *J* resultante era efectivamente un cristal dicroico plano largo. Los cristales submicroscópicos individuales aún esparcían un poco de luz y como consecuencia de ello la hoja *J* era un tanto nebulosa.

En 1938 Land inventó la *hoja H* que es ahora, quizás, el polarizador lineal más difundido. No contiene cristales dicroicos siendo, por el contrario, un análogo molecular de la rejilla de alambre. Una hoja de alcohol polivinílico transparente se calienta y se estira en una dirección dada, alineándose en este proceso sus largas moléculas de hidrocarburos. La hoja se sumerge entonces en una solución colorante rica en yodo. El yodo impregna el plástico y se adhiere a las largas y rectas cadenas de moléculas poliméricas formando efectivamente su propia cadena. Los electrones de conducción asociados con el yodo pueden moverse a lo largo de las cadenas como si fueran largos alambres delgados. La componente de **E** en una onda incidente, que es paralela a la molécula, impulsa los electrones, actúa sobre ellos, siendo fuertemente absorbida. El eje de transmisión del polarizador es, por consiguiente, perpendicular a la dirección en la cual se estiró la película.

Cada entidad dicroica diminuta separada se conoce como una *dicromóforo*. En la hoja *H* los dicromóforos tienen dimensiones moleculares así que el esparcimiento no representa ningún problema. La hoja *H* es un polarizador muy efectivo en todo el espectro visible pero lo es algo menos en el extremo azul. Cuando se observe una luz blanca brillante a través de un par de hojas *H* polaroides cruzadas, como en la figura 8.14, el color de *extinción* será un azul intenso como resultado de esta fuga. *HN-50* sería la designación de una hoja *H* ideal hipotética con un *color neutro (N)* que transmite el 50% de la luz natural incidente mientras va absorbiendo el otro 50%, es decir la componente de polarización indeseada. En la práctica, sin embargo, alrededor del 4% de la luz incidente se reflejará en cada superficie (no se utilizan, por lo general, los revestimientos antirreflectantes) dejando casi un 92%. Supuestamente la mitad de esto se absorbe y entonces podemos contemplar un

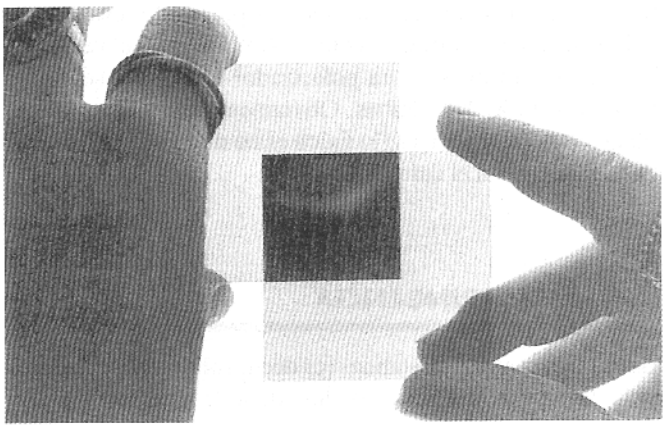


FIGURA 8.14 Par de polaroides cruzados. Cada polaroide aparece gris porque absorbe aproximadamente la mitad de la luz incidente. (Foto de E.H.)

polaroide *HN-46*. En realidad, se producen comercialmente grandes cantidades de *HN-38, HN-32* y *HN-22*, cada uno diferente por la cantidad de yodo presente, estando fácilmente disponibles (Problema 8.9).

Se han desarrollado muchas otras formas de polaroides [7]. El dicromóforo de la hoja *K*, que es resistente a la humedad y al calor, es la cadena recta de hidrocarburo polivinílico. Una combinación de los ingredientes de las hojas *H* y *K* produce la *hoja HR*, un polarizador para el infrarrojo cercano.

El *polaroide vectógrafo* es un material disponible comercialmente que se concibió con vista a incorporarlo a un proceso para hacer fotografías tridimensionales. Dicho material nunca dio los resultados esperados, pudiéndose, sin embargo, utilizar para producir algunas demostraciones que dejan perplejo y hacen reflexionar. La película vectográfica es un laminado plástico, claro como el agua, de dos hojas de alcohol polivinílico dispuestas de tal forma que sus direcciones de estiramiento están a 90° una con otra. De esta forma no hay electrones de conducción disponibles y la película no es un polarizador. Usando una solución de yodo, imaginemos que dibujamos una *X* en un lado de la película y una *Y* que se superpone a la misma en el otro. Bajo iluminación natural, la luz que pasa a través de la *X* estará en un estado $\mathcal{P}$ perpendicular al estado $\mathcal{P}$ de la luz procedente de *Y*. Dicho de otra for-

[7] Véase *Polarized Light Production and Use* por Shurcliff o su hermano pequeño, más fácil de leer *Polarized Light* por Shurcliff y Ballard.

ma, las regiones pintadas forman dos polaroides cruzados y ambos se verán superpuestos uno a otro. Ahora, si el vectógrafo se observa través de un polarizador lineal que se puede girar, se verá *X*, *Y*, o ambas. Obviamente, se pueden trazar dibujos más imaginativos (lo único es no olvidarse de trazar al revés el que va en el lado de atrás).

8.4 Birrefringencia

Muchas substancias cristalinas (es decir, sólidos cuyos átomos están dispuestos según alguna clase de serie repetitiva regular) son *ópticamente anisótropas*. Sus propiedades ópticas no son las mismas en todas las direcciones dentro de una muestra dada. Los cristales dicroicos de la sección anterior no son sino un subgrupo especial. Vimos ahí que si los átomos del retículo del cristal no están dispuestos de forma completamente simétrica, las fuerzas de enlace sobre los electrones serían anisótropas. Antes, en la figura 3.35*b*, representamos el oscilador isótropo usando el modelo mecánico simple de una capa esférica cargada, atada por muelles idénticos a un punto fijo. Se trata de una representación adecuada para las substancias *ópticamente isótropas* (los sólidos amorfos como el vidrio y el plástico son, por lo general, aunque no siempre, isótropos). La figura 8.15 muestra otra capa cargada, esta vez atada por muelles de diferente rigidez (es decir, con diferentes constantes de elasticidad). Un electrón que se desplaza del equilibrio a lo largo de una dirección paralela a una serie de «muelles» evidentemente oscilará con una frecuencia característica distinta a la procedente de un desplazamiento hacia otra dirección.

Como hemos comentado anteriormente, la luz se propaga a través de una substancia transparente por excitación de los átomos dentro del medio. Los electrones son impulsados por el campo **E** y reradian; estas onditas secundarias se recombinan y la onda refractada resultante avanza. La velocidad de la onda y, por consiguiente, el índice de refracción están determinados por la diferencia entre la frecuencia del campo **E** y la frecuencia natural o característica de los átomos. *Una anisotropía en la fuerza de enlace se manifestará, por lo tanto, en una anisotropía en el índice de refracción.* Por ejemplo, si la luz en el estado $\mathscr{P}$, se moviera a través de algún cristal hipotético encontrándose con unos electrones que pudieran ser representados por la figura 8.15, su velocidad estaría gobernada por la orientación de **E**. Si éste fuera paralelo a los muelles rígidos, es decir, en una dirección de enlace fuerte, a lo largo del eje *x*,

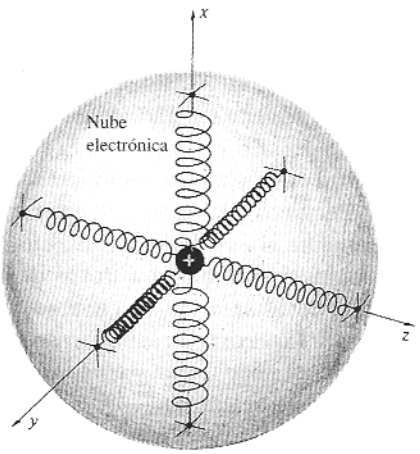


FIGURA 8.15 Modelo mecánico que muestra una capa cargada negativamente atada a un núcleo positivo por pares de resortes de diferente rigidez.

la frecuencia natural del electrón sería alta (proporcional a la raíz cuadrada de la constante de elasticidad). Por el contrario, con **E** a lo largo del eje *y*, donde la fuerza de enlace es más débil, la frecuencia natural sería algo más baja. Recordando nuestra discusión anterior sobre la dispersión y la curva $n(\omega)$ de la figura 3.37, los índices de refracción apropiados podrían ser como los de la figura 8.16. Un material de este tipo que exhibe dos índices de refracción es **birrefringente** [8].

Si el cristal es tal que la frecuencia de la luz incidente aparece en la proximidad de ω_d, figura 8.16, reside en la banda de absorción de $n_y(\omega)$. Un cristal iluminado de esta forma será fuertemente absorbente para una dirección (y) de polarización y transparente para la otra (x). Un material birrefringente que absorbe uno de los estados ortogonales $\mathscr{P}$, dejando pasar el otro, es *dicroico*. Además, supongamos que la simetría del cristal es tal que las fuerzas de enlace en las direcciones *y* y *z* son idénticas, es decir, cada uno de estos resortes tiene la misma frecuencia natural y las mismas pérdidas. El eje *x* define ahora la dirección del **eje óptico.** Puesto que un cristal se puede representar por una serie de estos osciladores anisótropos cargados y orientados, ***el eje óptico es en realidad una dirección y no tan sólo una línea***. El modelo funciona muy bien para cristales dicroicos ya que si la luz se propagara a lo largo

[8] El término *refringencia* se utilizaba en lugar del término actual *refracción*. Procede del latín *refractus* por medio de una raíz etimológica que comienza con *frangere* que significa quebrar.

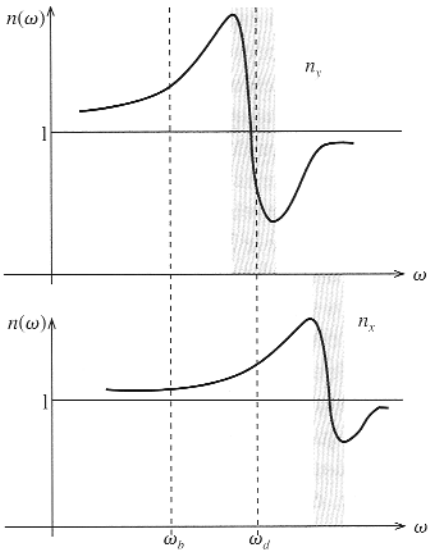


FIGURA 8.16 Índice de refracción frente a frecuencia a lo largo de dos ejes en un cristal. Las regiones donde $dn/d\omega < 0$ corresponden a bandas de absorción.

del eje óptico (**E** en el plano yz) sería fuertemente absorbida, mientras que si se moviera normal a ese eje, emergería linealmente polarizada.

A menudo las frecuencias características de los cristales birrefringentes se sitúan por encima del rango óptico apareciendo incoloros. Esto se representa en la figura 8.16 donde se considera que la luz incidente tiene unas frecuencias en la región de ω_b. Si bien son evidentes dos índices diferentes, la absorción para cualquiera de las polarizaciones es despreciable. La ecuación (3.71) muestra que $n(\omega)$ varía inversamente con la frecuencia natural. Esto significa que una constante de elasticidad efectiva grande (es decir, enlace fuerte), corresponde a una polarizabilidad baja, una constante dieléctrica baja y a un índice de refracción bajo.

Construiremos, aunque sea sólo gráficamente, un polarizador lineal recurriendo a la birrefringencia haciendo que los dos estados ortogonales $\mathcal{P}$ sigan diferentes trayectorias y luego se separen. Se pueden hacer cosas aún más fascinantes con los cristales birrefringentes como veremos más tarde.

8.4.1 Calcita

Dediquemos un momento para relacionar las ideas anteriores con un cristal birrefringente típico, es decir, la calcita. La calcita o carbonato de calcio ($CaCO_3$) es una substancia muy común que se encuentra en la naturaleza. Tanto el mármol como la piedra caliza están hechos de muchos cristales de calcita unidos entre sí. De interés particular son los bellos monocristales grandes que, aunque sean cada día más raros, aún se encuentran especialmente en la India, en Méjico y en Suráfrica. La calcita es el material más corriente con el que se fabrican polarizadores lineales para láseres de alta potencia.

La figura 8.17 muestra la distribución del carbono, del calcio y del oxígeno dentro de la estructura de la calcita, mientras que la figura 8.18 es una vista desde arriba mirando hacia abajo a lo largo de lo que se ha denominado anticipadamente como eje óptico en la figura 8.17. Cada grupo de CO_3 forma un grupo triangular cuyo plano es perpendicular al eje óptico. Obsérvese que si giramos la figura 8.18 alrededor de una línea normal a, y pasando por el centro de cualquiera de los grupos de carbonato, aparecerá exactamente la misma configuración de átomos tres veces en cada revolución. La dirección que hemos designado como eje óptico corresponde a una orientación cristalográfica especial, pues es un eje de *triple simetría*. La gran birrefringencia mostrada por la calcita surge debido a que todos los grupos de carbonato están en planos normales al eje óptico. El comportamiento de sus electrones, o más bien la interacción

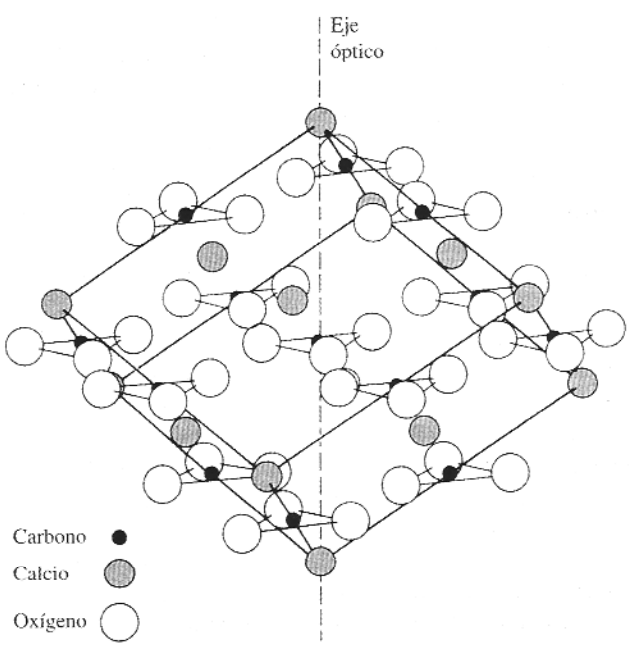


FIGURA 8.17 Disposición de los átomos en la calcita.

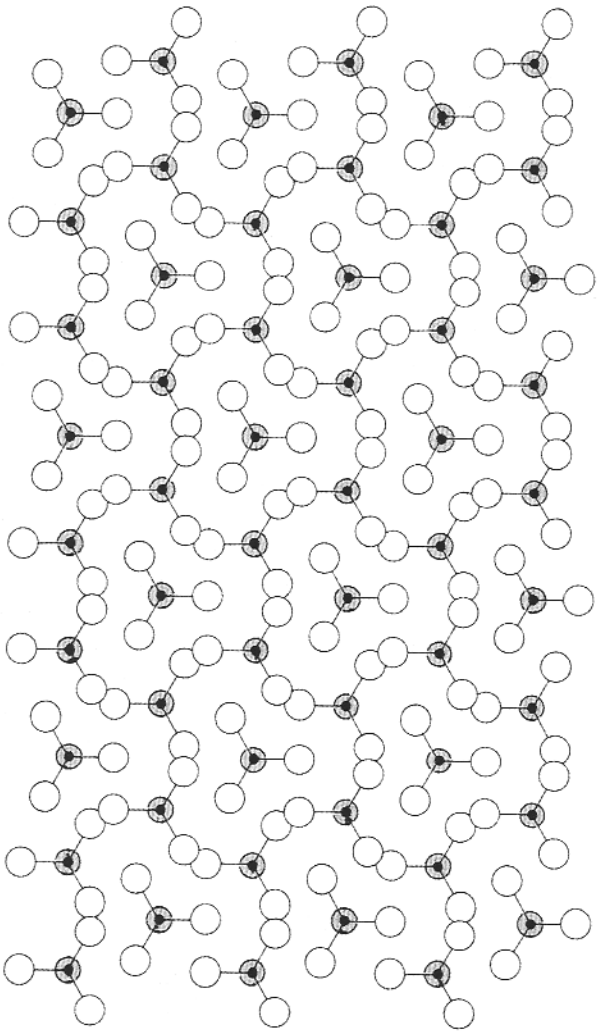


FIGURA 8.18 Disposición atómica de la calcita mirando a lo largo del eje óptico.

mutua de los dipolos de oxígeno, es marcadamente diferente cuando **E** se encuentra en esos planos o es normal a ellos (problema 8.24). En todo caso, la asimetría es bastante clara.

Las muestras de calcita se pueden partir fácilmente, formando superficies lisas conocidas como **planos de exfoliación**. El cristal está hecho de tal forma que se partirá entre planos específicos de átomos donde el enlace interatómico es relativamente débil. Todos los planos de exfoliación en la calcita (figura 8.18) son normales a tres direcciones diferentes. Conforme crece el cristal, los átomos se unen capa sobre capa siguiendo la misma distribución. Pero en el proceso de crecimiento puede haber más materia prima disponible en un lado que en otro, resultando un cristal con una forma externamente complicada. Aún así, los planos de exfoliación dependen de la configuración atómica y si uno corta una muestra de tal forma que cada superficie sea un plano de exfoliación, su forma se relacionará con la disposición básica de átomos. A tal modelo se le llama **forma de exfoliación**. En el caso de la calcita es un romboedro, siendo cada cara un paralelogramo cuyos ángulos son 78° 5' y 101° 55' (figura 8.19).

Obsérvese que sólo hay dos esquinas romas menos prominentes donde los planos de superficie se encuentran para formar tres ángulos obtusos. Una línea que pasa por el vértice de cualquiera de las esquinas menos prominentes, orientada de tal manera que forma ángulos iguales con cada cara (45,5°) y con cada canto (63,8°), es claramente un eje de triple simetría. (Esto sería algo más obvio si cortáramos el rombo para conseguir cantos de igual longitud.) Evidentemente tal línea debe corresponder al eje óptico. Cualquiera que sea la forma natural de un ejemplar particular de calcita, sólo hay que encontrar una de tales esquinas y ahí está el eje óptico.

En 1669 Erasmus Bartholinus (1625-1692), doctor en Medicina y profesor de Matemáticas en la Universidad de Copenhague (por casualidad, suegro de Römer), descubrió un nuevo e interesante fenómeno óptico en la calcita que denominó doble refracción. La calcita había sido descubierta no mucho tiempo atrás cerca de Eskifjordur en Islandia y era conocida entonces como **espato de Islandia**. Como afirmaba Bartholinus [9]:

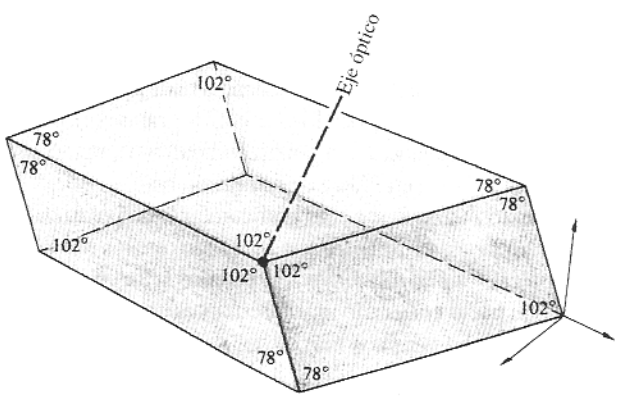


FIGURA 8.19 Forma de exfoliación de la calcita.

[9] W. F. Magie, *A Source Book in Physics.*

«El diamante es apreciado por todos los hombres y muchas son las alegrías que nos traen tesoros similares, tales como piedras preciosas y perlas... pero aquel que, por otro lado, prefiera conocer fenómenos inusuales a estas delicias, no tendrá, espero, menos alegría con un nuevo tipo de cuerpo, esto es, un cristal transparente recientemente traído de Islandia, que es quizás una de las más grandes maravillas que la naturaleza ha producido....

Conforme avanzaba mi investigación de este cristal, apareció un fenómeno maravilloso y extraordinario: los objetos que se miran a través del cristal no muestran, como en el caso de otros cuerpos transparentes, una imagen refractada única, sino que aparecen dobles.»

La doble imagen a la que se refería Bartholinus es muy evidente en la fotografía de la figura 8.20. Si enviamos un haz estrecho de luz natural a través de un cristal de calcita normalmente a un plano de exfoliación se dividirá, saliendo como dos haces paralelos. Para ver el mismo efecto de modo muy simple, solamente necesitamos colocar un punto negro en un trozo de papel cubriéndolo con un rombo de calcita. La imagen ahora consistirá de dos puntos grises (negros donde se superponen). Si se gira el cristal, uno de los puntos permanecerá estacionario mientras que el otro se moverá en círculo alrededor de él, siguiendo el movimiento del cristal. Los rayos que forman el punto fijo, que es invariablemente el que está más cerca de la esquina roma superior, se comportan como si hubieran atravesado simplemente una lámina de vidrio. De acuerdo con una sugerencia hecha por Bartholinus, aquéllos se conocen como **rayos ordinarios** o *rayos* o. Los rayos procedentes del otro punto, que se comportan de forma tan poco usual, se conocen como *rayos e* o **extraordinarios**. Si el cristal se examina a través del analizador, se encontrará que las imágenes ordinarias y extraordinarias están linealmente polarizadas (figura 8.21). Además, los dos estados emergentes $\mathscr{P}$ son ortogonales.

Se puede trazar cualquier número de planos a través del rombo de tal manera que contengan al eje óptico; todos ellos se llaman **planos principales**. Más específicamente, si el plano principal es también normal a un par de superficies opuestas de la forma de exfoliación, dividirá el cristal por una **sección principal**. Evidentemente tres de estos planos atraviesan un punto cualquiera; cada uno es un paralelogramo con ángulos de 109° y 71°. La figura 8.22 es una representación en forma de diagrama de un haz inicialmente no polarizado que recorre una sección principal de un rombo de calcita. Los círculos sólidos y las flechas que se dibujan a lo largo de cada rayo indican que el vector de campo eléctrico del rayo *o* es normal a la sección principal, mientras que el campo del rayo *e* es paralelo a la sección principal.

Para simplificar, supongamos que **E** en la onda plana incidente esté linealmente polarizada perpendicularmente al eje óptico como se muestra en la figura 8.23. La onda golpea la superficie del cristal, haciendo oscilar los electrones que, a su vez, vuelven a radiar onditas secundarias. Las onditas se superponen y recombinan para formar la onda refractada y el proceso se repite una y

FIGURA 8.20 Imagen doble formada por un cristal de calcita (no tiene forma con planos naturales de exfoliación). (Foto de E.H.)

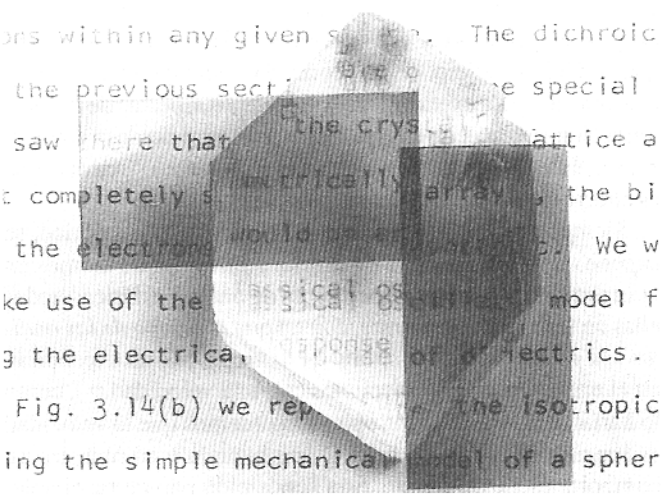


FIGURA 8.21 Cristal de calcita (esquina roma abajo). Los ejes de transmisión de los dos polarizadores son paralelos a sus lados cortos. Donde la imagen está duplicada, la imagen inferior, no desviada, es la imagen ordinaria. Obsérvese con detenimiento: hay mucho que apreciar. (Foto de E.H.)

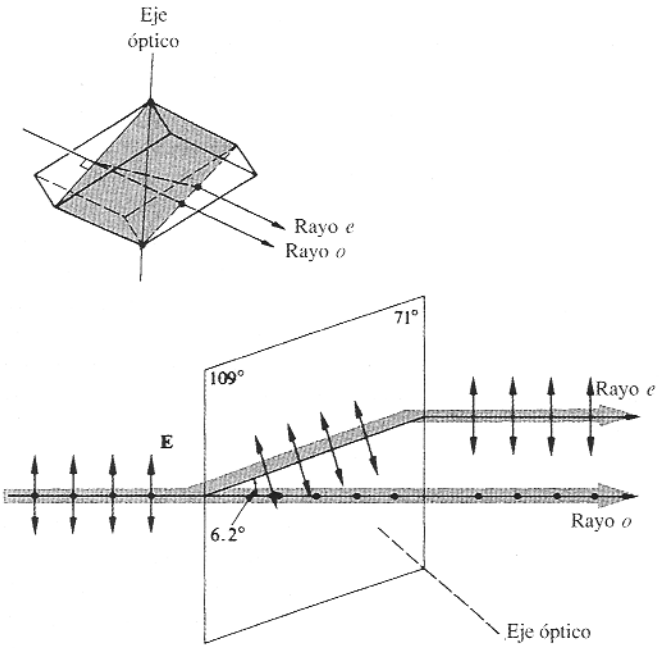


FIGURA 8.22 Haz de luz con dos componentes de campo ortogonales atravesando una sección principal de la calcita.

otra vez hasta que la onda sale del cristal. Esto representa una argumentación física convincente para aplicar las ideas del principio de Huygens sobre el esparcimiento. Huygens mismo, aunque sin el beneficio de la teoría electromagnética, usó su construcción para explicar con éxito muchos aspectos de la doble refracción en la calcita en 1690. Debe aclararse desde el comienzo, sin embargo, que su tratamiento es incompleto [10], cuya forma es atractiva pero engañosamente simple.

Siempre que el campo **E** es perpendicular al eje óptico, se supone que el frente de onda estimula un sinfín de átomos en la superficie que sirven como fuente de onditas esféricas, todas ellas en fase. Supuestamente, con tal que *el campo de las onditas sea en normal al eje óptico en todas partes,* se expandirán en el cristal en todas direcciones con una velocidad $v_\perp$, como lo harían en un medio isótropo. (Recordemos que la velocidad es función de la frecuencia.) Como la onda o no muestra un comportamiento anómalo, esta suposición parece razonable. La envolvente de las onditas es esencialmente una porción de una onda plana que a su vez estimula la distribución de fuentes

[10] A. Sommerfeld, *Optics*, pag. 148.

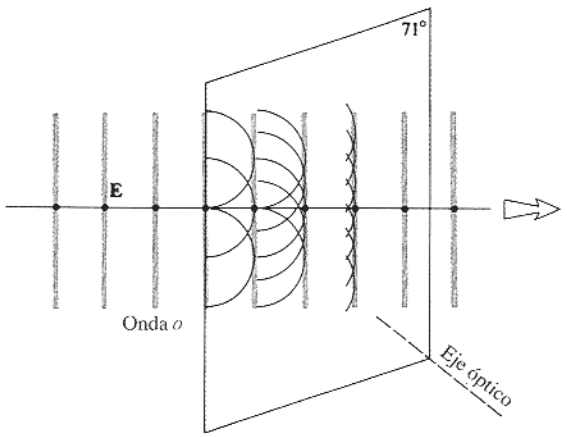


FIGURA 8.23 Onda plana incidente polarizada perpendicularmente a la sección principal.

atómicas puntuales secundarias. El proceso continúa y la onda se mueve a través del cristal.

Por el contrario, consideremos la onda incidente de la figura 8.24 cuyo campo **E** es paralelo a la sección principal. Obsérvese que **E** tiene ahora tanto una componente normal al eje óptico como una componente paralela a ella. Como el medio es birrefringente, la luz de una frecuencia dada polarizada paralelamente al eje óptico se propaga con una velocidad $v_\parallel$ donde $v_\parallel \neq v_\perp$. En particular para la calcita y la luz amarilla de

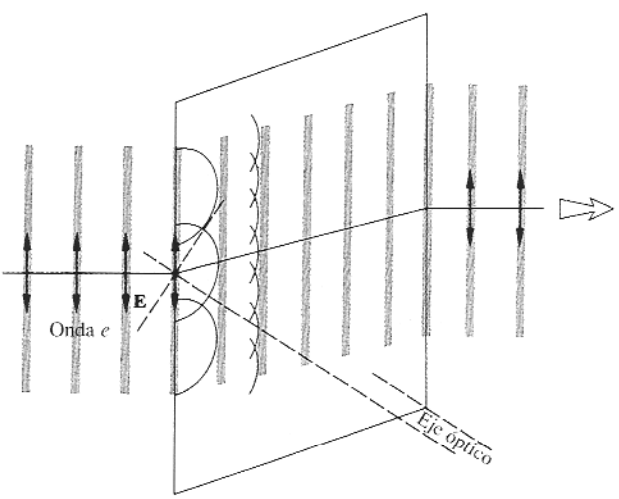


FIGURA 8.24 Onda plana incidente polarizada paralelamente a la sección principal.

sodio ($\lambda = 589$ nm), $1.486v_{\parallel} = 1.658v_{\perp} = c$. ¿Qué clase de ondas de Huygens podemos esperar ahora? Con el riesgo de simplificar demasiado las cosas representamos cada ondita *e*, al menos por el momento, como una pequeña esfera (figura 8.25). Pero $v_{\parallel} > v_{\perp}$ así que la ondita se estirará en todas las direcciones normales al eje óptico. Por consiguiente imaginemos, como Huygens lo hizo, que las onditas secundarias asociadas con la onda *e* son elipsoides de revolución alrededor del eje óptico. La envolvente de todas las onditas elipsoidales es esencialmente una porción de una onda plana paralela a la onda incidente. Esta onda plana, sin embargo, sufrirá un desplazamiento lateral al atravesar el cristal. El haz se mueve en una dirección paralela a las líneas que conectan el origen de cada ondita y el punto de tangencia con la envolvente plana. Se denomina ***dirección del rayo*** *y corresponde a la dirección en la que la energía se propaga. Lógicamente, en un cristal anisótropo la dirección del rayo no es normal al frente de onda.*

Si el haz incidente es luz natural, ambas situaciones que se muestran en las figs. 8.23 y 8.24, existirán simultáneamente con el resultado de que el haz se dividirá en dos haces ortogonales linealmente polarizados (figura 8.22). Podremos ver los dos haces divergentes dentro de un cristal recurriendo a un haz láser estrecho oportunamente orientado (**E** no es normal ni paralelo al plano principal, como ocurre normalmente). La luz dispersará en las imperfecciones internas de manera que su trayectoria aparezca bastante visible.

La descripción electromagnética de lo que ocurre es bastante complicada pero vale la pena examinarla en este punto, aunque sea sólo superficialmente. Recordemos del capítulo 3 que el campo incidente **E** polarizará el dieléctrico, es decir, desplazará la distribución de cargas creando así dipolos eléctricos. El campo en el interior del dieléctrico queda así alterado por la inclusión de un campo inducido, debiendo por lo tanto introducir una nueva cantidad, el *desplazamiento* **D** (véase Apéndice 1). En medios isótropos **D** está relacionado con **E** por una cantidad escalar siendo los dos por consiguiente paralelos. En cristales anisótropos **D** y **E** están relacionadas por un tensor y no siempre son paralelos. Si ahora aplicamos las ecuaciones de Maxwell al problema de una onda que se mueve en tal medio, encontramos que los campos que vibran dentro del frente de onda son **D** y **B** y no, como antes, **E** y **B**. El vector de onda **k**, que es normal a las superficies de fase constante, es ahora perpendicular a **D** en lugar de a **E**. En efecto **D, E** y **k** son coplanares. Entonces está claro que la *dirección del rayo* corresponde a la dirección del vector de Poynting $\mathbf{S} = v^2\epsilon\,\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ que, por lo general, es diferente de la de **k**. Debido a la manera en la que los átomos se distribuyen, **E** y **D**, sin embargo, serán colineales cuando ambos sean paralelos o perpendiculares al eje óptico [11]. Esto significa que la onda *o* encontrará un medio efectivamente isótropo y por lo tanto será esférica, teniendo a **S** y **k** colineales. Por el contrario, en las ondas *e*, **S** y **k** o, de manera equivalente, **E** y **D** serán paralelos sólo en las direcciones a lo largo o normales al eje óptico. En todos los demás puntos en la onda es **D** el que es tangente al elipsoide y por consiguiente es siempre **D** el que termina en la envolvente o en el frente de onda plano compuesto dentro del cristal (figura 8.26).

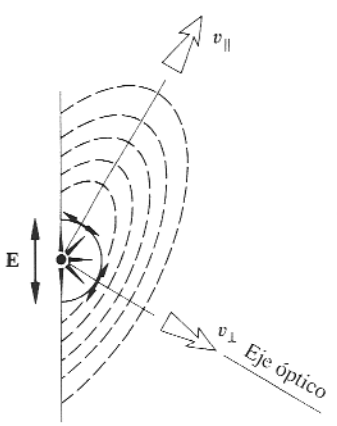


FIGURA 8.25 Trenes de onda dentro de la calcita.

8.4.2 Cristales birrefringentes

En los cristales *cúbicos* como el cloruro de sodio (es decir, la sal común), los átomos están dispuestos de manera relativamente simple y altamente simétrica. (Hay *cuatro* ejes de simetría triple, cada uno de los cuales va de una esquina a la esquina opuesta, al contrario de la calcita que tiene tan sólo un eje de esta clase). La luz que salga de una fuente puntual

[11] En el modelo de oscilador, el caso general corresponde a la situación en la que **E** no es paralela a ninguna de las direcciones de los muelles. El campo impulsará la carga, pero su movimiento resultante no estará en la dirección de **E** debido a la anisotropía de las fuerzas de enlace. La carga se desplazará más, para una componente de fuerza dada, en la dirección de la fuerza de recuperación más débil. El campo inducido no tendrá entonces la misma orientación que **E**.

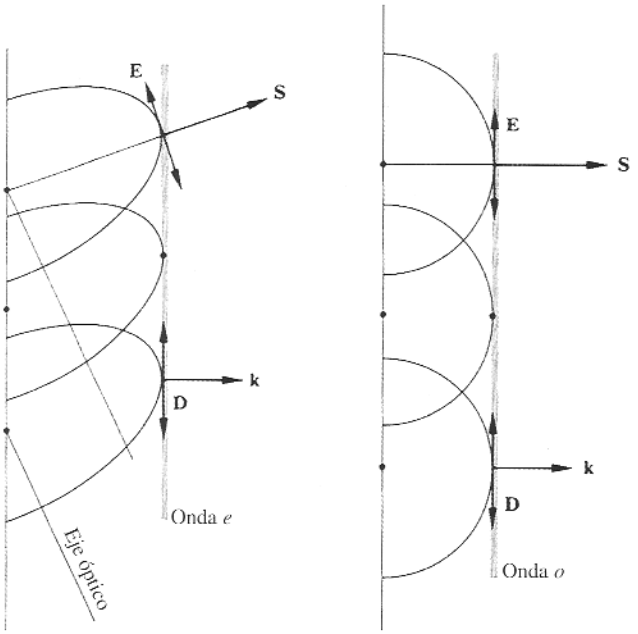


FIGURA 8.26 Orientación de los vectores **E**, **D**, **S** y **k**.

dentro de tal cristal se propagará uniformemente en todas las direcciones como una onda esférica. Como con los sólidos amorfos, no habrá direcciones preferenciales en el material. Tendrá un único índice de refracción y será *ópticamente isótropo* (figura 8.27). En ese caso, todos los muelles del modelo de oscilador serán evidentemente idénticos.

En los cristales que pertenecen a los sistemas *hexagonal, tetragonal* y *trigonal* los átomos están dispuestos de tal manera que la luz que se propaga en alguna dirección general encontrará una estructura asimétrica. Tales substancias son ópticamente anisótropas y birrefringentes. El eje óptico corresponde a una dirección alrededor de la cual los átomos están dispuestos simétricamente. Estos cristales, para los cuales hay una sola de tales direcciones, se denominan ***uniaxicos***.

Una fuente puntual de luz natural sumergida en uno de estos especímenes da lugar a ondas *o* esféricas y ondas *e* elipsoidales Es la orientación del campo con respecto al eje óptico lo que determina las velocidades con las que estas ondas se expanden. *El campo* **E** *de la onda o es en todas partes normal al eje óptico* y así se mueve con una velocidad $v_\perp$ en todas las direcciones. De manera parecida, la

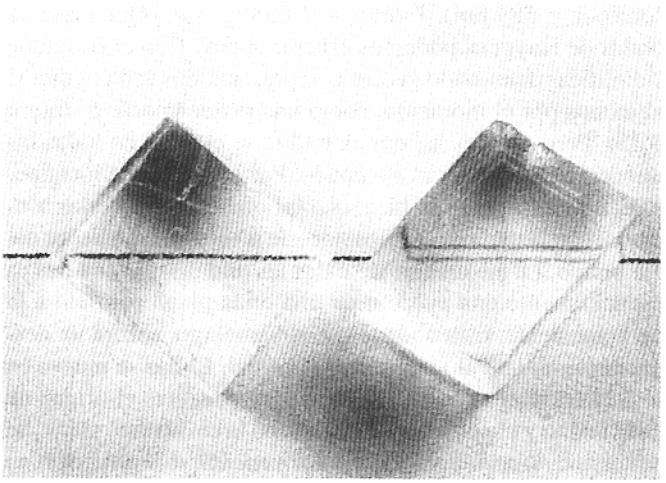


FIGURA 8.27 Imágenes en cloruro de sodio y monocristales de calcita. (Foto de E.H.)

onda *e* tiene una velocidad $v_\perp$ solamente en la dirección del eje óptico (figura 8.25), a lo largo del cual siempre es tangente a la onda *o*. Normal a esta dirección, **E** *es paralelo al eje óptico* y esa porción de la onda se expande con una velocidad $v_\parallel$ (figura 8.28). Los materiales uniáxicos tienen dos índices principales de refracción, $n_o \equiv c/v_\perp$ and $n_e \equiv c/v_\parallel$ (problema 8.35), como se indica en la tabla 8.1.

La diferencia $\Delta n = (n_e - n_o)$ es una medida de la birrefringencia. En la calcita $v_\parallel > v_\perp$, $(n_e - n_o)$ es $-0{,}172$, y es uniáxico negativo. En comparación, hay cristales, por ejemplo, el cuarzo (dióxido de silicio cristalizado) y el hielo, en los que $v_\perp > v_\parallel$. Por lo tanto, las ondas *e* elipsoidales están encerradas dentro de las ondas *o* esféricas como se muestra en la figura 8.29. (El cuarzo es ópticamente activo y por consi-

TABLA 8.1 Índices de refracción de algunos cristales birrefringentes uniáxicos ($\lambda_0 = 589{,}3$ nm)

Cristal	n_o	n_e
Turmalina	1,669	1,638
Calcita	1,6584	1,4864
Cuarzo	1,5443	1,5534
Nitrato de sodio	1,5854	1,3369
Hielo	1,309	1,313
Rutilo (TiO_2)	2,616	2,903

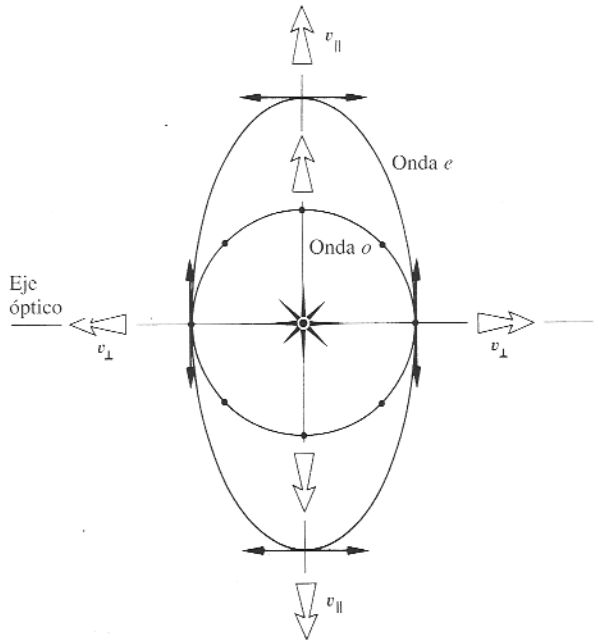


FIGURA 8.28 Trenes de onda en un cristal uniáxico negativo.

guiente un poco más complicado). En ese caso, $(n_e - n_o)$ es positivo y se dice que el cristal es *uniáxico positivo*.

Los sistemas cristalográficos restantes, esto es, *ortorrómbico, monoclínico* y *triclínico,* tienen dos ejes ópticos y por consiguiente se denominan ***biáxicos***. Dichas substancias, por ejemplo, la mica [$KH_2Al_3(SiO_4)_3$], tienen tres índices de refracción principales diferentes. Cada serie de muelles en el modelo de oscilador sería entonces diferente. La birrefringencia de los cristales biáxicos se mide como diferencia numérica entre el mayor y el menor de estos índices.

8.4.3 Polarizadores birrefringentes

Ahora será muy simple, al menos conceptualmente, realizar algún tipo de polarizador birrefringente lineal. Se han empleado todos los esquemas para separar las ondas o y e, todos ellos por supuesto basándose en el hecho de que $n_e \neq n_o$.

El polarizador birrefringente más renombrado fue presentado en 1828 por el físico escocés William Nicol (1768-1851). Hoy en día, el *prisma de Nicol* tiene más bien interés histórico, habiendo sido reemplazado por otros polarizadores más eficaces.

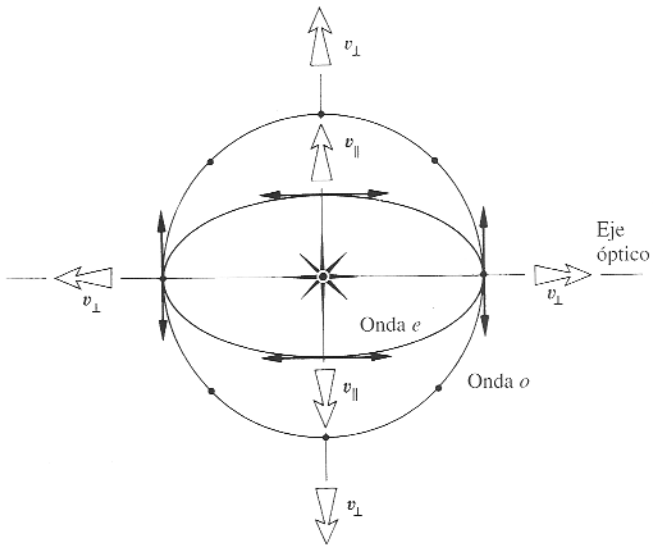
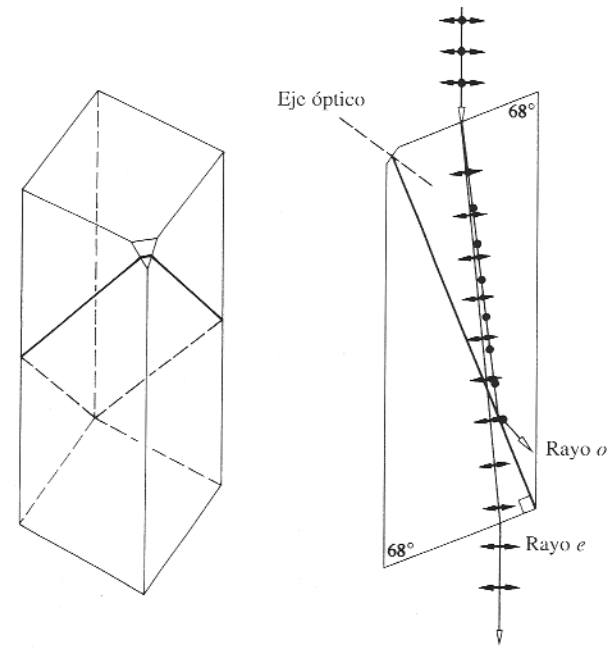


FIGURA 8.29 Trenes de onda en un cristal uniáxico positivo.

Brevemente, el sistema se hace cortando y puliendo los extremos (de 71° a 68°; ver figura 8.23) de un romboedro de calcita estrecho y de extensión adecuada; entonces, después de cortar el rombo diagonalmente las dos piezas se cortan y se cementan uniéndose con bálsamo de Canadá (figura 8.30). El cemento de bálsamo es transparente y tiene un índice de 1,55 casi a mitad del camino entre n_e y n_o. El haz incidente entra al «prisma», los rayos o y e son refractados, se separan e inciden en la película de bálsamo. El ángulo crítico en la interfaz calcita-bálsamo para el rayo o es alrededor de 69° (problema 8.37). El rayo o (que entra dentro de un cono estrecho de aproximadamente 28°) se reflejará completa e internamente, siendo sucesivamente absorbido por una capa de pintura negra en los lados del rombo. El rayo e emerge desplazado lateralmente, pero por otro lado sin ninguna alteración, al menos en la región óptica del espectro (el bálsamo de Canadá absorbe en el ultravioleta).

El *polarizador de Glan-Foucault* (figura 8.31) se construye únicamente de calcita, que es transparente desde aproximadamente 5.000 nm en el infrarrojo hasta alrededor de 230 nm en el ultravioleta. Por consiguiente, se puede usar en un amplio rango espectral. El rayo entrante incide normalmente en la superficie y **E** puede resolverse en componentes que bien son completamente paralelas o bien perpendiculares al eje óptico. Los dos rayos atraviesan la primera sección de calcita sin ninguna desviación. (Volveremos a este punto más tarde cuando



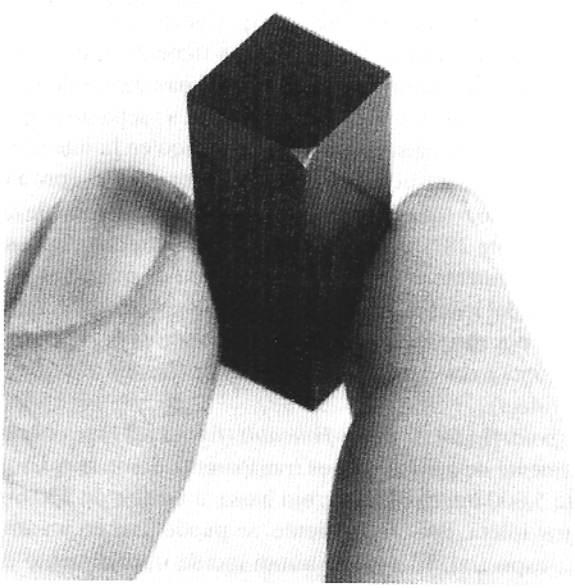


FIGURA 8.30 El prisma de Nicol. El pequeño chaflán en la esquina roma localiza el eje óptico. (Foto de E.H.)

hablemos de retardadores.) Obsérvese que si el ángulo de incidencia en la interfaze calcita-aire es θ, hará falta tan sólo arreglar las cosas de tal manera que $n_e < 1/\text{sen}\,\theta < n_o$ a fin de que se refleje total e internamente el rayo *o* y no el rayo *e*. Si los dos prismas se cementan uno a otro (en el ultravioleta se usa glicerina o aceite mineral) y el ángulo de la interfaz se cambia oportunamente, el dispositivo se conoce como *polarizador Glan-Thompson*. Su campo de visión es aproximadamente 30° en comparación con el de alrededor de 10° del Glan-Foucault o *Glan-aire* como se le llama a menudo. El último, sin embargo, tiene la ventaja de ser capaz de manejar los niveles de potencia considerablemente más elevados que se encuentran a menudo en los láseres. Por ejemplo, mientras que la irradiancia máxima para un *Glan-Thompson* puede ser alrededor de 1 W/cm^2 (onda continua en contraposición con onda pulsada), un Glan-aire típico podría tener un límite superior de 100 W/cm^2 (onda continua). La diferencia se debe al deterioro del cemento de la interfaz (y de la pintura absorbente que se haya utilizado).

El prisma *Wollaston* es en realidad un divisor de haz polarizador porque pasa ambas componentes ortogonalmente polarizadas. Se puede hacer de calcita o cuarzo según la forma indicada en la figura 8.32. Los dos rayos componentes se separan en la interfaz diagonal. Ahí, el rayo *e* se transforma en un rayo *o* cambiando su índice en correspondencia. En la calcita $n_e < n_o$ y el rayo *o* emergente se desvía hacia la normal. De manera parecida, el rayo *o*, cuyo campo es inicialmente perpendicular al eje óptico, se transforma en un rayo *e* en la sección de la derecha. Esta vez, en la calcita, el rayo *e* se desvía alejándose de la normal hacia la interfaz (véase problema 8.38). El ángulo de desviación entre los dos haces emergentes se determinará por el ángulo θ, de la cuña del prisma. En comercio existen prismas que dan desviaciones a partir de unos 15° hasta aproximadamente 45°. Se pueden comprar cementados (por ejemplo, con aceite de castor o glicerina) o sin cementar (es decir, en contacto óptico), dependiendo de la frecuencia y de los requisitos de potencia.

8.5 Esparcimiento y polarización

La luz del sol que fluye en la atmósfera desde una dirección es esparcida en todas las direcciones por las moléculas de aire (véase sección 4.2). Sin una atmósfera, el cielo diurno aparecería tan negro como el espacio vacío; un punto que se ilustra

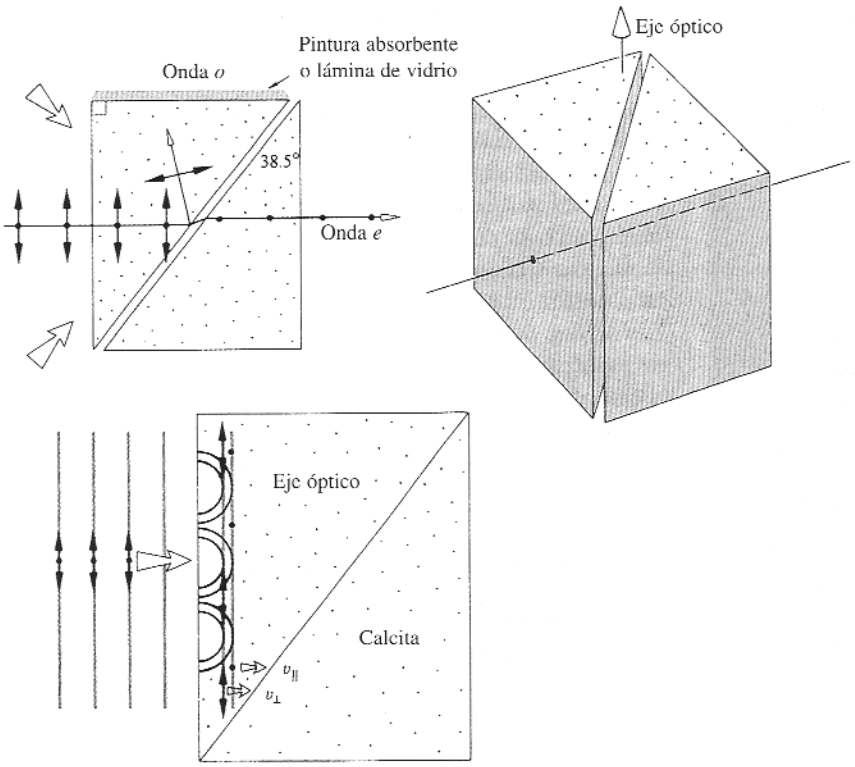
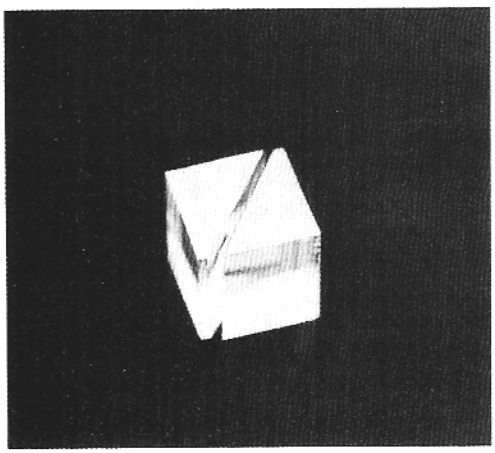


FIGURA 8.31 El prisma de Glan-Foucault. (Foto de E.H.)



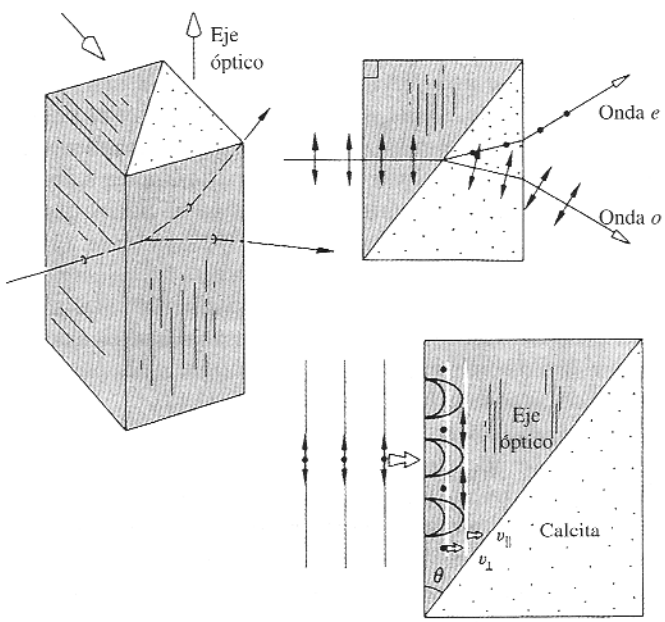


FIGURA 8.32 El prisma de Wollaston

bien en las fotografías lunares del Apolo (figura 8.33). Un observador entonces solamente vería la luz que brillara directamente hacia él. Con una atmósfera, el extremo rojo del espectro en su mayoría no se desvía mientras que el extremo azul o de alta frecuencia se esparce substancialmente. Esta luz esparcida de alta frecuencia llega al observador desde muchas direcciones haciendo que el cielo entero aparezca brillante y azul (figura 8.34).

El humo que sube del extremo de un cigarrillo encendido está formado por partículas que son más pequeñas que la longitud de onda de la luz y por lo tanto aparece azul cuando se ve contra un fondo obscuro. Por el contrario, el humo exhalado contiene gotitas de agua relativamente grandes y aparece blanco. Cada gotita es más grande que las longitudes de onda de la luz y entonces contiene tantos osciladores como para poder sostener los procesos ordinarios de reflexión y refracción. Estos efectos no tienen preferencia por ninguna componente de frecuencia de la luz blanca incidente.

También la luz que se refleja y refracta varias veces por una gotita y que finalmente regresa al observador es blanca. Esto explica la blancura de los pequeños granos de sal y azúcar, nie-

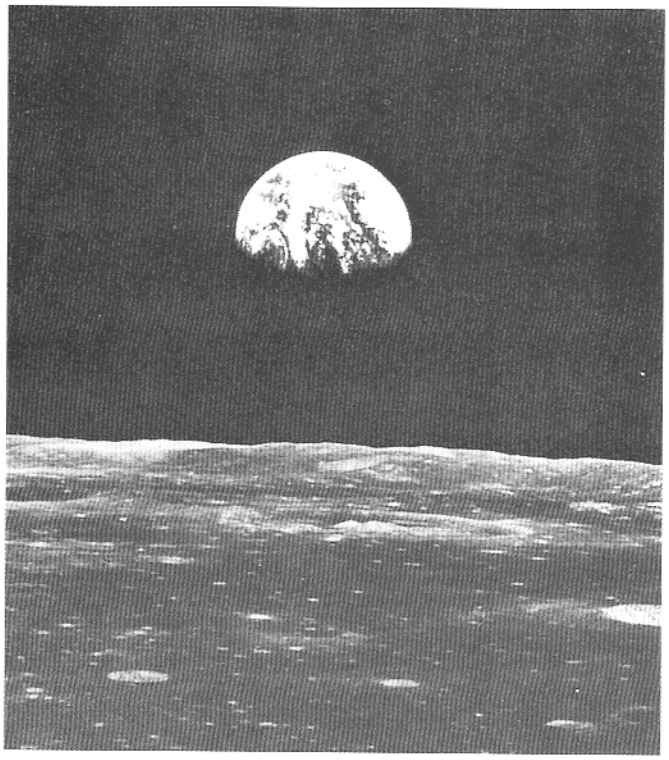


FIGURA 8.33 Mitad de la Tierra suspendida en el cielo negro de la Luna. (Foto cedida por la NASA.)

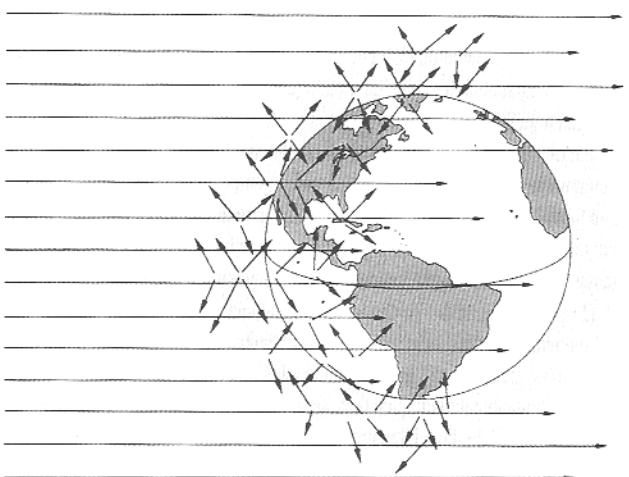


FIGURA 8.34 Esparcimiento de la luz del cielo.

bla, nubes, papel, polvos, vidrio esmerilado, y de manera más amenazadora, el típico cielo pálido de una ciudad contaminada.

Las partículas que son aproximadamente del tamaño de una longitud de onda (recordemos que los átomos tienen un tamaño de aproximadamente una fracción de nanometro) esparcen la luz de una forma muy distintiva. Una distribución importante de tales partículas de igual tamaño puede dar lugar a una gama entera de colores transmitidos. En 1883 la isla volcánica Krakatoa, sita en el Estrecho de Sonda al oeste de Java, se desintegró con una conflagración fantástica. Grandes cantidades de fino polvo volcánico fueron arrojadas a la atmósfera y se esparcieron sobre vastas regiones de la Tierra. Sucesivamente, durante algunos años, el Sol y la Luna aparecieron reiteradamente verdes o azules mientras que los amaneceres y las puestas del Sol tenían un colorido descomunal.

8.5.1 Polarización por esparcimiento

Imaginemos que tenemos una onda plana linealmente polarizada incidente sobre una molécula de aire, como se muestra en la figura 8.35. La orientación del campo eléctrico de la radiación esparcida (es decir, $\mathbf{E}_s$) sigue la distribución dipolar de tal manera que $\mathbf{E}_s$, el vector de Poynting $\mathbf{S}$ y el dipolo oscilador son todos coplanares (figura 3.31). Las vibraciones inducidas en el átomo son paralelas al campo $\mathbf{E}$ de la onda de luz incidente siendo así perpendiculares a la dirección de propagación. Obsérvese una vez más que el dipolo no radia en la dirección de su eje. Ahora, si la onda incidente no está polarizada, se puede representar por dos estados $\mathscr{P}$, incoherentes ortogonales, en cuyo caso la luz esparcida (figura 8.36) es equivalente a una superposición de las condiciones que se muestran en las figuras 8.35 *a* y *b*. Evidentemente, la luz esparcida en la dirección hacia adelante está completamente sin polarizar; lejos de ese eje está parcialmente polarizada, polarizándose cada vez más conforme aumenta el ángulo. Cuando la dirección de observación es normal al haz primario, la luz está polarizada linealmente por completo.

Podemos verificar fácilmente estas conclusiones con una pieza de polaroide. Localícese el sol y examínese una región del cielo a aproximadamente 90° con los rayos solares. Esa porción del cielo está claramente polarizada de forma parcial y normal a los rayos (ver figura 8.37). No está polarizada del todo debido principalmente a anisotropías moleculares, la presencia de grandes partículas en el aire y los efectos despolarizantes del esparcimiento múltiple. La última condición

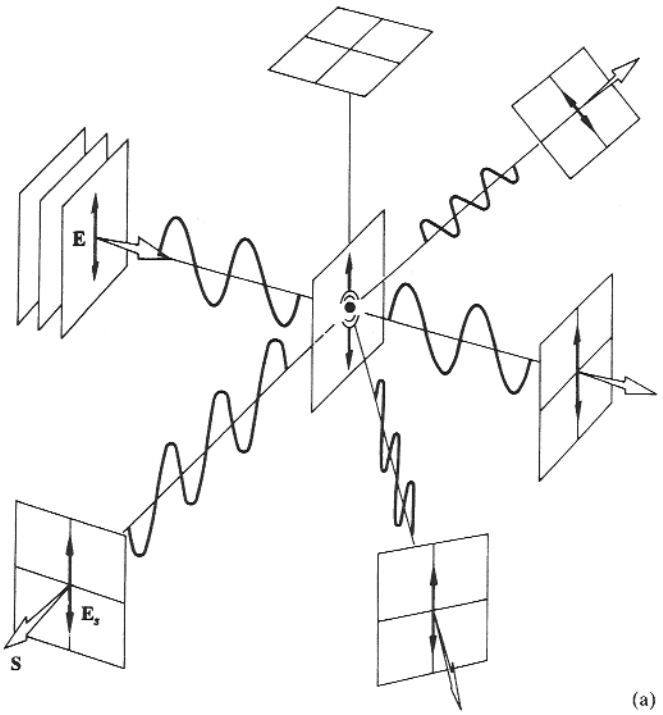


FIGURA 8.35*a* Esparcimiento de luz polarizada por una molécula.

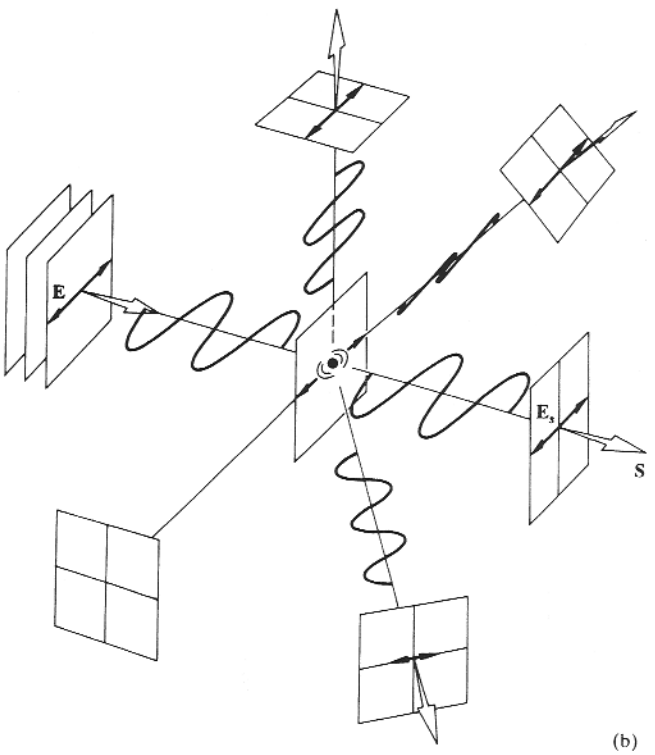


FIGURA 8.35*b*

se puede ilustrar colocando un trozo de papel encerado entre polaroides cruzados (figura 8.38). Debido a que la luz sufre una gran cantidad de esparcimiento y reflexiones múltiples en el papel encerado, un oscilador dado puede «ver» la superposición de muchos campos **E** básicamente sin relación. La emisión resultante está casi completamente despolarizada.

Como experimento final, pongamos unas cuantas gotas de leche en un vaso de agua e iluminémoslo (perpendicularmente a su eje) usando una linterna luminosa. La solución aparecerá blanco-azulada en la luz esparcida y naranja en la luz directa, indicando así que el mecanismo operativo es el esparcimiento de Rayleigh. También la luz esparcida se polarizará parcialmente, como se adelantó.

Recurriendo prácticamente a las mismas ideas, Charles Glover Barkla (1877-1944) estableció en 1906 la naturaleza ondulatoria transversal de la radiación de rayos X demostrando que se podía polarizar en ciertas direcciones como resultado del esparcimiento en la materia.

8.6 Polarización por reflexión

Una de las fuentes más comunes de luz polarizada es el ubicuo proceso de la reflexión en medios dieléctricos. El brillo esparcido sobre el cristal de ventana, una hoja de papel o la cabeza de un calvo, el lustre en la superficie de un teléfono, una bola de billar o el forro de un libro, todos están general parcialmente polarizados.

El primero en estudiar este efecto fue Étienne Malus en 1808. Puesto que la Academia de París había ofrecido un premio por una teoría matemática de doble refracción, Malus se puso a estudiar el problema. Una tarde, estaba parado en la ventana de su casa en la Rue d'Enfer examinando un cristal de calcita. El Sol se estaba poniendo reflejando su imagen hacia él desde las ventanas del palacio de Luxemburgo, no muy lejos. Levantó el cristal sujetándolo con la mano y miró la reflexión del Sol a través del cristal. Se sorprendió al ver que una de las imágenes dobles desaparecía conforme iba girando

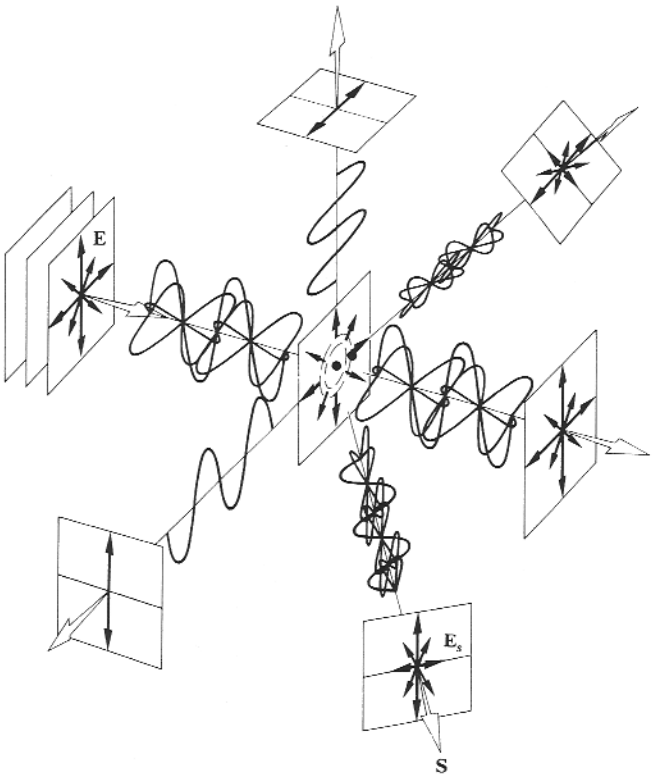


FIGURA 8.36 Esparcimiento de luz no polarizada por una molécula.

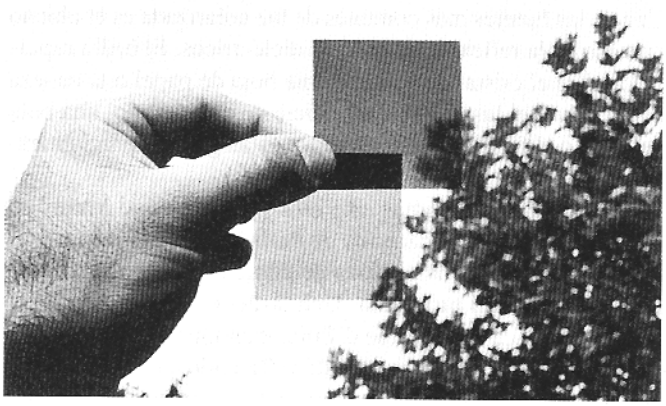


FIGURA 8.37 Un par de polarizadores cruzados. El polaroide superior es notablemente más oscuro que el inferior, indicando así la polarización parcial de la luz del cielo. (Foto de E.H.)

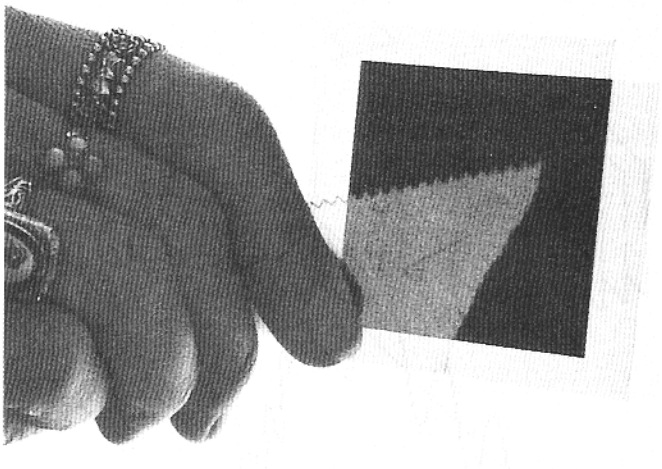


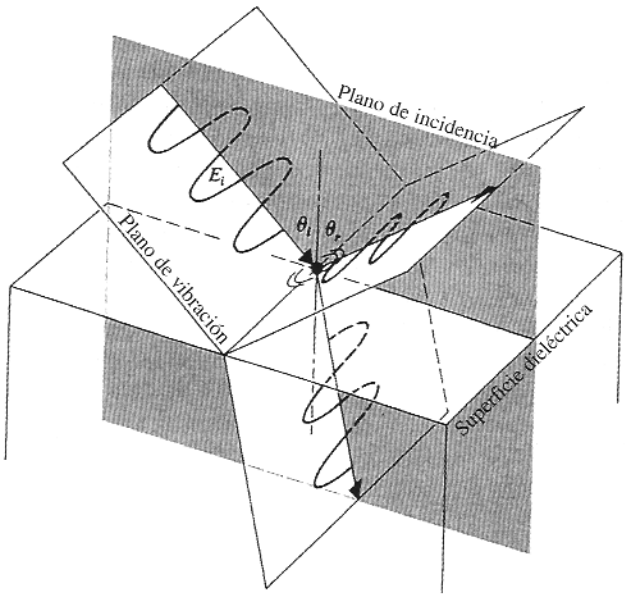
FIGURA 8.38 Un pedazo de papel encerado entre polarizadores cruzados. (Foto de E.H.)

la calcita. Después de que se pusiera el Sol, siguió comprobando sus observaciones durante la noche, usando la luz de una vela reflejada en la superficie de agua y cristal [12]. El significado de la birrefringencia y la naturaleza real de la luz polarizada se estaba haciendo claro por primera vez. En aquellos tiempos no existía ninguna explicación satisfactoria de la polarización dentro del contexto de la teoría ondulatoria. Durante los trece años que siguieron, el trabajo de mucha gente, principalmente Thomas Young y Augustin Fresnel, finalmente dio como resultado la representación de la luz como algún tipo de vibración transversal. (Recordemos que todo esto ocurrió aproximadamente cuarenta años antes de la teoría electromagnética de la luz.)

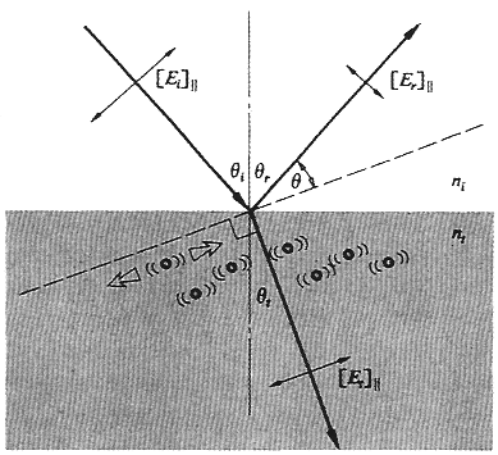
El modelo de oscilador electrónico proporciona un cuadro notablemente simple de lo que sucede cuando la luz se polariza en reflexión. Desafortunadamente, no es una descripción muy completa ya que no explica el comportamiento de materiales magnéticos no conductores [13]. No obstante, consideremos una onda plana incidente linealmente polarizada de tal

[12] Hagamos un intento con la llama de una vela y un trozo de vidrio. Sostengamos el cristal con $\theta_p \approx 56°$ para obtener el efecto más pronunciado. Cerca de la incidencia rasante ambas imágenes serán brillantes y ninguna de las dos desaparecerá al girar el cristal. Malus aparentemente tuvo suerte al observar con un buen ángulo la ventana del palacio.

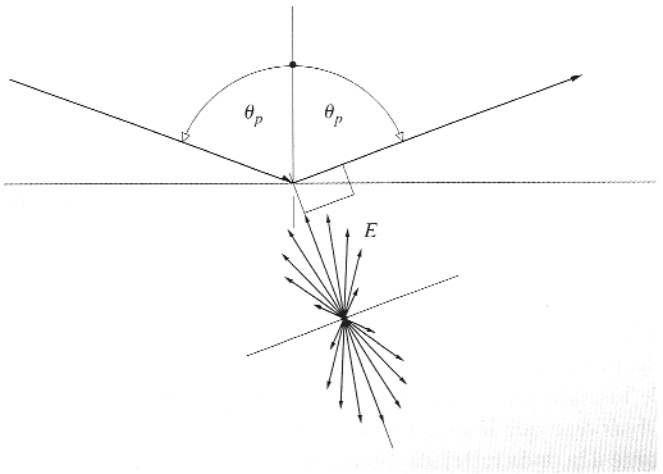
[13] W. T. Doyle, «Scattering Approach to Fresnel's Equations and Brewster's Law», *Am. J. Phys.* **53,** 463 (1985).



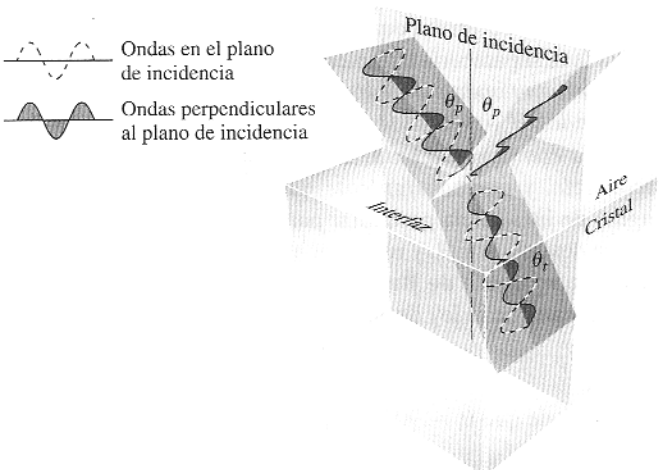
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 8.39 *(a)* Una onda reflejándose y refractándose en una interfaz. *(b)* Osciladores electrónicos y Ley de Brewster. (c) La distribución de radiación dipolar. *(d)* Polarización de la luz al reflejarse en un dieléctrico como vidrio, agua o plástico. En θ_p, el haz reflejado es un estado $\mathcal{P}$ perpendicular al plano de incidencia. El haz transmitido es fuerte en la luz con estado $\mathcal{P}$ paralelo al plano de incidencia y débil en la luz con estado $\mathcal{P}$ perpendicular al plano de incidencia —está parcialmente polarizado.

forma que su campo **E** sea perpendicular al plano de incidencia (figura 8.39). La onda se refracta en la interfaz entrando con un ángulo de transmisión θ_t. Su campo eléctrico impulsa a los electrones enlazados, en este caso normalmente al plano de incidencia, y ellos a su vez reradian. Una parte de esa energía reemitida aparece bajo forma de onda reflejada. Entonces, debe quedar claro de la geometría y de la distribución de radiación del dipolo que tanto las ondas reflejadas como las refractadas también tienen que hallarse en un estado $\mathscr{P}$ normal al plano de incidencia [14]. Por el contrario, si el campo **E** incidente se halla en el plano de incidencia los osciladores electrónicos cerca de la superficie vibrarán bajo la influencia de la onda refractada como se muestra en la figura 8.39*b*. Obsérvese que le está sucediendo una cosa bastante interesante a la onda reflejada. Su densidad de flujo es ahora relativamente baja, porque la dirección del rayo reflejado forma un ángulo θ pequeño con el eje del dipolo. Si pudiéramos hacer que $\theta = 0$ ó, de forma equivalente, $\theta_r + \theta_t = 90°$, la onda reflejada desaparecería completamente. *Bajo esas circunstancias, para una onda incidente no polarizada conformada por dos estados $\mathscr{P}$ ortogonales incoherentes, se reflejará solamente la componente polarizada normalmente al plano de incidencia, y por consiguiente paralela a la superficie.* El ángulo de incidencia particular para el que ocurre esta situación se designa por θ_p y recibe el nombre de **ángulo de polarización** *o* **ángulo de Brewster**, donde $\theta_p + \theta_t = 90°$. Por consiguiente, de la ley de Snell

$$n_i \operatorname{sen} \theta_p = n_t \operatorname{sen} \theta_t$$

y el hecho de que $\theta_t = 90° - \theta_p$, se obtiene que

$$n_i \operatorname{sen} \theta_p = n_t \cos \theta_p$$

y

$$\tan \theta_p = n_t/n_i \tag{8.25}$$

Esto se conoce como **ley de Brewster** en honor a quien la descubrió empíricamente, Sir David Brewster (1781-1868), profesor de física en la Universidad de St. Andrews y, por supuesto, inventor del caleidoscopio. Cuando el haz incidente está en aire $n_i = 1$ y si el medio transmisor es el vidrio en cuyo caso $n_t \approx 1{,}5$, el ángulo de polarización es $\approx 56°$. De manera parecida, si un haz no polarizado incide en la superficie de un estanque ($n_t \approx 1{,}33$ para H_2O) con un ángulo de 53°, el haz reflejado estará completamente polarizado con su campo **E** perpendicular al plano de incidencia, o si se quiere, paralelo a la superficie del agua (figura 8.40). Esto sugiere entonces una forma bastante fácil de localizar el eje de transmisión de un polarizador no marcado: solamente se necesita un trozo de vidrio o un estanque.

El problema que se encuentra inmediatamente al utilizar este fenómeno para crear un polarizador eficaz radica en el hecho de que el haz reflejado, aunque esté totalmente polarizado, es débil, mientras que el haz transmitido, a pesar de su potencia, está tan sólo parcialmente polarizado. Un esquema, ilustrado en la figura 8.41, se conoce a menudo como **polarizador de pila de láminas** y fue inventado por Dominique F. J. Arago en el año 1812. Se pueden fabricar dispositivos de este tipo con láminas de cristal en el visible, con láminas de cloruro de plata en el infrarrojo y con cuarzo y vycor en el ultravioleta. Es muy sencillo crear una disposición rudimentaria de este estilo con aproximadamente una docena de portaobjetos de microscopio. (De los bellos colores que pueden aparecer cuando los portaobjetos están en contacto se hablará en el siguiente capítulo.)

8.6.1 Una aplicación de las ecuaciones de Fresnel

En el capítulo 4 obtuvimos una serie de fórmulas denominadas ecuaciones de Fresnel que describen los efectos de una onda electromagnética plana al caer sobre la interfaz entre dos medios dieléctricos diferentes. Estas ecuaciones relacionan las amplitudes de los campos reflejado y transmitido con la amplitud incidente a través de los ángulos de incidencia θ_i y de transmisión θ_t. Para la luz lineal cuyo campo **E** es paralelo al plano de incidencia, definimos el *coeficiente de reflexión y amplitud* como $r_\parallel \equiv [E_{0r}/E_{0i}]_\parallel$, es decir, el cociente de las *amplitudes* de campo eléctrico reflejado e incidente. De manera parecida, cuando el campo eléctrico es normal al plano de incidencia, tenemos $r_\perp \equiv [E_{0r}/E_{0i}]_\perp$. El cociente de irradiancia correspondiente (los haces incidentes y reflejado tienen la misma sección transversal) se denomina *reflectancia* y, ya que la irradiancia es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo,

$$R_\parallel = r_\parallel^2 = [E_{0r}/E_{0i}]_\parallel^2 \quad \text{y} \quad R_\perp = r_\perp^2 = [E_{0r}/E_{0i}]_\perp^2$$

[14] El ángulo de reflexión está determinado por la serie de esparcimiento, como se relata en la sección 10.2.7. Los trenes de onda esparcidos se combinan, por lo general, constructivamente en una sola dirección emitiendo un rayo reflejado con un ángulo igual al del rayo incidente.

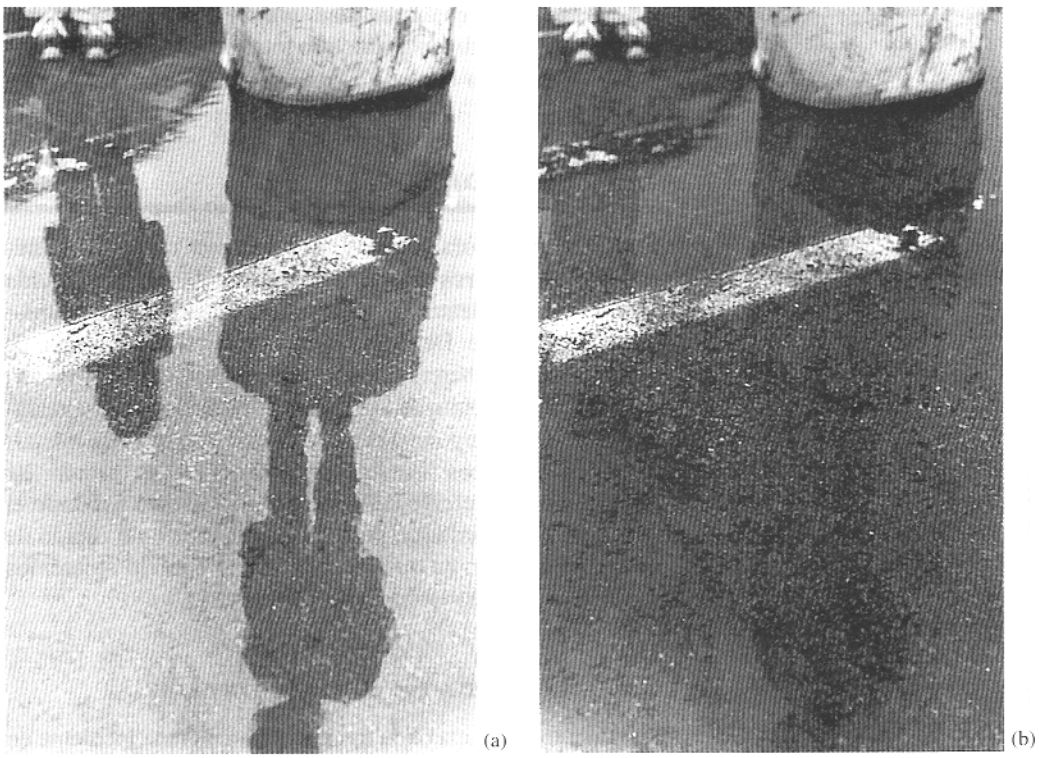


FIGURA 8.40 La luz que se refleja en un charco está parcialmente polarizada. *(a)* Al mirarla con un filtro Polaroide cuyo eje de transmisión es paralelo al suelo, el reflejo se deja pasar y resulta visible. *(b)* Cuando el eje de transmisión del Polaroide es perpendicular a la superficie del agua, la mayoría del reflejo desaparece. (Foto cedida por Martin Seymour.)

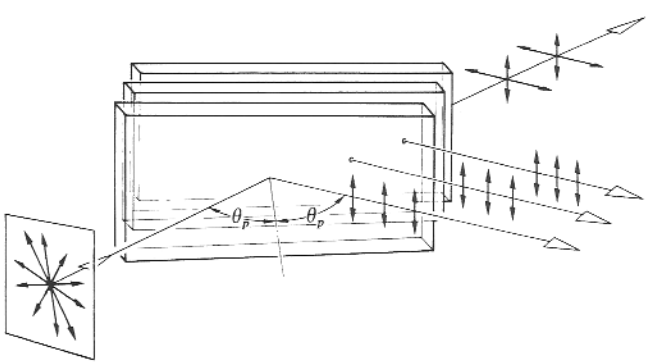


FIGURA 8.41 El polarizador de pila de láminas.

Elevando al cuadrado las ecuaciones de Fresnel obtenemos

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{8.26}$$

y

$$R_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{8.27}$$

Obsérvese que mientras $R_{\perp}$ nunca puede ser cero, $R_{\parallel}$ es en efecto cero cuando el denominador es infinito, es decir, cuando $\theta_i + \theta_t = 90°$. La reflectancia, para la luz lineal cuyo es **E** es paralelo al plano de incidencia, desaparece; $E_{r\parallel} = 0$ y el haz se transmite completamente. Ésta es la esencia de la ley de Brewster.

Si la luz que llega no está polarizada, podemos representarla por los dos estados $\mathcal{P}$ de igual amplitud, incoherentes y ortogonales que conocemos. A propósito, el hecho de que sean iguales en amplitud significa que la cantidad de energía en uno de estos dos estados de polarización es la misma que en el otro (es decir, $I_{i\parallel} = I_{i\perp} = I_i/2$), lo cual es muy razonable. Entonces

$$I_{r\parallel} = I_{r\parallel} I_i / 2 I_{i\parallel} = R_{\parallel} I_i / 2$$

y de la misma manera $I_{r\perp} = R_{\perp} I_i/2$. La reflectancia en la luz natural, $R = I_r/I_i$ está dada por lo tanto por

$$R = \frac{I_{r\parallel} + I_{r\perp}}{I_i} = \tfrac{1}{2}(R_{\parallel} + R_{\perp}) \tag{8.28}$$

La figura 8.42 representa las ecuaciones (8.26), (8.27) y (8.28) para el caso particular en que $n_i = 1$ y $n_t = 1{,}5$. La curva del

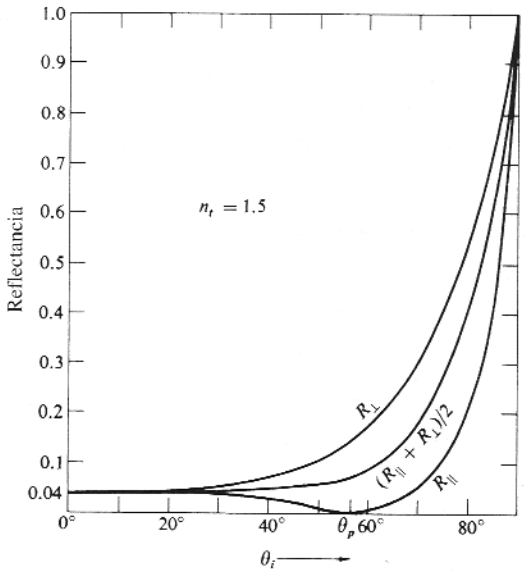


FIGURA 8.42 Reflectancia frente a ángulos de incidencia.

centro, que corresponde a luz natural incidente, muestra que solamente un 7,5% de la luz incidente se refleja cuando $\theta_i = \theta_p$. Es evidente, entonces, que la luz transmitida está parcialmente polarizada. Cuando $\theta_i \neq \theta_p$ tanto las ondas transmitidas como las reflejadas están parcialmente polarizadas.

A menudo se desea utilizar el concepto del **grado de polarización** V, definido como

$$V = \frac{I_p}{I_p + I_n} \tag{8.29}$$

donde I_p e I_n son las densidades de flujo constitutivas de la luz polarizada y «no polarizada» o luz natural. Por ejemplo, si $I_p = 4\ \mathrm{W/m^2}$ y $I_n = 6\mathrm{W/\ m^2}$, entonces $V = 40\ \%$ y el haz está parcialmente polarizado. Con luz «no polarizada» $I_p = 0$ y obviamente V = 0, mientras que en el extremo opuesto si $I_n = 0$, $V = 1$ y la luz está completamente polarizada; entonces $0 \leq V \leq 1$. A menudo se analiza luz cuasimonocromática lineal parcialmente polarizada. En ese caso, si giramos un analizador en el haz habrá una orientación en la cual la irradiancia transmitida es máxima ($I_{\text{máx}}$) y, perpendicular a ésta, una dirección donde la irradiancia es mínima ($I_{\text{mín}}$). Lógicamente, $I_p = I_{\text{máx}} - I_{\text{min}}$ y por lo tanto

$$V = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{min}}} \tag{8.30}$$

Obsérvese que V es en realidad una propiedad del rayo que puede estar parcialmente o incluso totalmente polarizada antes de hallar cualquier clase de polarizador.

8.7 Retardadores

Consideremos ahora una clase de elementos ópticos denominados **retardadores** que sirven para cambiar la polarización de una onda incidente. En principio, la función de un retardador es muy simple. De alguna forma, se retrasa en fase uno de los dos estados coherentes constitutivos respecto al otro en una cantidad predeterminada. Al salir del retardador, la fase relativa de las dos componentes es diferente a lo que era inicialmente y entonces es diferente también el estado de polarización. En efecto, una vez que se haya desarrollado el concepto del retardador, podremos convertir todo estado de polarización dado en cualquier otro y al hacerlo crearemos también polarizadores elípticos y circulares.

8.7.1 Láminas de onda y rombos

Recordemos que una onda monocromática plana incidente en un cristal uniáxico tal como la calcita, generalmente se divide en dos haces salientes, uno ordinario y el otro extraordinario. Por el contrario, podemos cortar y pulir un cristal de calcita de tal forma que su eje óptico sea normal tanto a la superficie frontal como a la posterior (figura 8.43). El campo **E** de una onda plana incidente normal puede ser perpendicular tan sólo

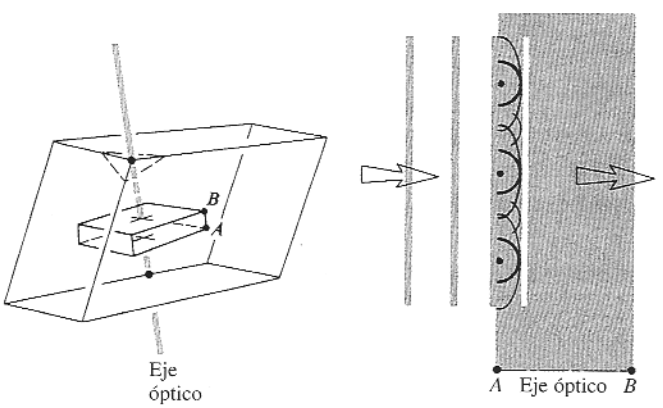


FIGURA 8.43 Una lámina de calcita cortada perpendicularmente al eje óptico.

al eje óptico. Las ondas secundarias esféricas y elipsoidales serán tangentes unas a otras en la dirección del eje óptico. Las ondas *o* y *e*, que son las envolventes de estas ondas, coincidirán y una onda plana única pasará a través del cristal sin desviarse; no hay desfase relativo ni dobles imágenes [15].

Ahora supongamos que la dirección del eje óptico sea paralela a la superficie frontal y a las posteriores como se muestra en la figura 8.44. Si el campo **E** de una onda plana monocromática incidente tiene componentes paralelas y perpendiculares al eje óptico, dos ondas planas separadas se propagarán a través del cristal. Ya que $v_{\parallel} > v_{\perp}$, $n_o > n_e$, y la onda *e* se desplazará dentro del espécimen más rápidamente que la onda *o*. Después de atravesar una lámina de espesor d la onda electromagnética resultante será la superposición de las ondas *e* y *o*, que ahora tienen una diferencia de fase relativa $\Delta\varphi$. Recordemos que se trata de ondas armónicas de la misma frecuencia cuyos campos **E** son ortogonales. Entonces, la diferencia relativa de la longitud de camino óptico está dada por

$$\Lambda = d(|n_o - n_e|) \tag{8.31}$$

y ya que $\Delta\varphi = k_0\Lambda$,

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(|n_o - n_e|) \tag{8.32}$$

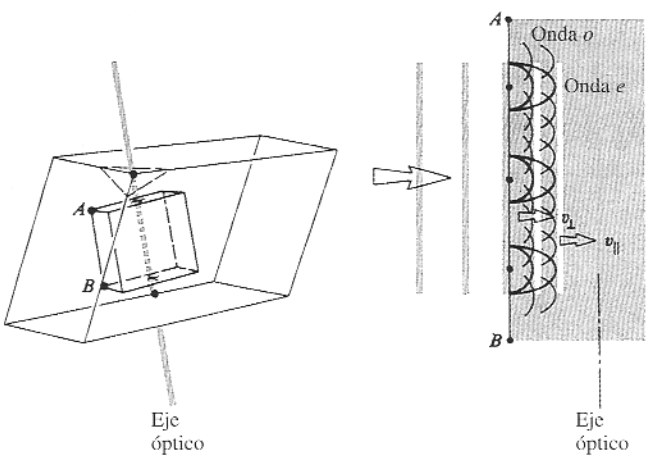


FIGURA 8.44 Una lámina de calcita cortada paralelamente al eje óptico.

[15] Si se dispone de un rombo de calcita, encuéntrese la esquina roma orientándose el cristal hasta que se esté mirando a lo largo de la dirección del eje óptico a través de una de las caras. Las dos imágenes convergerán hasta que se superpongan completamente.

donde λ_0 es, como siempre, la longitud de onda en el vacío. (La forma que contiene el valor absoluto de la diferencia de índice es la expresión más general). El estado de polarización de la luz emergente depende evidentemente de las amplitudes de las componentes ortogonales del campo incidente y por supuesto de $\Delta\varphi$.

La lámina de onda completa

Si $\Delta\varphi$ es igual a 2π, el *retraso relativo* es una longitud de onda; las ondas *e* y *o* están de nuevo en fase y no se detecta ningún efecto en la polarización de un haz monocromático incidente. Cuando el *retraso relativo* $\Delta\varphi$, denominado también *retardancia*, es de 360° el sistema se denomina ***lámina de onda completa***. (Esto no significa que $d = \lambda$.) Por lo general, la cantidad $|n_o - n_e|$ de la ecuación (8.32) cambia poco sobre el rango óptico, de tal manera que $\Delta\varphi$ varía efectivamente como $1/\lambda_0$. Evidentemente, una lámina de onda completa sólo puede funcionar según la manera ilustrada para una longitud de onda particular y los retardadores de este tipo entonces se denominan *cromáticos*. Si dicho dispositivo se coloca según una orientación arbitraria entre polarizadores lineales cruzados, toda la luz que entre en él (en este caso es luz blanca), será lineal. Solamente la longitud de onda que satisface la ecuación (8.32) pasará a través del retardador sin ser afectada, siendo sucesivamente absorbida por el analizador. Todas las demás longitudes de onda sufrirán alguna retardancia, emergiendo por lo tanto de la lámina de onda con varias formas de luz elíptica. Parte de esta luz avanzará en el analizador de donde saldrá finalmente con el color complementario del que fue extinguido. Es un error común suponer que una lámina de onda completa se comporta como si fuera isótropa a todas las frecuencias; obviamente no lo es.

Recordemos que en la calcita la onda cuyas vibraciones del campo **E** son paralelas al eje óptico viaja más rápido, es decir, $v_{\parallel} > v_{\perp}$. Por consiguiente, la dirección del eje óptico en un retardador uniáxico *negativo* se denomina a menudo **eje rápido** mientras que la dirección perpendicular a él es el **eje lento**. Para cristales uniáxicos *positivos* como el cuarzo, estos ejes principales están invertidos, correspondiendo ahora el eje lento al eje óptico.

La lámina de media onda

Una lámina retardadora que introduce una diferencia de fase relativa de π radianes o 180° entre las ondas *o* y *e* se denomina

lámina de media onda. Supongamos que el plano de vibración de un haz incidente de luz lineal forme un ángulo arbitrario θ con el eje rápido como se muestra en la figura 8.45. En un material negativo la onda *e* tendrá una velocidad mayor (la misma ν) y una longitud de onda más grande que la onda *o*. Al salir las ondas de la lámina, se producirá un desfase relativo de $\lambda_0/2$ (es decir, $2\pi/2$ radianes) con el efecto de que **E** habrá girado de un ángulo 2θ. Volviendo a la figura 8.7 debe ser evidente que una lámina de media onda soltará luz elíptica de forma parecida. Asimismo, invertirá el sentido de la luz elíptica o circular, pasándola de derechas a izquierdas o viceversa.

Conforme las ondas *e* y *o* progresan a través de una lámina retardadora, su diferencia de fase relativa $\Delta\varphi$ aumenta y, por consiguiente, el estado de polarización de la onda cambia gradualmente de un punto de la lámina al siguiente. La figura 8.7 se puede considerar como un muestreo de unos cuantos de estos estados en un instante de tiempo tomado en puntos diferentes. Evidentemente si el espesor del material es tal que

$$d(|n_o - n_e|) = (2m + 1)\lambda_0/2$$

donde $m = 0, 1, 2, \ldots$, funcionará como una lámina de media onda ($\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi$, etc.).

Aunque su comportamiento sea sencillo de visualizar, la calcita en realidad no se usa con mucha frecuencia para crear láminas retardadoras. Es muy frágil y difícil de manejar en láminas muy finas pero, más que eso, su birrefringencia, la diferencia entre n_e y n_o, es demasiado grande para ser conveniente. Por otro lado, el cuarzo cuya birrefringencia es mucho más pequeña se usa frecuentemente pero, al no tener planos de exfoliación naturales, deberá cortarse, esmerilarse y pulirse aumentando considerablemente su coste. Más a menudo se utiliza el cristal biáxico mica. Hay varias formas de este mineral que son muy útiles por ejemplo la fluoflogopita, biotita o la moscovita. La variedad que se presenta con más frecuencia es la moscovita marrón pálido que se exfolia fácilmente en secciones fuertes, flexibles y extremadamente delgadas. Además, sus dos ejes principales son casi exactamente paralelos a los planos de exfoliación. A lo largo de esos ejes los índices son alrededor de 1,599 y 1,594 para luz de sodio y aunque estos números varían ligeramente de una muestra a la siguiente, su

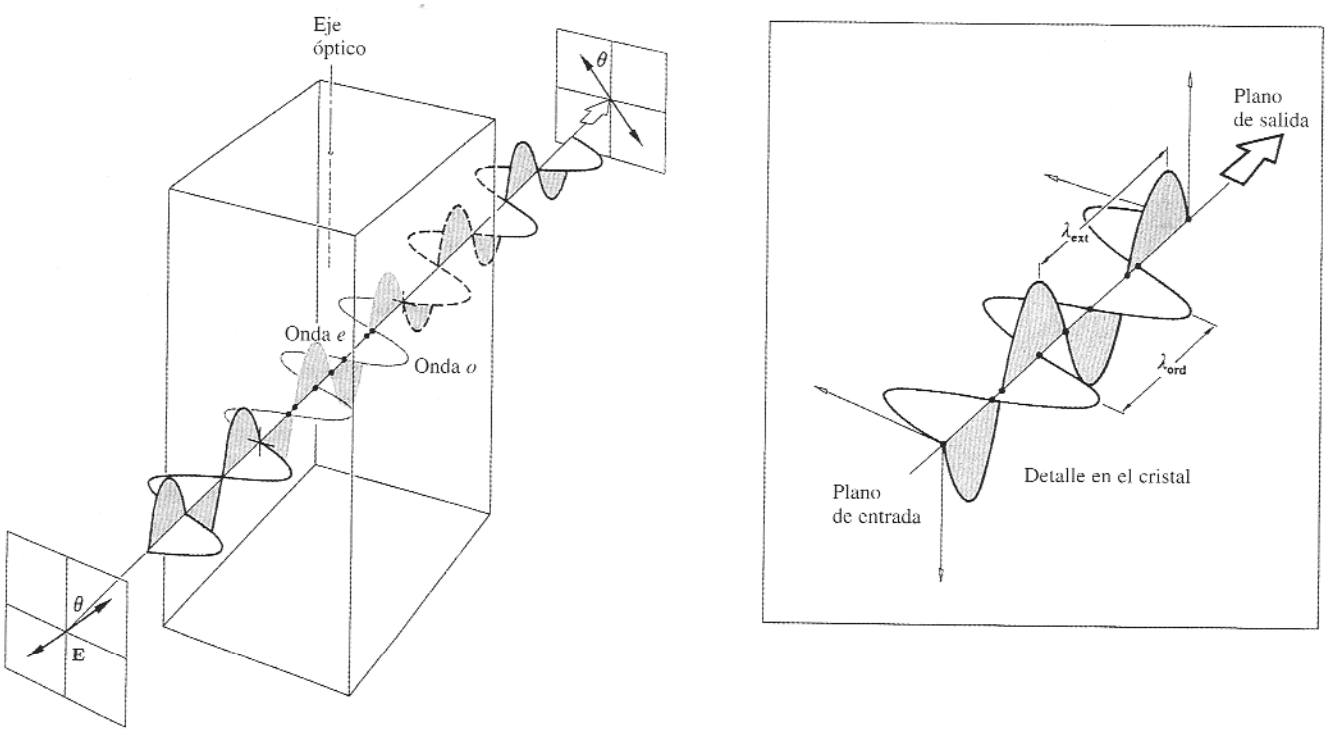


FIGURA 8.45 Una lámina de media onda.

diferencia es bastante constante. El espesor mínimo de una lámina de media onda de mica es de unas 60 micras. Para la creación de láminas de onda, se utilizan a menudo también el cuarzo cristalino, el fluoruro de magnesio de monocristal (para el rango IR desde 3.000 nm hasta aproximadamente 6.000 nm) y el sulfuro de cadmio (para el rango de IR desde 6.000 nm hasta aproximadamente 12.000 nm).

Se han realizado también retardadores de hojas de alcohol de polivinilo que se han estirado pare alinear sus largas cadenas de moléculas orgánicas. Debido a su evidente anisotropía, los electrones en el material no experimentan la misma fuerza de enlace a lo largo y perpendicularmente a la dirección de estas moléculas. Por consiguiente, las sustancias de este tipo son permanentemente birrefringentes, aunque no sean cristalinas.

Se puede realizar una lámina de media onda muy bonita simplemente pegando una tira de celofán común brillante en la superficie del portaobjetos de un microscopio. (No todas las clases de celofán resultan ser adecuadas —el mejor es la «cinta transparente» de LePage). El eje rápido, es decir, la dirección de vibración de la más rápida de las dos ondas corresponde a la dirección transversal a través del ancho de la cinta mientras que el eje lento se halla a lo largo de su longitud. Durante su fabricación, el celofán (que se deriva de la regeneración de la celulosa extraída del algodón o de la pasta de madera) se produce en hojas y en el proceso sus moléculas se alinean dotándolo de birrefringencia. Si ponemos la lámina de media onda entre polarizadores lineales cruzados, ésta no mostrará ningún efecto cuando sus ejes principales coincidan con los de los polarizadores. Sin embargo, si se coloca a 45° con respecto al polarizador, el campo **E** que sale de la cinta se girará de 90° y entonces será paralelo al eje de transmisión del analizador. La luz pasará a través de la región cubierta por la cinta, como si hubiera un agujero en el fondo oscuro de los polaroides cruzados (figura 8.46). Un trozo de envoltorio de celofán generalmente también funcionará como una lámina de media onda. Inténtese determinar la orientación de cada uno de sus ejes principales usando el retardador de cinta y los polaroides cruzados. (Obsérvese los finos surcos paralelos en la hoja de celofán.)

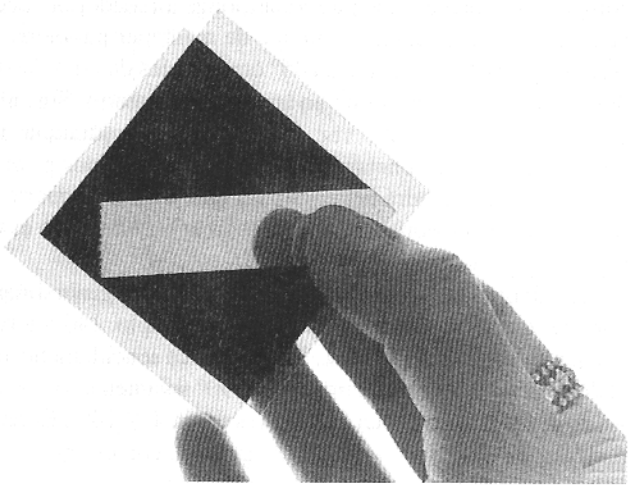


FIGURA 8.46 Una mano sujetando un pedazo de cinta adhesiva Scotch pegado a un portaobjetos de microscopio entre dos polaroides cruzados. (Foto de E.H.)

La lámina de cuarto de onda

La **lámina de cuarto de onda** es un elemento óptico que introduce un desfase relativo de $\Delta\varphi = \pi/2$ entre las componentes ortogonales o y e de una onda. De la figura 8.7 se deduce una vez más que un desfase de 90° convertirá la luz lineal en elíptica y viceversa. Debe ser evidente que la luz lineal incidente paralela a cualquiera de los ejes principales no será afectada por ningún tipo de lámina retardadora. No se puede tener una diferencia de fase *relativa* sin tener dos componentes. Con luz *natural* incidente, los dos estados $\mathscr{P}$ constitutivos son incoherentes, es decir, su diferencia relativa de fase cambia al azar y rápidamente. La introducción de un desfase adicional constante por cualquier forma de retardador se traducirá en otra diferencia de fase al azar sin efectos apreciables. Cuando la luz lineal a 45° con cualquiera de sus ejes principales es incidente en una lámina de cuarto de onda, sus componentes o y e tienen amplitudes iguales. Bajo estas circunstancias especiales, un desfase de 90° convierte la onda en luz circular. De manera parecida, un haz circular incidente emergerá linealmente polarizado.

Por lo general, las láminas de cuarto de onda se realizan de cuarzo, mica o plástico polimérico orgánico. En todo caso, el espesor del material birrefringente debe satisfacer la expresión

$$d(|n_o - n_e|) = (4m + 1)\lambda_0/4$$

Podemos crear una lámina rudimentaria de cuarto de onda recurriendo al plástico casero que se utiliza para envolver alimentos, ese material elástico fino que se vende en rollos. Al igual que el celofán, tiene surcos a lo largo de su longitud que

coincide con un eje principal. Superponga alrededor de media docena de capas, teniendo cuidado de mantener paralelos los surcos. El plástico se coloca a 45° con los ejes de un polarizador y se examina a través de un analizador rotatorio. Siga añadiendo una capa cada vez hasta que la irradiancia sea aproximadamente constante conforme el analizador gira; en ese momento se tendrá luz circular y una lámina de cuarto de onda. Pasar de la teoría a la práctica con la luz blanca no es tan sencillo, pero vale la pena intentarlo.

Las láminas de onda comerciales se designan generalmente por su ***retardo lineal*** que podría ser, por ejemplo, 140 nm para una lámina de cuarto de onda. Esto significa sencillamente que el dispositivo tiene una retardancia de 90° solamente para la luz verde de longitud de onda 560 nm (es decir, 4×140). El retardo lineal no se proporciona, por lo general, con esa precisión; algo como 140 ± 20 nm es más realista. Se puede aumentar o disminuir el valor específico del retardo de una lámina de onda inclinándola un poco. Si la lámina se gira alrededor de su eje rápido, su retardo aumentará mientras que una rotación alrededor del eje lento tendrá el efecto opuesto. De esta manera, una lámina de onda puede ajustarse a una frecuencia específica alrededor de su valor nominal.

El rombo de Fresnel

Vimos en el capítulo 4 que el proceso de reflexión total interna introducía una diferencia relativa de fase entre las dos componentes ortogonales del campo. Las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia se desplazaron en fase una con respecto a otra. En el cristal ($n = 1{,}51$) un desfase de 45° acompaña a la reflexión interna con un ángulo de incidencia particular de 54,6° (figura 4.43*e*). El rombo de Fresnel que se muestra en la figura 8.47 utiliza este efecto haciendo que el haz se refleje internamente dos veces, produciendo así un desfase relativo de 90° de sus componentes. Si la onda plana incidente está linealmente polarizada a 45° con el plano de incidencia, las componentes del campo $[E_i]_\parallel$ y $[E_i]_\perp$ inicialmente serán iguales. Después de la primera reflexión, la onda en el interior del cristal estará elípticamente polarizada. Después de la segunda reflexión será circular. Como la retardancia es casi independiente de la frecuencia en un amplio rango, el rombo es esencialmente un retardador *acromático* de 90°. El rombo de Mooney ($n = 1{,}65$) que se muestra en la figura 8.48 es similar en principio, si bien sus características operacionales difieren en algunos aspectos.

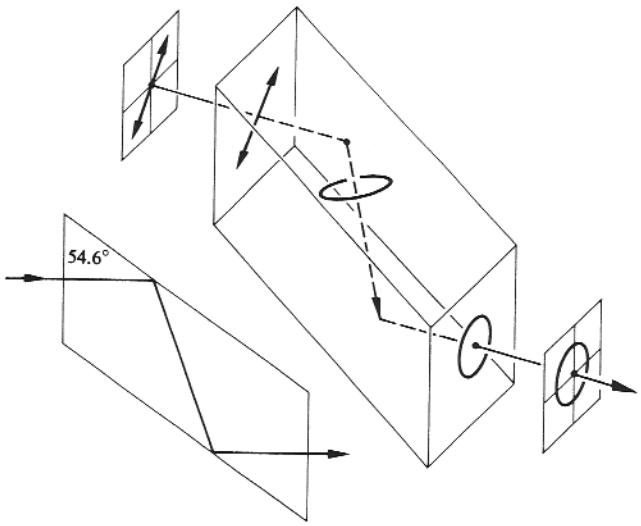


FIGURA 8.47 El rombo de Fresnel.

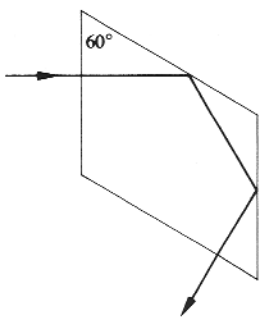


FIGURA 8.48 El rombo de Mooney.

8.7.2 Compensadores

*Un **compensador** es un dispositivo óptico que puede imprimir una retardancia controlable en una onda.* A diferencia de una lámina de onda donde $\Delta\varphi$ es fija, la diferencia relativa de fase que aparece en un compensador puede variar continuamente. Entre los numerosos tipos de compensadores diferentes, solamente consideraremos dos de los que se usan más frecuentemente. El compensador de Babinet, que se muestra en la figura 8.49, consta de dos cuñas independientes de calcita o, más comúnmente, de cuarzo, cuyos ejes ópticos están indicados por las líneas y puntos en la figura. Un rayo que atraviesa verticalmente el dispositivo en un punto arbitrario, atravesará un espe-

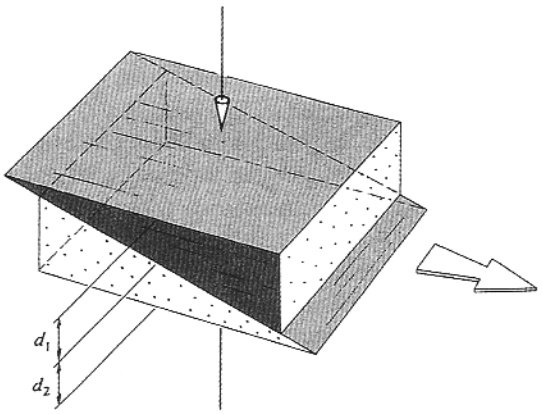


FIGURA 8.49 El compensador de Babinet.

sor d_1 en la cuña superior y d_2 en la inferior. La diferencia relativa de fase impartida a la onda por el primer cristal es $2\pi d_1(|n_o - n_e|)/\lambda_0$ mientras que la del segundo cristal es $-2\pi d_2(|n_o - n_e|)/\lambda_0$. Como en el prisma de Wollaston, al que se parece mucho este sistema pero que tiene ángulos más grandes y es mucho más grueso, los rayos *o* y *e* en la cuña superior se transforman en los rayos *e* y *o*, respectivamente en la cuña inferior.

El compensador es delgado (el ángulo de la cuña es típicamente 2,5°), siendo por consiguiente la separación de los rayos despreciable. La diferencia total de fase es entonces

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(d_1 - d_2)(|n_o - n_e|) \qquad (8.33)$$

Si el compensador se hace de calcita, la onda *e* se adelanta a la onda *o* en la cuña superior, y por consiguiente si $d_1 > d_2$, $\Delta\varphi$ corresponde al ángulo total por el que la componente *e* se adelanta a la componente *o*. Lo contrario es cierto para un compensador de cuarzo, es decir $d_1 > d_2$, $\Delta\varphi$ es el ángulo con el que la onda *o* se adelanta a la onda *e*. En el centro, donde $d_1 = d_2$, el efecto de una cuña queda anulado por la otra y $\Delta\varphi = 0$ para todas las longitudes de onda. El retraso varía de punto a punto en la superficie, siendo constante en regiones estrechas en el ancho del compensador a lo largo del cual los espesores de las cuñas son constantes. Si la luz entra a través de una rendija paralela a una de estas regiones y si entonces movemos cualquier cuña horizontalmente con un tornillo micrométrico, podemos hacer que emerja cualquier $\Delta\varphi$ deseada.

Cuando el Babinet se coloca a 45° entre polaroides cruzados, aparecerá una serie de franjas de extinción oscuras, paralelas e igualmente espaciadas en todo el ancho del compensador. Éstas marcan las posiciones donde el dispositivo actúa como si fuera una lámina de onda completa. Con luz blanca, las franjas estarán coloreadas con la excepción de la banda central negra ($\Delta\varphi = 0$). La retardancia de una lámina desconocida se puede encontrar colocándola en el compensador y examinando el desfase de las franjas que produce.

El Babinet se puede modificar a fin de que produzca un retardo uniforme en su superficie simplemente girando la cuña superior de 180° en la vertical de tal manera que su margen fino descanse en el de la cuña inferior. Esta configuración, sin embargo, desviará ligeramente al haz. Otra variación del Babinet que tiene la ventaja de producir una retardancia uniforme en su superficie sin desviación del haz, es el *compensador de Soleil* que se muestra en la figura 8.50. Generalmente hecho de cuarzo (aunque en el infrarrojo se usen MgF_2 y CdS), consta de dos cuñas y una lámina plano-paralela cuyos ejes ópticos están orientados como se indica. La cantidad d_1 corresponde al espesor total de ambas cuñas, que es constante para cualquier colocación del tornillo micrométrico posicionador.

8.8 Polarizadores circulares

Anteriormente, llegamos a la conclusión que la luz lineal cuyo campo **E** está a 45° con los ejes principales de una lámina de cuarto de onda, emergería de ella polarizada circularmente.

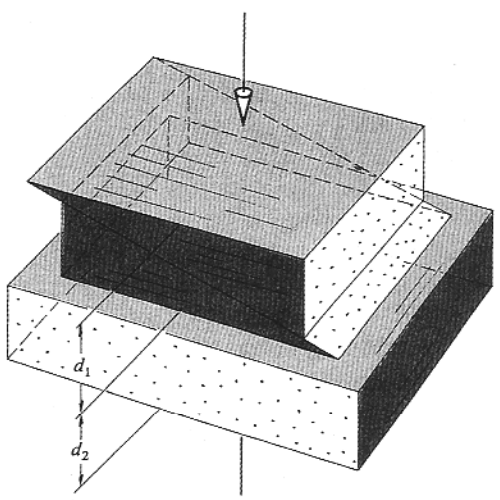


FIGURA 8.50 El compensador de Soleil.

Una combinación cualquiera en serie de un polarizador lineal oportunamente orientado y un retardador de 90° funcionará, por lo tanto, como un **polarizador circular**. Los dos elementos son del todo independientes y mientras que uno puede ser birrefringente, el otro podría ser del tipo de reflexión. El sentido de la luz circular emergente depende de si el eje de transmisión del polarizador lineal está a $+45°$ ó $-45°$ con el eje rápido del retardador. Cualquiera de los dos estados circulares, $\mathscr{L}$ o $\mathscr{R}$ puede generarse muy fácilmente. En efecto, si el polarizador lineal se sitúa entre dos retardadores, uno orientado a $+45°$ y el otro a $-45°$ la combinación será «ambidextra». En resumen, producirá un estado $\mathscr{R}$ para la luz que entre por un lado y un estado $\mathscr{L}$ cuando la entrada sea por el otro lado.

CP-HN es el nombre comercial de un polarizador circular de una pieza muy conocido. Se trata de una lámina de polaroide *HN* y de un retardador de 90° de alcohol de polivinilo estirado. El *lado de entrada* de tal sistema es evidentemente la cara del polarizador lineal. Si el haz es incidente en el *lado de salida* (es decir, en el retardador), pasará después por la hoja *H* pudiendo salir tan sólo con polarización lineal.

Un polarizador circular puede usarse como analizador para determinar el sentido de una onda que ya se sabe es circular. Para ver cómo lograrlo, imaginemos que tenemos los cuatro elementos marcados A, *B*, *C* y *D* en la figura 8.51. Los dos primeros, A y *B*, tomados juntos forman un polarizador circular como lo hacen *C* y *D*. El sentido preciso de estos polarizadores no es importante ahora, siempre que ambos tengan el mismo, lo cual equivale a decir que los ejes rápidos de los retardadores son paralelos. La luz lineal que sale de *A* experimenta en *B* un retardo de 90°, punto en el cual es entonces circular. Al pasar a través de *C* se añade otro retardo de 90°, resultando una vez más en una onda polarizada linealmente. En efecto, *B* y *C* forman conjuntamente una lámina de polarizador lineal que tan sólo hace girar la luz lineal de *A* en un ángulo especial de 2θ, que en este caso es de 90°. Ya que la onda lineal de *C* es paralela al eje de transmisión de D, pasa a través de él y sale del sistema.

En este simple proceso hemos probado algo muy sutil. Si los polarizadores circulares $A + B$ y $C + D$ son izquierdos, hemos demostrado que se transmitirá *luz circular a izquierdas que entra a un polarizador circular izquierdo por el lado de salida.* Asimismo, debería quedar evidente, por lo menos después de una pequeña reflexión, que la luz circular a derechas producirá un estado $\mathscr{P}$ perpendicular al eje de transmisión de *D* siendo así absorbida. Lo contrario también es cierto, es decir, *de las dos formas circulares, sólo la luz en un estado $\mathscr{R}$ pasará a través de un polarizador circular derecho al haber entrado por el lado de salida.*

8.9 Polarización de luz policromática

8.9.1 Ancho de banda y tiempo de coherencia de una onda policromática

Por su misma naturaleza la luz puramente monocromática, que no es por supuesto una realidad física, debe estar polarizada.

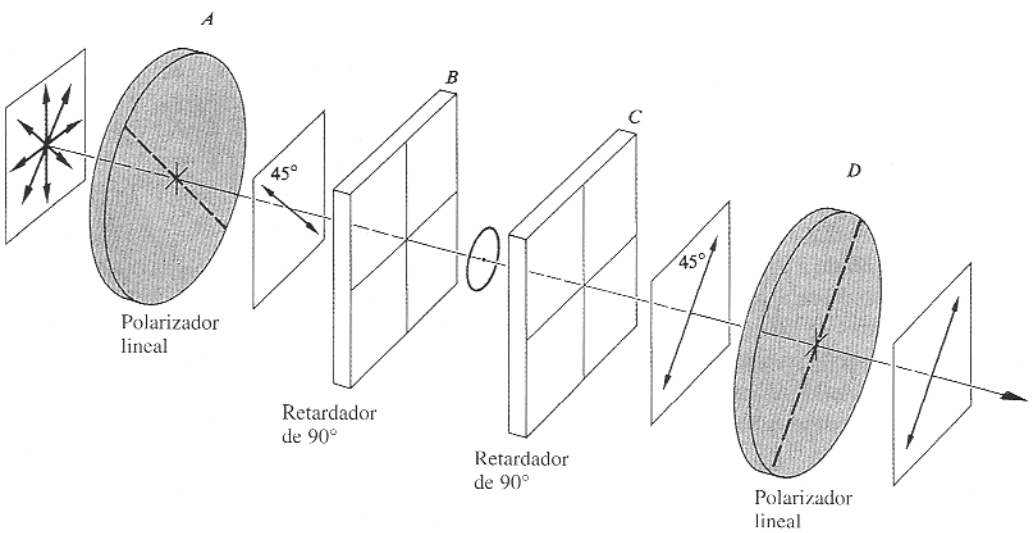


FIGURA 8.51 Dos polarizadores lineales y dos láminas de cuarto de onda.

Las dos componentes ortogonales de tal onda tienen la misma frecuencia, cada una con una amplitud constante. Si variara la amplitud de una de estas dos componentes sinusoidales, eso equivaldría a la presencia de otras componentes adicionales en el espectro analizado de Fourier. Además, las dos componentes tienen una diferencia relativa de fase constante, es decir, son coherentes. Una perturbación monocromática es un tren de onda infinito cuyas propiedades no se han modificado durante todo el tiempo; que esté en un estado $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}$ o $\mathscr{E}$, la onda está completamente polarizada.

Las fuentes de luz reales son policromáticas, es decir, emiten energía radiante con una gama de frecuencias. Examinemos ahora lo que sucede en una escala submicroscópica, poniendo particular atención al estado de polarización de la onda emitida. Imaginemos un oscilador electrónico que, habiendo sido excitado y puesto en vibración (posiblemente por una colisión), radia. Dependiendo de su movimiento preciso, el oscilador emitirá alguna forma de luz polarizada.

Como en la sección 7.4.3, donde comparamos la energía radiante de un solo átomo a un tren de onda que tiene una extensión espacial finita Δl_c. Supongamos por el momento que su estado de polarización sea esencialmente constante para una duración del orden del tiempo de coherencia Δt_c (el cual, como se recordará, corresponde a la extensión temporal del tren de onda, es decir, $\Delta l_c/c$). Una fuente típica generalmente consiste en una gran colección de tales átomos radiantes a los que podemos imaginar oscilando con diferentes fases a alguna frecuencia dominante $\bar{\nu}$. Supóngase que luego examinemos la luz que sale de una región muy pequeña de la fuente, de modo que los rayos emitidos que llegan a un punto de observación sean esencialmente paralelos. Durante un tiempo que es corto en comparación con el tiempo medio de coherencia, las amplitudes y fases de los trenes de onda de los átomos individuales serán esencialmente constantes. Esto significa que si miráramos hacia la fuente en alguna dirección, «veríamos», por lo menos por un instante, una superposición coherente de las ondas emitidas en esa dirección; «veríamos» una onda resultante con un estado de polarización dado. Ese estado duraría solamente por un intervalo menor que el tiempo de coherencia antes de cambiar, pero aún así equivaldría a numerosas oscilaciones con la frecuencia $\bar{\nu}$. Claramente, si el ancho de banda $\Delta\nu$ es amplio, el tiempo de coherencia ($\Delta t_c \approx 1/\Delta\nu$) será pequeño y cualquier estado de polarización será de corta duración. Evidentemente, *los conceptos de polarización y coherencia están relacionados de una manera fundamental.*

Ahora consideremos una onda cuyo ancho de banda sea muy pequeño en comparación con su frecuencia media, es decir, una onda cuasimonocromática. Se puede representar por dos estados $\mathscr{P}$, armónicos ortogonales como en las ecuaciones (8.1) y (8.2), pero aquí las amplitudes y las fases iniciales son funciones del tiempo. Además, la frecuencia y el número de propagación corresponden a los valores medios del espectro presente en la onda, esto es, $\bar{\omega}$ y $\bar{k}$. Entonces

$$\mathbf{E}_x(t) = \hat{\mathbf{i}}E_{0x}(t)\cos\left[\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_x(t)\right] \qquad (8.34a)$$

y

$$\mathbf{E}_y(t) = \hat{\mathbf{j}}E_{0y}(t)\cos\left[\bar{k}z - \bar{\omega}t + \varepsilon_y(t)\right] \qquad (8.34b)$$

El estado de polarización y, por lo tanto, $E_{0x}(t)$, $E_{0y}(t)$, $\varepsilon_x(t)$, y $\varepsilon_y(t)$ variarán lentamente, permaneciendo esencialmente constantes durante un gran número de oscilaciones. Recordemos que el ancho de banda estrecho implica un tiempo de coherencia relativamente grande. Si observamos la onda durante un intervalo mucho más grande, las amplitudes y las fases iniciales variarán de alguna manera, independientemente o de forma correlacionada. Si las variaciones no tienen ninguna correlación, el estado de polarización permanecerá constante sólo durante un intervalo pequeño comparado con el tiempo de coherencia. En otras palabras, la elipse que describe el estado de polarización puede cambiar de forma, orientación y sentido. Ya que, hablando en sentido práctico, no existe un detector que pueda distinguir un estado particular de tan corta duración, concluiríamos que la onda no está polarizada.

Antitéticamente, si el coeficiente $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$ fuera constante aunque ambos términos variaran, y si $\varepsilon = \varepsilon_y(t) - \varepsilon_x(t)$ fuera constante también, la onda estaría polarizada. Aquí se hace patente la necesidad de correlación entre estas diferentes funciones. Sin embargo, podemos imprimir estas condiciones en la onda simplemente haciéndola pasar a través de un polarizador, eliminando así cualquier constitutivo indeseable. El intervalo de tiempo durante el cual la onda mantendrá su polarización a partir de ahora ya no depende del ancho de banda porque las componentes de la onda han sido oportunamente correlacionadas. La luz podría ser policromática (incluso blanca) y estar, sin embargo, completamente polarizada. Se comportará de manera muy semejante a las ondas monocromáticas ideales que se analizaron en la sección 8.1.

Entre estos dos extremos de luz completamente polarizada y luz no polarizada se halla la condición de polarización parcial. En efecto, se puede demostrar que cualquier onda cuasimonocromática puede representarse como la suma de una

onda polarizada y de otra no polarizada, donde las dos son independientes y cualquiera puede ser cero.

8.9.2 Colores de interferencia

Insertemos una hoja arrugada de celofán entre dos polaroides iluminados por luz blanca o una bolsa de plástico corriente (polietileno) que no resulta tener nada especial entre dos polaroides y estirémosla para que sus moléculas, alineándose, hagan que sea birrefringente. Ahora, arruguémosla y volvamos a examinarla. La distribución resultante será una sinfín de regiones de colores múltiples que variarán de tonalidad cuando uno de los polaroides gire. Estos **colores de interferencia** aparecen debido a la dependencia del retardo con la longitud de onda. La naturaleza común variada de los patrones se debe a las variaciones locales del espesor o de la birrefringencia o a ambos.

La aparición de los colores de interferencia es muy común, pudiéndose observar fácilmente en un buen número de sustancias. Por ejemplo, puede verse el efecto usando una pieza de mica de varias capas, un trocito de hielo, una bolsa de plástico estirada, o las partículas molidas finamente de un guijarro blanco ordinario (de cuarzo). Para apreciar el mecanismo de este fenómeno, examinemos la figura 8.52 en donde se muestra esquemáticamente un haz estrecho de luz monocromática lineal pasando a través de una pequeña región de una lámina birrefringente Σ. En ese área se supone que tanto la birrefringencia como el espesor sean constantes. La luz transmitida generalmente es elíptica. De modo equivalente, imaginamos que la luz que emerge de Σ esté compuesta por dos ondas ortogonales lineales (es decir, las componentes x e y del campo total $\mathbf{E}$) que tienen una diferencia relativa de fase $\Delta\varphi$ determinada por la ecuación (8.32). Sólo las componentes de estas dos perturbaciones que están en la dirección del eje de transmisión del analizador, pasarán a través de él para llegar al observador.

Ahora estas componentes, que también tienen una diferencia de fase $\Delta\varphi$, son coplanares, pudiendo entonces interferir. Cuando $\Delta\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ están completamente fuera de fase y se anulan mutuamente. Cuando $\Delta\varphi = 0, 2\pi, 4\pi$, etc., las ondas están en fase, reforzándose mutuamente. Supongamos entonces que el retardo que aparece en un punto P_1 en Σ para la luz azul ($\lambda_0 = 435$ nm) sea 4π. En ese caso, se transmitirá masivamente el azul. De la ecuación (8.32) se deduce que $\lambda_0\Delta\varphi = 2\pi d(|n_o - n_e|)$ es esencialmente una constante determinada por el espesor y la birrefringencia. En el punto en discusión, por consiguiente, $\lambda_0\Delta\varphi = 1.740\pi$ para todas las longitudes de onda. Si ahora pasamos a luz incidente amarilla ($\lambda_0 = 580$ nm), $\Delta\varphi \approx 3\pi$ y la luz de P_1 se anula completamente. Con iluminación de luz blanca, este punto particular en Σ se vería como si hubiera quitado completamente la luz amarilla, transmitiendo todos los otros colores, pero ninguno de modo tan fuerte como el azul. Dicho de otra forma, la luz azul que emerge de la región de P_1 es lineal ($\Delta\varphi = 4\pi$) y paralela al

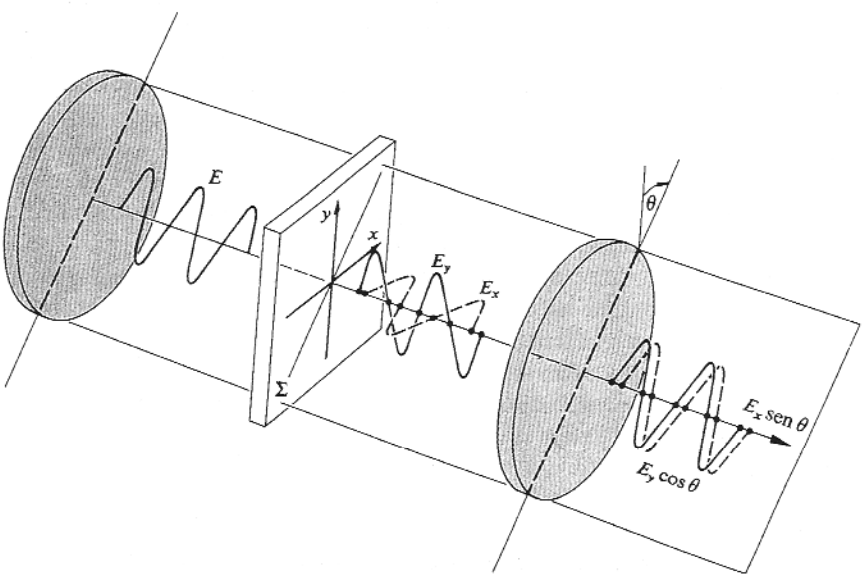


FIGURA 8.52 El origen de los colores de interferencia.

eje de transmisión del analizador. Por el contrario, la luz amarilla es lineal ($\Delta\varphi = 3\pi$) y se halla a lo largo del eje de extinción; los demás colores son elípticos. La región alrededor de P_1 se comporta como una lámina de media onda para el amarillo y una lámina de onda completa para el azul. Si el analizador se girara ahora 90° se transmitiría el amarillo, extinguiéndose el azul.

Por definición, se dice que dos colores son complementarios cuando su combinación da luz blanca. Entonces al girar el analizador de 90°, éste transmitirá o absorberá alternativamente colores complementarios. En forma muy parecida podría darse un punto P_2 en otro lugar en Σ donde ($\Delta\varphi = 4\pi$) para el **rojo** ($\lambda_0 = 650$ nm). Entonces, $\lambda_0\Delta\varphi = 2.600\pi$, después de lo cual la luz verde-azulada ($\lambda_0 = 520$ nm) tendrá un retardo de 5π y se extinguirá. Entonces está claro que si el retardo varía de una región a la siguiente en el espécimen, también variará el color de la luz transmitida por el analizador.

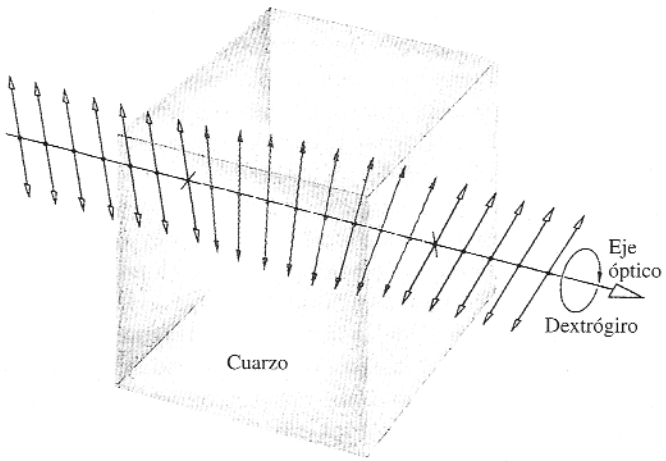


FIGURA 8.53 Actividad óptica exhibida por el cuarzo.

8.10 Actividad óptica

La manera según la cual la luz interacciona con las substancias materiales puede facilitar una gran cantidad de información valiosa acerca de sus estructuras moleculares. El proceso que vamos a examinar a continuación, aunque sea de interés específico para el estudio de la óptica, ha tenido y sigue teniendo efectos de gran alcance en el campo de la química y de la biología.

En 1811, el físico francés Dominique R. F. Arago observó por primera vez el fascinante fenómeno ahora denominado **actividad óptica**. Entonces descubrió que el plano de vibración de un haz de luz lineal era sometido a una rotación continua conforme se propagaba a lo largo del eje óptico de una lámina de cuarzo (figura 8.53). Aproximadamente en la misma época, Jean Baptiste Biot (1774-1862) observó el mismo efecto al utilizar las formas vaporosas y líquidas de varias sustancias naturales como el aguarrás. Cualquier materia que haga girar al campo **E** de una onda plana lineal incidente, se dice *ópticamente activa*. Además, como Biot pudo comprobar, es preciso distinguir entre rotación con sentido derecho y rotación con sentido izquierdo. Si al mirar hacia la dirección de la fuente, el plano de vibración parece moverse en el sentido de las agujas del reloj, se dice que la sustancia es *dextrogira* o *rotatoria d* (del latín *dextro* que significa derecho). Al contrario, si **E** parece que se ha desplazado en el sentido opuesto al de las agujas del reloj, se dice que el material es *levógiro* o *rotatorio l* (del latín *levo* que significa izquierdo).

En 1822, el astrónomo inglés Sir John F. W. Herschel (1792-1871), reconoció que los comportamientos rotatorio *d* y rotatorio *l* en el cuarzo correspondían, en realidad, a dos estructuras cristalográficas diferentes. Aunque las moléculas sean idénticas (SiO_2), el cristal de cuarzo puede tener sentido derecho o izquierdo dependiendo de la disposición de esas moléculas. Como se muestra en la figura 8.54, las apariencias externas de estas dos formas son las mismas bajo todos los puntos de vistas, excepto que una es la imagen espejo de la otra; se dice que son *enantiomorfas* una de otra. Todas las sustancias enantiomorfas transparentes son ópticamente activas. Además, ni el cuarzo licuado ni el cuarzo *fundido,* ningu-

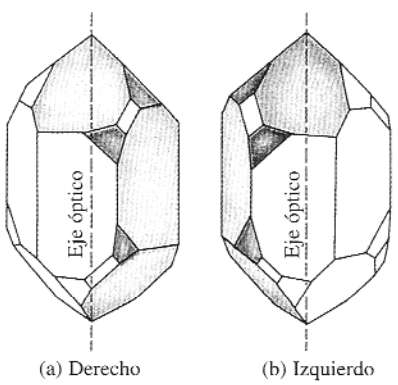


FIGURA 8.54 Cristales de cuarzo derecho e izquierdo.

no de los cuales es cristalino, son ópticamente activos. Evidentemente, en el cuarzo la actividad óptica está asociada con la distribución estructural de las moléculas en su conjunto. Hay muchas sustancias, tanto orgánicas como inorgánicas (por ejemplo, bencilo y $NaBrO_3$ respectivamente) que, como el cuarzo, exhiben actividad óptica sólo cuando se hallan en la forma cristalina. Por el contrario, muchos compuestos orgánicos naturales como el azúcar, ácido tartárico y el aguarrás son ópticamente activos en solución o en el estado líquido. Aquí el *poder rotatorio,* como a menudo se le llama, es evidentemente un atributo de las moléculas individuales. Hay también sustancias más complicadas para las que la actividad óptica está asociada tanto con las moléculas mismas como con su disposición en el interior de los varios cristales como ocurre con el tartrato de rubidio. Una solución rotatoria *d* de ese compuesto pasará a *rotatoria l* cuando cristaliza.

En 1825, Fresnel, sin estudiar el mecanismo real implicado, propuso una descripción fenomenológica simple de la actividad óptica. Ya que la onda lineal incidente puede representarse por una superposición de estados $\mathscr{R}$, y $\mathscr{L}$, sugirió que estas dos formas de luz circular se propagan con diferentes velocidades. Un material activo muestra una *birrefringencia circular,* es decir, posee dos índices de refracción, uno para estados $\mathscr{R}$ $(n_{\mathscr{R}})$ y uno para los estados $\mathscr{L}$ $(n_{\mathscr{L}})$. Al atravesar un espécimen ópticamente activo, las dos ondas circulares se desfasarían y la onda lineal resultante parecería haber girado. Podemos ver cómo esto es posible analíticamente regresando a las ecuaciones (8.8) y (8.9) que describían la luz circular monocromática derecha e izquierda que se propagaba en la dirección z. Se vio en la ecuación (8.10) que la suma de estas dos ondas está en efecto linealmente polarizada. Ahora, alteremos ligeramente estas expresiones a fin de eliminar el factor dos en la amplitud de la ecuación (8.10) en cuyo caso

$$\mathbf{E}_{\mathscr{R}} = \frac{E_0}{2}[\hat{\mathbf{i}} \cos (k_{\mathscr{R}} z - \omega t) + \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen} (k_{\mathscr{R}} z - \omega t)] \quad (8.35a)$$

y

$$\mathbf{E}_{\mathscr{L}} = \frac{E_0}{2}[\hat{\mathbf{i}} \cos (k_{\mathscr{L}} z - \omega t) - \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen} (k_{\mathscr{L}} z - \omega t)] \quad (8.35b)$$

representan las ondas constitutivas a derechas e izquierdas. Ya que ω es constante, $k_{\mathscr{R}} = k_0 n_{\mathscr{R}}$ y $k_{\mathscr{L}} = k_0 n_{\mathscr{L}}$. La perturbación resultante está dada por $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathscr{R}} + \mathbf{E}_{\mathscr{L}}$ y, al cabo de unos cálculos trigonométricos, queda

$$\mathbf{E} = E_0 \cos [(k_{\mathscr{R}} + k_{\mathscr{L}})z/2 - \omega t][\hat{\mathbf{i}} \cos (k_{\mathscr{R}} - k_{\mathscr{L}})z/2 + \hat{\mathbf{j}} \operatorname{sen} (k_{\mathscr{R}} - k_{\mathscr{L}})z/2] \quad (8.36)$$

En la posición donde la onda entra al medio ($z = 0$) está linealmente polarizada a lo largo del eje x como se muestra en la figura 8.55, es decir

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{i}} \cos \omega t \quad (8.37)$$

Obsérvese que en cualquier punto a lo largo de la trayectoria, ambas componentes tienen la misma dependencia del tiempo y por consiguiente están en fase. Esto solamente significa que en cualquier punto a lo largo del eje z, la resultante está linealmente polarizada (figura 8.56), aunque su orientación es ciertamente una función de z. Asimismo, si $n_{\mathscr{R}} > n_{\mathscr{L}}$ o, de manera equivalente, $k_{\mathscr{R}} > k_{\mathscr{L}}$, $\mathbf{E}$ girará en sentido opuesto al de las agujas del reloj mientras que si $k_{\mathscr{L}} > k_{\mathscr{R}}$, la rotación es en sentido contrario (mirando hacia la fuente). Tradicionalmente, el ángulo de rotación β de $\mathbf{E}$ se denomina positivo cuando es en el sentido de las agujas del reloj. Recordando esta convención de signos, la ecuación (8.36) debería poner de manifiesto que el campo en el punto z crea un ángulo de $\beta = -(k_{\mathscr{R}} - k_{\mathscr{L}})z/2$ con respecto a su orientación original. Si el medio tiene un espesor d, el ángulo de rotación del plano de vibración es entonces

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda_0}(n_{\mathscr{L}} - n_{\mathscr{R}}) \quad (8.38)$$

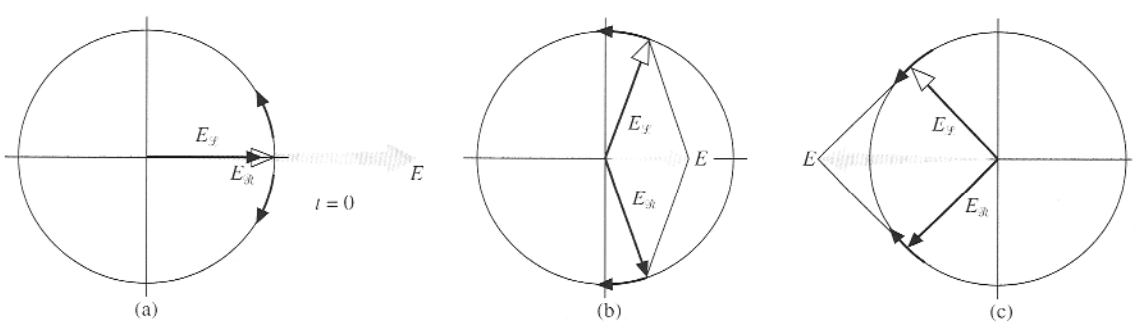


FIGURA 8.55
Superposición de un estado $\mathscr{R}$ y uno $\mathscr{L}$ en $z = 0$.

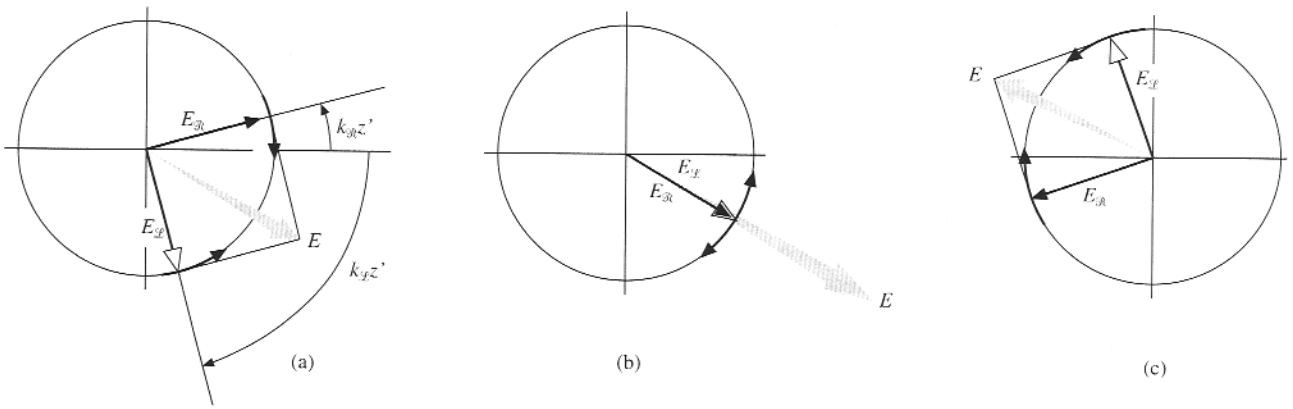


FIGURA 8.56 Superposición de un estado $\mathscr{R}$ y uno $\mathscr{L}$ en $z = z'$ ($k_{\mathscr{L}} > k_{\mathscr{R}}$).

donde $n_{\mathscr{L}} > n_{\mathscr{R}}$ es rotatoria d y $n_{\mathscr{R}} > n_{\mathscr{L}}$ es rotatoria l (figura 8.57).

Fresnel pudo, en realidad, separar los estados constitutivos $\mathscr{R}$, y $\mathscr{L}$ de un haz lineal usando el prisma compuesto de la figura 8.58 que consta de un número de segmentos de cuarzo derecho e izquierdo, cuyos ejes ópticos se han cortado como se muestra. El estado $\mathscr{R}$ se propaga más rápidamente en el primer prisma que en el segundo, siendo entonces refractado hacia la normal a la frontera oblicua. Para el estado $\mathscr{L}$ ocurre lo contrario, aumentando las dos ondas circulares su separación angular en cada interfaz.

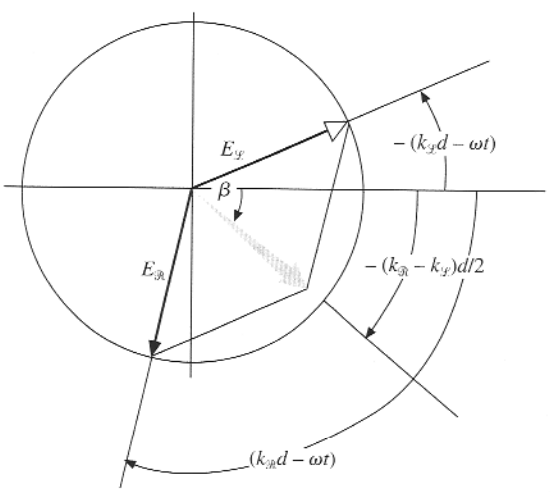


FIGURA 8.57 Superposición de un estado $\mathscr{R}$ y uno $\mathscr{L}$ en $z = d$ ($k_{\mathscr{L}} > k_{\mathscr{R}}$, $k_{\mathscr{L}} > k_{\mathscr{R}}$, $\lambda_{\mathscr{L}} < \lambda_{\mathscr{R}}$, y $v_{\mathscr{L}} < v_{\mathscr{R}}$).

Para luz de sodio el *poder rotatorio específico*, que se define como β/d, es de 21,7°/mm para el cuarzo. Entonces se deduce que $|n_{\mathscr{L}} - n_{\mathscr{R}}| = 7{,}1 \times 10^{-5}$ para la luz que se propaga a lo largo del eje óptico. En esa dirección particular, la doble refracción común desaparece. Sin embargo, cuando la luz incidente se propaga normalmente al eje óptico (como acontece a menudo en los prismas polarizadores, en las láminas de onda y en los compensadores), el cuarzo se comporta como lo haría cualquier cristal uniáxico positivo y ópticamente inactivo. Hay otros cristales birrefringentes ópticamente activos, tanto uniáxicos como biáxicos, tales como el cinabrio HgS ($n_o = 2{,}854$, $n_e = 3{,}201$) que tiene un poder rotatorio de 32,5°/mm. Por el contrario, la sustancia $NaClO_3$ es ópticamente activa (3,1°/mm) pero no birrefringente. El poder rotatorio de los líquidos, por su parte, es relativamente tan pequeño que generalmente se especifica en términos de 10 cm de longitud de trayectoria; por ejemplo, en el caso del aguarrás

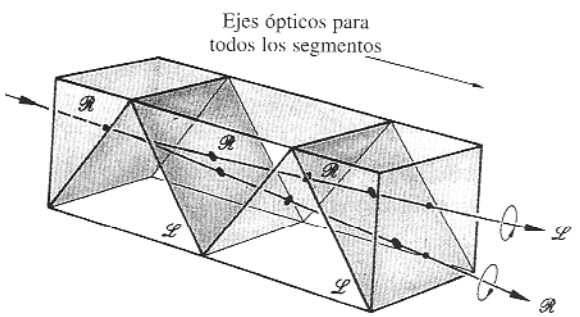


FIGURA 8.58 El prisma compuesto de Fresnel.

($C_{10}H_6$) es solamente $-37°/10$ cm ($10°$ C con $\lambda_o = 589{,}3$ nm). El poder rotatorio de las disoluciones varía con la concentración. Este hecho es particularmente útil para determinar, por ejemplo, la cantidad de azúcar presente en una muestra de orina o en un jarabe comercial de azúcar.

La actividad óptica puede observarse muy fácilmente usando jarabe de maíz incoloro, similar al que se encuentra en cualquier tienda de ultramarinos. No hará falta mucho ya que β/d es aproximadamente $+30°$/pulgada. Póngase alrededor de una pulgada de jarabe en un recipiente de cristal entre polaroides cruzados e ilumínese con una linterna. Los hermosos colores que aparecen al girar el analizador se deben a que β es una función de λ_0, un efecto conocido como *dispersión rotatoria.* Usando un filtro para conseguir luz aproximadamente monocromática, se puede determinar rápidamente el poder rotatorio del jarabe [16].

La primera gran aportación científica de Louis Pasteur (1822-1895) se produjo en 1848, estando relacionada con su investigación para la tesis doctoral. Demostró que el ácido racémico, una forma ópticamente inactiva del ácido tartárico, está en realidad compuesto por una mezcla que contiene igual cantidad de constitutivos derechos e izquierdos. Las sustancias de esta clase que si bien tienen las mismas fórmulas moleculares difieren algo en estructura, se denominan *isómeros.* Pasteur pudo cristalizar el ácido racémico y separar los dos tipos diferentes de cristales con imágenes especulares (enantiomorfas) que resultaron. Al disolverlos separadamente en agua formaban soluciones rotatorias *d* y rotatorias *l*. Esto implicaba la existencia de moléculas que si bien eran químicamente iguales, eran imágenes especulares unas de otras y que actualmente se denominan *estereoisómeros ópticos.* Estos conceptos constituyeron los cimientos de la estereoquímica de los compuestos orgánicos e inorgánicos, donde el punto de interés es la distribución espacial tridimensional de los átomos dentro de una molécula dada.

8.10.1 Un modelo útil

El fenómeno de la actividad óptica es muy complejo y si bien se puede analizar en términos de la teoría electromagnética clásica, en realidad requiere una solución mecánico-cuántica [17]. A pesar de esto, vamos a considerar un modelo simplificado que nos facilitará una descripción cualitativa, sin embargo plausible, del proceso. Recordemos que representamos un medio ópticamente isótropo a través de una distribución homogénea de osciladores electrónicos isótropos que vibraban paralelamente al campo **E** de una onda incidente. Un medio ópticamente anisótropos se describió de manera similar como una distribución de osciladores anisótropos que vibraban con algún ángulo con el campo impulsor **E**. Ahora imaginemos que los electrones en sustancias ópticamente activas estén obligados a desplazarse a lo largo de trayectorias retorcidas que, por razones de simplicidad, se supone que sean helicoidales. Dicha molécula se visualiza como si fuera una hélice conductora. Se sabe que los átomos de silicio y oxígeno en un cristal de cuarzo están dispuestos bien sea en espirales derechas o izquierdas alrededor del eje óptico, como se indica en la figura 8.59. En la representación presente, este cristal correspondería a una serie paralela de hélices. Una solución activa de azúcar sería análoga a una distribución de hélices orientadas al azar, todas ellas con el mismo sentido. [18]

En el cuarzo podríamos anticipar que la onda incidente interaccionaría de modo diferente con el espécimen, dependiendo de si «ve» hélices derechas o izquierdas. Por lo tanto, podríamos esperar diferentes índices para las componentes $\mathcal{R}$ y $\mathcal{L}$ de la onda. La descripción detallada del proceso que nos lleva a la birrefringencia circular en cristales no es en absoluto simple, pero al menos la asimetría necesaria es evidente. ¿Cómo puede, por lo tanto, una serie al azar de hélices que corresponden a una solución, producir actividad óptica? Examinemos una de tales moléculas en esta representación simplificada, por ejemplo, una cuyo eje es paralelo al campo armónico **E** de la onda electromagnética. Ese campo impulsa-

[16] Un filtro de gelatina iría bien, al igual que un trozo de celofán de color. Recordemos solamente que el celofán actuará como una lámina de onda (ver sección 8.7.1), por lo tanto no lo pongamos entre los polaroides a menos que se alineen oportunamente sus ejes principales.

[17] El artículo de revisión «Optical Activity and Molecular Dissymmetry» por S. F. Mason, *Contemp. Phys.*, **9**, 239 (1968) contiene una lista bastante extensa de referencia para lecturas adicionales.

[18] Además de estos estados sólidos y líquidos, hay una tercera clasificación de sustancias muy útil debido a sus notables propiedades ópticas. Se denomina estado *mesomórfico* o de *cristal líquido*. Los cristales líquidos son compuestos orgánicos que pueden fluir y, sin embargo, mantienen sus orientaciones moleculares características. En concreto, los cristales líquidos *colestéricos* tienen una estructura en forma de hélice y, por lo tanto, exhiben poderes rotatorios extremadamente elevados, del orden de $40.000°$/mm. El número de vueltas por unidad de longitud de la distribución molecular en forma de tornillo es considerablemente menor que en el cuarzo.

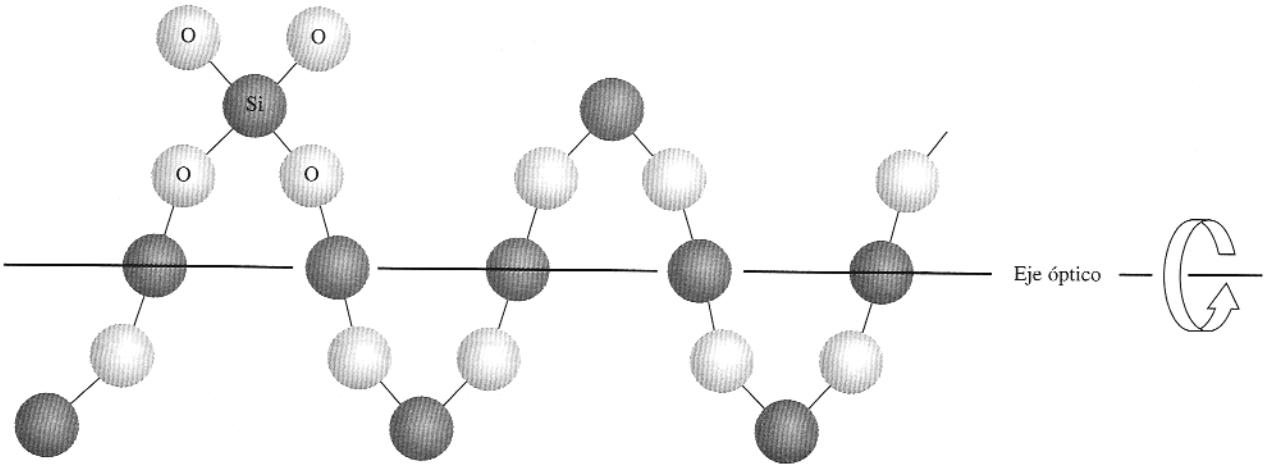


FIGURA 8.59 Cuarzo derecho.

rá las cargas hacia arriba y hacia abajo a lo largo de la longitud de la molécula, produciendo efectivamente un momento dipolar eléctrico $\mathscr{p}(t)$, variable en el tiempo y paralelo al eje. Además, tenemos ahora una corriente asociada con el movimiento en espiral de los electrones que, a su vez, genera un momento dipolar magnético oscilante $\mathscr{m}(t)$ que también se halla a lo largo del eje de la hélice (figura 8.60). Por el contrario, si la molécula fuera paralela al campo **B** de la onda, habría un flujo variable en el tiempo y una corriente electrónica inducida que circularía alrededor de la molécula. Esto proporcionaría nuevos momentos dipolares eléctricos y magnéticos oscilantes. En ambos casos, $\mathscr{p}(t)$ y $\mathscr{m}(t)$ *serán mutuamente paralelos o antiparalelos dependiendo del sentido de la hélice molecular particular.* Claramente, ha sido quitada energía del campo y ambos dipolos oscilantes esparcirán (es decir, volverán a radiar) ondas electromagnéticas. El campo eléctrico $\mathbf{E}_p$ emitido en una dirección dada por un dipolo eléctrico es perpendicular al campo eléctrico $\mathbf{E}_m$ emitido por un dipolo magnético. Por lo tanto, la suma de éstos, el campo resultante $\mathbf{E}_s$ esparcido por una hélice, no será paralelo al campo incidente $\mathbf{E}_i$ a lo largo de la dirección de propagación. (Lo mismo resulta ser cierto para los campos magnéticos). El plano de vibración de la luz emitida resultante $(\mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i)$ se girará entonces en una dirección determinada por el sentido de la hélice. La magnitud del giro variará con la orientación de cada molécula, siendo siempre en la misma dirección para las hélices que tienen el mismo sentido.

Aunque este análisis de las moléculas ópticamente activas como conductores en forma de hélice es ciertamente superfi-

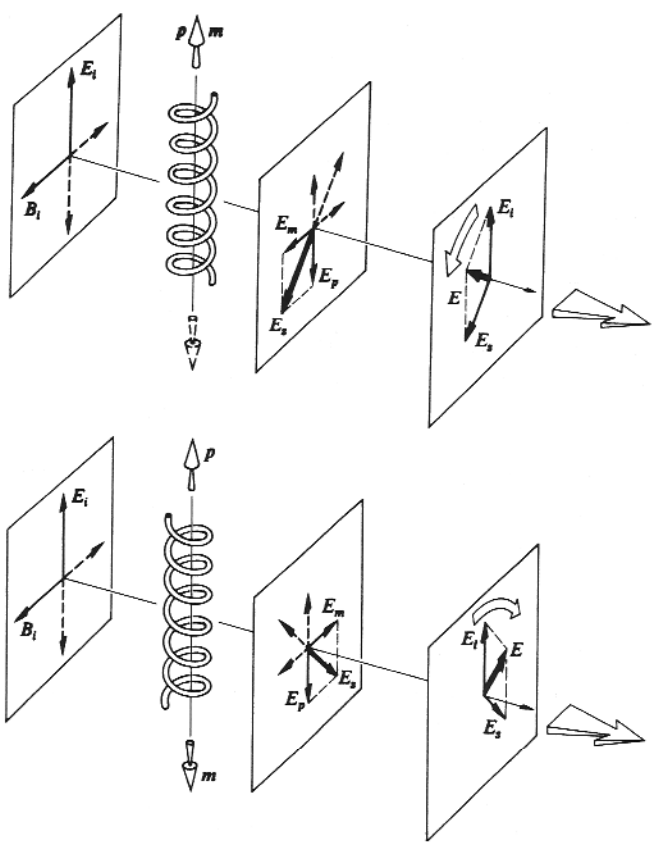


FIGURA 8.60 Radiación procedente de moléculas helicoidales.

cial, merece la pena recordar la analogía. En efecto, si dirigimos un haz lineal de microondas de 3 cm hacia una caja llena de hélices idénticas de cobre (por ejemplo, 1 cm de largo por 0,5 cm de diámetro y aisladas unas de otras) el plano de vibración de la onda transmitida experimentará a una rotación [19].

8.10.2 Sustancias biológicas ópticamente activas

Entre las observaciones más fascinantes asociadas con la actividad óptica se hallan las de la biología. Siempre que las moléculas orgánicas se sintetizan en el laboratorio, se produce un número igual de isómeros *d* y *l* con el resultado de que el compuesto es ópticamente inactivo. Entonces, si efectivamente existen, se podría pensar que iguales cantidades de estereoisómeros ópticos *d* y *l* se hallen en sustancias naturales orgánicas. Las cosas no son precisamente así. El azúcar natural (sacarosa, $C_{12}H_{22}O_{11}$) donde sea que se cultive, bien sea que se extraiga de la caña de azúcar o de la remolacha azucarera, siempre es rotatorio *d*. Además, el azúcar simple dextrosa o glucosa *d* ($C_6H_{12}O_6$) que, como dice su nombre, es rotatorio *d*, es el carbohidrato más importante del metabolismo humano. Evidentemente, los cuerpos vivos de alguna manera pueden distinguir entre isómeros ópticos.

Todas las proteínas se fabrican de compuestos denominados *aminoácidos* que, a su vez, son combinaciones de carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno. Hay veinte y tantos aminoácidos y todos ellos (con la excepción del más simple, la glicina, que no es enantiomorfa) son generalmente rotatorios *l*. Esto significa que si rompemos la molécula de una proteína, que proceda de un huevo o de una berenjena, de un escarabajo o de un Beatle (N. d. T. El autor se refiere aquí a los conocidos cantantes, porque esta palabra también significa escarabajo), los aminoácidos constitutivos serán rotatorios *l*. Una excepción importante es el grupo de los antibióticos tales como la penicilina que contienen algunos aminoácidos dextrógiros. En efecto, esto puede explicar perfectamente el efecto tóxico que tiene la penicilina en una bacteria.

Es fascinante especular acerca de los posibles orígenes de la vida en este y en otros planetas. Por ejemplo, ¿la vida en la Tierra consistía inicialmente de ambas formas de imagen especulares? Se han encontrado cinco aminoácidos en un meteorito que cayó en Victoria, Australia el 28 de septiembre de 1969 mientras que los análisis revelaron la existencia de aproximadamente las mismas cantidades de formas ópticamente dextrógiras y levógiras. Esto se contrapone claramente al enorme predominio de la forma levógira que se ha encontrado en unas rocas terrestres Las implicaciones son muchas y fascinantes [20].

8.11 Efectos ópticos inducidos-moduladores ópticos

Un número elevado de diferentes efectos físicos en los que participa la luz polarizada tiene en común la característica de haber sido inducido externamente de alguna manera. En estos casos se ejerce una influencia externa (por ejemplo, una fuerza mecánica, una magnética o un campo eléctrico) en el medio óptico, cambiando así la modalidad de transmisión de la luz.

8.11.1 Fotoelasticidad

En 1816 Sir David Brewster descubrió que se podía convertir las sustancias transparentes normalmente isótropas en ópticamente anisótropas aplicando un esfuerzo mecánico. Este fenómeno se denomina *birrefringencia mecánica,* **fotoelasticidad** *o birrefringencia de tensión.* Bajo compresión o tensión, el material adquiere las propiedades de un cristal uniáxico negativo o positivo, respectivamente. En ambos casos, el eje óptico efectivo se halla en la dirección del esfuerzo mientras que la birrefringencia inducida es proporcional al esfuerzo mismo. Si el esfuerzo no es uniforme en la muestra, no se impondrá tampoco la birrefringencia ni la retardancia en una onda transmitida [ecuación (8.32)].

La fotoelasticidad constituye la base de una técnica para estudiar las tensiones en estructuras mecánicas tanto transparentes como opacas (figura 8.61). Un cristal inadecuadamente templado o montado sin cuidado, bien sea que sirva como parabrisas de un automóvil o como lente en un telescopio, desarrollará unas tensiones internas que pueden detectarse fácilmente. La información relativa a la deformación en superficies de objetos opa-

[19] I. Tinoco y M. P. Freeman, «The Óptical Activity of Oriented Copper Hélices», *J. Phys. Chem.*, **61**, 1196 (1957).

[20] Véase *Physics Today.* Febrero 1971, pág. 17 para un análisis adicional y referencias para ulteriores lecturas.

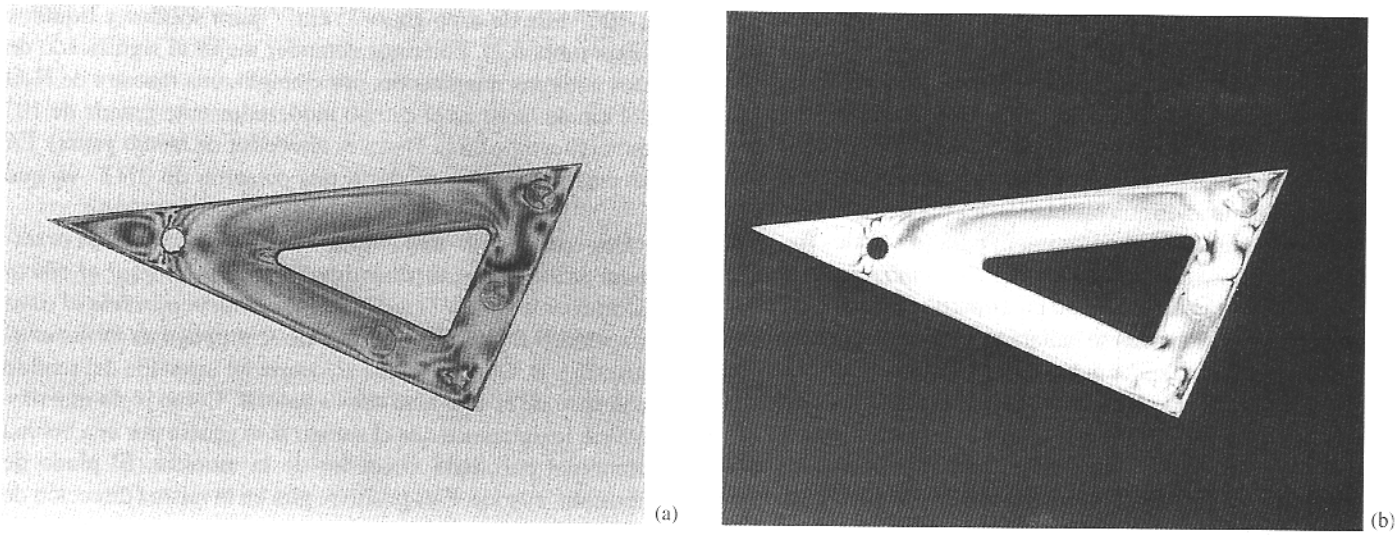


FIGURA 8.61 Escuadra de plástico transparente entre polaroides. (Foto de E.H.)

cos puede obtenerse pegando cubiertas fotoelásticas a las partes bajo estudio. Con más frecuencia, se realiza un modelo transparente a escala de materiales *ópticamente sensibles a tensiones* tales como epoxy, glyptol o las resinas de poliéster modificado, sometiéndose dicho modelo a las fuerzas que la componente real experimentaría en el uso. Ya que la birrefringencia varía de punto a punto en la superficie del modelo, cuando se coloca entre polaroides cruzados, un patrón de franjas muy complejas y variadas revelará las tensiones internas. Examinemos casi cualquier pieza de plástico claro o incluso un trozo de gelatina sin sabor entre dos polaroides; intentemos tensionarlo más y observemos los cambios en el patrón (figura 8.62).

La retardancia en cualquier punto de la muestra es proporcional a la *diferencia principal de tensiones*, es decir $(\sigma_1 - \sigma_2)$

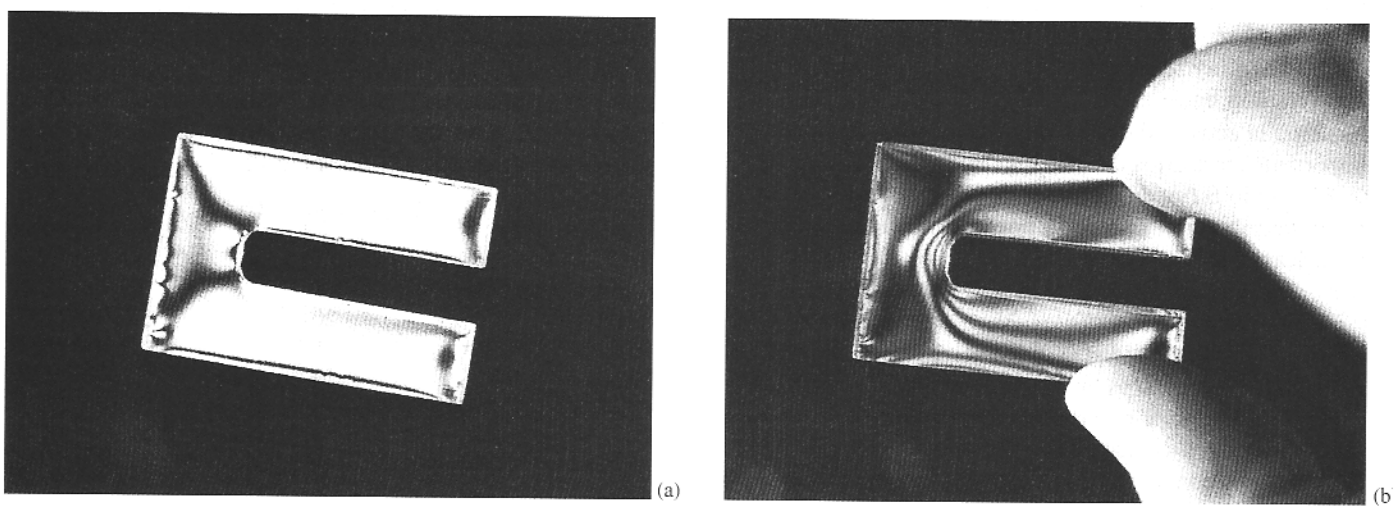


FIGURA 8.62 Un pedazo de plástico transparente sometido a tensiones entre polaroides. (Foto de E.H.)

donde las sigmas son las tensiones ortogonales principales. Por ejemplo, si la muestra fuera una lámina bajo tensión vertical, σ_1 sería la tensión principal máxima en la dirección vertical y σ_2 sería la tensión principal mínima, en este caso cero, horizontalmente. En situaciones más complejas, las tensiones principales, tanto como sus diferencias, variarán de una región a la siguiente. Bajo iluminación con luz blanca, los lugares geométricos de todos los puntos en el espécimen, para los cuales $(\sigma_1 - \sigma_2)$ es constante, se denomina *regiones isocromáticas,* correspondiendo cada una de ellas a un color particular. Superpuesto en estas franjas coloreadas se hallará un sistema separado de bandas negras. En cualquier punto donde el campo **E** de la luz lineal incidente es paralela a cualquiera de los ejes de tensión principal, la onda atravesará la muestra sin ser afectada, independientemente de la longitud de onda. Con polaroides cruzados, la luz se absorberá por el analizador, proporcionando una región negra conocida como banda *isoclínica* (problema 8.48). Además de tener un aspecto atractivo, las franjas facilitan también un mapa cualitativo de la distribución de tensiones así como una base para cálculos cuantitativos.

8.11.2 El efecto Faraday

En 1845 Michael Faraday descubrió que la modalidad de propagación de la luz a través de un medio material puede influenciarse por la aplicación de un campo magnético externo. En concreto, encontró que el plano de vibración de la luz lineal incidente en un trozo de cristal giraba cuando se aplicaba un campo magnético fuerte en la dirección de propagación. El **efecto Faraday** fue una de las primeras indicaciones de la interrelación entre el electromagnetismo y la luz. Aunque recuerda la actividad óptica, hay sin embargo una distinción importante entre estos dos efectos.

El ángulo β (medido en minutos de arco) de rotación del plano de vibración está dado por la expresión determinada empíricamente

$$\beta = \mathcal{V}Bd \tag{8.39}$$

en la que B es la densidad de flujo magnético estático (generalmente en gauss), d es la longitud del medio atravesado (en cm) y $\mathcal{V}$ es un factor de proporcionalidad denominado ***constante de Verdet***. La constante de Verdet para un medio particular varía tanto con la frecuencia (disminuyendo rápidamente al disminuir v) como con la temperatura. Es aproximadamente del orden de 10^{-5} min de arco gauss^{-1} cm^{-1} para los gases y de 10^{-2} min de arco gauss^{-1} cm^{-1} para sólidos y líquidos (véase tabla 8.2). Podemos entender mejor el significado de estos números imaginando, por ejemplo, una muestra de H_2O de 1 cm de largo en el campo moderadamente grande de 10^4 gauss (el campo de la Tierra es alrededor de medio gauss). En ese caso particular, se daría una rotación de 2°11′ ya que $\mathcal{V} = 0{,}0131$.

Por convención, *una constante positiva de Verdet corresponde a un material (diamagnético) para el cual el efecto Faraday es rotatorio l cuando la luz se mueve paralela al campo aplicado* **B** y *rotatorio d cuando se propaga de forma antiparalela a* **B**. Obsérvese que no ocurre tal inversión del sentido en el caso de la actividad óptica natural. Como regla mnemotécnica, imaginemos que el campo **B** se genere por una bobina solenoidal enrollada alrededor de la muestra. El plano de vibración, cuando $\mathcal{V}$ es positivo, gira en la misma dirección de la corriente en la bobina, independientemente de la dirección de propagación del haz a lo largo de su eje. El efecto puede, por lo tanto, amplificarse reflejando la luz hacia atrás y hacia adelante unas cuantas veces a través de la muestra.

El análisis teórico del efecto Faraday involucra a la teoría mecánico-cuántica de la dispersión incluyendo los efectos de **B** en los niveles de energía atómicos o moleculares. Simplemente, aquí será suficiente bosquejar el limitado argumento clásico para materiales no magnéticos.

Supongamos que la luz incidente sea circular y monocromática. Un electrón ligado elásticamente adquirirá una órbita estacionaria circular impulsada por el campo **E** rotatorio de la onda (el efecto del campo **B** de la onda es despreciable). La introducción de un amplio campo magnético constante aplica-

TABLA 8.2 Las constantes de Verdet para algunas sustancias seleccionadas

Material	Temperatura (°C)	$\mathcal{V}$ (min de arco gauss^{-1} cm^{-1})
Vidrio incoloro ligero	18	0,031 7
Agua	20	0,013 1
NaCl	16	0,035 9
Cuarzo	20	0,016 6
$NH_4Fe(SO_4)_2.12H_2O$	26	−0,000 58
Aire*	0	$6{,}27 \times 10^{-6}$
CO_2*	0	$9{,}39 \times 10^{-6}$

*λ = 578 nm y 760 mm Hg.
En los manuales corrientes se recogen listados más amplios.

do perpendicularmente al plano de la órbita resultará en una fuerza radial F_M en el electrón. Esa fuerza puede apuntar hacia el centro del círculo o hacia afuera dependiendo del sentido de la luz y de la dirección del campo constante **B**. La fuerza radial total (F_M más la fuerza elástica restauradora) puede tener, por consiguiente, dos valores diferentes, pudiéndolos tener también el radio de la órbita. Por consiguiente, para un campo magnético dado se dispondrá de dos valores posibles del momento dipolar eléctrico, la polarización y la permitividad así como dos valores del índice de refracción, $n_{\mathscr{R}}$ y $n_{\mathscr{L}}$. El análisis puede entonces proceder como se hizo para el tratamiento de Fresnel para la actividad óptica. Como antes, se habla de dos modos normales de propagación de ondas electromagnéticas a través del medio, los estados $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$.

Para las sustancias ferromagnéticas las cosas se complican un poco. En el caso de un material magnetizado β es proporcional a la componente de la magnetización en la dirección de propagación en lugar de a la componente del campo cc aplicado.

Hay numerosas aplicaciones prácticas del efecto Faraday. Se puede usar para analizar mezclas de hidrocarburos, ya que cada elemento constituyente tiene una rotación magnética característica. Además, al emplearse en estudios espectroscópicos facilita información acerca de las propiedades de los estados de energía por encima del estado fundamental. Es interesante observar que se ha recurrido al efecto Faraday para realizar moduladores ópticos. En una versión con infrarrojo, construida por R. C. LeCraw, se utilizaba el cristal magnético sintético granate de itrio y de hierro (YIG) (N. d. T. YIG procede del inglés «yttrium-iron garnet») al que se añadió cierta cantidad de galio. La estructura del YIG es similar a la de las gemas granates naturales. El dispositivo se muestra esquemáticamente en la figura 8.63. Un haz infrarrojo de láser entra al cristal desde la izquierda. Un campo magnético transversal cc satura la magnetización del cristal de YIG en esa dirección. El vector de magnetización total (que aparece del campo constante y del campo de la bobina) puede variar de dirección, siendo inclinado hacia el eje del cristal en una cantidad proporcional a la corriente moduladora de la bobina. Ya que la rotación de Faraday depende de la componente axial de la magnetización, la corriente de la bobina controla a β. El analizador convierte entonces esta modulación de la polarización en modulación de la amplitud por medio de la ley de Malus [ecuación (8.24)]. En resumen, la señal que se va a transmitir se introduce en la bobina como un voltaje modulador y el haz de láser emergente transportará esa información en forma de variaciones de amplitud.

En realidad, hay otros efectos magneto-ópticos de los que analizaremos tan sólo dos y muy brevemente. Los *efectos Voigt* y *Cotton-Mouton* aparecen al aplicar un campo magnético constante a un medio transparente perpendicularmente a la dirección de propagación del haz de luz incidente. El primero ocurre en vapores mientras que el segundo, considerablemente más fuerte, ocurre en los líquidos. En ambos casos, la birrefringencia del medio es similar a la de un cristal uniáxico cuyo eje óptico está en la dirección del campo magnético cc, es decir, normal al haz de luz [ecuación (8.32)]. Los dos índices de refracción corresponden ahora a las situaciones en las que el plano de vibración de la onda es normal o paralelo al campo

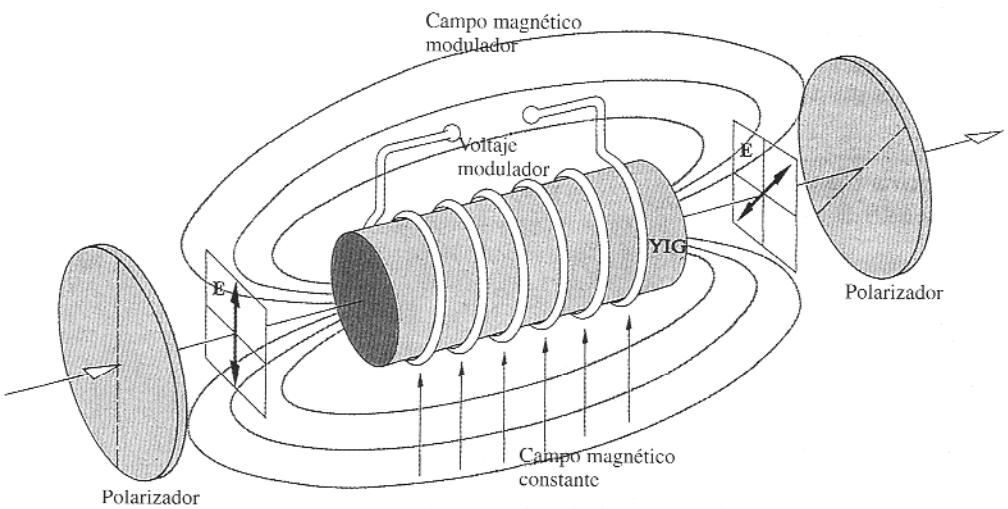


FIGURA 8.63 Un modulador de efecto Faraday.

magnético constante. Su diferencia Δn (es decir, la birrefringencia) es proporcional al cuadrado del campo magnético aplicado, surgiendo en los líquidos a través de la alineación de las moléculas óptica y magnéticamente anisótropas del medio con ese campo. Si la luz incidente se propaga según un ángulo con el campo estático diferente de 0 ó $\pi/2$, los efectos de Faraday y Cotton-Mouton ocurren al mismo tiempo, el primero siendo generalmente el mayor de los dos. El efecto de Cotton-Mouton es el afín magnético del efecto (electro-óptico) Kerr que se analizará a continuación.

8.11.3 Los efectos Kerr y Pockels

El primer efecto electro-óptico fue descubierto por el físico escocés John Kerr (1824-1907) en 1875. Encontró que una substancia transparente isótropa se vuelve birrefringente al colocarse en un campo eléctrico **E**. El medio adquiere las características de un cristal uniáxico cuyo eje óptico corresponde a la dirección del campo aplicado. Los dos índices, $n_\parallel$ y $n_\perp$, están asociados con las dos orientaciones del plano de vibración de la onda esto es, paralela y perpendicular al campo eléctrico aplicado respectivamente. Su diferencia, Δn, constituye la birrefringencia que equivale a

$$\Delta n = \lambda_0 K E^2 \tag{8.40}$$

donde K es la **constante de Kerr**. Cuando K es positivo, como ocurre frecuentemente, Δn, que se puede considerar como $n_e - n_o$, es positivo y la substancia se comporta como un cristal uniáxico positivo. Los valores de la constante Kerr (tabla 8.3) se listan generalmente en unidades electrostáticas, así que en la ecuación (8.40) E deberá introducirse en statvolts por cm (un statvolt $\approx$ 300 V). Obsérvese que, al igual que el efecto Cotton-Mouton, *el efecto Kerr es proporcional al cuadrado del campo, denominándose a menudo efecto electro-óptico cuadrático,* El fenómeno en los líquidos se atribuye a una alineación parcial de las moléculas anisótropas por el campo **E**. En los sólidos la situación se vuelve mucho más compleja.

TABLA 8.3 Las constantes Kerr para algunos líquidos seleccionados (20° C, λ_0 = 589,3 nm)

	Sustancia	K (en unidades de 10^{-7} cm statvolt^{-2})
Benceno	C_6H_6	0,6
Disulfuro de carbono	CS_2	3,2
Cloroformo	$CHCl_3$	−3,5
Agua	H_2O	4,7
Nitrotolueno	$C_5H_7NO_2$	123
Nitrobenceno	$C_6H_5NO_2$	220

La figura 8.64 muestra una disposición denominada obturador Kerr o modulador óptico. Consiste en una celda de cristal que contiene dos electrodos y que se llena con un líquido polar. Esta *celda Kerr,* como se le llama, se coloca entre dos polarizadores lineales cruzados cuyos ejes de transmisión están a ± 45° con el campo **E** aplicado. Si el voltaje de las placas es igual a cero, no se transmitirá luz; el obturador está cerrado. La aplicación de un voltaje modulador genera un campo haciendo que la celda funcione como una lámina de onda variable abriendo entonces el obturador proporcionadamente. El gran interés de tal dispositivo reside en el hecho de que puede responder efectivamente a frecuencias aproximadamente tan altas como 10^{10} Hz. Las celdas Kerr, que generalmente contienen nitrobenceno o bisulfuro de carbono, han ido utilizándose durante muchos años en una gran variedad de aplicaciones. Sirven como obturadores en fotografía de alta velocidad y como interruptores de haces luminosos para reemplazar ruedas dentadas rotatorias. Como tales, se han utilizado para medir la velocidad de la luz así como conmutadores de Q en sistemas láser pulsados.

Si las placas que actúan como electrodos tienen una longitud efectiva de ℓ cm y están separadas por una distancia d, el retardo se deduce de

$$\Delta\varphi = 2\pi K \ell V^2/d^2 \tag{8.41}$$

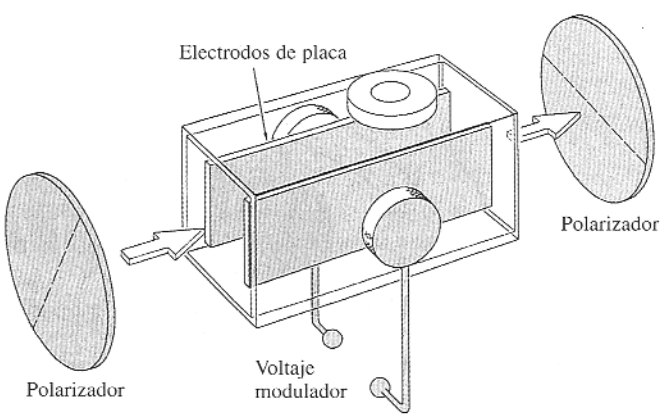


FIGURA 8.64 Celda de Kerr.

en la cual V es el voltaje aplicado. Entonces una celda de nitrobenceno donde d es un centímetro y ℓ son varios centímetros requerirá un voltaje bastante elevado, de aproximadamente 3×10^4 V, a fin de poder actuar como lámina de media onda. Se trata de una cantidad característica denominada *voltaje de media onda,* $V_{\lambda/2}$. Otra desventaja es que el nitrobenceno es venenoso y explosivo. Las substancias sólidas transparentes como el cristal mixto de niobato y tantalato de potasio ($KT_{a0.65}Nb_{0.35}O_3$), abreviado en KTN, o el titanato de bario ($BaTiO_3$) que muestran un efecto Kerr, son por lo tanto interesantes como moduladores electro-ópticos.

Hay aún otro efecto electro-óptico muy importante, denominado *efecto Pockels* en honor del físico alemán Friedrich Carl Alwin Pockels (1865-1913), quien lo estudió ampliamente en 1893. Es un efecto electro-óptico lineal ya que la birrefringencia inducida es proporcional a la primera potencia del campo **E** aplicado y, por consiguiente, del voltaje aplicado. El efecto Pockels existe solamente en ciertos cristales desprovistos de un centro de simetría; en otras palabras, cristales que no tienen un punto central en el que cada átomo se pueda reflejar en un átomo idéntico. Hay 32 clases de simetría en los cristales, de los cuales 20 pueden mostrar el efecto Pockels. Por cierto, estas mismas veinte clases son también piezoeléctricas. Por tanto, muchos cristales y todos los líquidos se excluyen de la posibilidad de mostrar un efecto electro-óptico lineal.

La primera celda Pockels práctica que pudo funcionar como obturador o modulador no se creó hasta los años cuarenta, cuando se desarrollaron cristales adecuados. Ya hemos hablado del principio operativo de tal dispositivo. En breve, la birrefringencia se varía electrónicamente a través de un campo eléctrico aplicado controlado. El retardo puede alterarse como se desee, cambiando así el estado de polarización de la onda lineal incidente. De esta manera, el sistema funciona como modulador de polarización. Los primeros dispositivos se hacían con dihidrógeno fosfato de amonio ($NH_4H_2PO_4$), o ADP, y dihidrógeno fosfato de potasio (KH_2PO_4), o KDP; ambos se siguen utilizando. Una gran mejora fue proporcionada por la introducción de monocristales de dideuterio fosfato de potasio (KD_2PO_4) o KD*P que brinda el mismo retardo con voltajes menores que la mitad de los que se necesitan para KDP. La infusión del deuterio en los cristales se logra sintetizándolos en una solución de agua pesada. Las celdas hechas con KD*P o CD*P (dideuterio arseniato de cesio) se producen comercialmente desde hace tiempo.

Una *celda Pockels* es simplemente un monocristal oportuno, orientado, sin centro de simetría, sumergido en un campo eléctrico controlable. Por lo general, tales dispositivos pueden accionarse con voltajes muy bajos (aproximadamente de 5 a 10 veces menor que el de una celda Kerr equivalente); son lineales y por supuesto no hay problema con líquidos tóxicos. El tiempo de respuesta del KDP es muy corto, menos de 10 ns, pudiendo modular un haz de luz hasta alrededor de 25 GHz (es decir, 25×10^9 Hz).

Hay dos configuraciones comunes de celdas denominadas *transversal y longitudinal* dependiendo de si el campo **E** aplicado es perpendicular o paralelo a la dirección de propagación, respectivamente. El tipo longitudinal se ilustra en su forma más básica en la figura 8.65. Ya que el haz atraviesa los electrodos, éstos se hacen generalmente con una cubierta transparente de óxidos metálicos (por ejemplo, SnO, InO o CdO), películas delgadas de metal, rejillas o anillos. El cristal mismo es generalmente uniáxico en la ausencia de un campo aplicado, alineándose de tal manera que su eje óptico se halla a lo largo de la dirección de propagación del haz. Para tal disposición, el retardo está dado por

$$\Delta\varphi = 2\pi n_o^3 r_{63} V/\lambda_0 \tag{8.42}$$

donde r_{63} es la *constante electro-óptica* en m/V, n_o es el índice *normal* de refracción, V es la diferencia de potencial en voltios y λ_0 es la longitud de onda en el vacío en metros [21]. Ya que los cristales son anisótropos, sus propiedades varían en diferentes

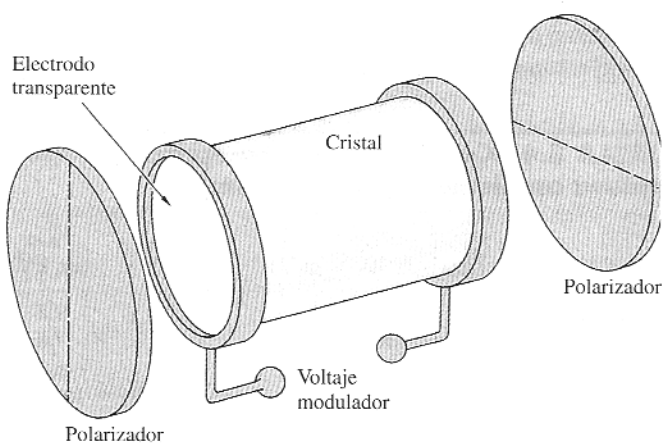


FIGURA 8.65 Celda de Pockels.

[21] Esta expresión, junto con la apropiada para la modalidad transversal, se deduce muy bien en A. Yariv, *Quantum Electronics*. Aún así, el análisis es bastante complejo, no aconsejándose para una lectura superficial.

direcciones, debiéndose describir por un grupo de términos a los que se denomina colectivamente tensor electro-óptico de segundo rango r_{ij}. Afortunadamente, aquí sólo nos interesa una de sus componentes, es decir, r_{63}, cuyos valores se recogen en la tabla 8.4. El voltaje de media onda corresponde a un valor de $\Delta\varphi = \pi$, en cuyo caso

$$\Delta\varphi = \pi\frac{V}{V_{\lambda/2}} \tag{8.43}$$

y de la ecuación (8.42)

$$V_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2n_o^3 r_{63}} \tag{8.44}$$

Como ejemplo, para KDP, $r_{63} = 10{,}6 \times 10^{-12}$ m/V, $n_o = 1{,}51$ y obtenemos $V_{\lambda/2} \approx 7{,}6 \times 10^3$ V at $\lambda_0 = 546{,}1$ nm.

Las celdas Pockels se han usado como obturadores ultrarrápidos, conmutadores Q para láseres y moduladores de luz de cc a 30 GHz [22].

8.12 Una descripción matemática de la polarización

Hasta ahora hemos considerado la luz polarizada en términos del campo eléctrico de la onda. La representación más general, por supuesto, era la de la luz elíptica en donde veíamos el punto extremo del vector **E** que corría continuamente a lo largo de la trayectoria de una elipse que tiene una forma particular, siendo el círculo y la línea casos especiales. El período durante el cual se recorría la elipse igualaba al de la onda de luz (es decir, aproximadamente 10^{-15} s), siendo demasiado corto para poderse detectar. Por el contrario, las medidas hechas en la práctica son generalmente promedios en intervalos de tiempo comparativamente largos.

Claramente, sería ventajoso formular una descripción alternativa de la polarización en términos de observables convenientes, esto es, de irradiancia. Nuestras motivaciones van bastante allá de las motivaciones estéticas y pedagógicas siempre presentes. El formalismo que se considerara tiene un significado de largo alcance en otras áreas de estudio, por ejemplo, en la física de partículas (al fin y al cabo, el fotón es una partícula elemental) y en la mecánica cuántica. Sirve en cierto modo para unir los modelos clásicos a los mecano-cuánticos. Pero lo que llama aún más nuestra atención presente son las considerables ventajas prácticas que se cosechan gracias a esta descripción alternativa.

Desarrollaremos un procedimiento elegante para predecir los efectos de sistemas complejos de elementos polarizadores en el estado final de una onda emergente. Las matemáticas, escritas en la forma comprimida de matrices, solamente requerirán el cálculo simple de esas matrices. La complicada lógica asociada con retardos de fase, orientaciones relativas, etc., para una serie en tándem de láminas de onda y polarizadores está casi toda incorporada. Sólo hay que seleccionar unas matrices apropiadas de una tabla, llevándolas al «molino» matemático.

TABLA 8.4 Constantes electro-ópticas (temperatura ambiente, $\lambda_0 = 546{,}1$ nm)

Material	r_{63} (unid. de 10^{-12} m/V)	n_o (aprox.)	$V_{\lambda/2}$ (en kV)
ADP ($NH_4H_2PO_4$)	8,5	1,52	9,2
KDP (KH_2PO_4)	10,6	1,51	7,6
KDA (KH_2AsO_4)	~13,0	1,57	~6,2
KD*P (KD_2PO_4)	~23,3	1,52	~3,4

8.12.1 Los parámetros de Stokes

La representación moderna de la luz polarizada en realidad se remonta al año 1852 al trabajo de G. G. Stokes quien presentó cuatro cantidades que son funciones solamente de las observables de la onda electromagnética y que se denominan ahora **parámetros de Stokes** [23]. El estado de polarización de un haz de luz (bien sea natural, total o parcialmente polarizado) se puede describir en términos de estas cantida-

[22] El lector interesado por la modulación de luz en general debería consultar D. F. Nelson, «The Modulation of Laser Light», *Scientific American* (junio de 1968). Asimismo, véase el cap. 14, vol. II de *Handbook of Optics* (1995).

[23] Mucho del material en esta sección se analiza más extensamente en *Polarized Light: Production and Use*, de Shurcliff, una obra que se considera un clásico en este tema. También se podría ver M. I. Walker, «Matrix Calculus and the Stokes Parameters of Polarized Radiation», *Am. J. Phys.* **22**, 170 (1954) y W. Bickel y W. Bailey. «Stokes Vectors, Mueller Matrices and Polarized Scattered Light», *Am. J. Phys.* **53**, 468 (1985).

des. Determinaremos primero los parámetros operacionalmente, relacionándolos sucesivamente con la teoría electromagnética.

Imaginemos una serie de cuatro filtros, cada uno de los cuales, bajo iluminación *natural,* transmitirá la mitad de la luz incidente, descartando la otra mitad. La elección no es única sino que existe un buen número de posibilidades. Supongamos entonces que el primer filtro sea simplemente isótropo, pasando por todos los estados de igual manera, mientras que el segundo y el tercero son polarizadores lineales cuyos ejes de transmisión son horizontales y a $+45°$ (diagonal a lo largo del primero y tercer cuadrante) respectivamente. El último filtro es un polarizador circular opaco a los estados $\mathscr{L}$. Cada uno de estos cuatro filtros se coloca a solas en la trayectoria del haz que está siendo investigado, midiendo las irradiancias transmitidas I_0, I_1, I_2 e I_3 con un medidor insensible a la polarización (no todos lo son). La definición operacional de los parámetros de Stokes se deduce de las relaciones

$$\mathcal{S}_0 = 2I_0 \tag{8.45a}$$

$$\mathcal{S}_1 = 2I_1 - 2I_0 \tag{8.45b}$$

$$\mathcal{S}_2 = 2I_2 - 2I_0 \tag{8.45c}$$

$$\mathcal{S}_3 = 2I_3 - 2I_0 \tag{8.45d}$$

Obsérvese que $\mathcal{S}_0$ es simplemente la irradiancia incidente mientras que $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ y $\mathcal{S}_3$ especifican el estado de polarización. Entonces $\mathcal{S}_1$ refleja una tendencia de la polarización para asemejarse a un estado $\mathscr{P}$ horizontal (después de lo cual $\mathcal{S}_1 > 0$) o a uno vertical (en cuyo caso $\mathcal{S}_1 < 0$). Cuando el haz no muestra ninguna orientación preferencial con respecto a estos ejes ($\mathcal{S}_1 = 0$) puede ser elíptico a $\pm 45°$, circular o no polarizado. De manera parecida, $\mathcal{S}_2$ implica la tendencia de la luz a asemejarse a un estado $\mathscr{P}$ orientado bien sea en la dirección $+45°$ (cuando $\mathcal{S}_2 > 0$) o en la dirección $-45°$ (cuando $\mathcal{S}_2 < 0$) o en ninguna de las dos ($\mathcal{S}_2 = 0$). De la misma forma, $\mathcal{S}_3$ revela una tendencia del haz a tener sentido a derechas ($\mathcal{S}_3 > 0$), sentido izquierdas ($\mathcal{S}_3 < 0$) o ninguno de los dos ($\mathcal{S}_3 = 0$).

Ahora recordemos las expresiones para la luz cuasimonocromática,

$$\mathbf{E}_x(t) = \hat{\mathbf{i}} E_{0x}(t) \cos [(\bar{k}z - \bar{\omega}t) + \varepsilon_x(t)] \tag{8.34a}$$

y

$$\mathbf{E}_y(t) = \hat{\mathbf{j}} E_{0y}(t) \cos [(\bar{k}z - \bar{\omega}t) + \varepsilon_y(t)] \tag{8.34b}$$

donde $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_x(t) + \mathbf{E}_y(t)$. Utilizando estos parámetros de manera clara, los de Stokes se pueden remodelar [24] como

$$\mathcal{S}_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T \tag{8.46a}$$

$$\mathcal{S}_1 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T - \langle E_{0y}^2 \rangle_T \tag{8.46b}$$

$$\mathcal{S}_2 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \cos \varepsilon \rangle_T \tag{8.46c}$$

$$\mathcal{S}_3 = \langle 2E_{0x}E_{0y} \operatorname{sen} \varepsilon \rangle_T \tag{8.46d}$$

Aquí $\varepsilon = \varepsilon_y - \varepsilon_x$ y hemos eliminado la constante $\epsilon_0 c/2$ de tal manera que los parámetros son ahora *proporcionales* a las irradiancias. Para el caso hipotético de luz perfectamente monocromática, $E_{0x}(t)$, $E_{oy}(t)$ y $\varepsilon(t)$ son independientes del tiempo y sólo se necesita eliminar los paréntesis $\langle\ \rangle$ en la ecuación (8.46) para obtener los parámetros de Stokes aplicables. Es interesante observar que estos mismos resultados se pueden obtener promediando en el tiempo la ecuación (8.14), que es la ecuación general para luz elíptica [25].

Si el haz no está polarizado $\langle E_{0x}^2 \rangle_T = \langle E_{0y}^2 \rangle_T$ y ninguno tiene cero como promedio porque el cuadrado de la amplitud es siempre positivo. En ese caso, $\mathcal{S}_0 = \langle E_{0x}^2 \rangle_T + \langle E_{0y}^2 \rangle_T$ pero $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = 0$. Los dos últimos parámetros van a cero ya que tanto cos ε como sen ε tienen un promedio de cero independientemente de sus amplitudes. A menudo es conveniente *normalizar* los parámetros de Stokes dividiendo cada uno de ellos por el valor $\mathcal{S}_0$. Esto tiene el efecto de usar un haz incidente de irradiancia unitaria. La serie de parámetros ($\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$) para la luz *natural* en la representación normalizada es entonces (1, 0, 0, 0). Si la luz está polarizada horizontalmente, no tiene componentes verticales, siendo los parámetros normalizados (1, 1, 0, 0). De manera parecida, para la luz polarizada verticalmente, tenemos (1, − 1, 0, 0). Las representaciones de algunos otros estados de polarización se recogen en la tabla 8.5. (Los parámetros se muestran verticalmente por razones que se explicarán más tarde). Obsérvese que para la luz completamente polarizada, de la ecuación (8.46) se deduce que

$$\mathcal{S}_0^2 = \mathcal{S}_1^2 + \mathcal{S}_2^2 + \mathcal{S}_3^2 \tag{8.47}$$

[24] Para los detalles, véase E. Hecht, «Note on an Operational Definition of the Stokes Parameters», *Am. J. Phys.*, **38**, 1156 (1970).

[25] E. Collett, «The Description of Polarization in Classical Physics», *Am. J. Phys.* **36**, 713 (1968).

TABLA 8.5 Vectores de Stokes y Jones para algunos estados.

Estado de polarización	Vectores de Stokes	Vectores de Jones
Estado $\mathscr{P}$ horizontal	$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
Estado $\mathscr{P}$ vertical	$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
Estado $\mathscr{P}$ a $+45°$	$\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
Estado $\mathscr{P}$ a $-45°$	$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$
Estado $\mathscr{R}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$
Estado $\mathscr{L}$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$

Además, para luz parcialmente polarizada se puede demostrar que el grado de polarización [ecuación (8.29)] es

$$V = (\mathscr{S}_1^2 + \mathscr{S}_2^2 + \mathscr{S}_3^2)^{1/2}/\mathscr{S}_0 \tag{8.48}$$

Imaginemos ahora dos ondas cuasimonocromáticas descritas por $(\mathscr{S}_0', \mathscr{S}_1', \mathscr{S}_2', \mathscr{S}_3')$ y $(\mathscr{S}_0'', \mathscr{S}_1'', \mathscr{S}_2'', \mathscr{S}_3'')$ que están superpuestas en alguna región del espacio. Mientras las ondas sean *incoherentes*, cualquiera de los parámetros de Stokes de la resultante será la suma de los parámetros correspondientes de los elementos constituyentes (todos ellos son proporcionales a la irradiancia). En otras palabras, la serie de parámetros que describen la resultante es $(\mathscr{S}_0' + \mathscr{S}_0'', \mathscr{S}_1' + \mathscr{S}_1'', \mathscr{S}_2' + \mathscr{S}_2'', \mathscr{S}_3' + \mathscr{S}_3'')$. Por ejemplo, si un estado $\mathscr{P}$ vertical con densidad de flujo unitario $(1, -1, 0, 0)$ se suma a un *estado incoherente* $\mathscr{L}$ (véase tabla 8.5) de densidad de flujo 2 $(2, 0, 0, -2)$, los parámetros de la onda compuesta serán $(3, -1, 0, -2)$. Se trata de una elipse de densidad de flujo 3, más cerca de la vertical que de la horizontal $(\mathscr{S}_1 < 0)$, con sentido a izquierdas $(\mathscr{S}_3 < 0)$ y con un grado de polarización de $\sqrt{5}/3$.

La serie de parámetros de Stokes para una onda dada se puede visualizar como un *vector;* ya hemos visto cómo se suman dos de tales *vectores* (incoherentes) [26]. Si bien no es el tipo usual de vector tridimensional, esta forma de representación se emplea amplia y ventajosamente en física. Más específicamente, los parámetros $(\mathscr{S}_0, \mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \mathscr{S}_3)$ están dispuestos según la forma que se denomina *vector columna,*

$$\mathscr{S} = \begin{bmatrix}\mathscr{S}_0\\ \mathscr{S}_1\\ \mathscr{S}_2\\ \mathscr{S}_3\end{bmatrix} \tag{8.49}$$

8.12.2 Los vectores de Jones

Otra representación de la luz polarizada que complementa la de los parámetros de Stokes, fue inventada en 1941 por el físico norteamericano R. Clark Jones. La técnica que desarrolló tiene las ventajas de poderse aplicar a haces coherentes siendo, al mismo tiempo, muy concisa. Sin embargo, al contrario de la estructura anterior, es *aplicable solamente a las ondas polarizadas.* En ese caso, parecería que la forma más natural de representar el haz sería en términos del vector eléctrico mismo. Escrito en forma de columna, este *vector de Jones* es

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix}E_x(t)\\ E_y(t)\end{bmatrix} \tag{8.50}$$

donde $E_x(t)$ y $E_y(t)$ son las componentes escalares instantáneas de $\tilde{\mathbf{E}}$. Obviamente, conociendo $\tilde{\mathbf{E}}$, lo conocemos todo acerca del estado de polarización. Y si conservamos la información de fase, podremos manejar ondas coherentes. Con esto en mente se reescribe la ecuación (8.50) como

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix}E_{0x}e^{i\varphi_x}\\ E_{0y}e^{i\varphi_y}\end{bmatrix} \tag{8.51}$$

[26] Los requisitos detallados para que una colección de objetos forme un espacio vectorial y para que ellos mismos sean vectores en tal espacio se analiza, por ejemplo, en Davis, *Introduction to Vector Analysis.*

donde φ_x y φ_y son las fases apropiadas. Los estados $\mathscr{P}$ horizontal y vertical entonces están dados por

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{E}}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{0y}e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \tag{8.52}$$

respectivamente. La suma de dos haces coherentes, al igual que con los vectores de Stokes, está formada por la suma de las componentes correspondientes. Ya que $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_h + \tilde{\mathbf{E}}_v$, cuando, por ejemplo, $E_{0x} = E_{0y}$ y $\varphi_x = \varphi_y$, $\mathbf{E}$ está dado por

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0x}e^{i\varphi_x} \end{bmatrix} \tag{8.53}$$

o, después de factorizar, por

$$\tilde{\mathbf{E}} = E_{0x}e^{i\varphi_x}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.54}$$

que es un estado $\mathscr{P}$ a $+45°$. Este es el caso ya que las amplitudes son iguales y la diferencia de fase es cero.

Hay muchas aplicaciones en las que no es necesario conocer las amplitudes y las fases exactas. En tales casos, podemos *normalizar* la irradiancia a la unidad, renunciando así a alguna información pero ganando con expresiones mucho más simples. Esto se realiza dividiendo ambos elementos en el vector por la misma cantidad escalar (real o compleja) de tal forma que la suma de los cuadrados de las componentes sea uno. Por ejemplo, dividiendo ambos términos de la ecuación (8.53) entre $\sqrt{2}\,E_{0x}e^{i\varphi_x}$ obtenemos

$$\mathbf{E}_{45} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.55}$$

De manera parecida, en forma normalizada

$$\mathbf{E}_h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.56}$$

La luz circular a derechas tiene $E_{0x} = E_{0y}$ y la componente y adelanta la componente x en $90°$. Como estamos usando la forma $(kz - \omega t)$ tendremos que añadir $-\pi/2$ to φ_y entonces

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}} = \begin{bmatrix} E_{0x}e^{i\varphi_x} \\ E_{0x}e^{i(\varphi_x - \pi/2)} \end{bmatrix}$$

Dividiendo ambas componentes por $E_{0x}e^{i\varphi_x}$ tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\pi/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el vector de Jones normalizado es [27]

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{e igualmente} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{L}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \tag{8.57}$$

La suma $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}} + \tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{L}}$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+1 \\ -i+i \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se trata de un estado $\mathscr{P}$ horizontal que tiene una amplitud que es el doble de la de cualquiera de las dos componentes, un resultado que está de acuerdo con nuestros cálculos iniciales de la ecuación (8.10). El vector de Jones para luz elíptica puede obtenerse por el mismo procedimiento usado para llegar a $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}}$ and $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{L}}$, donde ahora E_{0x} puede ser diferente a E_{0y}; la diferencia de fase no necesita ser $90°$. Fundamentalmente, para estados $\mathscr{E}$ verticales y horizontales, sólo hay que estirar la forma circular a fin de formar una elipse multiplicando cualquiera de las dos componentes por un escalar. Así

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix} \tag{8.58}$$

describe una forma posible de luz elíptica horizontal con sentido a derechas.

Dos vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se dicen ortogonales cuando $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$, o de manera parecida, dos vectores complejos son ortogonales cuando $\tilde{\mathbf{A}}\cdot\tilde{\mathbf{B}}^* = 0$. Nos referimos a estados de polarización *ortogonales* cuando sus vectores de Jones son ortogonales. Por ejemplo,

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^*_{\mathscr{L}} = \tfrac{1}{2}[(1)(1)^* + (-i)(i)^*] = 0$$

o

$$\tilde{\mathbf{E}}_h\cdot\tilde{\mathbf{E}}^*_v = [(1)(0)^* + (0)(1)^*] = 0$$

donde el adquirir los complejos conjugados de números reales obviamente no los cambia. Cualquier estado de polarización tendrá un estado ortogonal correspondiente. Obsérvese que

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{L}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^*_{\mathscr{L}} = 1$$

y

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^*_{\mathscr{L}} = \tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{L}}\cdot\tilde{\mathbf{E}}^*_{\mathscr{R}} = 0$$

[27] Si hubiéramos usado $(\omega t - kz)$ para la fase, se habrían intercambiado los términos en $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathscr{R}}$. La notación presente, aunque sea un poco más difícil de conservarla bien (por ejemplo, $-\pi/2$ para un adelanto de fase), se emplea con más frecuencia en los trabajos modernos. Hay que tener cuidado a la hora de consultar referencias (por ejemplo, Shurcliff).

Tales vectores forman un *conjunto ortogonal* como hacen $\tilde{\mathbf{E}}_h$ y $\tilde{\mathbf{E}}_v$. Como hemos visto, cualquier estado de polarización puede describirse con una combinación lineal de los vectores de cualquiera de estas series ortonormales. Las mismas ideas son de importancia considerable en la Mecánica cuántica donde se tratan funciones de onda ortonormales.

8.12.3 Las matrices de Jones y Mueller

Imaginemos un haz incidente polarizado representado por su vector de Jones $\mathbf{E}_i$, que atraviesa un elemento óptico del que sale como un nuevo vector $\mathbf{E}_t$ correspondiente a la onda transmitida. El elemento óptico ha transformado $\tilde{\mathbf{E}}_i$ en $\tilde{\mathbf{E}}_t$, un proceso que puede describirse matemáticamente usando una matriz de 2×2. Recordemos que una matriz no es nada más que una serie de números que tienen definidas unas operaciones de suma y multiplicación. Sea A la matriz de transformación del elemento óptico en cuestión. Entonces

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathscr{A}\tilde{\mathbf{E}}_i \tag{8.59}$$

donde

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{8.60}$$

y los vectores de columna deben tratarse como cualquier otra matriz. Como recordatorio escribimos la ecuación (8.59) como

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{tx} \\ \tilde{E}_{ty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_{ix} \\ \tilde{E}_{iy} \end{bmatrix} \tag{8.61}$$

y, después de desarrollarla,

$$\tilde{E}_{tx} = a_{11}\tilde{E}_{ix} + a_{12}\tilde{E}_{iy}$$

$$\tilde{E}_{ty} = a_{21}\tilde{E}_{ix} + a_{22}\tilde{E}_{iy}$$

En la tabla 8.6 se recoge un breve listado de las matrices de Jones para varios elementos ópticos. A fin de comprender su modalidad de uso, examinemos unas cuantas aplicaciones. Supongamos que $\tilde{\mathbf{E}}_i$ represente un estado $\mathscr{P}$ +45° que atraviesa una lámina de un cuarto de onda cuyo eje rápido es vertical (es decir, en la dirección y). El estado de polarización de la onda emergente se encuentra como sigue, donde por conveniencia eliminamos los factores constantes de amplitud

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_{tx} \\ \tilde{E}_{ty} \end{bmatrix}$$

TABLA 8.6 Matrices de Jones y Mueller

Elemento óptico lineal	Matriz de Jones	Matriz de Mueller
Polarizador lineal horizontal ↔	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal vertical ↕	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal a +45° ↗	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador lineal a −45° ↘	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Lámina de cuarto de onda, eje rápido vertical	$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
Lámina de cuarto de onda, eje rápido horizontal	$e^{i\pi/4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
Polarizador homogéneo circular derecho ↻	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Polarizador homogéneo circular izquierdo ↺	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y entonces $$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

El haz, como bien sabemos, es circular a derechas. Si la onda atraviesa una serie de elementos ópticos representados por las matrices $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \ldots, \mathscr{A}_n$, entonces

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \mathscr{A}_n \cdots \mathscr{A}_2 \mathscr{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$$

Las matrices no conmutan, debiéndose aplicar en el orden oportuno. La onda que sale del primer elemento óptico en la serie es $\mathscr{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$; después de atravesar el segundo elemento se convierte en $\mathscr{A}_2 \mathscr{A}_1 \tilde{\mathbf{E}}_i$, y así sucesivamente. Para ilustrar el proceso, regresemos a la onda analizada anteriormente (es decir, un estado $\mathscr{P}$ a $+45°$), pero que ahora haremos pasar a través de dos láminas de cuarto de onda, ambas con sus ejes rápidos verticales. Entonces, descartando de nuevo los factores de amplitud,

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

después de lo cual

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

y finalmente

$$\tilde{\mathbf{E}}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El haz transmitido es un estado $\mathscr{P}$ a $-45°$, que la lámina de media onda ha girado en un ángulo de 90°. Cuando se emplea la misma serie de elementos ópticos a fin de examinar varios estados, es deseable reemplazar el producto $\mathscr{A}_n \cdots \mathscr{A}_2 \mathscr{A}_1$ por el *sistema matricial* único de 2×2 que se obtuvo llevando a cabo la multiplicación. (El orden en el que debería calcularse es $\mathscr{A}_2 \mathscr{A}_1$, entonces $\mathscr{A}_3 \mathscr{A}_2 \mathscr{A}_1$, etc.).

En 1943, Hans Mueller, entonces profesor de física en el Massachusetts Institute of Technology, diseñó un método de matrices para trabajar con los vectores de Stokes. Recordemos que los vectores de Stokes pueden aplicarse tanto a la luz polarizada como a la luz parcialmente polarizada. El método de Mueller comparte esta cualidad, permitiendo entonces complementar el método de Jones. Este último, contrariamente al primero, puede manejar fácilmente ondas coherentes. Puesto que las matrices de Mueller de 4×4 se aplican de forma muy parecida a las de Jones, no hace falta explicar el método en todos sus detalles; unos cuantos ejemplos proporcionados por la tabla 8.6 serán suficientes. Imaginemos que pasamos una onda no polarizada de irradiancia unitaria a través de un polarizador lineal horizontal; el vector de Stokes de la onda emergente $\mathcal{S}_1$ es

$$\mathcal{S}_t = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La onda transmitida tiene una irradiancia de $\frac{1}{2}$ (por ej., $\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2}$) y está polarizada horizontal y linealmente ($\mathcal{S}_1 > 0$). Para poner otro ejemplo, imaginemos una onda elíptica parcialmente polarizada cuyos parámetros de Stokes se han calculado en, digamos, (4, 2, 0, 3). Su irradiancia es 4; está más horizontal que vertical ($\mathcal{S}_1 > 0$), es dextrógira ($\mathcal{S}_3 > 0$) y su grado de polarización es del 90%. Puesto que ninguno de los parámetros puede ser mayor de $\mathcal{S}_0$, un valor de $\mathcal{S}_3 = 3$ es bastante elevado, indicando así que la elipse se acerca a un círculo. Si ahora hacemos que la onda atraviese una lámina de cuarto de onda con un eje rápido vertical, entonces

$$\mathcal{S}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y, por lo tanto $$\mathcal{S}_t = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La onda emergente tiene la misma irradiancia y grado de polarización pero ahora está parcialmente polarizada linealmente.

Hemos analizado solamente unos pocos de los aspectos más importantes de los métodos matriciales. Este tema se extiende mucho más allá de estas notas introductorias [28].

[28] Se puede tejer un desarrollo más elaborado y matemáticamente satisfactorio en términos de matriz de coherencia. Para ulteriores lecturas, pero más avanzadas, véase O Neill, *Introduction to Statistical Optics*.

PROBLEMAS

8.1 Describa detalladamente el estado de polarización de cada una de las siguientes ondas:

(a) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{j}}E_0 \cos(kz - \omega t)$

(b) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \operatorname{sen} 2\pi(z/\lambda - \nu t) - \hat{\mathbf{j}}E_0 \operatorname{sen} 2\pi(z/\lambda - \nu t)$

(c) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \operatorname{sen}(\omega t - kz - \pi/4)$

(d) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \cos(\omega t - kz + \pi/2)$.

8.2 Considere la perturbación dada por la expresión $\mathbf{E}(z, t) = [\hat{\mathbf{i}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{j}} \cos(\omega t - \pi/2)]E_0 \operatorname{sen} kz$. ¿Qué clase de onda es? Trace un esquema aproximado mostrando sus características principales.

8.3 Demuestre analíticamente que la superposición de un estado $\mathscr{R}$ y $\mathscr{L}$ que tienen diferentes amplitudes, llevará a un estado $\mathscr{E}$, como se muestra en la figura 8.8. ¿Cuál debería ser el valor de ε para que pueda duplicar dicha figura?

8.4 Escriba una expresión para una onda luminosa de estado $\mathscr{P}$ con frecuencia angular ω y amplitud E_o propagándose a lo largo del eje x con su plano de vibración dispuesto a 25° respecto al plano xy. La perturbación es 0 en $t = 0$ y $x = 0$.

8.5* Escriba una expresión para una onda luminosa de estado $\mathscr{P}$ con frecuencia angular ω y amplitud E_o propagándose a lo largo de una línea en el plano xy a 45° respecto al eje x, cuyo plano de vibración esté en el plano xy. En $t = 0$, $y = 0$ y $x = 0$ el campo es cero.

8.6 Escriba una expresión para una onda luminosa de estado $\mathscr{R}$ con frecuencia angular ω propagándose en la dirección positiva x de manera que en $t = 0$ y $x = 0$ el campo $\mathbf{E}$ apunte hacia la dirección negativa z.

8.7* Un haz de luz polarizada linealmente con su campo eléctrico vertical incide perpendicularmente en un polarizador linear ideal con un eje de transmisión vertical. Si la irradiancia del haz incidente es de 200 W/m^2, ¿cuál es la irradiancia del haz transmitido?

8.8* Si 300 W/m^2 de luz llegan hasta un polarizador lineal ideal desde una bombilla normal de tungsteno, ¿cuál es su densidad de flujo radiante al salir?

8.9 Si luz que es inicialmente natural y cuya densidad de flujo es I_i atraviesa dos hojas de HN-32 cuyos ejes de transmisión son paralelos, ¿cuál será la densidad de flujo del haz emergente?

8.10* ¿Cuál será la irradiancia del haz emergente si el analizador del problema anterior se gira 30°?

8.11* La irradiancia de un haz de luz natural es de 400 W/m^2. Incide en el primero de dos polarizadores lineales ideales consecutivos cuyos ejes de transmisión están a una distancia de 40,0°. ¿Cuánta luz emergerá de los dos?

8.12* Como hemos visto en la sección 8.10, las substancias tales como el azúcar y la insulina son *ópticamente activas*; hacen girar el plano de polarización en función de la longitud del camino y la concentración de la disolución. Se coloca un recipiente de cristal entre un par de polarizadores lineales cruzados *HN-50* y el 50% de la luz natural que incide en el primero de ellos se transmite a través del segundo polarizador. ¿Cuál es el ángulo de rotación que la solución de azúcar del recipiente impuso a la luz que pasó por el primer polarizador?

8.13* La luz producida por una linterna normal se hace pasar a través de un polarizador lineal cuyo eje de transmisión es vertical. El haz resultante, con una irradiancia de 200 W/m^2, incide normalmente en un polarizador lineal vertical *HN-50* cuyo eje está desplazado de 30° encima del plano horizontal. ¿Cuánta luz se transmite?

8.14* Luz polarizada linealmente (con una irradiancia de 200 W/m^2) alineada con su vector de campo eléctrico a + 55° desde la vertical, incide perpendicularmente en un polarizador ideal de hoja cuyo eje de transmisión está a + 10° desde la vertical. ¿Qué fracción de la luz incidente emerge?

8.15* Los ejes de transmisión de dos polarizadores de hoja lineales ideales están colocados, con respecto a la vertical, a 10° y 60°, respectivamente. Si un haz de luz polarizada linealmente con su campo eléctrico a 40° entra en el primer polarizador, ¿qué fracción de su irradiancia emergerá?

8.16* Suponga que tenemos un par de polarizadores cruzados con ejes de transmisión vertical y horizontal. La densidad de flujo del haz que sale del primer polarizador es I_1 y, por supuesto, no pasa luz a través del analizador (es decir, $I_2 = 0$). Ahora inserte un polarizador lineal perfecto (*HN-50*) con su eje de transmisión a 45° con la vertical, entre los dos elementos: calcule I_2. Piense acerca del movimiento de los electrones que radian en cada polarizador.

8.17* Imagine que dispone de dos polarizadores lineales perfectos idénticos y una fuente de luz natural. Colóquelos uno tras otro, posi-

cionando su eje a 0° y 50°, respectivamente. Ahora, inserte entre ellos dos un tercer polarizador cuyos ejes de transmisión se hallan a 25°. Si incide una cantidad de luz de 1000 W/m^2, ¿cuánta energía emergerá con y sin el polarizador del medio?

8.18* Considerando que una luz polarizada al azar de 200 W/m^2 incide normalmente en un pila de polarizadores lineales ideales, colocados uno tras otro cuyo eje de transmisión del primero es vertical, el del segundo está a 30°, el del tercero a 60° y el del cuarto a 90°, ¿cuánta luz emergerá?

8.19* Dos polarizadores lineales *HN-50* se colocan uno tras otro. ¿Cuál debería ser el ángulo formado por sus ejes de transmisión para que un haz incidente no polarizado de 100 W/m^2 se reduzca a 30 W/m^2 al salir de ellos?

8.20 Un polarizador ideal se gira a una velocidad ω entre un par similar de polarizadores cruzados estacionarios. Demuestre que la densidad del flujo emergente será modulada a cuatro veces la frecuencia de rotación. Dicho de otra forma, demuestre que

$$I = \frac{I_1}{8}(1 - \cos 4\omega t)$$

donde I_1 es la densidad de flujo que emerge del primer polarizador e I es la densidad de flujo final.

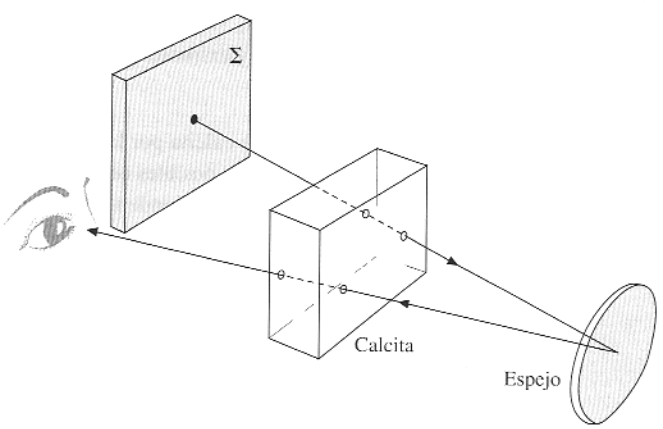


FIGURA P.8.21

8.21 La figura P.8.21 muestra un rayo atravesando un cristal de calcita con incidencia casi normal, reflejándose en un espejo y pasando de nuevo a través del cristal. ¿Verá el observador una doble imagen del punto en Σ?

8.22* Una marca de lápiz en una hoja de papel se cubre con un cristal de calcita. Con iluminación procedente de lo alto, ¿no está ya polarizada la luz que incide en el papel puesto que ha pasado a través del cristal? ¿Por qué, entonces, vemos dos imágenes? Compruebe su solución polarizando la luz de una linterna, reflejándola luego en una hoja de papel. Intente la reflexión especular en vidrio; ¿está polarizada la luz reflejada?

8.23 Analice en detalle lo que ve en la figura P.8.23. El cristal de la fotografía es calcita, con una esquina roma en la parte superior izquierda. Los ejes de transmisión de los dos polarizadores son paralelos a sus lados *cortos*.

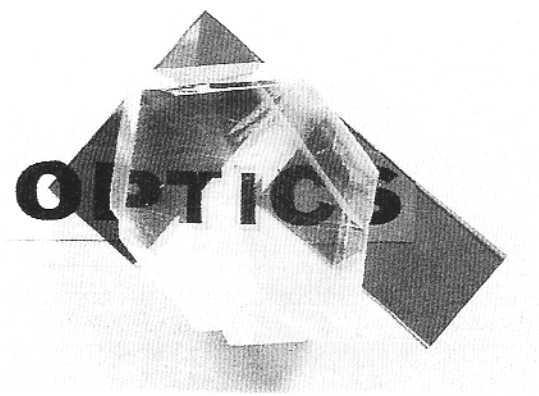
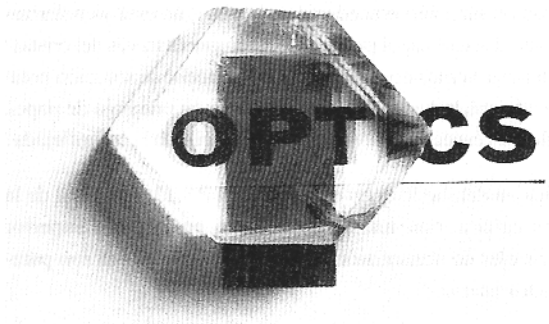


FIGURA P.8.23

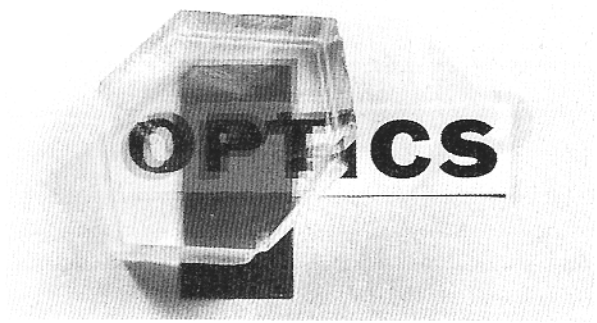
8.24 El cristal de calcita de la figura P.8.24 se muestra con tres orientaciones diferentes. Su esquina roma se halla a la izquierda en *(a)*, en la parte inferior izquierda en *(b)* y abajo en *(c)*. El eje de transmisión del polaroide es horizontal. Explique cada foto, particularmente *(b)*.

8.25 Al hablar de la calcita, explicamos que su elevada birrefringencia se debe al hecho de que los grupos de carbonato están dispuestos en planos paralelos (normales al eje óptico). Muestre en un esquema y explique porqué la polarización del grupo será menor cuando **E** es perpendicular al plano CO_3 y mayor cuando **E** es paralela a él. ¿Qué significa esto con respecto a $v_\perp$ y $v_\parallel$, es decir, las velocidades de la onda cuando **E** está linealmente polarizado perpendicularmente o paralelamente al eje óptico?

8.26* Imagine que tenemos un transmisor de microondas que irradia una onda linealmente polarizada cuyo campo **E** es paralelo a la dirección del dipolo. Deseamos reflejar toda la energía posible de la superficie de un estanque (con un índice de refracción de 9,0). Calcule el ángulo de incidencia necesario y comente la orientación del haz.



(a)



(b)

(c)

FIGURA P.8.24

8.27* ¿A qué ángulo desaparecerá totalmente la reflexión del cielo en la superficie de un estanque ($n = 1{,}33$) al mirarla a través de un filtro polaroide?

8.28* ¿Cuál es el ángulo de Brewster para la reflexión de la luz desde la superficie de un trozo de vidrio ($n_v = 1{,}65$) sumergido en agua ($n_a = 1{,}33$)?

8.29* Un haz de luz es reflejada por la superficie de un líquido desconocido, examinándose su luz con un polarizador lineal de hoja. Se descubre que cuando el eje central del polarizador (es decir, el eje perpendicular al plano de la hoja) se desplaza de la vertical con un ángulo de 54,30°, la luz reflejada se transmite por completo con tal que el eje de transmisión sea paralelo al plano de la interfaz. Con esta información, calcule el índice de refracción del líquido.

8.30* La luz reflejada por una lámina de vidrio ($n_v = 1{,}65$) sumergida en alcohol etílico ($n_e = 1{,}36$) resulta estar total y linealmente polarizada. ¿A qué ángulo se transmitirá en la lámina el haz parcialmente polarizado?

8.31* Un haz de luz natural incide en una interfaz aire-vidrio ($n_{ti} = 1{,}5$) a 40°. Calcule el grado de polarización de la luz reflejada.

8.32* Un haz de luz natural que incide en el aire en una interfaz de vidrio ($n = 1{,}5$) a 70°, se refleja parcialmente. Calcule la reflectancia total. ¿Cómo se diferencia, digamos, con respecto a una incidencia de 56,3°? Explíquelo.

8.33 Un rayo de luz amarilla incide en una lámina de calcita a 50°. La lámina se corta de tal manera que el eje óptico sea paralelo a la cara frontal y perpendicular al plano de incidencia. Encuentre la separación angular entre los dos rayos emergentes.

8.34* Un haz de luz incide normalmente en una lámina de cuarzo cuyo eje óptico es perpendicular al haz. Si $\lambda_o = 589{,}3$ nm, calcule las longitudes de onda de las ondas ordinaria y extraordinaria. ¿Cuáles son sus frecuencias?

8.35 Un haz de luz entra en un prisma de calcita por la izquierda, como se muestra en la figura P.8.35. Hay tres posibles orientaciones del eje óptico de interés particular y éstas corresponden a las direcciones x, y y z. Imagine que tenemos tres de tales prismas. En cada caso dibuje los haces entrante y saliente, mostrando el estado de pola-

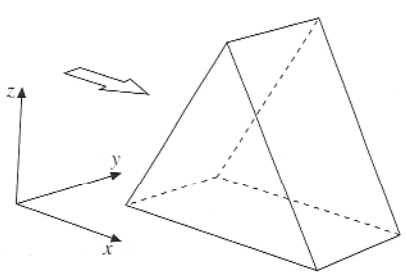


FIGURA P.8.35

rización. ¿Cómo podría utilizarse uno cualquiera de éstos para determinar n_o y n_e?

8.36 El vector de campo eléctrico de un estado $\mathscr{P}$ incidente forma un ángulo de $+30°$ con el eje rápido horizontal de una lámina de cuarto de onda. Describa, en detalle, el estado de polarización de la onda emergente.

8.37 Calcule el ángulo crítico para el rayo ordinario, es decir, el ángulo para la reflexión interna total en el estrato calcita-bálsamo de un prisma Nicol.

8.38* Dibuje un prisma de Wollaston de cuarzo mostrando todos los rayos pertinentes y sus estados de polarización.

8.39 El prisma que se muestra en la figura P.8.39 se denomina *polarizador de Rochon.* Haga un esquema de todos los rayos pertinentes suponiendo:

a) Que esté hecho de calcita

b) Que esté hecho de cuarzo

c) ¿Por qué podría tal dispositivo ser más útil que un polarizador dicroico cuando funciona con luz láser de alta densidad de flujo?

d) ¿Qué característica valiosa del Rochon no se encuentra en un polarizador de Wollaston?

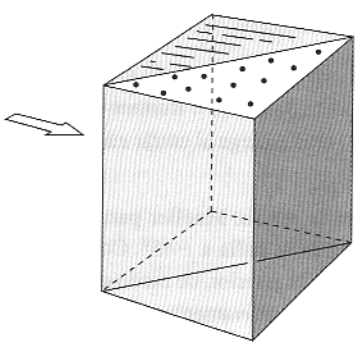


FIGURA P.8.39

8.40* Tome dos polarizadores ideales (el primero con el eje vertical y el segundo horizontal) y coloque entre ellos una pila de 10 láminas de media onda. El eje rápido de la primera se girará $\pi/40$ rad de la vertical mientras que los ejes de las demás estarán a $\pi/40$ rad de la anterior. Calcule el cociente de la irradiancia de emergente a incidente, explicando claramente la lógica empleada.

8.41* Suponga recibir un polarizador lineal y una lámina de onda media. ¿Cómo los identificaría, suponiendo tener también una fuente de luz natural?

8.42* Un estado $\mathscr{S}$ atraviesa una lámina de octavo de onda con su eje rápido horizontal. ¿Cuál es su estado de polarización al salir?

8.43* La figura P.8.43 muestra dos polarizadores lineales polaroides con un portaobjetos de microscopio en el medio al que se le ha pegado un trozo de cinta de celofán. Explique lo que ve.

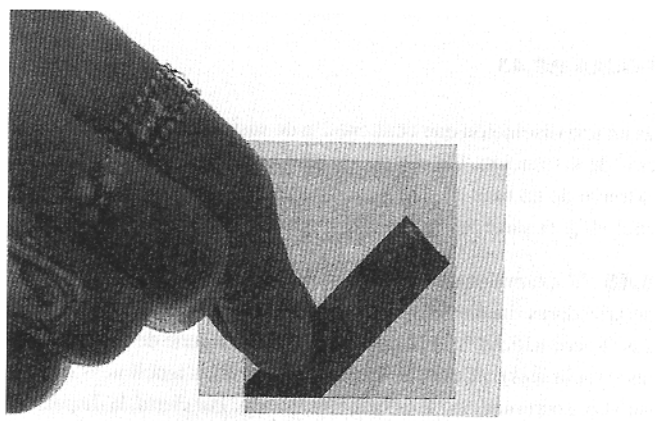


FIGURA P.8.43

8.44 Un compensador de Babinet se coloca a 45° entre polarizadores lineales cruzados y se ilumina con luz de sodio. Al colocar una hoja fina de mica (índices 1,599 y 1,594) en el compensador, todas las bandas negras se desplazan en $\frac{1}{4}$ del espacio que las separa. Calcule la retardancia de la hoja y su espesor.

8.45 Imagine que tenemos luz ambiente polarizada al azar que incide casi normalmente en la superficie de cristal de una pantalla de radar. Una porción de ella se reflejará de manera especular hacia el observador, tendiendo así a obscurecer la imagen. Suponga ahora que cubrimos la pantalla con un polarizador circular a derechas como se muestra en la figura P.8.45. Trace los haces incidente y reflejado indicando sus estados de polarización. ¿Qué le sucede al haz reflejado?

8.46 ¿Es posible que un haz consista de dos estados ortogonales incoherentes $\mathscr{P}$ y no ser de luz natural? Explíquelo. ¿Cómo se podría conseguir tal haz?

8.47* El poder rotatorio específico para la sacarosa disuelta en agua a 20°C ($\lambda_0 = 589{,}3$ nm) es $+66{,}45°$ por 10 cm de trayectoria recorri-

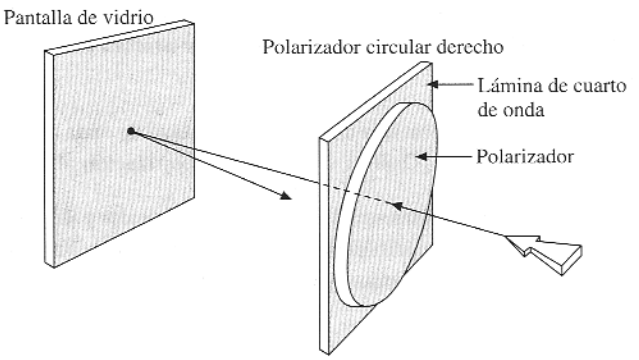


FIGURA P.8.45

da en una disolución que contiene 1 g de sustancia activa (azúcar) por cm^3 de disolución. Un estado vertical $\mathscr{P}$ (luz de sodio) entra en un extremo de un tubo de 1 m que contiene 1.000 cm^3 de solución de la cual 10 g es sacarosa. ¿Con qué orientación emergerá el estado $\mathscr{P}$?

8.48 Al examinar un trozo de material fotoelástico estirado entre polarizadores lineales cruzados, se vería una serie de bandas coloreadas (isocromáticas) y, superpuestas a éstas, una serie de bandas obscuras (isoclínicas). ¿Cómo podríamos eliminar las isoclínicas dejando solo las isocromáticas? Explique su solución. Por cierto, la disposición oportuna es independiente de la orientación de la muestra fotoelástica.

8.49* Considere una celda Kerr cuyas láminas están separadas por una distancia d. Sea ℓ la longitud efectiva de esas láminas (ligeramente diferente de la longitud real debido al campo marginal). Demuestre que

$$\Delta\varphi = 2\pi K\ell V^2/d^2 \qquad [8.41]$$

8.50 Calcule el voltaje de media onda para una celda Pockels longitudinal hecha de ADA (dihidrógeno arseniato de amonio) en $\lambda_0 \approx$ 550 nm donde $r_{63} = 5{,}5 \times 10^{-12}$ y $n_o = 1{,}58$.

8.51 Encuentre un vector $\tilde{\mathbf{E}}_2$ de Jones que represente un estado de polarización ortogonal a

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Dibuje los dos.

8.52* Dos haces de luz incoherente representados por (1, 1, 0, 0) y (3, 0, 0, 3) se superponen.

a) Describa en detalle los estados de polarización de cada uno;

b) Calcule los parámetros de Stokes resultantes relativos al haz combinado y describa su estado de polarización;

c) ¿Cuál es su grado de polarización?

d) ¿Cuál es la luz resultante producida por la superposición de los haces incoherentes (1, 1, 0, 0) y (1, −1, 0, 0)? Explíquelo.

8.53* Demuestre por cálculos directos, recurriendo a las matrices de Mueller, que un haz de irradiancia unitaria de luz natural que atraviesa un polarizador linear vertical se convierte en un estado $\mathscr{P}$. Determine su irradiancia relativa y su grado de polarización.

8.54* Demuestre por cálculos directos, recurriendo a las matrices de Mueller, que un haz de irradiancia unitaria de luz natural que atraviesa un polarizador linear cuyo eje de transmisión se halla a +45°, se convierte en un estado $\mathscr{P}$ a +45°. Determine su irradiancia relativa y su grado de polarización.

8.55* Demuestre por cálculos directos, recurriendo a las matrices de Mueller, que un haz de estado $\mathscr{P}$ horizontal que atraviesa una lámina de $\frac{1}{4}\lambda$-cuyo eje rápido es horizontal, emerge inmutado.

8.56* Confirme que la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

actuará como matriz de Mueller para una lámina de cuarto de onda cuyo eje rápido se halla a +45°. Ilumine con luz polarizada lineal a 45°. ¿Qué pasa? ¿Qué emerge al entrar en el dispositivo un estado $\mathscr{P}$ horizontal?

8.57 Establezca la matriz Mueller para una lámina de cuarto de onda cuyo eje rápido se halla a −45°. Compruebe que dicha matriz anula efectivamente la anterior, de modo que un haz que atraviesa las dos láminas de onda sucesivamente queda inalterado.

8.58* Haga pasar un haz de luz lineal polarizada horizontalmente a través de cada una de las láminas $\frac{1}{4}\lambda$ de las dos cuestiones anteriores y describa los estados de la luz emergente. Explique cuál de las componentes del campo va por delante de las demás y las conclusiones a las que se llega comparando la figura 8.7 con dichos resultados.

8.59 Use la tabla 8.6 pare deducir una matriz de Mueller para una lámina de media onda que tiene su eje rápido vertical. Utilice su resultado para convertir un estado $\mathscr{R}$ en un estado $\mathscr{L}$. Verifique que la

misma lámina de onda convierte un estado $\mathscr{L}$ en un estado $\mathscr{R}$. Avanzando o retardando la fase relativa en $\pi/2$ debería proporcionar el mismo efecto. Compruébelo deduciendo la matriz para una lámina de media onda con el eje rápido horizontal.

8.60 Construya una posible matriz de Mueller para un polarizador circular a derechas que consta de un polarizador lineal y de una lámina de cuarto de onda. Tal dispositivo es obviamente un tren inhomogéneo de dos elementos, difiriendo del polarizador circular *homogéneo* de la tabla 8.6. Compruebe que su matriz convierte la luz natural en un estado $\mathscr{R}$. Demuestre que transmitirá estados $\mathscr{R}$ como lo hará la matriz homogénea. Su matriz debería convertir estados $\mathscr{L}$ incidentes en el lado de entrada en estados $\mathscr{R}$ mientras que el polarizador homogéneo los absorberá por completo. Compruébelo.

8.61* Si el modulador de celda Pockels que se muestra en la figura 8.65 se ilumina con luz de irradiancia I_i, transmitirá un haz de irradiancia I_t tal que

$$I_t = I_i \operatorname{sen}^2(\Delta\varphi/2)$$

Haga una gráfica de I_t/I_t frente al voltaje aplicado. ¿Cuál es el significado del voltaje que corresponde a la transmisión máxima? ¿Cuál es el voltaje más bajo por encima de cero que hará que I_t sea cero para ADP ($\lambda_0 = 546{,}1$ nm)? ¿Cómo pueden volverse a arreglar las cosas para conseguir un valor máximo de I_t/I_t para voltaje cero? En esta nueva configuración, ¿qué irradiancia resulta cuando $V = V_{\lambda/2}$?

8.62 Construya una matriz de Jones para una lámina isótropa de material absorbente con un coeficiente de transmisión de amplitud t. A veces, sería deseable conservar información sobre la fase, ya que aunque $t = 1$ tal lámina es todavía un retardador isótropo de fase. ¿Cuál es la matriz de Jones para una región del vacío? ¿Cuál es para un absorbente perfecto?

8.63 Construya una matriz de Mueller para una lámina isótropa de material absorbente con un coeficiente de transmisión de amplitud t. ¿Qué matriz de Mueller despolarizará por completo cualquier onda sin afectar su irradiancia? (No tiene un duplicado físico).

8.64 Recordando la ecuación (8.29), escriba una expresión para la componente de densidad de flujo polarizada al azar (I_n) de un haz parcialmente polarizado en términos de los parámetros de Stokes. A fin de comprobar su resultado, añada un vector de Stokes polarizado al azar de densidad de flujo 4 a un estado $\mathscr{R}$ de densidad de flujo 1. A continuación, compruebe si se obtiene $I_n = 4$ para la onda resultante.

9 Interferencia

Las intrincadas distribuciones de color que resplandecen sobre una mancha de aceite en el pavimento asfáltico mojado son el resultado de una de las manifestaciones más comunes del fenómeno de interferencia [1]. En una escala macroscópica, podríamos considerar el problema relacionado con la interacción de las ondulaciones de la superficie en un estanque de agua. Nuestra experiencia diaria con esta clase de situación nos permite visualizar una distribución compleja de perturbaciones (tal y como se muestra, por ejemplo, en la figura 9.1). Puede haber regiones en donde dos (o más) ondas se hayan superpuesto, anulándose mutuamente parcialmente o incluso completamente. Otras regiones podrían existir aún en la distribución, donde los valles o las crestas resultantes fueran más pronunciados que los de cualquiera de las ondas constitutivas. Después de superponerse, las ondas individuales se separan y siguen adelante, completamente inalteradas por su encuentro anterior.

Si bien este tema podría estudiarse bajo la perspectiva de la electrodinámica cuántica (EDC) (pág. 142), nuestro planteamiento será mucho más sencillo. La teoría ondulatoria de la naturaleza electromagnética de la luz proporciona una base natural como punto de salida. Recordemos que la expresión que describe la perturbación óptica es una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal homogénea de segundo orden [ecuación (3.22)]. Puesto que, como hemos visto, obedece al importante *principio de superposición,* la intensidad del campo eléctrico resultante **E**, en un punto en el espacio donde dos o más ondas de luz se superponen, es igual a la *suma vectorial* de las perturbaciones constitutivas individuales. Por lo tanto, brevemente, ***la interferencia óptica equivale a la interacción de dos o más ondas de luz que producen una irradiancia resultante que se desvía de la suma de las irradiancias componentes.***

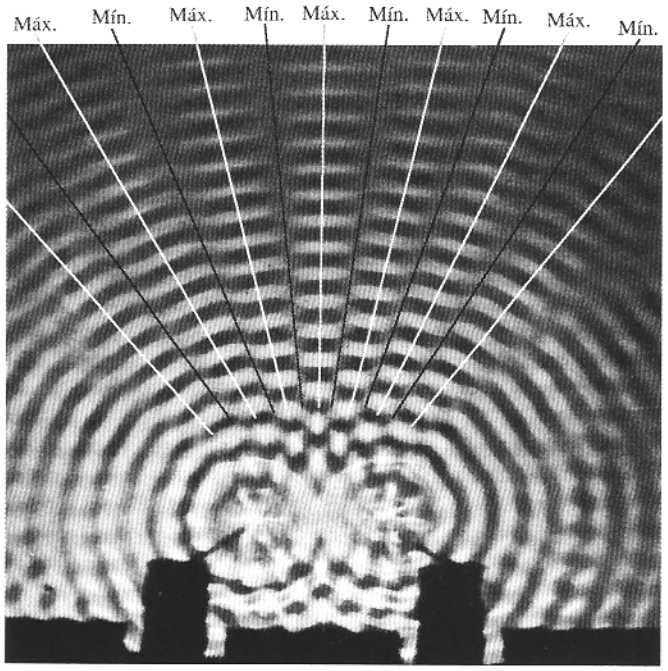


FIGURA 9.1 Ondas en agua de dos fuentes puntuales en fase en una cubeta de ondas. En el medio de la distribución, los picos de la onda (franjas brillantes delgadas) y los valles (franjas negras delgadas) de la onda se hallan dentro de áreas alargadas en forma de cuña (máximos) separadas por zonas oscuras estrechas de quietud (mínimos). El equivalente óptico es la distribución de campo eléctrico ilustrada en la FIGURA 9.3c. (Fotos cedidas por PSSC *College Physics,* 1968, @ 1965 Educational Development Center, Inc.)

De entre la multitud de sistemas ópticos que producen interferencia escogeremos algunos de los más importantes para exami-

[1] La película de agua en el asfalto permite a la película de aceite adquirir la forma de una superficie plana y lisa. El asfalto negro absorbe la luz transmitida evitando la retrorreflexión, que tendería a oscurecer las franjas.

narlos. Los sistemas interferométricos se dividirán, con el propósito de analizarlos, en dos grupos: *división del frente de onda* y *división de amplitud.* En el primer caso, se usan partes del frente de onda primario bien sea directamente como fuentes para emitir ondas secundarias o conjuntamente con sistemas ópticos para producir fuentes virtuales de ondas secundarias. Estas ondas secundarias se juntan para dar lugar a interferencia. En el caso de división de amplitud, la onda primaria se secciona en dos segmentos que viajan por caminos diferentes antes de recombinarse e interferir.

9.1 Consideraciones generales

Ya hemos examinado el problema de la superposición de dos ondas escalares (sección 7.1) y, en muchos aspectos, estos resultados serán nuevamente aplicables. Sin embargo, la luz es, por supuesto, un fenómeno vectorial y los campos eléctricos y magnéticos son campos vectoriales. El reconocer este hecho resulta trascendental para cualquier análisis intuitivo de la interferencia si bien se dan muchas situaciones en las que el sistema óptico particular está configurado de tal manera que la naturaleza vectorial de la luz tiene poco significado práctico. Vamos a derivar, por lo tanto, las ecuaciones de interferencia básicas dentro del contexto del modelo vectorial, delineando sucesivamente las condiciones de aplicación del tratamiento escalar.

De acuerdo con el principio de superposición, la intensidad del campo eléctrico $\mathbf{E}$, en un punto en el espacio, procedente de los campos separados $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$... de varias fuentes contributivas, viene dada por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots \tag{9.1}$$

La perturbación óptica, o campo luminoso $\mathbf{E}$, varía en el tiempo a una velocidad muy rápida, aproximadamente

$$\text{de } 4.3 \times 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{a} \quad 7.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

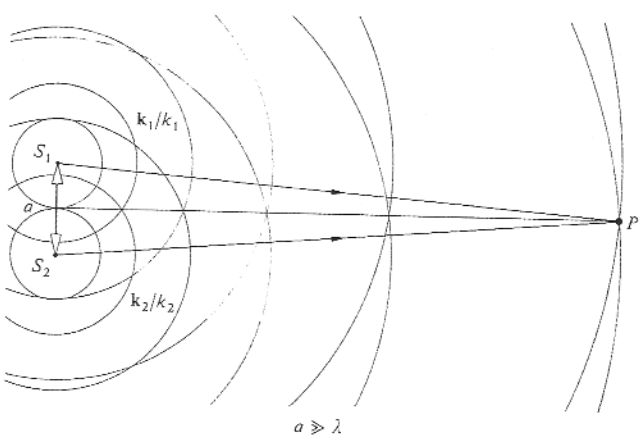
de tal forma que el campo real resulta ser una cantidad poco práctica de detectar. Por otro lado, la irradiancia I puede medirse directamente utilizando una gran variedad de sensores (por ejemplo, fotocélulas, bolómetros, emulsiones fotográficas u ojos). Por consiguiente, resulta mejor plantear el estudio de la interferencia recurriendo a la irradiancia.

Gran parte del análisis que sigue puede llevarse a cabo sin especificar la forma particular de los frentes de onda, siendo por lo tanto los resultados bastante generales (problema 9.1). Sin embargo, con el propósito de simplificarlo, consideremos dos fuentes puntuales S_1 y S_2 que emiten ondas monocromáticas de la misma frecuencia en un medio homogéneo. Sea su separación a mucho mayor que λ. Colóquense los puntos de observación P lo suficientemente lejos de las fuentes para que en P los frentes de onda sean planos (figura 9.2). Por el momento, consideremos solamente ondas linealmente polarizadas cuya forma es

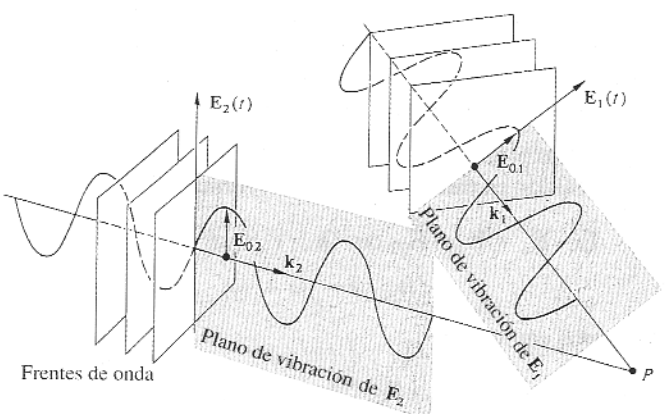
$$\mathbf{E}_1(r,t) = \mathbf{E}_{01} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_1) \tag{9.2a}$$

y

$$\mathbf{E}_2(r,t) = \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_2) \tag{9.2b}$$



(a)



(b)

FIGURA 9.2 Ondas de dos fuentes puntuales superpuestas espacialmente.

En el capítulo 3 vimos que la irradiancia en P viene dada por

$$I = \epsilon v \langle \mathbf{E}^2 \rangle_T$$

Puesto que solamente nos ocuparemos de las irradiancias relativas dentro del mismo medio, vamos a omitir, al menos por el momento, las constantes y pondremos

$$I = \langle \mathbf{E}^2 \rangle_T$$

Lo que expresa $\langle \mathbf{E}^2 \rangle_T$ es, por supuesto, el promedio temporal de la magnitud de la intensidad de campo eléctrico al cuadrado o $\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle_T$. Por consiguiente,

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$$

donde ahora

$$\mathbf{E}^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$$

y, por lo tanto

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \tag{9.3}$$

Tomando el promedio el tiempo de ambos lados, la irradiancia pasa a ser

$$I = I_1 + I_2 + I_{12} \tag{9.4}$$

siempre que

$$I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle_T \tag{9.5}$$

$$I_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle_T \tag{9.6}$$

y

$$I_{12} = 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle_T \tag{9.7}$$

La última expresión se denomina *término de interferencia*. Para calcularlo en este caso específico, formamos

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_1) \times \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varepsilon_2) \tag{9.8}$$

o de forma equivalente

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} [\cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_1) \times \cos \omega t + \operatorname{sen}(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_1) \operatorname{sen} \omega t] \times [\cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_2) \cos \omega t + \operatorname{sen}(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_2) \operatorname{sen} \omega t] \tag{9.9}$$

Recordemos que el promedio temporal de una función $f(t)$, calculado en un intervalo T es

$$\langle f(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t')\, dt' \tag{9.10}$$

El período τ de las funciones armónicas es $2\pi/\omega$ y para nuestros propósitos presentes $T >> \tau$. En ese caso, el coeficiente $1/T$ frente a la integral tiene un efecto dominante. Después de multiplicar y calcular el promedio de la ecuación (9.9), obtenemos

$$\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle_T = \tfrac{1}{2} \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \varepsilon_2)$$

donde se recurrió al hecho (pág. 48) de que $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$, $\langle \operatorname{sen}^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{2}$, y $\langle \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t \rangle_T = 0$. El término de interferencia es por lo tanto

$$I_{12} = \mathbf{E}_{01} \cdot \mathbf{E}_{02} \cos \delta \tag{9.11}$$

y δ, igual a $(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, es la diferencia de fase resultante de la combinación de una diferencia de longitud de camino y una diferencia del ángulo de defase inicial. Obsérvese que si $\mathbf{E}_{01}$ y $\mathbf{E}_{02}$ (y, por consiguiente, $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$) son perpendiculares, $I_{12} = 0$ e $I = I_1 + I_2$. Tales dos estados ortogonales $\mathscr{P}$ se combinarán para dar un estado $\mathscr{L}$, $\mathscr{P}$ o $\mathscr{C}$, pero la distribución de densidad de flujo quedará inalterada.

La situación más corriente en el trabajo que sigue corresponde a $\mathbf{E}_{01}$ paralela a $\mathbf{E}_{02}$. En ese caso, la irradiancia se reduce al valor calculado en el análisis escalar de la sección 7.1. Bajo esas condiciones

$$I_{12} = E_{01} E_{02} \cos \delta$$

Esto puede escribirse más oportunamente dándose cuenta de que

$$I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle_T = \frac{E_{01}^2}{2} \tag{9.12}$$

e

$$I_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle_T = \frac{E_{02}^2}{2} \tag{9.13}$$

El término de interferencia queda

$$I_{12} = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$$

donde la irradiancia total es

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \tag{9.14}$$

En varios puntos del espacio, la irradiancia resultante puede ser mayor, menor o igual a $I_1 + I_2$ dependiendo del valor de

I_{12}, es decir, dependiendo de δ. Un máximo en la irradiancia se obtiene cuando $\cos\delta = 1$, de modo que

$$I_{\text{máx}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \tag{9.15}$$

cuando $\delta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$

En este caso de ***interferencia constructiva total,*** el desfase entre las dos ondas es un múltiplo entero de 2π mientras que las perturbaciones están *en fase.* Cuando $0 < \cos\delta < 1$ las ondas *están fuera de fase,* $I_1 + I_2 < I < I_{\text{máx}}$ y el resultado se denomina *interferencia constructiva.* Con $\delta = \pi/2$, $\cos\delta = 0$, las perturbaciones ópticas están desfasadas 90° e $I = I_1 + I_2$. Para $0 > \cos\delta > -1$ disponemos de las condiciones de *interferencia destructiva,* $I_1 + I_2 > I > I_{min}$. Una irradiancia mínima se produce al estar las ondas desfasadas 180°, los valles se superponen a las crestas, $\cos\delta = -1$ y

$$I_{\text{min}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \tag{9.16}$$

Esto se produce cuando $\delta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots$ y se denomina ***interferencia destructiva total.***

Otro caso algo especial pero muy importante se da cuando las amplitudes de ambas ondas que alcanzan P en la figura 9.2 son iguales (es decir, $\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{02}$). Puesto que las contribuciones de la irradiancia de ambas fuentes son iguales, sea $I_1 = I_2 = I_0$. La ecuación (9.14) puede ahora escribirse

$$I = 2I_0(1 + \cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2} \tag{9.17}$$

de la que se deduce que $I_{\text{mín}} = 0$ e $I_{\text{máx}} = 4I_0$. Para un análisis en términos del ángulo entre los dos haces, véase el problema 9.3.

La ecuación (9.14) también se aplica a ondas esféricas emitidas por S_1 y S_2. Dichas ondas pueden escribirse como

$$\mathbf{E}_1(r_1, t) = \mathbf{E}_{01}(r_1)\exp[i(kr_1 - \omega t + \varepsilon_1)] \tag{9.18a}$$

y

$$\mathbf{E}_2(r_2, t) = \mathbf{E}_{02}(r_2)\exp[i(kr_2 - \omega t + \varepsilon_2)] \tag{9.18b}$$

Los términos r_1 y r_2 son los radios de los frentes de onda esféricos que se superponen en P, es decir, ellos especifican las distancias de las fuentes hasta P. En este caso

$$\delta = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \tag{9.19}$$

La densidad de flujo en la región alrededor de S_1 y S_2 ciertamente variará de punto a punto al variar $(r_1 - r_2)$. No obstante, según el principio de conservación de la energía, el promedio espacial de I debería permanecer constante e igual al promedio de $I_1 + I_2$. El promedio espacial de I_{12} deberá ser por lo tanto cero, propiedad ésta que queda comprobada por la ecuación (9.11) ya que el promedio del término coseno es, en efecto, cero. (Para un análisis más detallado sobre este punto véase el problema 9.2).

La ecuación (9.17) se podrá aplicar cuando la separación entre S_1 y S_2 sea pequeña en comparación con r_1 y r_2 y cuando la región de interferencia también sea pequeña en el mismo sentido. Bajo estas circunstancias, $\mathbf{E}_{01}$ y $\mathbf{E}_{02}$ pueden considerarse independientes de la posición, es decir, constantes en la pequeña región examinada. Si las fuentes emisoras son de igual intensidad, $\mathbf{E}_{01} = \mathbf{E}_{02}$, $I_1 = I_2 = I_0$ y tenemos

$$I = 4I_0\cos^2\tfrac{1}{2}[k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)]$$

Los máximos de irradiancia ocurren cuando

$$\delta = 2\pi m$$

siempre que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Del mismo modo, los mínimos para los cuales $I = 0$, aparecen cuando

$$\delta = \pi m'$$

donde $m' = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \ldots$ o, queriendo, $m' = 2m + 1$. Utilizando la ecuación (9.19), estas dos expresiones pueden reescribirse de tal forma que la máxima irradiancia se produce cuando

$$(r_1 - r_2) = [2\pi m + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]/k \tag{9.20a}$$

y la mínima cuando

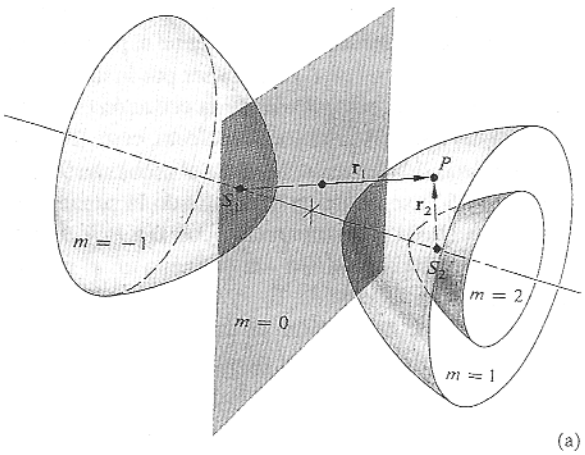
$$(r_1 - r_2) = [\pi m' + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)]/k \tag{9.20b}$$

Cualquiera de estas ecuaciones define una familia de superficies, cada una de las cuales es un hiperboloide de revolución. Los vértices de los hiperboloides están separados por distancias iguales a las partes derechas de las ecuaciones (9.20a) y (9.20b). Los focos están localizados en S_1 y S_2. Si las ondas están en fase en el emisor, $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0$ y las ecuaciones (9.20a) y (9.20b) pueden simplificarse a

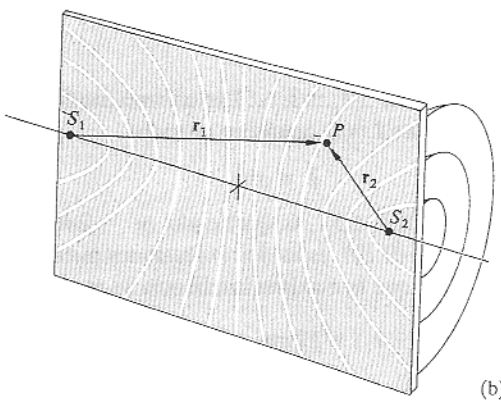
[máximos] $$(r_1 - r_2) = 2\pi m/k = m\lambda \tag{9.21a}$$

[mínimos] $$(r_1 - r_2) = \pi m'/k = \tfrac{1}{2}m'\lambda \tag{9.21b}$$

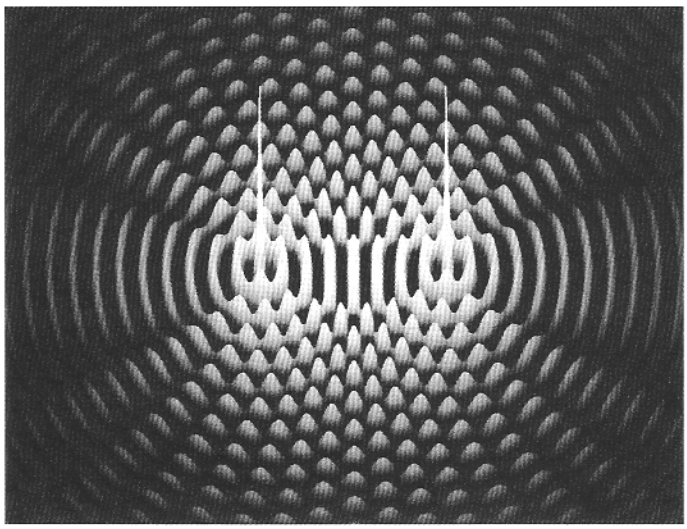
para irradiancia máxima y mínima, respectivamente. La figura 9.3a muestra algunas de las superficies sobre las cuales se produce irradiancia máxima. Las zonas claras y obscuras que se verían en una pantalla colocada en la región de interferencia se



(a)



(b)



(c)

FIGURA 9.3 (a) Superficies hiperbólicas de irradiancia máxima para dos fuentes puntuales. La cantidad m es positiva donde $r_1 > r_2$. (b) Aquí se ve cómo los máximos de irradiancia están distribuidos en un plano que contiene a S_1 y S_2. (c) Distribución de campo eléctrico en el plano que se muestra en (b). Los máximos elevados son las fuentes puntuales S_1 y S_2. Obsérvese que el espaciado de las fuentes es diferente en (b) y (c). (Foto cedida por The Optics Project, Mississippi State University.)

denominan **franjas de interferencia** (figura 9.3b). Obsérvese que la franja central brillante, equidistante de las dos fuentes, es la denominada franja de orden cero ($m = 0$) que está horquillada por los mínimos $m' = \pm 1$ y éstos, a su vez, están acotados por los máximos de primer orden ($m = \pm 1$) que están horquillados por los mínimos $m' = \pm 3$, etc.

Puesto que la longitud de onda λ para la luz es muy pequeña, en las inmediaciones y en ambos lados del plano $m = 0$, se darán muchas superficies que corresponden al nivel más bajo de m. Por lo tanto, varias franjas paralelas bastante rectas aparecerán en una pantalla colocada perpendicularmente a ese plano ($m = 0$) y en sus inmediaciones. En este caso, valdrá la aproximación $r_1 \approx r_2$. Si sucesivamente se desplazan S_1 y S_2 normalmente a la línea $\overline{S_1S_2}$, las franjas se desplazarán sencillamente paralelamente a ellas mismas. *Dos rendijas estrechas generarán un gran número de franjas perfectamente superpuestas, aumentando así la irradiancia y dejando a la región central de la distribución de dos fuentes puntuales prácticamente inalterada.*

9.2 Condiciones para la interferencia

Si dos haces deben interferir para producir una distribución estable, su frecuencia tiene que ser casi igual ya que una diferencia de fre-

cuencia significativa resultaría en un desfase de variación rápida y dependiente del tiempo que, a su vez, haría que I_{12} se promediara a cero durante el intervalo de detección (véase sección 7.1). Sin embargo, si ambas fuentes emiten luz blanca, las componentes rojas interferirán con las rojas y las azules con las azules. Muchas distribuciones monocromáticas superpuestas, bastante similares y ligeramente desplazadas producirán una distribución global de luz blanca que no será tan nítida o extensa como una distribución cuasimocromática, sin embargo, la luz blanca producirá interferencia observable.

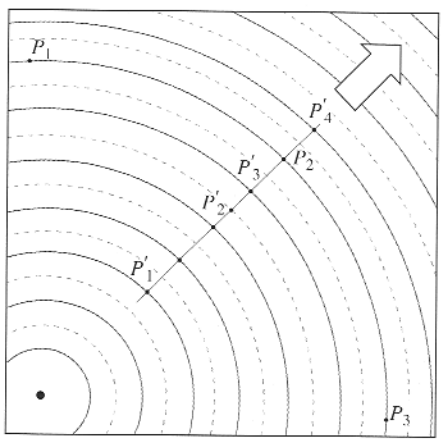
Las distribuciones más claras existirán cuando las amplitudes de las ondas parásitas sean iguales o casi iguales. Las regiones centrales de las franjas oscuras y claras corresponden entonces a interferencia completamente destructiva o constructiva, respectivamente, que dan como resultado un contraste máximo.

Para poder observar una distribución de franjas, las dos fases no tienen por qué estar en fase una con otra. Una figura de interferencia ligeramente desplazada pero, por otro lado, idéntica se dará si entre las fuentes existe un defase inicial, siempre y cuando permanezca constante. Dichas fuentes (que pueden estar en fase o no pero que marchan siempre juntas) se denominan **coherentes**[2].

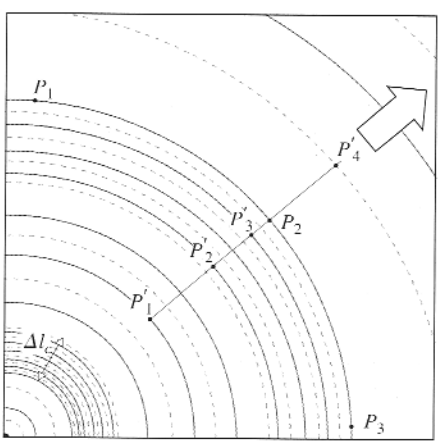
9.2.1 Coherencia espacial y temporal

Cabe recordar que a raíz de la naturaleza granular del proceso de emisión, la luz producida por las fuentes cuasimonocromáticas convencionales es una mezcla de trenes de onda de fotones. En cada punto iluminado en el espacio existe un campo neto que oscila bien (a través de aproximadamente un millón de ciclos) durante menos de 10 ns antes de cambiar de fase al azar. Este intervalo en el que la onda luminosa se asemeja a una sinusoide es una medida de su **coherencia temporal**. Se trata del intervalo de tiempo medio en el que la onda luminosa oscila de manera previsible que ya definimos como tiempo de coherencia de la radiación. Cuanto mayor sea el tiempo de coherencia, mayor será la coherencia temporal de la fuente.

Como puede observarse en un punto fijo del espacio, la onda luminosa que pasa parece tener un aspecto sinusoidal para algunas oscilaciones entre cambios abruptos de fase. La longitud espacial correspondiente en la que la onda luminosa oscila de manera regular y previsible es la longitud de coherencia [ecuación (7.64)]. Nuevamente, será oportuno imaginar el rayo de luz como una progresión de grupos de onda bien definidos, más o menos sinusoidales con longitud media Δl_c, cuyas fases no están correlacionadas entre sí. Recuérdese que la ***coherencia temporal es una manifestación de la pureza espectral***. Si la luz fuera idealmente monocromática, la onda sería una sinusoide perfecta con una longitud de coherencia infinita. Ninguna fuente real cumple esta expectativa y todas emiten un rango de frecuencias, aunque bastante estrecho. Por ejemplo, una lámpara de descarga normal de laboratorio tiene una longitud de coherencia de algunos milímetros, mientras que ciertos láseres proporcionan normalmente longitudes de coherencia de decenas de kilómetros.



(a)



(b)

FIGURA 9.4 Coherencia temporal y espacial. (a) Aquí las ondas exhiben perfectamente ambas formas de coherencia. (b) Aquí hay coherencia espacial completa mientras que la coherencia temporal es parcial.

[2] El capítulo 10 está dedicado al estudio de la coherencia, por lo tanto aquí solamente analizaremos los aspectos que son inmediatamente pertinentes.

En la figura 9.4 se recogen algunas de estas ideas. En (*a*) la onda que surge de una fuente puntual, es monocromática y su coherencia temporal es completa. Lo que acontece en P'_1 volverá a ocurrir, un instante más tarde, en P'_2 y a continuación en P'_3 —siendo todo esto perfectamente previsible. De hecho, al observar P'_4 podemos saber el comportamiento de la onda en P'_1 en un momento cualquiera. Cada punto en la onda está correlacionado, siendo su tiempo de coherencia ilimitado. Por el contrario, en la figura 9.4*b* se muestra una fuente puntual cuya frecuencia cambia de vez en cuando. Ahora no hay correlación en la onda en aquellos puntos que están lejos como P'_1 y P'_4. Las ondas no disponen de la coherencia temporal global que manifestaron en (*a*), pero no son del todo imprevisibles ya que en puntos cercanos como P'_2 y P'_3 su comportamiento está correlacionado de alguna forma. Se trata de un ejemplo de la *coherencia temporal parcial*, una medida de la cual es la longitud de coherencia— la distancia más corta en la que la perturbación es sinusoidal, es decir, la distancia en la que la fase es previsible.

Obsérvese que, en ambas partes de la figura 9.4, que el comportamiento de las ondas en los puntos P_1, P_2 y P_3 está totalmente correlacionado. Cada uno de los dos flujos ondulatorios surge de una sola fuente puntual y en ambos casos P_1, P_2 y P_3 se hallan en el mismo frente de onda; las perturbaciones en cada uno de estos puntos separados lateralmente están en fase y permanecen en fase. Por lo tanto, ambas ondas exhiben **coherencia espacial** completa. Por el contrario, supongamos que la fuente sea ancha, es decir, que conste de muchas fuentes puntuales ampliamente espaciadas (monocromáticas de período τ), como en la figura 9.5. Si pudiéramos hacer una fotografía de la distribución ondulatoria de la figura 9.5 cada τ segundos, sería la misma; cada frente de onda se reemplazaría por otro idéntico, a una distancia de una longitud de onda detrás de aquél. Las perturbaciones en P'_1, P'_2 y P'_3 están correlacionadas y la onda es temporalmente coherente.

Ahora, insertemos algo de realismo; supongamos que cada fuente puntual cambie de fase rápidamente y al azar, emitiendo trenes de onda sinusoidales cuya extensión sea de 10-ns. Las ondas de la figura 9.5 cambiarían de fase al azar, desplazándose, combinándose y volviéndose a combinar a un ritmo frenético. Las perturbaciones en P'_1, P'_2 y P'_3 sólo estarían correlacionadas durante un tiempo inferior a 10 ns mientras que el campo ondulatorio en dos puntos laterales, incluso modestamente espaciados, como P_1 y P_2 estaría casi completamente sin correlación según el tamaño de la fuente. El rayo que desprende la llama de una vela o un rayo de luz solar constituyen un tumulto multifrecuencia muy similar a éste.

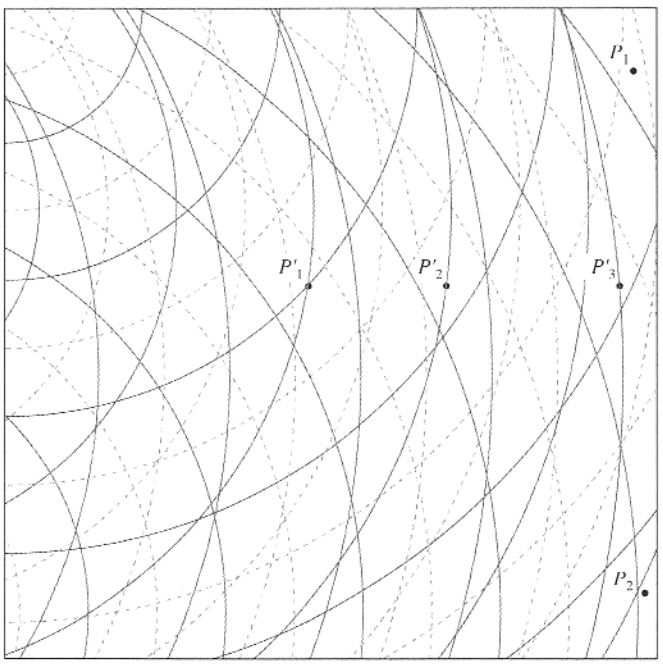


FIGURA 9.5 Con múltiples (aquí hay cuatro) fuentes puntuales muy espaciadas, la onda resultante es aún coherente. Sin embargo, si esas fuentes cambian de fase rápidamente y al azar, tanto la coherencia espacial como la temporal disminuyen consecuentemente.

Se puede prever que dos fuentes normales y corrientes, dos bombillas, mantengan una fase relativa constante durante un tiempo no superior a Δt_c, por lo tanto la figura de la interferencia que producen se desplazará al azar en el espacio a una velocidad excesivamente elevada que se promedia y resulta difícil de observar. Hasta la llegada del láser, era un principio práctico que dos fuentes individuales no podrían nunca producir una figura de interferencia observable. El tiempo de coherencia de los láseres, sin embargo, puede apreciarse y se pudo observar y fotografiar la interferencia por láseres independientes. Los medios más corrientes para solucionar este problema con fuentes térmicas comunes es hacer que una fuente produzca dos fuentes secundarias coherentes.

9.2.2 Las leyes de Fresnel-Arago

En la sección 9.1 supusimos que los dos vectores de perturbaciones ópticas superpuestos estaban linealmente polarizados y paralelos. No obstante, las fórmulas se aplican también a situaciones más

complejas porque este estudio es realmente aplicable independientemente del estado de polarización de las ondas. Para poder notar esto, recordemos que cualquier estado de polarización puede sintetizarse utilizando dos estados ortogonales $\mathcal{P}$. En el caso de la luz natural (no polarizada) estos estados $\mathcal{P}$ son mutuamente incoherentes, pero ello no representa ninguna dificultad particular.

Supongamos que cada onda tiene su vector de propagación en el mismo plano de tal forma que podemos denominar los estados $\mathcal{P}$, ortogonales constitutivos con respecto a ese plano, por ejemplo, $\mathbf{E}_\parallel$ y $\mathbf{E}_\perp$, que son paralelos y perpendiculares al plano, respectivamente (figura 9.6*a*). Entonces, cualquier onda plana, polarizada o no, puede escribirse en la forma $(\mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}_\perp)$. Imaginemos que las ondas $(\mathbf{E}_{\parallel 1} + \mathbf{E}_{\perp 1})$ y $(\mathbf{E}_{\parallel 2} + \mathbf{E}_{\perp 2})$ emitidas desde dos fuentes coherentes idénticas se superponen en la misma región del espacio. La distribución de la densidad de flujo resultante consistirá en dos figuras de interferencia independientes, perfectamente superpuestas, $\langle(\mathbf{E}_{\parallel 1} + \mathbf{E}_{\parallel 2})^2\rangle_T$ y $\langle(\mathbf{E}_{\perp 1} + \mathbf{E}_{\perp 2})^2\rangle_T$. *Por consiguiente, si bien dedujimos las ecuaciones de la sección anterior, específicamente para luz lineal, las mismas pueden aplicarse también a cualquier estado de polarización, incluyendo luz natural.*

Obsérvese que aunque $\mathbf{E}_{\perp 1}$ y $\mathbf{E}_{\perp 2}$ sean siempre paralelas una a otra, $\mathbf{E}_{\parallel 1}$ y $\mathbf{E}_{\parallel 2}$, que se hallan en el plano de referencia, no necesitan serlo. Serán paralelas solamente cuando los dos haces sean ellos mismos paralelos (es decir, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$). La naturaleza vectorial inherente del proceso de interferencia, como es patente en la representación del producto escalar [ecuación (9.11)] de I_{12}, no puede ignorarse. Se dan muchas situaciones prácticas en las que los haces son casi paralelos y, por lo tanto, la teoría escalar funciona perfectamente. Aun así, (*b*) y (*c*) de la figura 9.6 se incluyen como medida de precaución; muestran la superposición inminente de dos ondas coherentes linealmente polarizadas. En la figura 9.6*b*, los vectores ópticos son paralelos aun cuando los haces no lo son, produciéndose no obstante el fenómeno de la interferencia. En la figura 9.6*c*, los vectores ópticos son perpendiculares e $I_{12} = 0$, lo cual se daría aquí incluso si los haces fueran paralelos.

Fresnel y Arago llevaron a cabo un estudio extensivo de las condiciones bajo las cuales se produce la interferencia de luz polarizada y en sus conclusiones resumen algunas de las consideraciones anteriores. Las **leyes de Fresnel-Arago** son las siguientes:

1. Dos estados coherentes ortogonales $\mathcal{P}$ no pueden interferir en el sentido de que $I_{12} = 0$ y no hay producción de franjas.
2. Dos estados coherentes y paralelos $\mathcal{P}$ interferirán en la misma forma que la luz natural.
3. Dos estados ortogonales constitutivos $\mathcal{P}$ de luz natural no pueden interferir para formar una distribución de franjas fácilmente observable aunque se giren para alinearlos. Este último punto es comprensible ya que estos estados $\mathcal{P}$ son incoherentes.

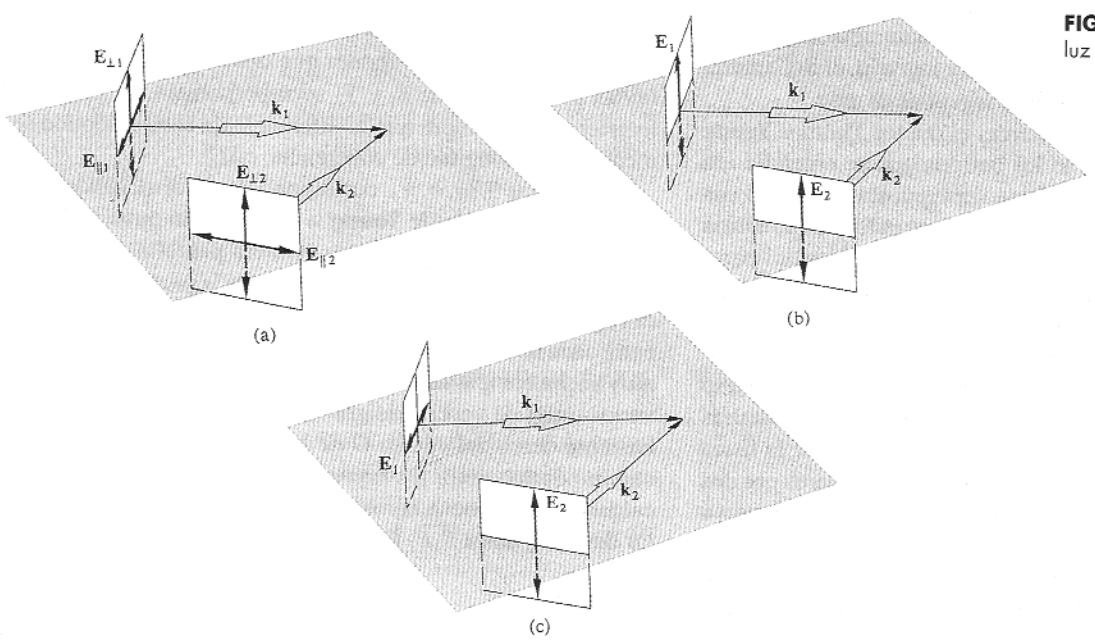


FIGURA 9.6 Interferencia de luz polarizada.

9.3 Interferómetros de división del frente de onda

El problema mayor en la producción de la interferencia son las fuentes: éstas deben ser *coherentes*. Sin embargo, ¡fuentes oportunamente coherentes, independientes y separadas distintas al láser moderno no existen! Este dilema fue solucionado por primera vez hace doscientos años por Thomas Young en su experimento clásico de doble haz. Tomó un frente de onda individual, recortó dos secciones coherentes del mismo e hizo que interfiriesen.

9.3.1 El experimento de Young

En 1655, Grimaldi describió un experimento que había llevado a cabo a fin de analizar la interacción entre dos haces de luz. Dejó que la luz solar entrara en una habitación oscura a través de dos agujeros diminutos cercanos, en una pantalla opaca. Al igual que una cámara oscura (pág. 222), cada agujero proyecta una imagen del Sol en una superficie blanca distante. Lo que quería demostrarse era que en el punto donde los círculos de luz se superponían, se producía oscuridad. Si bien en aquel entonces no pudo comprender muy bien el porqué, el experimento fracasó porque la fuente primaria, el disco solar (que subtiende unos 32 minutos de arco) era demasiado ancho y, por lo tanto, la luz incidente no poseía la coherencia espacial necesaria para iluminar adecuada y simultáneamente los dos agujeros. Para lograrlo, el Sol tendría que haber subtendido tan sólo unos segundos de arco.

Ciento cuarenta años más tarde, el doctor Thomas Young (guiado por el fenómeno de los batidos que se entendía era producido por dos ondas sonoras superpuestas) empezó sus esfuerzos encaminados a establecer la naturaleza ondulatoria de la luz. Volvió a realizar el experimento de Grimaldi pero, esta vez, la luz solar se hizo pasar a través de un agujero inicial que se convirtió en la fuente primaria (figura 9.7). Esto produjo un haz espacialmente coherente que podía iluminar de manera idéntica los dos agujeros. De esta forma, Young logró producir un sistema de franjas alternas brillantes y oscuras – franjas de interferencia. Hoy en día, conscientes de la física involucrada, por lo general reemplazamos los agujeros por dos rendijas estrechas que permiten el paso de una cantidad mayor de luz (figura 9.8*a*).

Consideremos una onda plana monocromática hipotética que ilumina una rendija larga y estrecha. De esa rendija primaria, la luz se difractará con todos los ángulos hacia delante y

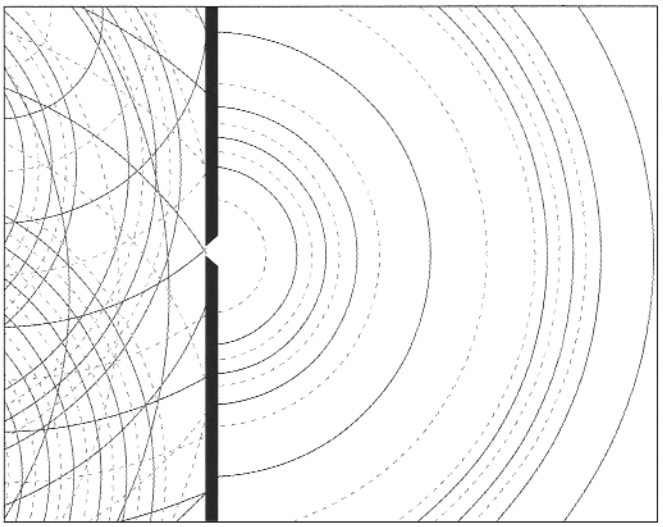


FIGURA 9.7 El agujero diminuto difunde una onda que es espacialmente coherente, si bien no lo es temporalmente.

emergerá una onda cilíndrica. Supongamos que esta onda, a su vez, incida en dos rendijas S_1 y S_2 muy juntas, estrechas y paralelas tal y como se muestra en la vista tridimensional de la figura 9.8*a*. Cuando existe simetría, los segmentos del frente de onda primario que llegan a las dos rendijas estarán exactamente en fase y las rendijas constituirán dos fuentes secundarias coherentes. Es de suponer que donde quiera que las dos ondas procedentes de S_1 y S_2 se superpongan, se producirá interferencia (siempre que la diferencia de camino óptico sea menor que la longitud de coherencia, $c\Delta t_c$).

Las figuras 9.8*a*, *b*, y *c* corresponden a la disposición clásica del **experimento de Young** si bien existen otras variantes. Hoy en día, se prescinde de la primera pantalla y las ondas planas de un láser iluminan directamente la pantalla de apertura (figura 9.8*f*). En una situación física realista, la distancia entre cada una de las pantallas (Σ_a y Σ_o) en la figura 9.8*c* sería muy ancha comparada con la distancia a entre las dos rendijas, varios miles de veces más grande, y todas las franjas estarían bastante cerca del centro O de la pantalla. La diferencia de camino óptico entre los rayos a lo largo de $\overline{S_1P}$ y $\overline{S_2P}$ puede calcularse, con buena aproximación, bajando una perpendicular desde S_2 hasta $\overline{S_1P}$. Esta diferencia de camino viene dada por

$$(\overline{S_1B}) = (\overline{S_1P}) - (\overline{S_2P}) \qquad (9.22)$$

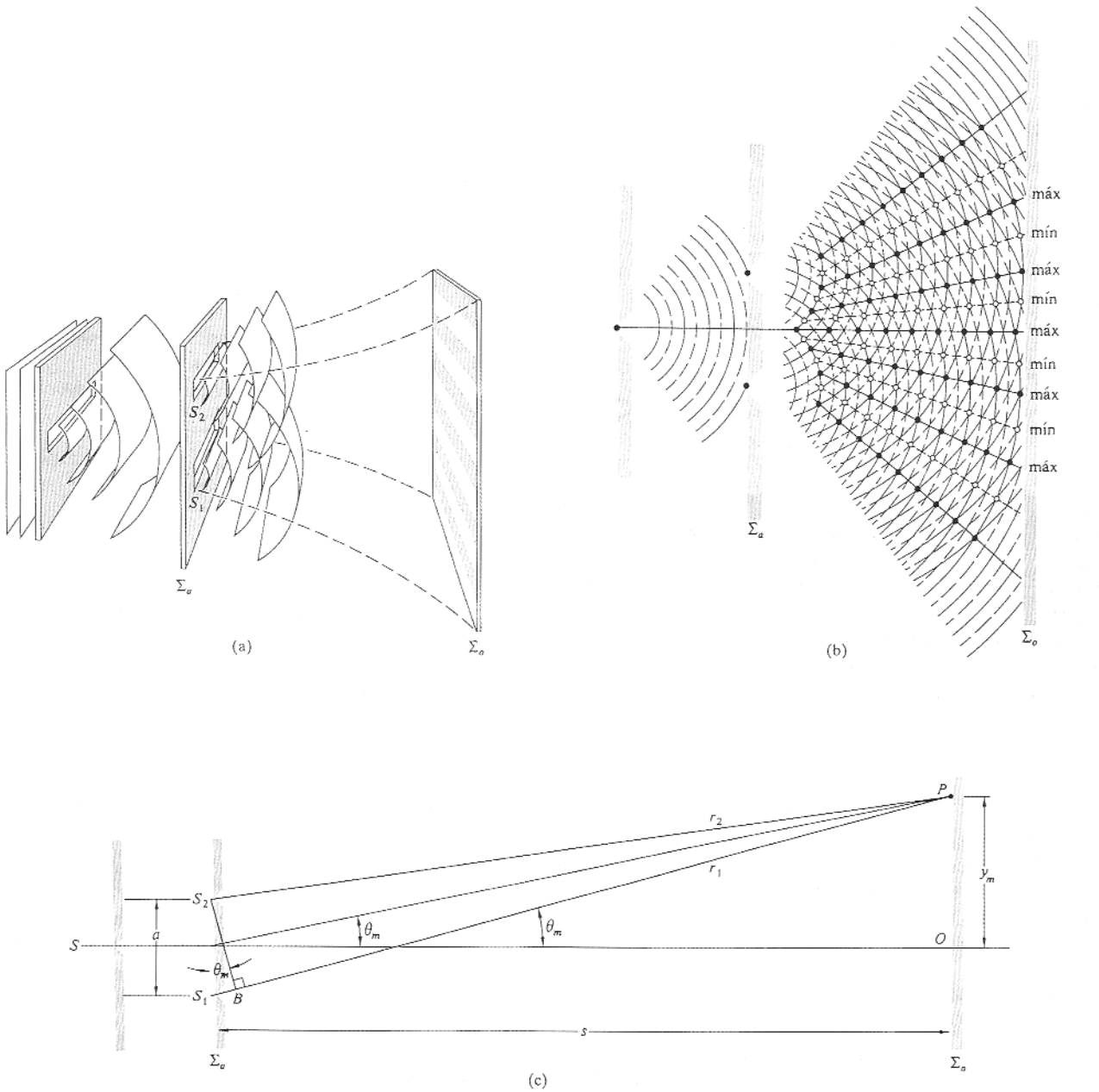
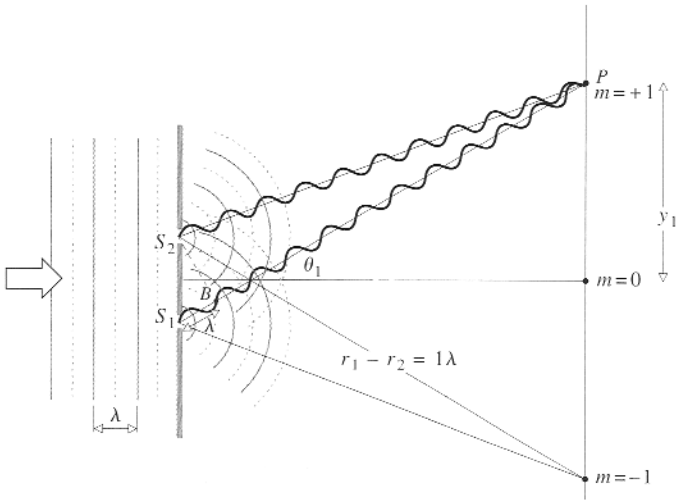
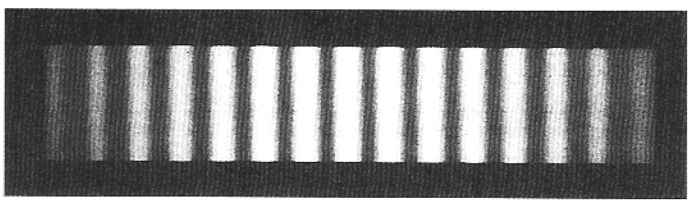


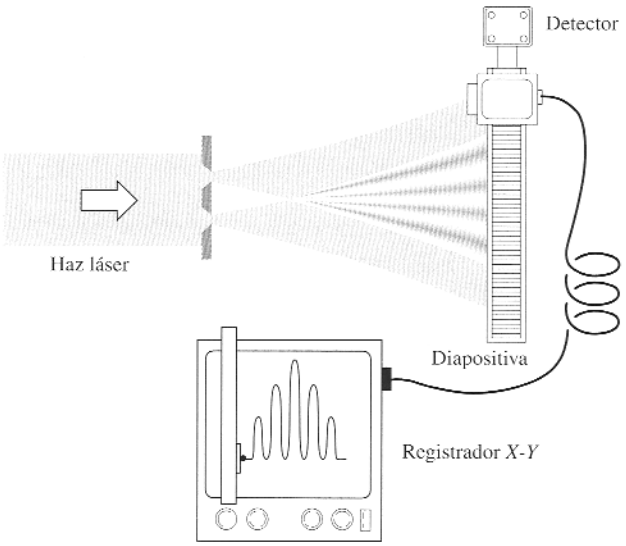
FIGURA 9.8 Experimento de Young. (*a*) Ondas cilíndricas superpuestas en la zona detrás de la abertura de la pantalla. (*b*) Ondas superpuestas mostrando picos y valles. Los máximos y los mínimos se hallan en hipérbolas casi rectas. (*c*) Geometría del experimento de Young. (*d*) Una diferencia de longitud de camino de una longitud de onda equivale a $m = \pm 1$ y al máximo de primer orden. (*e*) (Foto cedida por M. Cagnet, M. Francon y J. C. Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen,* Berlin-Heildelberg-New York: Springer, 1962.) (*f*) Una versión moderna del experimento de Young con un fotodetector (por ejemplo, una célula fotovoltaica o un fotodiodo como RS 305-462) y un registrador $X - Y$. El detector se desliza en una diapositiva accionada por un motor y barre la figura de interferencia.



(d)



(c)



(f)

FIGURA 9.8 *(continúa)*

o $$(\overline{S_1B}) = r_1 - r_2$$

Continuando con esta aproximación (véase problema 9.15), $(r_1 - r_2) = a$ sen θ y por lo tanto

$$r_1 - r_2 \approx a\theta \tag{9.23}$$

puesto que $\theta \approx$ sen θ. Obsérvese que

$$\theta \approx \frac{y}{s} \tag{9.24}$$

por lo tanto $$r_1 - r_2 \approx \frac{a}{s}y \tag{9.25}$$

De acuerdo con la sección 9.1, la interferencia *constructiva* ocurrirá cuando

$$r_1 - r_2 = m\lambda \tag{9.26}$$

Entonces, de las últimas dos relaciones obtenemos

$$y_m \approx \frac{s}{a}m\lambda \tag{9.27}$$

Esto proporciona la posición de la m-ésima franja brillante en la pantalla si consideramos el máximo en 0 como la franja cero. La posición angular de la franja se obtiene substituyendo la última expresión en la ecuación (9.24); así

$$\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \tag{9.28}$$

Esta relación puede obtenerse directamente inspeccionando la figura 9.8*c*. Para el máximo de interferencia de orden m-ésimo, m longitudes de onda enteras deberían caber dentro de la distancia $r_1 - r_2$. Por consiguiente, del triángulo S_1S_2B,

$$a \text{ sen } \theta_m = m\lambda \tag{9.29}$$

o $$\theta_m \approx m\lambda/a$$

El espacio entre las franjas en la pantalla puede obtenerse fácilmente de la ecuación (9.27). La diferencia en las posiciones de dos máximos consecutivos es

$$y_{m+1} - y_m \approx \frac{s}{a}(m+1)\lambda - \frac{s}{a}m\lambda$$

o $$\Delta y \approx \frac{s}{a}\lambda \qquad (9.30)$$

Lógicamente, las franjas rojas serán más anchas que las azules.

Ya que este patrón es equivalente al obtenido para dos ondas esféricas superpuestas (al menos en la región $r_1 \approx r_2$), podemos aplicar la ecuación (9.17). Usando la diferencia de fase

$$\delta = k(r_1 - r_2)$$

La ecuación (9.17) puede reescribirse como

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{k(r_1 - r_2)}{2}$$

siempre que, por supuesto, los dos haces sean coherentes y tengan iguales irradiancias I_0. Con

$$r_1 - r_2 \approx ya/s$$

la irradiancia resultante se convierte en

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{ya\pi}{s\lambda} \qquad (9.31)$$

Tal y como se muestra en la figura 9.9, los máximos consecutivos están separados por el Δy proporcionado en la ecuación (9.30). Recuérdese que nosotros supusimos que cada rendija tenía un ancho infinitesimal, por lo tanto las franjas de coseno al cuadrado de la figura 9.9 constituyen efectivamente una hipótesis imposible de lograr [3]. La distribución real, figura 9.8*e*, reduce sus distancias en ambos lados de O a causa de la difracción.

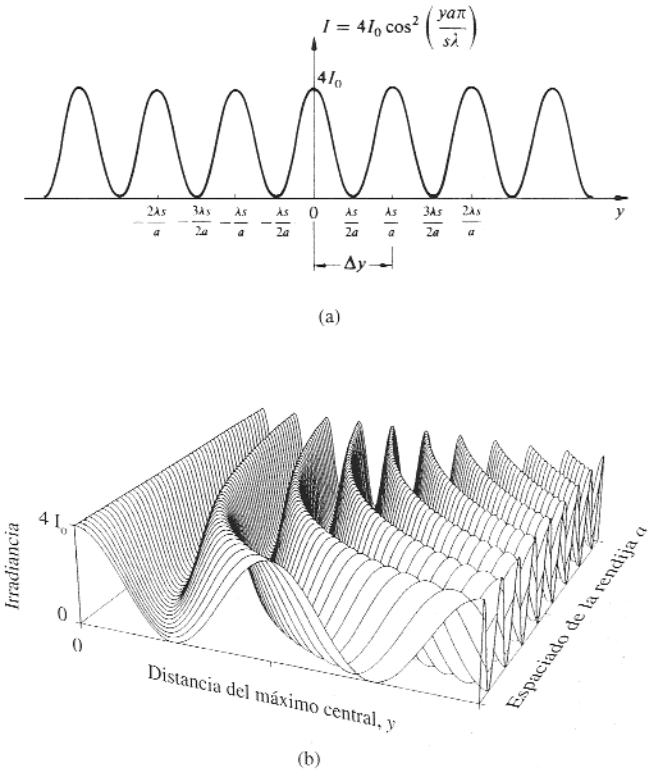


FIGURA 9.9 (*a*) Curva idealizada de la irradiancia frente a la distancia. (*b*) La separación de franjas Δy varía inversamente a la separación de la rendija, como es de esperar de las consideraciones de Fourier; recuérdese la naturaleza inversa de los intervalos espaciales y los intervalos de frecuencia espacial. (Reimpreso de "Graphical Representations of Fraunhofer Interference and Diffraction", *Am. J. Phys.* **62**, 6 (1994) con la autorización de A. B. Bartlett, University of Colorado y B. Mechtly, Northeast Missouri State University y la American Association of Physics Teachers.)

Los efectos de la longitud de coherencia finita

Puesto que en la figura 9.8*c*, P se toma por encima o por debajo del eje, $\overline{S_1B}$ (que es inferior a o igual a $\overline{S_1S_2}$) aumenta. Si la fuente primaria tiene una longitud de coherencia corta, a medida que la diferencia de camino óptico aumenta, los grupos de ondas perfectamente emparejados ya no podrán llegar al punto P exactamente juntos – habrá una cantidad creciente de superposición en partes de grupos de ondas sin correlación y el contraste de las franjas se degradará. Δl_c puede ser inferior a $\overline{S_1B}$. En este caso, en lugar de tener dos porciones correlacionadas del mismo grupo de ondas que llegan a P, habrá superposición tan sólo de unos segmentos de grupos de onda diferentes mientras que las franjas desaparecerán.

Tal y como se ilustra en la figura 9.10*a*, cuando la diferencia de longitud de camino supera la longitud de coherencia, el

[3] Las modificaciones de este patrón que aparecen a raíz de aumentar el ancho, bien sea de la rendija de la fuente primaria S o de la secundaria, se examinarán más adelante (capítulos 10 y 12). En el último caso, el contraste de las franjas se utilizará como medida del nivel de coherencia (sección 12.1). En el último los efectos de la difracción son significativos.

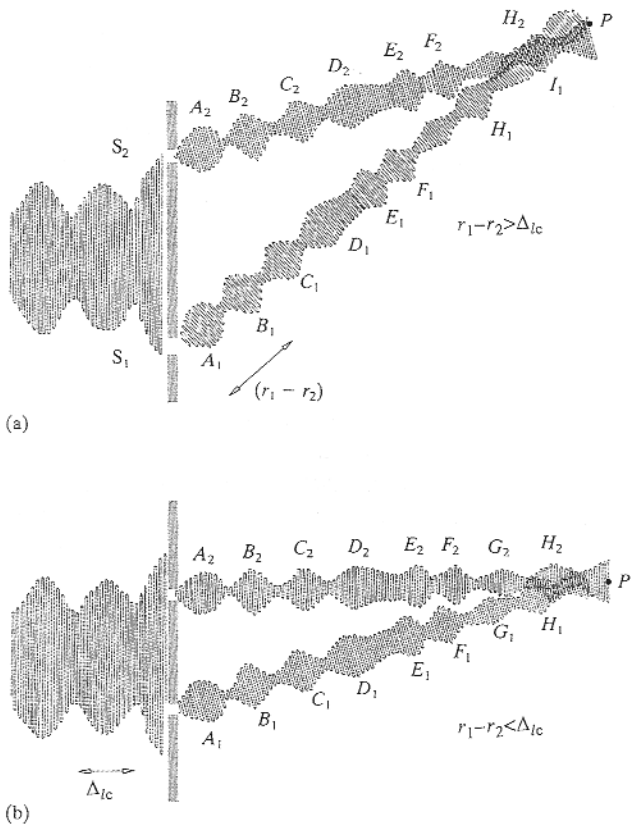


FIGURA 9.10 Representación esquemática de cómo la luz, formada por una secuencia de grupos de ondas con una longitud de coherencia Δl_c, produce interferencia cuando (*a*) la diferencia de longitud de camino es superior a Δl_c, y (*b*) cuando la diferencia de longitud de camino es inferior a Δl_c.

grupo de onda E_1 procedente de la fuente S_1 llegará a P con el grupo de onda D_2 procedente de S_2. Si bien habrá interferencia, ésta durará muy poco antes de que los desplazamientos del patrón bajo forma de grupo de onda D empiece a superponerse al grupo de onda C_2 puesto que las fases relativas son distintas. Si la longitud de coherencia fuera más grande o si la diferencia de camino fuera más pequeña, el grupo de onda D_1 interactuaría más o menos con su grupo de onda clónico D_2 y así para cada par. Las fases estarían, por lo tanto, correlacionadas y la figura de interferencia sería estable (figura 10*b*). Puesto que la longitud de coherencia de una fuente de luz blanca será inferior a tres longitudes de onda, de la ecuación (9.27) se deduce que aproximadamente tan solo tres franjas se verán en ambos lados del máximo central.

Con luz blanca (o con iluminación de banda ancha), todos los colores constitutivos llegarán a $y = 0$ en fase, después de haber recorrido iguales distancias desde cada apertura. La franja de orden cero será esencialmente blanca, sin embargo, todos los demás máximos de orden superior exhibirán una gama de longitudes de onda, ya que y_m es función de λ, según la ecuación (9.27). Por lo tanto, en luz blanca podemos considerar el máximo m-ésimo como la banda de longitudes de onda de orden m-ésimo, noción ésta que llevará directamente a la red de difracción del siguiente capítulo.

La distribución de franjas puede observarse perforando dos pequeños agujeros en una tarjeta delgada. Los agujeros deberían tener aproximadamente el tamaño del tipo de imprenta utilizado en esta página para un punto, y la separación entre sus centros aproximadamente 3 radios. Un farol, los faros de un coche o un semáforo en la noche, colocados a unos cuantos metros de distancia servirán como fuente de ondas planas. La tarjeta deberá colocarse directamente enfrente del ojo y *muy cerca de él.* Las franjas aparecerán perpendiculares a la línea de los centros. La distribución es mucho más fácil de observar con rendijas, como se estableció en la sección 10.2.2, pero vale la pena intentarlo con los agujeritos.

También con las microondas, gracias a su gran longitud de onda, podrá observarse fácilmente la interferencia de doble rendija. Dos rendijas (por ejemplo, $\lambda/2$ de ancho por λ de largo, separadas por 2λ) cortadas en un pedazo de lámina u hoja metálica servirán perfectamente como fuentes de onda secundaria (figura 9.11).

La perspectiva de Fourier

Cuando las ondas planas de la figura 9.8*b* iluminaron la primera rendija estrecha, la luz se coló (es decir, se difractó) más allá de

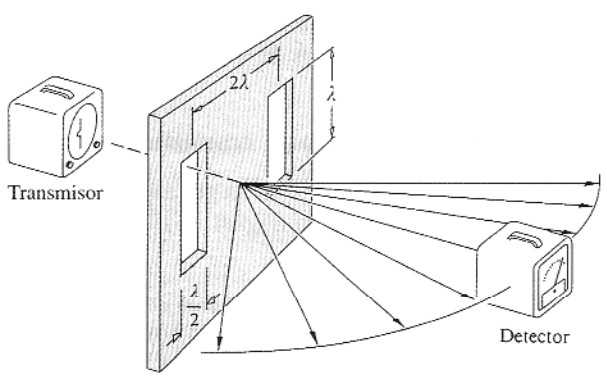


FIGURA 9.11 Un interferómetro de microondas.

la pantalla opaca con una forma que se asemejaba a una onda cilíndrica; cuanto más estrecha sea la rendija, más cilíndrica será la onda. Más allá de la pantalla, la luz se difundía en un amplio rango de ángulos o, de manera equivalente, un amplio rango de frecuencias espaciales. Desde la perspectiva de Fourier, esto ocurría porque una fuente infinitesimalmente estrecha (es decir, estrecha en el espacio) genera un campo luminoso que es infinitesimalmente ancho (es decir, ancho en frecuencia espacial). La transformada de una fuente puntual, un pico de señal unidimensional ideal (denominado función delta de Dirac, pág. 528) es un espectro constante continuo que contiene todas las frecuencias espaciales, una onda esférica. De la misma manera, una fuente lineal ideal da como resultado una onda cilíndrica.

En la práctica, el experimento de Young consta, por lo general, de dos fuentes de rendija en fase dispuestas de manera que $s >> a$. Por lo general, s es tan grande que el sistema de franjas resultante corresponde a una distribución de difracción de Fraunhofer (pág. 457). Las dos rendijas muy delgadas se asemejan a dos fuentes lineales, dos picos de señal idealmente estrechos mientras que la transformada de las dos funciones delta es una función de coseno – ya lo analizamos en la figura 7.31. Si las rendijas pueden considerarse infinitesimalmente estrechas, la amplitud del campo eléctrico en el patrón de difracción será cosenoidal y la distribución de la irradiancia variará como el cuadrado del coseno, tal y como se ve en la figura 9.6.

Varios interferómetros más

Las mismas consideraciones matemáticas y físicas aplicadas al experimento de Young están relacionadas directamente con varios interferómetros de división del frente de onda. Entre los más corrientes se hallan el espejo doble de Fresnel, el prisma doble de Fresnel y el espejo de Lloyd.

El espejo doble de Fresnel consiste en dos espejos planos plateados en la cara frontal e inclinados uno respecto al otro con un ángulo muy pequeño tal y como se muestra en la figura 9.12.

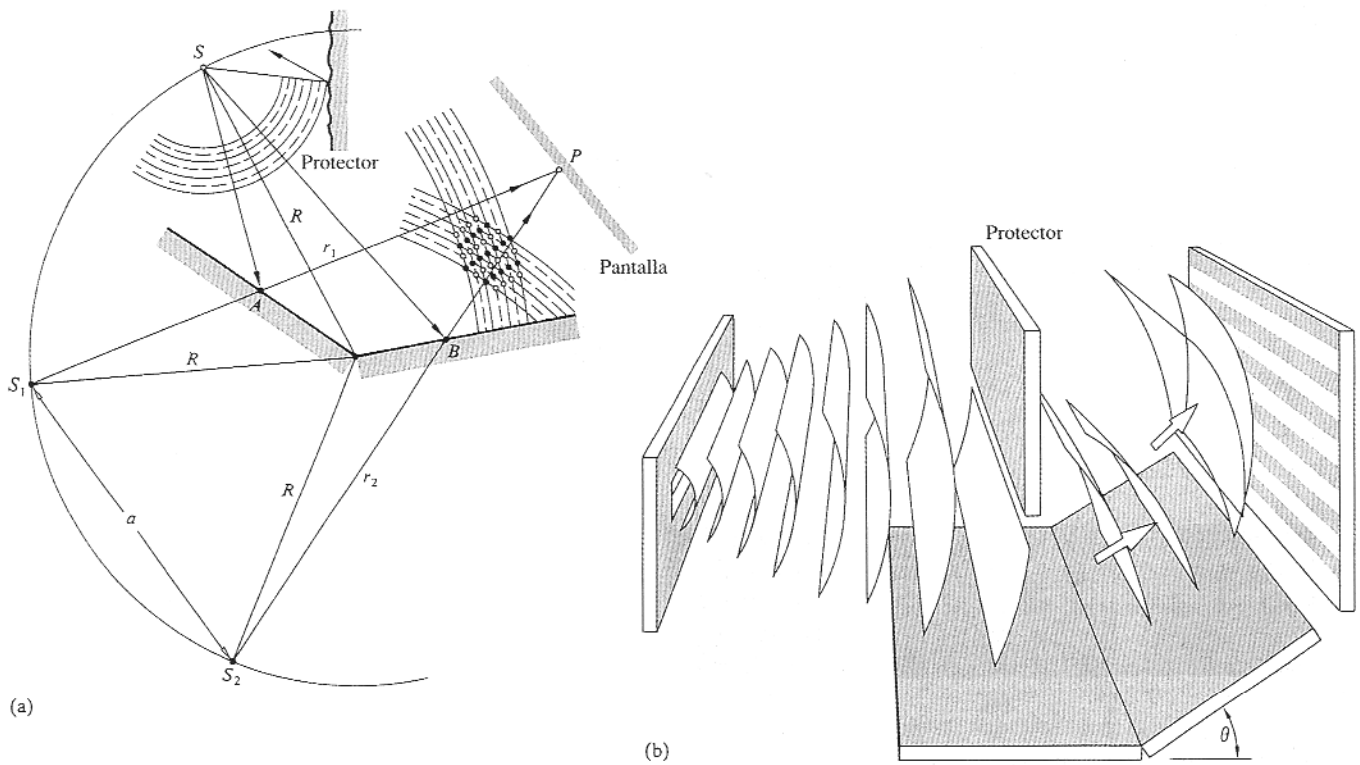


FIGURA 9.12 Espejo doble de Fresnel.

Una parte del frente de onda cilíndrico procedente de la rendija S se refleja en el primer espejo, mientras que otra parte del frente de onda se refleja en el segundo espejo. Existe un campo de interferencia en el espacio en la región donde las dos ondas reflejadas se superponen. Las imágenes (S_1 y S_2) de la rendija S en los dos espejos pueden considerarse como fuentes coherentes separadas, colocadas a una distancia a. De la ley de la reflexión se deduce, como se muestra en la figura 9.12*a*, que $\overline{SA} = \overline{S_1A}$ y $\overline{SB} = \overline{S_2B}$ de tal forma que $\overline{SA} + \overline{AP} = r_1$ y $\overline{SB} + \overline{BP} = r_2$. La diferencia de camino óptico entre los dos rayos es entonces $r_1 - r_2$. Los varios máximos se dan para $r_1 - r_2 = m\lambda$ como suceden en el interferómetro de Young. De nuevo, la separación de las franjas viene dada por

$$\Delta y \approx \frac{s}{a}\lambda$$

donde s es la distancia entre el plano de las dos fuentes virtuales (S_1, S_2) y la pantalla. La disposición en la figura 9.12 se ha exagerado deliberadamente a fin de aclarar algo la geometría.

El ángulo θ entre los espejos tiene que ser muy pequeño para que los vectores de campo eléctrico de cada uno de los dos haces sean paralelos o casi paralelos. Sean $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ las ondas luminosas emitidas por las fuentes coherentes virtuales S_1 y S_2. En cualquier instante en el punto P en el espacio, cada uno de estos vectores puede resolverse en componentes paralelas y perpendiculares al plano de la figura. Con $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ paralelas a $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ respectivamente, resultará evidente que las componentes $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ en el plano de la figura se acercan al paralelismo solamente para pequeños valores de θ. A medida de que θ disminuye, a disminuye y las franjas se ensanchan.

El prisma doble de Fresnel o biprisma consiste en dos prismas delgados unidos en las bases, tal y como se muestra en la figura 9.13. Un frente de onda cilíndrico individual incide en ambos prismas La parte superior del frente de onda se refracta hacia abajo mientras que el segmento inferior se refracta hacia arriba. La interferencia se producirá en la región de superposición. Aquí existen nuevamente dos fuentes virtuales, S_1 y S_2

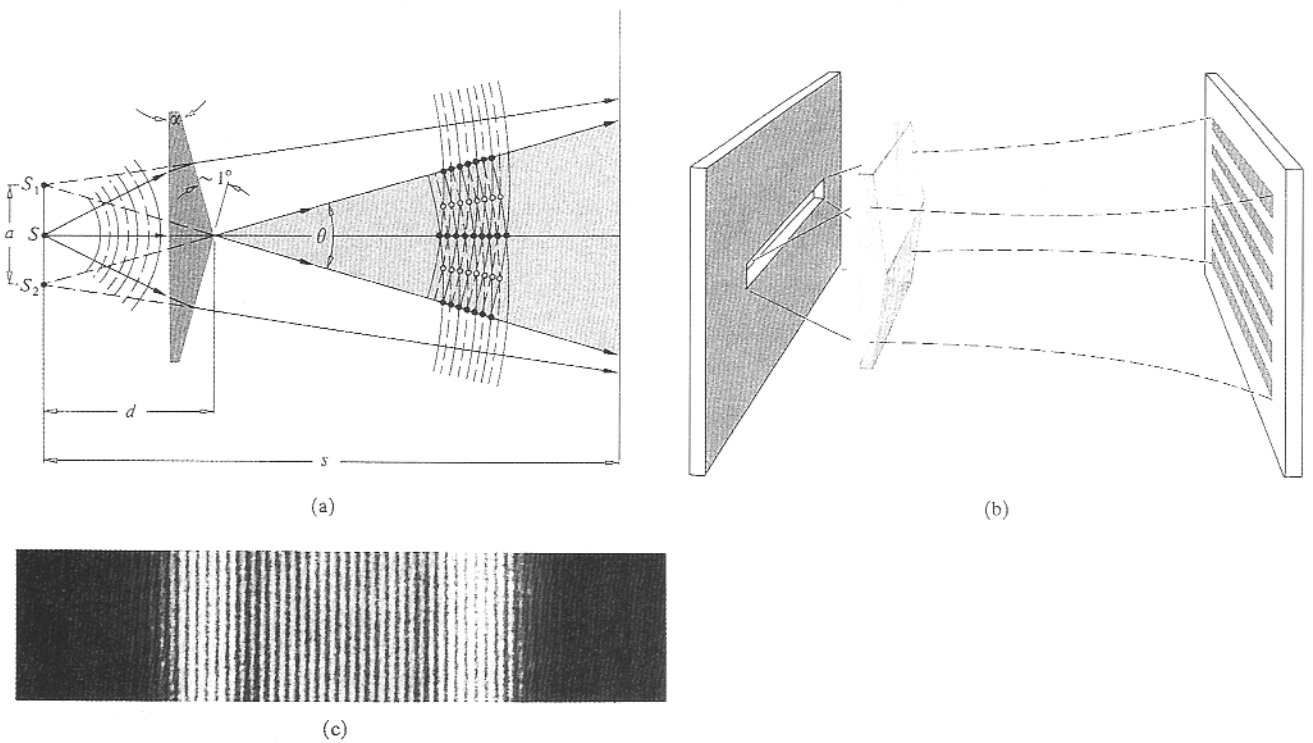


FIGURA 9.13 Biprisma de Fresnel. (*a*) El biprisma crea dos fuentes imagen. (*b*) Con una fuente de rendija, las franjas son bandas brillantes. (*c*) Franjas de interferencia observadas con una disposición de biprisma electrónico por G. Möllenstedt. Los electrones se comportan otra vez como fotones. (Foto extraída de *Handbuch der Physik*, publicado por S. Flügge, Springer Verlag, Heidelberg.)

separadas por una distancia a la cual puede expresarse en términos del ángulo α del prisma (problema 9.17) donde $s >> a$. La expresión para la separación de las franjas es la misma que antes.

El último interferómetro de división del frente de onda que consideraremos es el **espejo de Lloyd** que se muestra en la figura 9.14. Consiste en una pieza plana de dieléctrico o metal que sirve como espejo, en el cual se refleja una parte del frente de onda cilíndrico procedente de la rendija S. Otra parte del frente de onda va directamente desde la rendija hasta la pantalla. Para la separación a, entre las dos fuentes coherentes, tomamos la distancia entre la rendija real y su imagen S_1 en el espejo. El espacio entre las franjas es proporcionado otra vez por $(s/a)\lambda$. La característica que distingue a este dispositivo es que para incidencia rasante ($\theta_i = \pi/2$) el haz reflejado experimenta un desfase de 180° (recordemos que ambos coeficientes reflexión para la amplitud son iguales a −1). Con un desfase adicional de $\pm\pi$.

$$\delta = k(r_1 - r_2) \pm \pi$$

y la irradiancia se transforma en

$$I = 4I_0 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi a y}{s\lambda}\right)$$

La distribución de franjas para el espejo de Lloyd es complementaria a la del interferómetro de Young; los máximos de una distribución existen para valores de y que corresponden a los mínimos en la otra distribución. El borde superior del espejo es equivalente a $y = 0$ y será el centro de una franja oscura en lugar del de una franja brillante como en el sistema de Young. La mitad inferior del patrón será obstruida por la presencia del espejo mismo. Considérese, entonces, qué pasaría si una hoja delgada de material transparente se colocara en la trayectoria de los rayos que viajan directamente a la pantalla. La hoja transparente produciría el efecto de aumentar el número de longitudes de onda en cada rayo directo. La distribución entera se movería hacia arriba hasta donde los rayos reflejados viajarían un poco más antes de interferir. Debido a la simplicidad inherente obvia de este sistema, se ha utilizado en una región muy ancha del espectro electromagnético. Las superficies reflectoras reales han sido tan variadas como cristal para rayos X, vidrio común para luz, pantallas de alambre para microondas, un lago o incluso la ionosfera de la Tierra para ondas radioeléctricas [4].

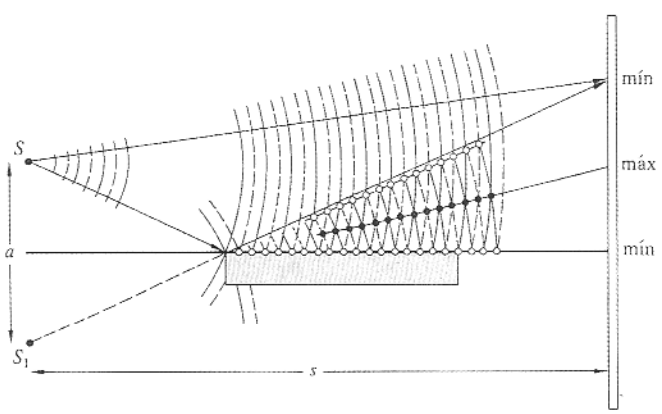


FIGURA 9.14 Espejo de Lloyd.

Todos los interferómetros anteriores pueden demostrarse muy fácilmente utilizando un láser o, para luz blanca, algo un poco más obsoleto como una lámpara de descarga o un arco de carbón (figura 9.15).

9.4 Interferómetros de división de amplitud

Supóngase que una onda luminosa incide en un espejo semiplateado [5] o simplemente en una placa de vidrio. Parte de la onda será transmitida y la otra parte se reflejará. Las amplitudes tanto de la onda transmitida como la de la reflejada serán inferiores a la original, por lo tanto, podrá decirse que la amplitud ha sido «dividida».

Si las dos ondas separadas pueden reunirse de alguna manera en un detector, se producirá interferencia siempre y cuando la coherencia original entre las dos ondas no haya sido destruida. Si las longitudes de caminos difiriesen en una distancia mayor que la del tren de onda (por ejemplo, la longitud de coherencia), las partes reunidas en el detector corresponderían a diferentes grupos de onda. Por lo tanto, en ese caso, no existirá una relación de fase única entre ellas y la distribución de

[4] Para un análisis de los efectos debidos a una rendija de ancho finito y un ancho de banda de frecuencia finita, véase R. N. Wolfe y F. C. Eisen, «Irradiance Distribution in a Lloyd Mirror Interference Pattern», *Opt. Soc. Am.*, **38,** 706 (1948).

[5] Un *espejo semiplateado* es semitransparente porque el recubrimiento metálico es demasiado delgado para ser opaco. Se puede ver a través de él y, al mismo tiempo, puede observarse su propia imagen reflejada. *Los divisores de haz* como se llaman estos dispositivos, se pueden hacer también con películas de plástico delgadas estiradas denominadas *películas* o incluso placas de vidrio sin recubrimiento.

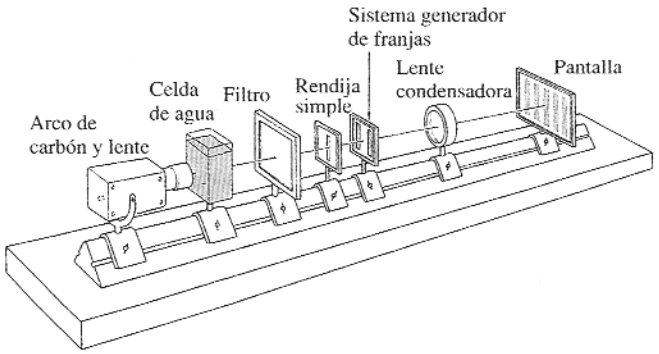


FIGURA 9.15 Sistema de banco desarrollado para estudiar disposiciones de división del frente de onda con una fuente de arco de carbón. La celda de agua es necesaria para que los elementos no se calienten.

franjas será inestable hasta tal punto que no será posible observarlo. Regresaremos a estos conceptos cuando consideremos la teoría de coherencia en más detalle. Por el momento, el análisis se limita mayoritariamente a aquellos casos donde la diferencia de camino es menor que la longitud de coherencia.

9.4.1 Películas dieléctricas-interferencias de dos haces

Los efectos de la interferencia se observan en materiales transparentes, cuyo espesor varía en un amplia gama, desde películas con espesor inferior a la longitud de la onda luminosa (por ejemplo, en el caso de luz verde, λ_0 es aproximadamente igual a $\frac{1}{150}$ del espesor de esta hoja de papel) hasta placas con varios centímetros de espesor. Una capa de material se denomina *película delgada* para cierta longitud de onda de radiación electromagnética cuando su espesor es del orden de la longitud de onda. Antes del comienzo de la década de los cuarenta, si bien los fenómenos de interferencia asociados con películas delgadas dieléctricas eran ya conocidos, su valor práctico era más bien limitado. El despliegue espectacular de colores que surge de las manchas de aceite y de las pompas de jabón, por más que fuera grato estética y teóricamente, en la mayoría de los casos no dejaban de ser curiosidades.

La aparición de técnicas adecuadas de deposición en vacío en la década de los treinta posibilitó la fabricación comercial de recubrimientos controlados con precisión y con eso, a su vez, el renacimiento del interés en las películas dieléctricas. Durante la segunda guerra mundial, ambos bandos encontraban al enemigo recurriendo a una variedad de dispositivos ópticos con recubrimiento y en los años sesenta, el recubrimiento de multicapas estaba ya muy difundido.

Franjas de igual inclinación

Consideremos el caso sencillo de una placa transparente y paralela de material dieléctrico con un espesor d (figura 9.16). Supongamos que el material sea no absorbente y que los coeficientes de reflexión para la amplitud en las interfaces sean tan bajos que sólo se necesite considerar los dos primeros haces reflejados E_{1r} y E_{2r} (habiendo ambos sufrido tan sólo una reflexión) (figura 9.17). En la práctica, las amplitudes de los haces reflejados de orden superior (E_{3r}, etc.) por lo general decrecen muy rápidamente, como puede demostrarse para las interfaces aire-agua y aire-vidrio (problema 9.23). Por el momento, consideremos S como una fuente puntual monocromática.

La película sirve como dispositivo de división de amplitud, de manera que se puede imaginar que E_{1r} y E_{2r} proceden de dos fuentes coherentes virtuales colocadas detrás de la película, es decir las dos imágenes de S formadas por reflexión en la primera y segunda interfaz. Al salir de la película, los rayos reflejados son paralelos y se les puede hacer converger en un punto P en el plano focal de un objetivo de telescopio o en la retina del ojo cuando está enfocada al infinito. De la figura 9.27, la diferencia de camino óptico para los dos primeros rayos reflejados viene dada por

$$\Lambda = n_f[(\overline{AB}) + (\overline{BC})] - n_1(\overline{AD})$$

y puesto que $(\overline{AB}) = (\overline{BC}) = d/\cos\theta_t$,

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos\theta_t} - n_1(\overline{AD})$$

Ahora, para encontrar una expresión para $(\overline{AD})$, escribimos

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC})\operatorname{sen}\theta_i$$

Utilizando la ley de Snell, esto se transforma en

$$(\overline{AD}) = (\overline{AC})\frac{n_f}{n_1}\operatorname{sen}\theta_t$$

donde

$$(\overline{AC}) = 2d\tan\theta_t \tag{9.32}$$

La expresión para Λ ahora es

$$\Lambda = \frac{2n_f d}{\cos\theta_t}(1 - \operatorname{sen}^2\theta_t)$$

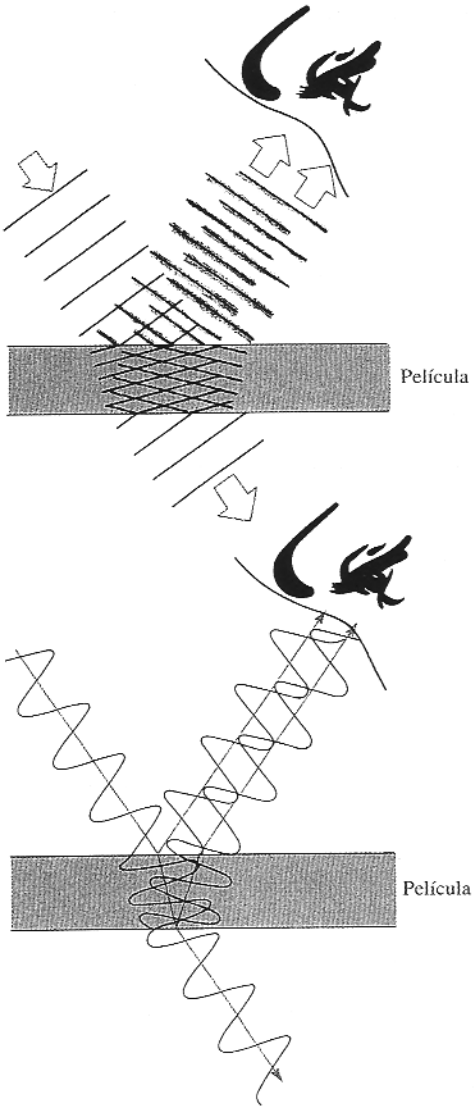


FIGURA 9.16 Representaciones de la onda y del rayo de la interferencia de película delgada. La luz reflejada en la parte superior e inferior de la película interfiere para crear una distribución de franjas.

o finalmente

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t \tag{9.33}$$

El desfase correspondiente y asociado con la diferencia de camino óptico es precisamente el producto del módulo del vector de onda en el espacio libre y Λ, es decir, $k_0\Lambda$. Si la película está sumergida en un solo medio, el índice de refracción

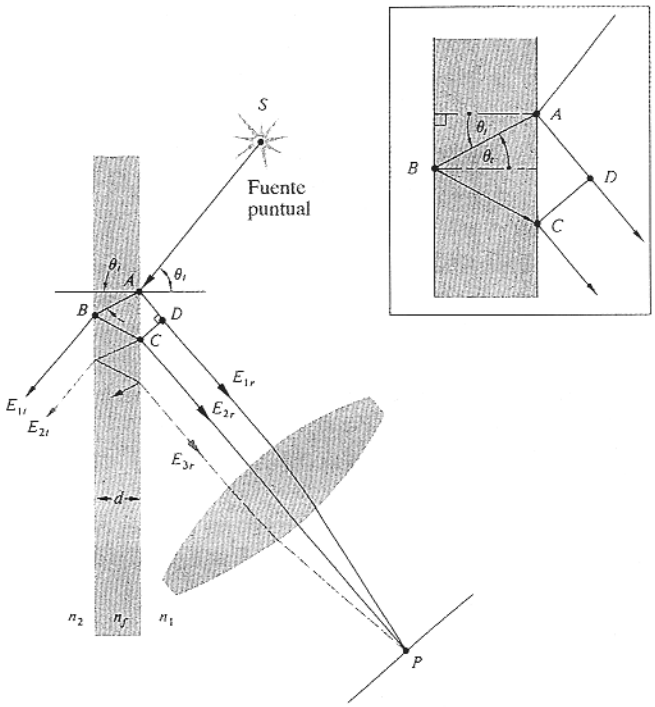


FIGURA 9.17 Franjas de igual inclinación.

podrá escribirse simplemente como $n_1 = n_2 = n$. Hay que darse cuenta que n podría ser menor que n_f, como en el caso de una pompa de jabón en el aire o mayor que n_f, como con una capa de aire entre dos placas delgadas de vidrio. En ambos casos, *habrá un desfase adicional como resultado de las reflexiones mismas*. Recordemos que para ángulos de incidencia hasta unos 30°, independientemente de la polarización de la luz incidente, los dos haces, uno reflejado interna y el otro externamente, sufrirán un *desfase relativo* de π radianes (figura 4.43 y sección 4.3). Por lo tanto,

$$\delta = k_0\Lambda \pm \pi$$

y más explícitamente

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_t \pm \pi \tag{9.34}$$

o

$$\delta = \frac{4\pi d}{\lambda_0} (n_f^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 \theta_i)^{1/2} \pm \pi \tag{9.35}$$

Puesto que el signo del desfase no es relevante, escogeremos el signo negativo para simplificar algo las ecuaciones. En la

luz reflejada un máximo de interferencia, un punto brillante, aparece en P cuando $\delta = 2m\pi$, o sea, un múltiplo par de π. En ese caso la ecuación (9.34) puede recombinarse para obtener

[máximos] $$d \cos \theta_t = (2m + 1)\frac{\lambda_f}{4} \qquad m = 0,1,2,\ldots \tag{9.36}$$

donde se ha utilizado que $\lambda_f = \lambda_0/n_f$. Esto también corresponde a mínimos en la luz transmitida. Los mínimos de interferencia en la luz reflejada (máximos en la luz transmitida) se producen cuando $\delta = (2m \pm 1)\pi$, es decir, múltiplos impares de π. Para tales casos la ecuación (9.34) proporciona

[mínimos] $$d \cos \theta_t = 2m\frac{\lambda_f}{4} \tag{9.37}$$

El hecho de que aparezcan múltiplos pares e impares de $\lambda_f/4$ en las ecuaciones (9.36) y (9.37) es bastante significativo, como veremos dentro de poco. Podemos, por supuesto, tener una situación donde $n_1 > n_f > n_2$ o donde $n_1 < n_f < n_2$ como en el caso de una película de fluoruro depositada sobre un elemento óptico de vidrio sumergido en el aire. El desfase π no se produciría y las ecuaciones anteriores tendrían que ser modificadas apropiadamente.

Si la lente empleada para enfocar los rayos tiene una abertura pequeña, las franjas de interferencia aparecerán en una porción pequeña de la película. Se verán solamente los rayos que emergen de la fuente puntual y que se reflejan directamente hacia la lente (figura 9.18). En el caso de una fuente extensa, la luz llegará a la lente desde varias direcciones y la distribución de franjas se extenderá a fin de cubrir un área mayor de la película (figura 9.19).

El ángulo θ_i o, de manera equivalente, θ_t determinado por la posición de P, a su vez controlará δ. Las franjas que aparezcan en los puntos P_1 y P_2 de la figura 9.20 se denominan **franjas de igual inclinación**. En el problema 9.28 se analizan algunos métodos fáciles para ver estas franjas. Recordemos que cada fuente puntual en la fuente extensa es incoherente con respecto a las otras. Cuando la imagen de la fuente extensa se refleja en la superficie, apa-

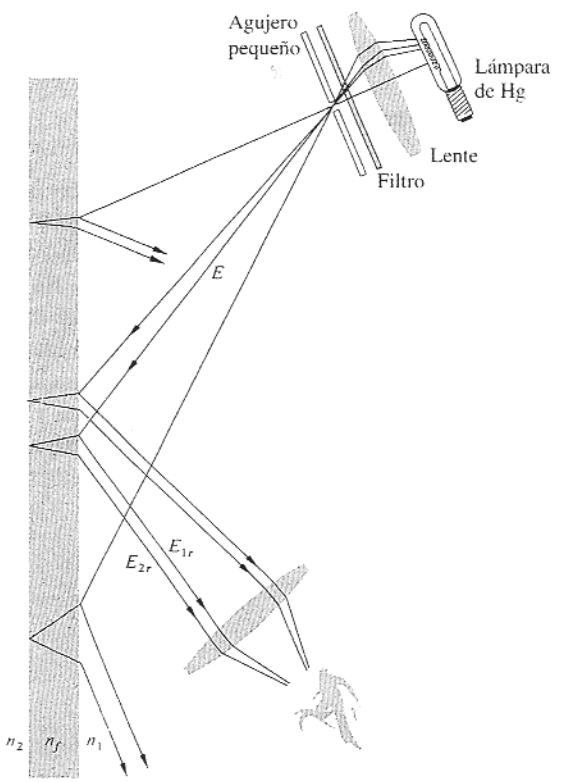


FIGURA 9.18 Franjas vistas sobre una pequeña parte de la película.

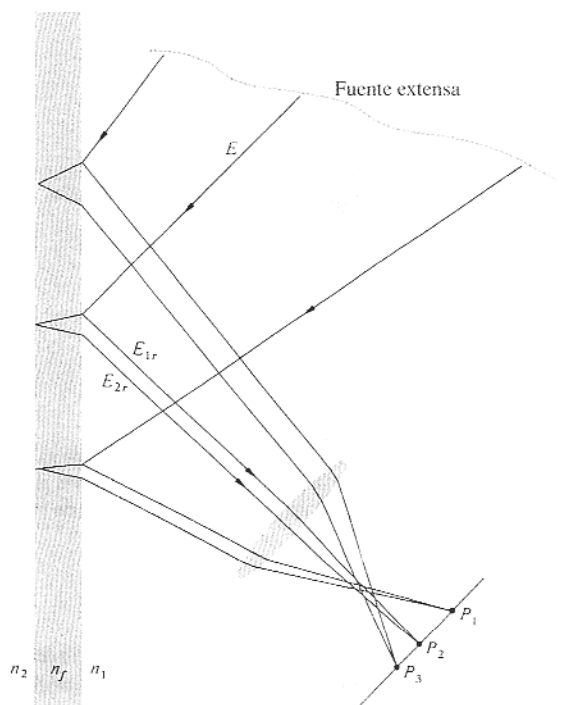


FIGURA 9.19 Franjas vistas sobre una región grande de la película.

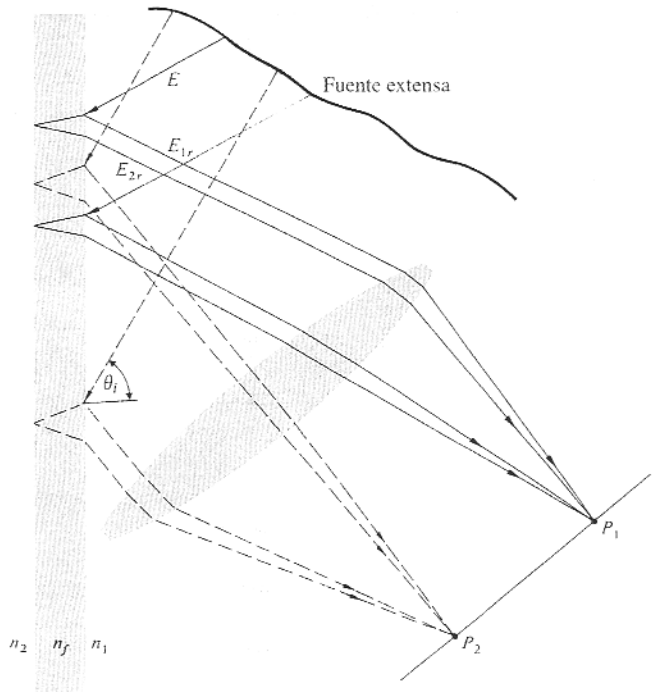


FIGURA 9.20 Todos los rayos con el mismo ángulo de inclinación llegan al mismo punto.

recerán en ella franjas brillantes y oscuras, siendo cada una de éstas un arco de un círculo centrado en la intersección de una perpendicular desde el ojo hasta la película.

A medida que la película se hace más gruesa, la separación $\overline{AC}$ entre E_{1r} y E_{2r}, también aumenta ya que

$$\overline{AC} = 2d \tan \theta_t \qquad [9.32]$$

Cuando sólo uno de los rayos puede entrar en la pupila del ojo, la distribución de interferencia desaparecerá. La lente más grande de un telescopio puede utilizarse para converger ambos rayos y posibilitar así, una vez más, la observación del patrón. La separación puede disminuirse también reduciendo θ_t y, por lo tanto, θ_i o sea, observando la película casi a incidencia normal. Las franjas de igual inclinación observables de esta forma para placas gruesas se denominan **franjas de Haidinger** en honor del físico austríaco Wilhelm Karl Haidinger (1795-1871). Con una fuente extensa, la simetría de la disposición necesita que la distribución de interferencia conste de una serie de bandas circulares concéntricas centradas sobre la perpendicular del ojo a la película (figura 9.21). Conforme el observador se mueve, el patrón también lo hace.

Las franjas de Haidinger pueden observarse en el cristal normal y corriente de una ventana de una tienda. Busquen una que tenga un rótulo de neón en el escaparate y miren para afuera hacia la calle, por la noche, muy cerca del tubo luminiscente. Verán unas franjas circulares centradas en su ojo que van alejándose flotando.

Franjas de igual espesor

Existe toda una clase de franjas de interferencia en las que el parámetro dominante es el espesor óptico, $n_f d$, más que θ_i. Se denominan **franjas de igual espesor.** Con la iluminación de luz blanca la iridiscencia de pompas de jabón, manchas de aceite (cuyo espesor es de unas cuantas longitudes de onda), e incluso superficies de metal oxidado es el resultado de variaciones en el espesor de la película. Las bandas de interferencia de este tipo son análogas al contorno de líneas de altura constante de un mapa topográfico. Cada franja es el lugar geométrico de todos los puntos en la película cuyo espesor óptico es constante. Por lo general n_f no varía, de modo que las franjas corresponden a regiones de espesor de película constante. Como tal, ellas pueden ser bastante útiles a fin de determinar aspectos diferentes de la superficie de elementos ópticos: lentes, prismas, etc. Por ejemplo, una superficie que va a ser examinada puede ponerse en contacto con un *plano óptico* [6]. El aire en el espacio entre las superficies genera una figura de interferencia de películas delgadas. Si la superficie de prueba es plana, una serie de bandas rectas e igualmente espaciadas indicará una película de aire en forma de cuña, que resulta, por lo general, del polvo entre los planos. Dos piezas de placas de vidrio separadas en un extremo por una tira de papel formarán una cuña satisfactoria con la cual se observarán estas bandas.

Cuando se observan casi a incidencia normal, de la forma ilustrada en la figura 9.22, los contornos procedentes de una película no uniforme se denominan **franjas de Fizeau.** Para

[6] Una superficie se dice que es ópticamente plana cuando se desvía no más de $\lambda/4$ de un plano perfecto. En el pasado, los mejores planos se hacían con cuarzo fundido transparente. Hoy en día, se dispone de materiales de vidrio-cerámica (por ejemplo, CERVIT) cuyos coeficientes de expansión térmica son muy pequeños (alrededor de un sexto de los de cuarzo). Se pueden hacer planos individuales de $\lambda/200$ o un poco mejores.

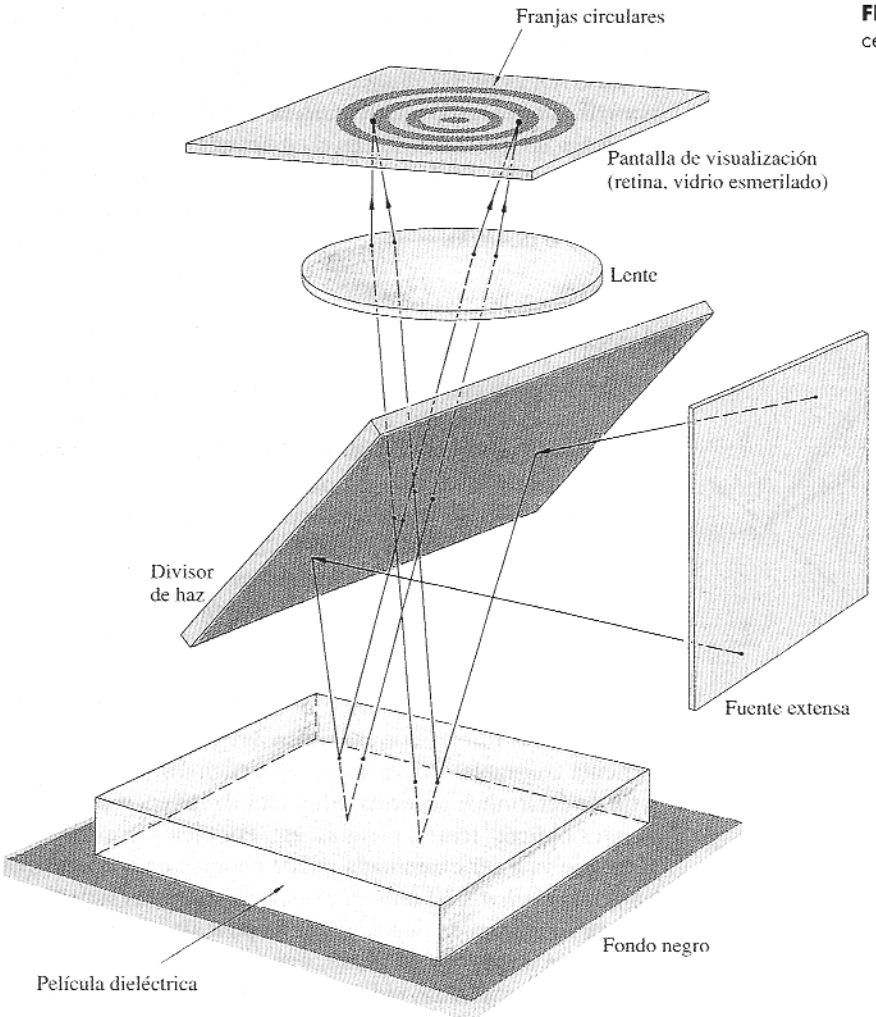


FIGURA 9.21 Franjas circulares de Haidinger centradas sobre el eje de la lente.

una cuña fina de ángulo pequeño α, la diferencia de longitud de camino óptico entre dos rayos reflejados puede calcularse aproximadamente por medio de la ecuación (9.33) donde d es el espesor en un punto determinado, es decir

$$d = x\alpha \tag{9.38}$$

Para pequeños valores de θ_i la condición para un máximo de interferencia es

$$(m + \tfrac{1}{2})\lambda_0 = 2n_f d_m$$

o

$$(m + \tfrac{1}{2})\lambda_0 = 2\alpha x_m n_f$$

Puesto que $n_f = \lambda_0/\lambda_f$, x_m puede escribirse como

$$x_m = \left(\frac{m + 1/2}{2\alpha}\right)\lambda_f \tag{9.39}$$

Los máximos se dan a distancias del vértice proporcionadas por $\lambda_f/4\alpha$, $3\lambda_f/4\alpha$, etc., y las franjas consecutivas están separadas por una distancia Δx, dada por

$$\Delta x = \lambda_f/2\alpha \tag{9.40}$$

Obsérvese que la diferencia de espesor de la película entre máximos adyacentes es simplemente $\lambda_f/2$. Puesto que el

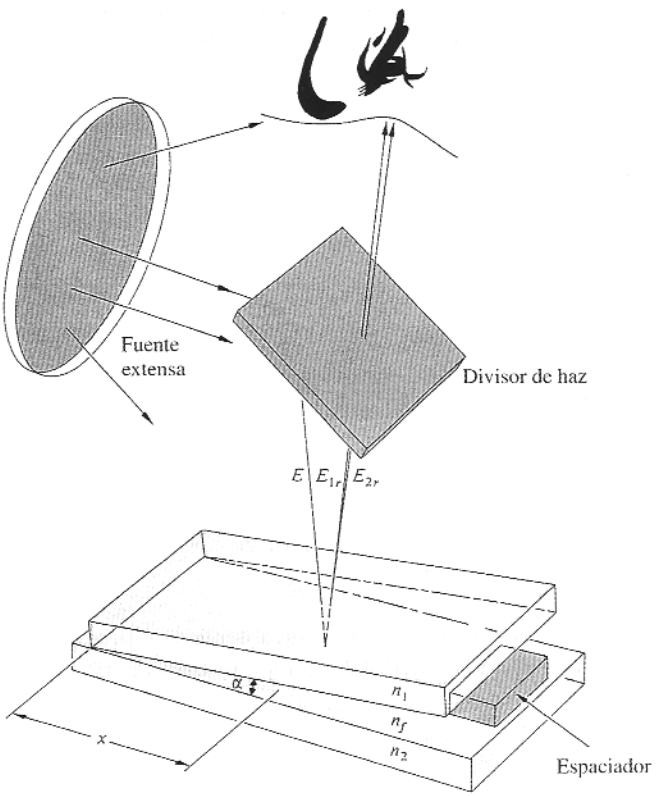


FIGURA 9.22 Franjas de una película en forma de cuña.

haz reflejado en la superficie inferior cruza la película dos veces ($\theta_i \approx \theta_t \approx 0$), los máximos adyacentes difieren en longitud de camino óptico en λ_f. Nótese también que el espesor de la película en los diversos máximos viene dado por

$$d_m = (m + \tfrac{1}{2})\frac{\lambda_f}{2} \qquad (9.41)$$

que es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda. Cruzando la película dos veces se obtiene un desfase de π que, al sumarse al desplazamiento de π resultante de la reflexión, vuelve a poner los dos rayos en fase.

La figura 9.23 es una fotografía de una película de jabón sostenida verticalmente de manera que se acomode en forma de cuña bajo la influencia de la gravedad. Al iluminarse con luz blanca las bandas aparecen de varios colores. El espesor de la zona negra en la parte superior es menor que $\lambda_f/4$. Dos

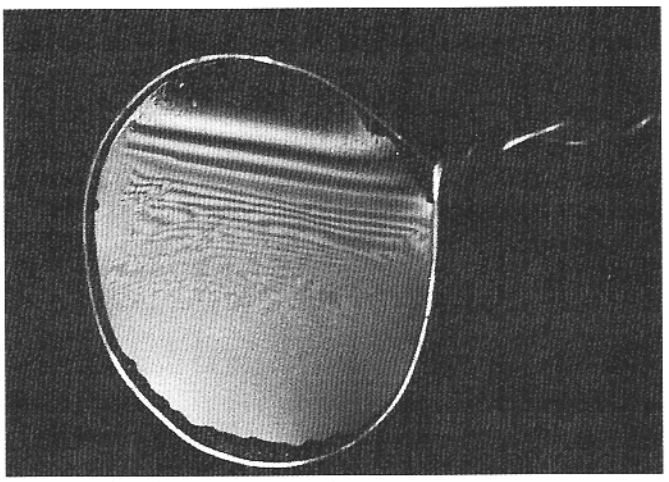


FIGURA 9.23 Una película en forma de cuña hecha con detergente líquido para fregar platos. (Foto de E. H.)

veces este valor más un desplazamiento adicional de $\lambda_f/2$ debido a la reflexión, es menor que una longitud de onda completa. Por lo tanto, los rayos reflejados están desfasados. Al decrecer aún más el espesor, el desfase total se aproxima a π. La irradiancia en donde está situado el observador alcanza un mínimo (ecuación 9.16) y la película aparece negra en luz reflejada [7].

Coloquemos dos portaobjetos de microscopio bien limpios una encima de otro y ejerzamos presión. La película de aire encerrada entre ambos generalmente no será uniforme. En la iluminación normal de una habitación, será posible ver una serie de bandas irregulares y coloreadas (franjas de igual espesor) sobre la superficie (figura 9.24). Los portaobjetos de láminas delgadas de vidrio se distorsionarán si se someten a presión y, por lo tanto, las franjas se moverán y cambiarán en consecuencia. Junten dos portaobjetos con cinta adhesiva mate: la luz se difundirá y las franjas reflejadas se verán más fácilmente. Si las dos piezas de vidrio se juntan presionándolas en un punto, por ejemplo, empleando la punta de un lápiz, se formará alrededor de ese punto una serie de franjas concéntricas, casi circulares. Esta distribución deno-

[7] El desfase relativo de π entre las reflexiones interna y externa es indispensable para que la densidad de flujo reflejada tienda a cero suavemente, conforme la película se hace más delgada y finalmente desaparece.

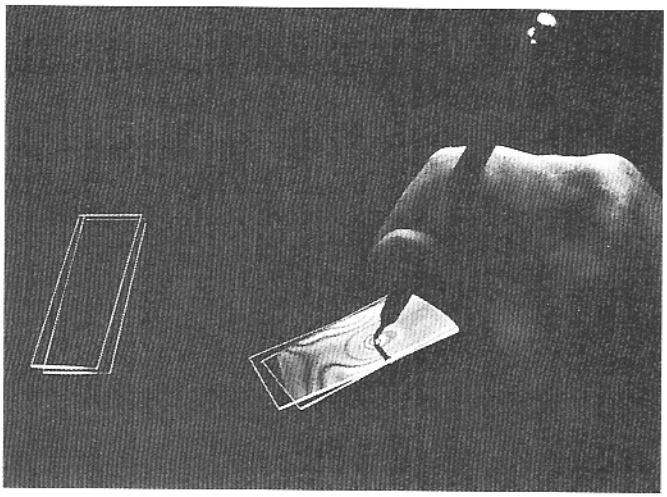


FIGURA 9.24 Franjas creadas por una película de aire entre dos portaobjetos de microscopio. (Foto de E. H.)

minada **anillos de Newton** (figura 9.25) [8], se examina con mayor precisión utilizando la disposición de la figura 9.26. Aquí, se coloca una lente sobre un plano óptico iluminado a incidencia normal con luz cuasimonocromática. La cantidad de uniformidad en la distribución de círculos concéntricos es una medida del nivel de perfección en la forma de la lente. Siendo R el radio de curvatura de la lente convexa, la relación entre la distancia x y el espesor d de la película viene dada por

$$x^2 = R^2 - (R - d)^2$$

o más simplemente por

$$x^2 = 2Rd - d^2$$

[8] Robert Hooke (1635-1703) e Isaac Newton, estudiaron ambos por su cuenta una gama entera de fenómenos en películas delgadas desde pompas de jabón hasta la película de aire entre lentes. Citando la obra *Optiks* de Newton:

> «Tomé dos objetos de vidrio, una lente plano-convexa para un telescopio de catorce pies y una lente biconvexa para uno de quince pies; a continuación, al colocar la otra con su cara plana hacia abajo, las presioné lentamente hasta lograr que los colores aparecieran, emergiendo en el centro de los círculos.»

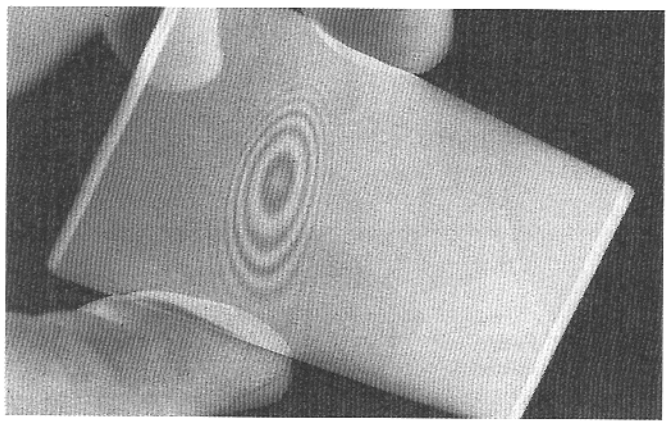


FIGURA 9.25 Anillos de Newton con dos portaobjetos de microscopio. (Fotos de E. H.)

Puesto que $R >> d$ esto se convierte en

$$x^2 = 2Rd$$

Supongamos que necesitamos únicamente examinar los primeros dos haces reflejados E_{1r} y E_{2r}. El máximo de interfe-

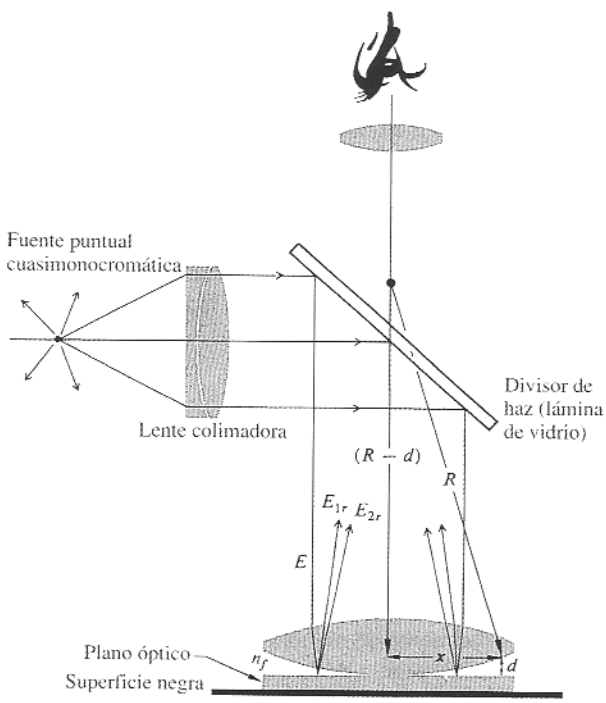


FIGURA 9.26 Montaje estándar para observar los anillos de Newton.

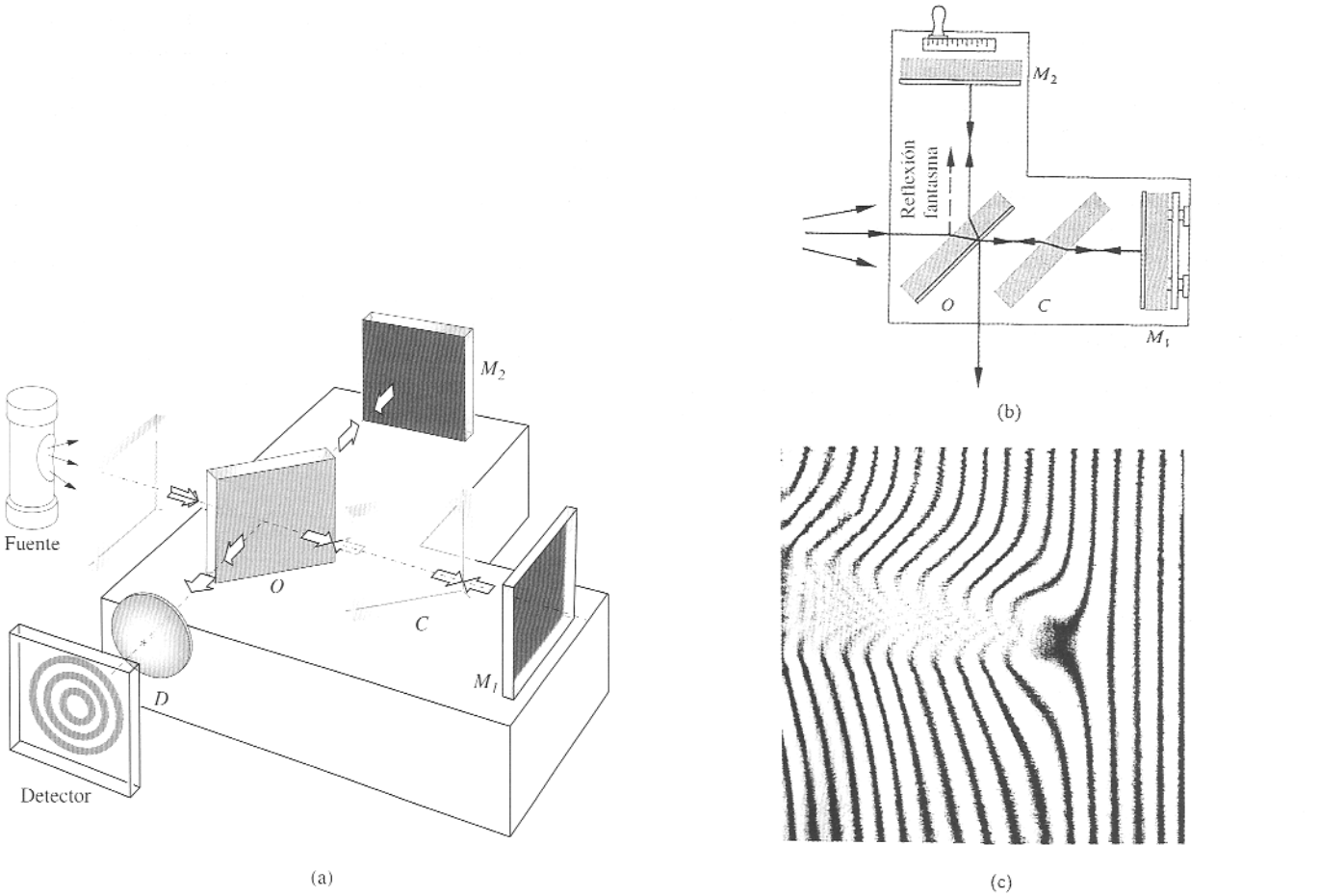


FIGURA 9.27 El interferómetro de Michelson. (*a*) Franjas circulares centradas en la lente. (*b*) Vista superior del interferómetro en la que se muestra el camino de la luz. (*c*) Distribución de franjas en forma de cuña distorsionado al colocar la punta de un soldador caliente en un brazo. Obsérvese el interesante fenómeno perceptual por el que la zona correspondiente a la punta del hierro aparece ligeramente amarilla. (Foto de E.H.)

rencia de orden m-ésimo ocurrirá en la película delgada cuando su espesor esté de acuerdo con la relación

$$2n_f d_m = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_0$$

El radio del anillo brillante m-ésimo se calcula por lo tanto combinando las dos últimas expresiones para obtener

[anillo brillante] $$x_m = [(m + \tfrac{1}{2})\lambda_f R]^{1/2} \tag{9.42}$$

De la misma manera, el radio del anillo oscuro m-ésimo es

[anillo oscuro] $$x_m = (m\lambda_f R)^{1/2} \tag{9.43}$$

Si entre las dos piezas de vidrio existe un buen contacto (sin polvo), la irradiancia de la franja central en ese punto ($x_0 = 0$) será claramente un mínimo, resultado comprensible puesto que d es cero en ese punto. En luz transmitida, la distribución observada complementará a la de luz reflejada analizada anteriormente, de tal modo que el centro aparecerá ahora brillante.

Los anillos de Newton, que son franjas de Fizeau, pueden distinguirse de la distribución circular de las franjas de Haidinger por la manera en la que los diámetros de los anillos varían con el orden m. La zona central en la distribución de Haidinger corresponde al valor máximo de m (problema 9.27) mientras que precisamente lo opuesto se aplica a los anillos de Newton.

Un taller de óptica que se dedique a la producción de lentes, dispondrá de un conjunto de placas de prueba esféricas de precisión de referencia o calibres. Un diseñador puede entonces especificar la precisión de la superficie de una lente nueva en función del número y regularidad de los anillos de Newton que podrán observarse con un determinado calibre de prueba. El uso placas de prueba en la fabricación de lentes de alta calidad está dando paso a técnicas mucho más complejas que incluyen interferómetros láser (sección 9.8.2).

9.4.2 Interferómetros con espejos

Existe una gran cantidad de interferómetros de división de amplitud en los que se emplean espejos y divisores de haz. El más conocido de todos e históricamente el más importante es el **interferómetro de Michelson** cuya configuración se ilustra en la figura 9.27. Una fuente extensa (que puede ser, por ejemplo, una placa difusora de vidrio esmerilado iluminada por una lámpara de descarga) emite una onda, parte de la cual viaja hacia la derecha. El divisor de haz en O divide la onda en dos: un segmento se desplazará a la derecha y el otro hacia arriba al fondo. Las dos ondas se reflejarán en los espejos M_1 y M_2 y regresarán al divisor de haz. Parte de la onda procedente de M_2 pasará a través del divisor de haz hacia abajo y parte de la onda proveniente de M_1 es desviada por el divisor de haz hacia el detector. Las dos ondas se unen y debería producirse una interferencia.

Obsérvese que un haz pasa a través de O tres veces mientras que el otro pasa sólo una vez. En consecuencia, cada haz cru-

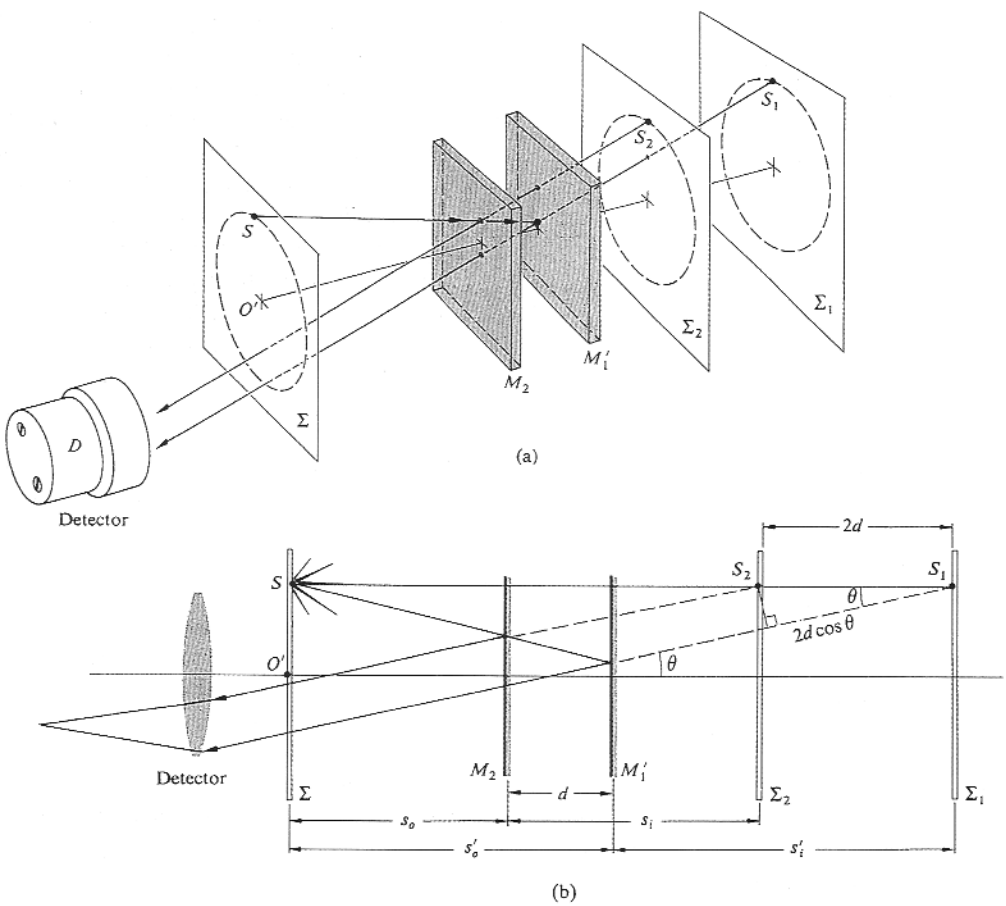


FIGURA 9.28 Una disposición conceptual del interferómetro de Michelson.

zará igual espesor de vidrio únicamente cuando una *placa compensadora* C se introduzca en el brazo OM_1. El compensador es un duplicado exacto del divisor de haz con la excepción de un posible plateado o una delgada película de recubrimiento en el divisor de haz. Se coloca a un ángulo de 45° tal que O y C sean mutuamente paralelas. Colocado el compensador, cualquier diferencia de camino óptico se debe a la diferencia de camino real. Además, a causa de la dispersión del divisor de haz, el camino óptico es una función de λ. Por lo tanto, para un trabajo cuantitativo, el interferómetro sin la placa compensadora puede utilizarse sólo con una fuente cuasimonocromática. La inclusión del compensador anula el efecto de dispersión de manera que incluso una fuente con ancho de banda muy grande generará franjas observables.

Para entender cómo se forman las franjas, se hace referencia a la construcción mostrada en la figura 9.28 donde los componentes físicos se representan más como superficies matemáticas. Un observador en la posición del detector verá simultáneamente ambos espejos M_1 y M_2 junto con la fuente Σ en el divisor del haz. Podemos volver a dibujar el interferómetro como si todos los elementos estuvieran en una línea recta. Aquí M'_1 corresponde a la imagen del espejo M_1 en el divisor de haz y Σ ha sido girado para alinearla con O y M_2. Las posiciones de estos elementos en el diagrama dependen de sus distancias relativas respecto a O (por ejemplo, M'_1 puede estar enfrente de, detrás de, o coincidir con M_2 y puede incluso pasar a través de él). Las superficies Σ_1 y Σ_2 son las imágenes de la fuente Σ en los espejos M_1 y M_2, respectivamente. Ahora considérese un solo punto S sobre la fuente emitiendo luz en todas direcciones y sigamos el recorrido de uno de los rayos salientes. En realidad, una onda procedente de S se dividirá en O y sus componentes se reflejarán posteriormente en M_1 y M_2. En nuestro diagrama esquemático, lo representamos reflejando el rayo en M_2 y M'_1. Para un observador en D, los dos rayos reflejados aparecerán provenientes de los puntos imagen S_1 y S_2 [obsérvese que todos los rayos mostrados en (*a*) y (*b*) de la figura 9.28 comparten un plano de incidencia común]. Para todo fin práctico, S_1 y S_2 son fuentes puntuales coherentes y podemos anticipar una distribución de la densidad de flujo que obedece a la ecuación (9.14).

Como puede verse en la figura, la diferencia de camino óptico para estos rayos es casi $2d \cos \theta$ que representa un desfase de $k_0 2d \cos \theta$. Existe un término adicional de fase debido a que la onda que atraviesa el brazo OM_2 es reflejada internamente en el divisor de haz, mientras que la onda OM_1 es reflejada externamente en O. Si el divisor de haz es simplemente una placa de vidrio sin recubrimiento, el desfase relativo procedente de las dos reflexiones será de π radianes. Interferencia *destructiva* más que constructiva se producirá cuando

$$2d \cos \theta_m = m\lambda_0 \tag{9.44}$$

donde m es un valor entero. Si esta condición se satisface para el punto S, entonces será igualmente bien satisfecha para cualquier punto en Σ que esté sobre el círculo de radio $O'S$ donde O' se halla en el eje del detector. Tal y como se ilustra en la figura 9.29, un observador verá una distribución de franjas circulares concéntricas con el eje central de su cristalino. Debido a la abertura pequeña del ojo, el observador no podrá ver la distribución completa sin recurrir a una lente de gran tamaño cerca del divisor del haz que recoja la mayoría de la luz emergente.

Si utilizamos una fuente que contenga un determinado número de componentes de frecuencia (por ejemplo, una lámpara de descarga de mercurio), la dependencia de θ_m con λ_0 en la ecuación (9.44) exige que cada una de tales componentes genere su proprio sistema de franjas. Obsérvese también que, como $2d \cos \theta_m$ debe ser inferior a la longitud de coherencia de la fuente, se deduce que la luz láser será particularmente fácil de usar a fin de demostrar el interferómetro (véase sección 9.5). Este punto sería muy evidente si comparáramos las franjas producidas por luz láser con aquellas generadas por luz blanca de una lámpara de tungsteno o una vela. En este último caso, la diferencia de camino óptico debe ser casi cero si deseamos ver alguna franja, mientras que en el primer caso, incluso una diferencia de 10 cm tiene un efecto casi imperceptible.

Una distribución de interferencia con luz cuasimonocromática consiste típicamente en un elevado número de anillos bri-

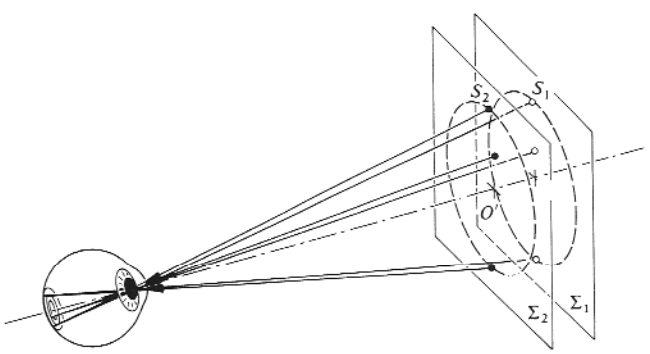


FIGURA 9.29 Formación de franjas circulares.

llantes y oscuros, alternados. Un determinado anillo corresponde a un *orden* fijo m. Conforme M_2 se mueve hacia M'_1, d decrece y, según la ecuación (9.44) cos θ_m aumenta mientras que θ_m por tanto decrece. Los anillos se comprimen hacia el centro mientras que el de orden superior desaparece cada vez que d decrece en $\lambda_0/2$. Cada anillo restante se ensancha a medida que las franjas van desapareciendo en el centro hasta que únicamente unas pocas llenen toda la pantalla. Cuando se haya alcanzado $d = 0$, la franja central se habrá expandido, llenando totalmente el campo de visión. Con un desfase de π, resultante de la reflexión en el divisor de haz, toda la pantalla será un mínimo de interferencia (la falta de perfección en los elementos ópticos hará que lo anterior no pueda detectarse). Si se mueve M_2 aún más, las franjas reaparecerán en el centro y se moverán hacia afuera.

Obsérvese que una franja central oscura para la cual $\theta_m = 0$ en la ecuación (9.44) puede representarse por

$$2d = m_0\lambda_0 \tag{9.45}$$

(Recuérdese que se trata de un caso especial. La región central podría no corresponder ni a un máximo ni a un mínimo). Aunque d fuera de 10 cm, un valor bastante modesto con luz láser, y $\lambda_0 = 500$ nm, m_0 será bastante grande, a saber 400.000. Para un valor fijo de d, los anillos oscuros sucesivos satisfarán las expresiones

$$\begin{aligned} 2d\cos\theta_1 &= (m_0 - 1)\lambda_0 \\ 2d\cos\theta_2 &= (m_0 - 2)\lambda_0 \\ &\vdots \\ 2d\cos\theta_p &= (m_0 - p)\lambda_0 \end{aligned} \tag{9.46}$$

La posición angular de cualquier anillo, por ejemplo, el anillo p-ésimo, se obtiene combinando las ecuaciones (9.45) y (9.46) para quedar

$$2d(1 - \cos\theta_p) = p\lambda_0 \tag{9.47}$$

Puesto que $\theta_m \equiv \theta_p$ son ambos precisamente la mitad del ángulo subtendido sobre el detector por un anillo particular, y dado que $m = m_0 - p$, la ecuación (9.47) equivale a la ecuación (9.44). La nueva forma es algo más conveniente dado que (usando el mismo ejemplo anterior) con $d = 10$ cm, el sexto anillo oscuro puede especificarse estableciendo que $p = 6$, o en términos del *orden* del anillo p-ésimo, que $m = 399.994$. Si θ_p es pequeño

$$\cos\theta_p = 1 - \frac{\theta_p^2}{2}$$

y la ecuación (9.47) da

$$\theta_p = \left(\frac{p\lambda_0}{d}\right)^{1/2} \tag{9.48}$$

para el radio angular de la franja p-ésima.

La construcción de la figura 9.28 representa una posible configuración en donde consideramos únicamente pares de rayos paralelos emergentes. Puesto que estos rayos no llegan a cruzarse, no pueden formar una imagen sin una lente condensadora de alguna clase. De hecho, esa lente es generalmente el ojo del observador enfocado al infinito. Las *franjas* resultantes *de igual inclinación* (θ_m = constante) localizadas en el infinito, son también *franjas de Haidinger*. Una comparación de las figuras 9.28*b* y 9.3*a*, ambas ilustrando dos fuentes puntuales coherentes, sugiere que además de las franjas (virtuales) en el infinito puedan existir también franjas (reales) formadas por los rayos convergentes. Estas franjas de hecho existen. Por lo tanto, si se ilumina el interferómetro con una *fuente ancha* y se bloquea toda luz ajena, podrá verse fácilmente la distribución proyectada en una pantalla en un cuarto oscurecido (véase sección 9.5). Las franjas aparecerán en el espacio en frente del interferómetro (por ejemplo, donde está el detector) y su tamaño aumentará al aumentar la distancia con respecto al divisor de haz. Más adelante, consideraremos las franjas (reales) producidas por la iluminación de una fuente puntual.

Cuando los espejos del interferómetro están inclinados el uno respecto al otro formando un ángulo pequeño, es decir, cuando M_1 y M_2 no son totalmente perpendiculares, se observan *franjas de Fizeau*. La cuña de aire formada entre M_2 y M'_1 produce una distribución de franjas rectas y paralelas. Los rayos interferentes parecen divergir de un punto situado tras los espejos. El ojo, por lo tanto, tiene que enfocar sobre ese punto para poder observar estas *franjas localizadas*. Puede demostrarse analíticamente [9] que con ajustes apropiados en la orientación de los espejos M_1 y M_2, pueden producirse franjas rectas, circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas (esto se aplica tanto a franjas reales como a las virtuales).

Es evidente que se puede recurrir al interferómetro de Michelson para llevar a cabo medidas de longitud muy precisas. Como el espejo móvil se desplaza en $\lambda_0/2$, cada franja se desplazará hacia la posición previamente ocupada por una franja adyacente. Si se emplea un microscopio, únicamente se necesita contar el número de franjas N o parte de ellas, que han

[9] Véase, por ejemplo, Valasek, *Optics*, pág. 135.

pasado por un punto de referencia a fin de determinar la distancia recorrida por el espejo Δd, es decir

$$\Delta d = N(\lambda_0/2)$$

Hoy en día, esto puede llevarse a cabo fácilmente con medios electrónicos. Michelson usó el método para medir el número de longitud de ondas de la línea roja del cadmio que correspondía al metro estándar de Sévres cerca de París [10].

El interferómetro de Michelson puede emplearse junto con unos filtros polaroides a fin de comprobar las leyes de Fresnel-Arago. Un polarizador introducido en cada brazo permitirá mantener casi constante la diferencia de longitud de camino óptico, mientras que las direcciones del vector de campo de los dos haces cambiará fácilmente.

Un interferómetro de Michelson para microondas puede construirse con espejos de hojas metálicas y un divisor de haz hecho con una rejilla de alambres. El detector localizado en la posición de la franja central, permite detectar fácilmente cambios de máximos a mínimos conforme uno de los espejos se mueva, pudiendo así determinar λ. Unas cuantas hojas delgadas de madera contrachapada, plástico o vidrio introducidas en uno de los brazos cambiará la franja central. Contando el número de desplazamientos de franjas se podrá conocer el índice de refracción, y de ahí podemos calcular la constante dieléctrica del material.

El **interferómetro de Mach-Zehnder** es otro dispositivo de división de amplitud. Tal y como se ilustra en la figura 9.30, consiste de dos divisores de haz y de dos espejos totalmente reflectores. Las dos ondas dentro del instrumento viajan a lo largo de caminos separados. Puede introducirse una pequeña diferencia entre los caminos por una ligera inclinación de uno de los divisores de haz. Dado que los dos caminos están separados, el interferómetro es relativamente difícil de alinear. Por la misma razón, sin embargo, el interferómetro puede aplicarse en miles de situaciones. Incluso se ha usado de forma algo alterada pero conceptualmente análoga, para obtener franjas de interferencia de electrones [11].

Interponiendo un objeto en uno de los haces se alterará la diferencia de longitud de camino óptico cambiando, por lo tanto, la distribución de franjas. Una aplicación común de este instrumento consiste en observar la variación de densidad en distribuciones de flujo de gases en el interior de cámaras para la investigación, por ejemplo, túneles de viento, tubos de choque, etc. Un haz pasa a través de las ventanas ópticamente planas de la cámara de prueba, mientras que el otro haz cruza placas compensadoras apropiadas. El haz dentro de la cámara se propagará a lo largo de regiones que tengan variaciones espaciales del índice de refracción. Las distorsiones resultantes en el frente de onda generarán el contorno de las franjas. Una aplicación particularmente interesante se muestra en la figura 9.31 que es una fotografía de un instrumento de compresión magnética conocido como Scylla IV que se utilizaba para estudiar reacciones termonucleares en el Laboratorio Científico de Los Alamos. En esta aplicación, el interferómetro de Mach-Zehnder tiene la forma de un paralelogramo tal y como se ilustra en la figura 9.32. Los dos *interferogramas* de láser de rubí, como se denominan estas fotos, muestran (figura 9.33) la distribución de fondo sin plasma en el tubo y los contornos de densidad con el plasma durante una reacción (figura 9.34).

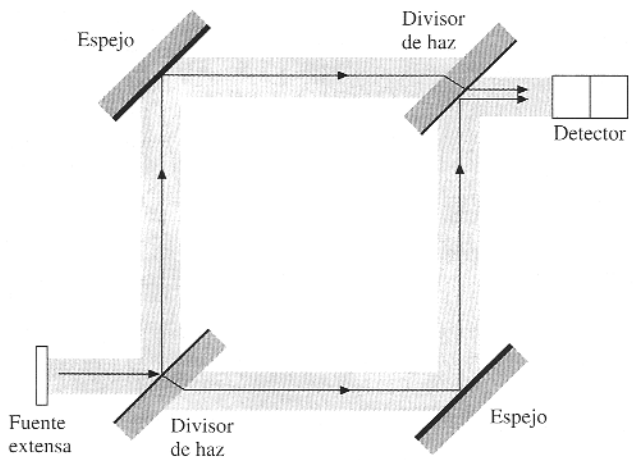


FIGURA 9.30 El interferómetro de Mach-Zehnder.

Otro dispositivo de división de amplitud que difiere de los instrumentos anteriores en muchos aspectos, es el **interferómetro de Sagnac,** muy fácil de alinear y bastante estable. En la última parte de este capítulo, se analizará una aplicación muy interesante donde consideraremos su uso como giroscopio. Una forma del interferómetro de Sagnac se muestra en la figura 9.35*a* y otra en la figura 9.35*b*; otras formas son también posibles. Obsérvese que la característi-

[10] Un análisis del procedimiento que él utilizó para no tener que contar directamente las 3.106.327 franjas se puede encontrar en Strong, *Concepts of Classical Optics*. pág. 238 o Williams, *App/ications of Interferometry,* pág. 51.

[11] L. Marton, J. Arol Simpson y J. A. Suddeth. *Rev Sci. Instr.* **25**, 1099 (1954) y *Phys. Rev.* **90**, 490 (1953).

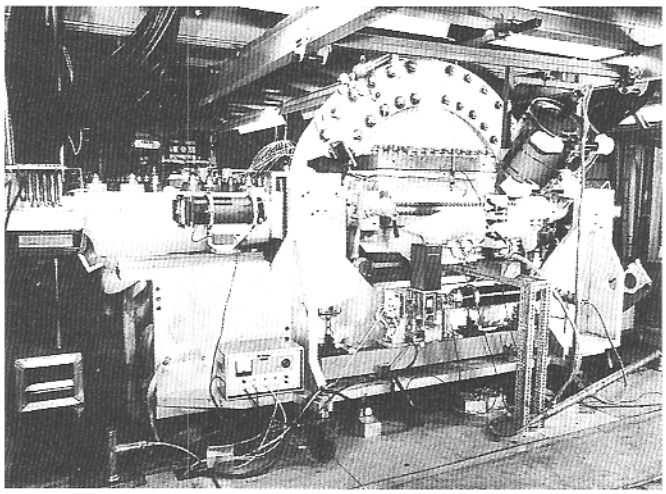


FIGURA 9.31 Scylla IV. (Foto cedida por la Universidad de California, Lawrence Livermore National Laboratory y el Departamento de Energía.)

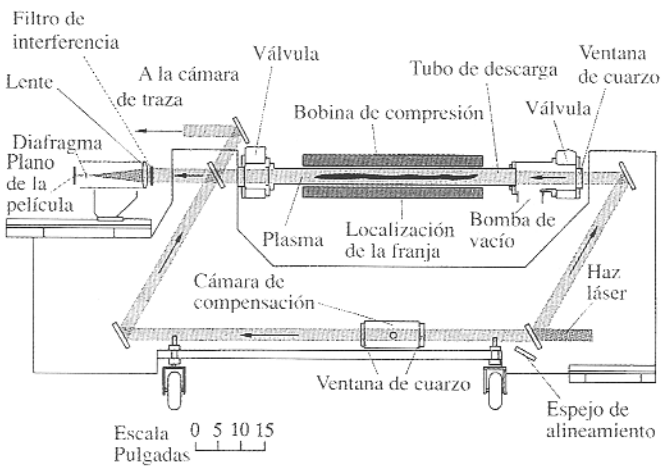


FIGURA 9.32 Esquema de Scylla IV.

ca principal de este dispositivo es que los haces toman dos caminos idénticos pero opuestos en dirección y que ambos forman caminos cerrados antes de que se unan para producir una interferencia. Un pequeño desplazamiento deliberado en la orientación de uno de los espejos producirá una diferencia en el camino óptico obteniéndose una distribución de franjas. Puesto que los haces están superpuestos y por lo tanto son inseparables, el interferómetro no puede emplearse en las aplicaciones convencionales que, por lo general, dependen de la posibilidad de imponer variaciones sobre únicamente uno de los haces constitutivos.

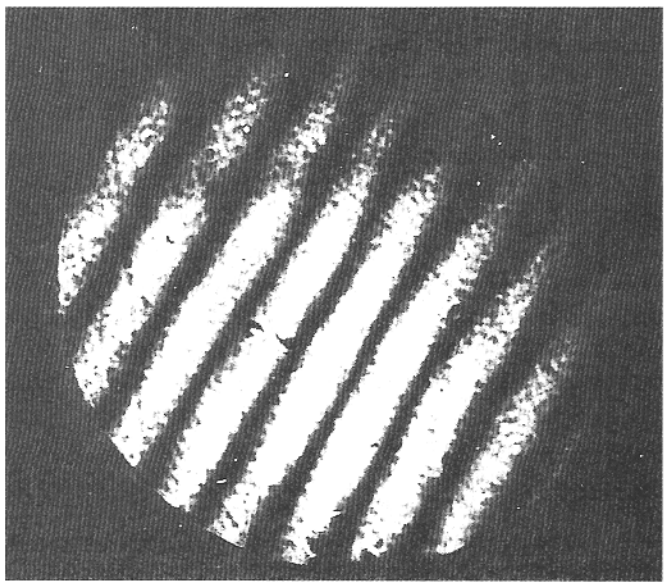


FIGURA 9.33 Interferograma sin plasma. (Foto cedida por Los Alamos National Laboratory.)

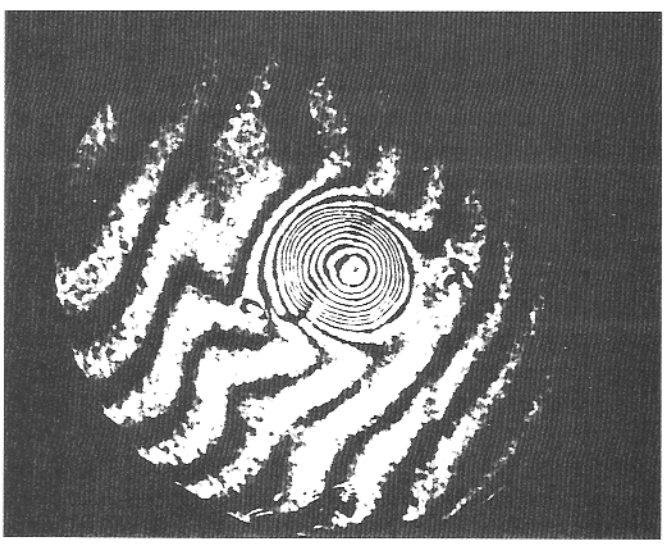


FIGURA 9.34 Interferograma con plasma. (Foto cedida por Los Alamos National Laboratory.)

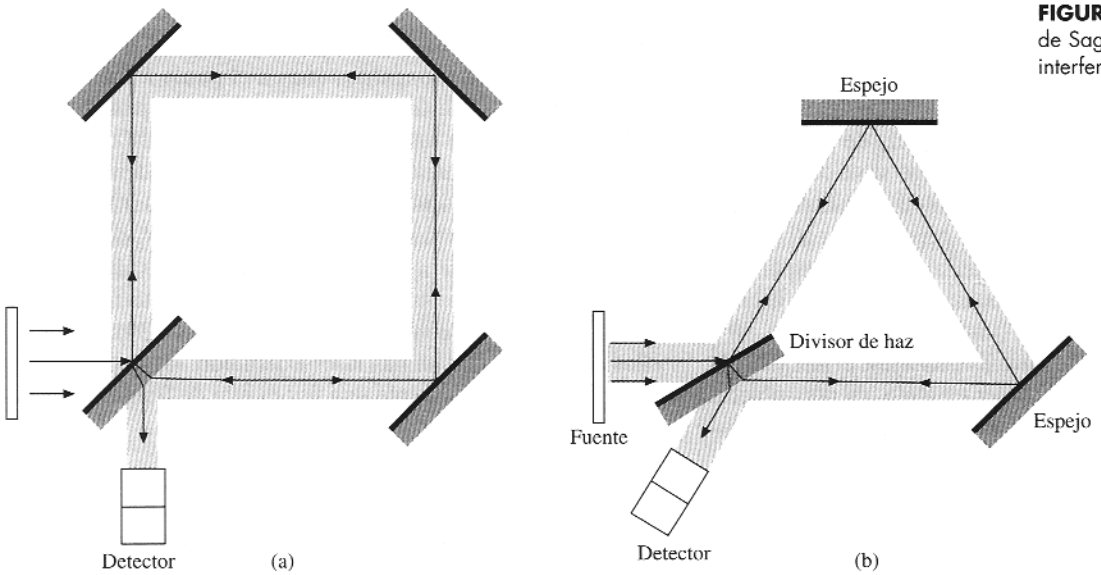


FIGURA 9.35 (*a*) Interferómetro de Sagnac. (*b*) Otra variación del interferómetro de Sagnac.

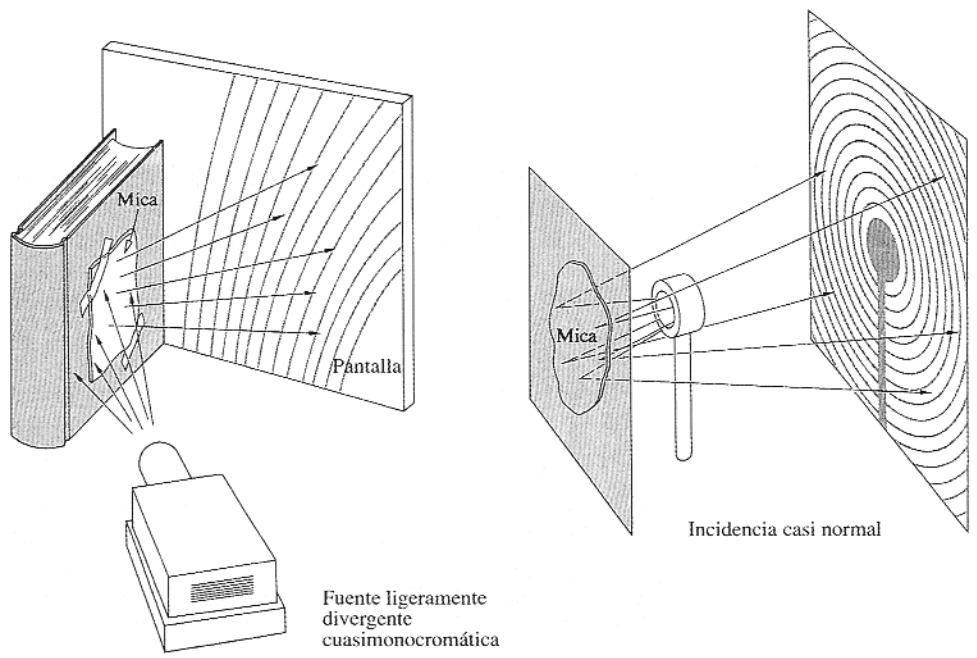


FIGURA 9.36 El interferómetro de Pohl.

FRANJAS REALES

Antes de pasar a analizar la creación de franjas reales, opuestas a las virtuales, consideremos otro instrumento interferométrico de división de amplitud, el **sistema productor de franjas de Pohl**, que se ilustra en la figura 9.36. Se trata simplemente de una película delgada transparente iluminada por la luz procedente de una fuente puntual. En este caso, las franjas son reales y pueden

interceptarse en una pantalla colocada en un lugar cualquiera cerca del interferómetro sin una lente condensadora. Una fuente de luz conveniente es una lámpara de mercurio cubierta con un blindaje que tiene un pequeño orificio ($\approx \frac{1}{4}$ de pulgada en diámetro). Como película delgada se usa una pieza de mica normal pegada sobre una cubierta de libro negra que sirve como fondo opaco. Si tenemos un láser, dada su longitud de coherencia tan notable y su alta densidad de flujo nos permitirán realizar este experimento con casi cualquier material liso y transparente. Auméntese el diámetro del haz del láser a 1 ó 2 pulgadas haciéndolo pasar a través de una lente (una longitud focal de 50 a 100 cm será suficiente). A continuación, refléjese el haz sobre la superficie de una placa de vidrio (por ejemplo, un portaobjetos de microscopio) y se harán evidentes las franjas dentro del disco iluminado donde sea que incida en la pantalla.

El principio básico en el que se fundamenta la iluminación de fuente puntual para los cuatro instrumentos interferométricos analizados anteriormente, puede entenderse con la ayuda de un diagrama, cuyas variaciones se muestran en las figuras 9.37 y 9.38 [12]. Las dos líneas verticales en la figura 9.37 o las inclinadas de la figura 9.38, representan ya sea las posiciones de los espejos o los dos lados de la hoja delgada en el interferómetro de Pohl. Supongamos que en el punto P en el medio circundante haya interferencia constructiva. Una pantalla colocada en dicho punto interceptaría este máximo así como toda la distribución de franjas, sin ningún sistema condensador. Las fuentes coherentes virtuales que emiten los haces interferentes son las imágenes formadas por los espejos S_1 y S_2 de la fuente puntual real S. Cabe notar que esta clase de distribución de franjas reales puede observarse tanto con los interferómetros de Michelson como con los de Sagnac (figuras 9.39). Si uno de ellos se ilumina con un haz láser expandido, las ondas salientes generarán directamente una figura real de franjas. Se trata de una demostración muy simple y bonita.

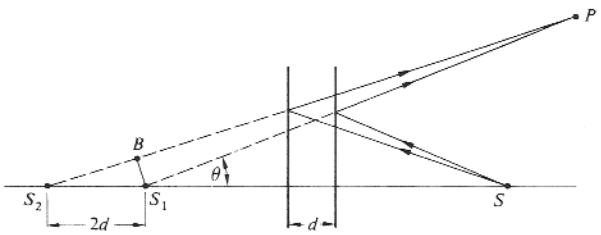


FIGURA 9.37 Iluminación con fuente puntual de superficies paralelas.

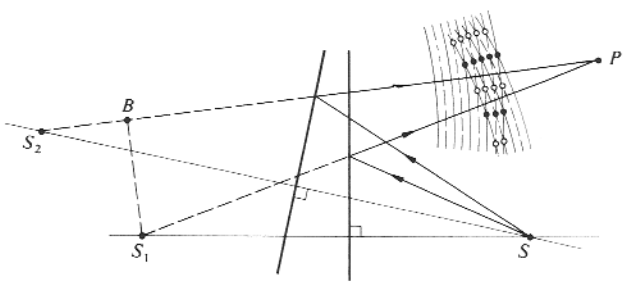


FIGURA 9.38 Iluminación con fuente puntual de superficies inclinadas.

[12] A. Zajac, H. Sadowski y S. Licht, «The Real Fringes in the Sagnac and Michelson Interferometers», *Am. J. Phys.* **29**, 669 (1961).

9.5 Tipos y localización de las franjas de interferencia

A menudo es importante saber dónde estarán localizadas las franjas producidas en un determinado sistema interferométrico, dado que ésta es la región en la que necesitamos enfocar

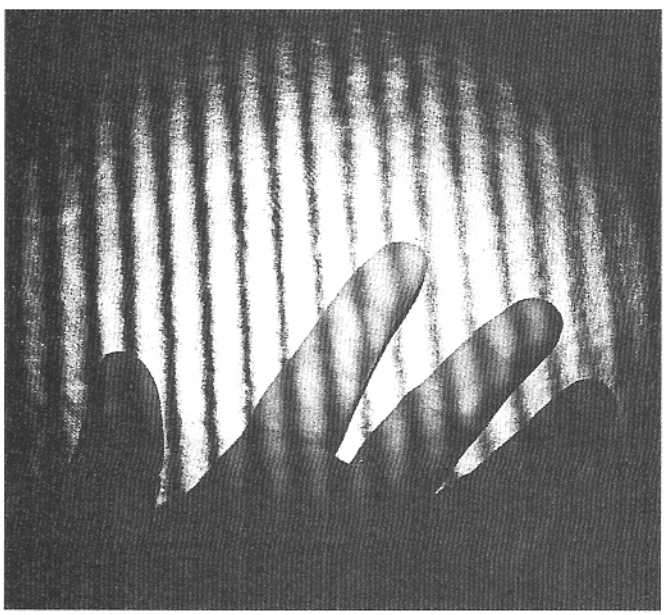


FIGURA 9.39 Franjas reales de Michelson al emplear un láser de He-Ne. (Foto de E. H.)

nuestro detector (ojo, cámara y telescopio). En general, el problema de la localización de las franjas es característico de un interferómetro dado, es decir, se tiene que resolver de forma particular para cada dispositivo.

Las franjas pueden clasificarse, en primer lugar, en *reales o virtuales* y sucesivamente en *no localizadas* o *localizadas*. Las franjas reales son aquellas que pueden verse en una pantalla sin el uso de un sistema adicional de enfoque. Todos los rayos que forman estas franjas convergen, por sí solos, al punto de observación. Las franjas virtuales no pueden proyectarse en una pantalla sin el sistema de enfoque. En este caso los rayos obviamente no convergen.

Las franjas no localizadas son reales y existen en cualquier lugar dentro de una región extensa del espacio (tridimensional). La distribución está literalmente no localizada en el sentido de que no está restringida a ninguna región pequeña. El experimento de Young, tal y como se ilustra en la figura 9.8, llena el espacio detrás de las fuentes secundarias con una serie entera de franjas reales. Las franjas no localizadas de este tipo generalmente son producidas por fuentes pequeñas, es decir, fuentes puntuales o lineales, sean reales o virtuales. Por el contrario, las franjas localizadas pueden observarse claramente sólo en una superficie particular. Esta distribución está literalmente localizada, ya sea cerca de una película delgada o en el infinito. Este tipo de franjas resultará siempre del uso de fuentes extensas pudiendo también producirse con una fuente puntual.

El interferómetro de Pohl (figura 9.36) resulta ser particularmente útil para ilustrar estos principios puesto que con una fuente puntual producirá ambos tipos de franjas, reales no localizadas y virtuales localizadas. Las franjas reales no loca-

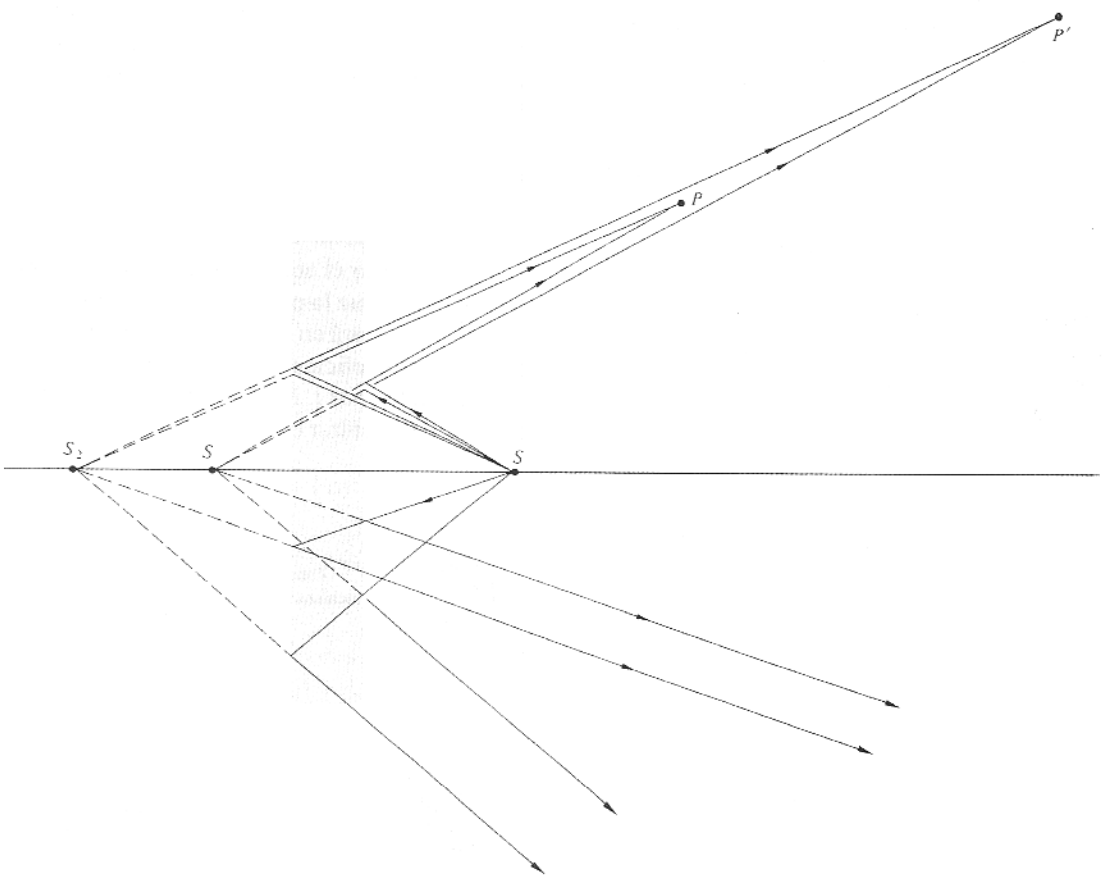


FIGURA 9.40 Película paralela. Los rayos se han dibujado sin tener en cuenta la refracción.

lizadas (figura 9.40, mitad superior) pueden ser interceptadas en una pantalla casi en cualquier lugar en frente de la película de mica.

Para los rayos no convergentes, es necesario darse cuenta que, dado que la abertura del ojo es bastante pequeña, únicamente interceptará aquellos rayos que vayan dirigidos directamente a él. Para este haz pequeño de rayos, el ojo, en una posición particular, verá una mancha brillante u oscura pero no mucho más. Para percibir un patrón de franjas extenso formado por rayos paralelos del tipo que se muestra en la parte inferior de la figura 9.40, se tendrá que usar una lente grande para poder recoger la luz que entra con otras orientaciones. En la práctica, sin embargo, la fuente es generalmente más o menos extensa y las franjas generalmente podrán verse observando la película con el ojo enfocado al infinito. Estas franjas virtuales están localizadas en el infinito y son equivalentes a las franjas *de igual inclinación* de la sección 9.4. De la misma forma, si los espejos M_1 y M_2 en el interferómetro de Michelson son paralelos, se observarán las franjas habituales, circulares, virtuales y de igual inclinación localizadas en el infinito. Podemos imaginar una delgada capa de aire, entre las superficies de los espejos M_2 y M'_1, que actúa para generar dichas franjas. Igual que con la configuración de la figura 9.40 para el dispositivo de Pohl, existirán franjas reales y no localizadas.

En la figura 9.41 se muestra la geometría de la distribución de franjas vista con luz reflejada en una cuña transparente de ángulo pequeño α. La localización de la franja P estará determinada por la dirección de incidencia de la luz que llega. Los anillos de Newton tienen el mismo tipo de localización que los de Michelson, Sagnac y otros interferómetros para los cuales el sistema equivalente de interferencia consiste en dos planos reflectores inclinados ligeramente el uno respecto al otro. La disposición en forma de cuña del interferómetro de Mach-Zehnder es diferente puesto que las franjas virtuales resultantes pueden localizarse en cualquier plano dentro de la región ocupada generalmente por la cámara de prueba una vez que se giren los espejos (figura 9.42).

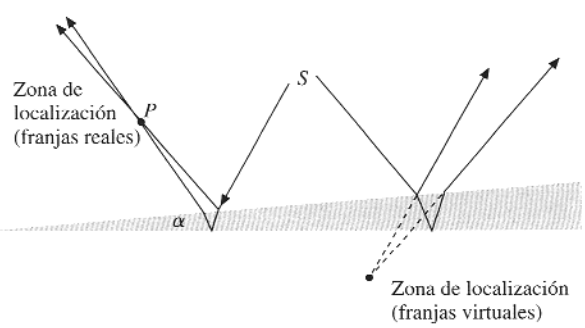


FIGURA 9.41 Franjas formadas por una película en cuña.

9.6 Interferencia de haces múltiples

Hasta ahora hemos examinado varias situaciones en las que se han combinado dos haces coherentes para producir figuras de interferencia bajo diversas circunstancias. Existen, sin embargo, otras circunstancias en las cuales un número mucho mayor de ondas mutuamente coherentes se hacen interferir. De hecho, si los coeficientes de reflexión para la amplitud r, para la placa paralela ilustrada en la figura 9.17 no son pequeños, como sucedía en los casos anteriores, las ondas reflejadas de orden superior $\mathbf{E}_{3r}$, $\mathbf{E}_{4r}$..., llegan a ser bastante importantes. Una placa de vidrio, ligeramente plateada en ambas caras de manera que los r se aproximen a la unidad, generará un número grande de rayos reflejados varias veces internamente. Por el momento, únicamente consideraremos situaciones donde la película, substrato y medio externo son dieléctricos transparentes. Esto evita los cambios de fase más complejos resultantes de superficies revestidas de metales.

Para empezar el análisis de la forma más sencilla posible, supondremos que la película es no absorbente y que $n_1 = n_2$. La notación estará en concordancia con la de la sección 4.10, es decir, los coeficientes de transmisión de amplitud estarán representados por t, la fracción de la amplitud de una onda transmitida al entrar en la película, y t', la fracción transmiti-

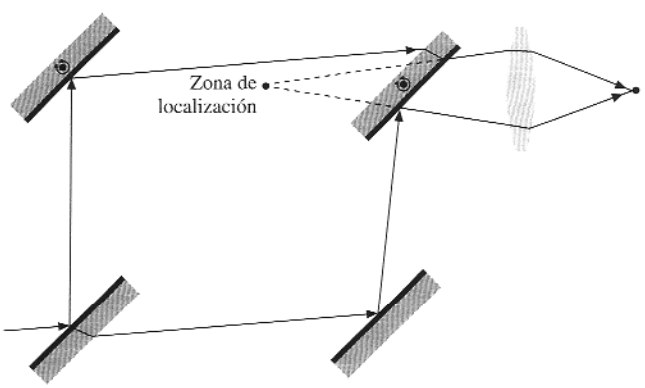


FIGURA 9.42 Franjas en el interferómetro de Mach-Zehnder.

da al salir una onda de la película. Recordemos que los rayos son en realidad líneas perpendiculares a los frentes de onda siendo, por lo tanto, también perpendiculares a los campos ópticos $\mathbf{E}_{1r}$, $\mathbf{E}_{2r}$, etc. Puesto que los rayos permanecerán casi paralelos, la teoría escalar será suficiente siempre que no descuidemos tener en cuenta cualquier posible desplazamiento de fase.

Tal y como se muestra en la figura 9.43, las amplitudes escalares de las ondas reflejadas $\mathbf{E}_{1r}$, $\mathbf{E}_{2r}$, $\mathbf{E}_{3r}$,... son respectivamente E_0r, $E_0tr't'$, $E_0tr'^3t'$,..., donde E_0 es la amplitud de la onda inicial incidente y $r = -r'$ por la ecuación (4.89) El signo menos indica un desfase que consideraremos más tarde. De la misma manera, las ondas transmitidas $\mathbf{E}_{1t}$, $\mathbf{E}_{2t}$, $\mathbf{E}_{3t}$,..., tendrán amplitudes E_0tt', $E_0tr'^2t'$, $E_0tr'^4t'$... Consideremos el conjunto de rayos paralelos reflejados en el que cada rayo posee su propia relación fija de fase con respecto a los demás. Los desfases surgen de una combinación de diferencias de longitud de camino óptico y desfases que se dan en varias reflexiones. A pesar de todo ello, las ondas son mutuamente coherentes y si se recogen y se enfocan en el punto P con una lente, todas ellas interferirán. La expresión para la irradiancia resultante tiene una forma particularmente simple en dos casos especiales.

La diferencia de longitud de camino óptico entre rayos adyacentes viene dada por

$$\Lambda = 2n_f d \cos \theta_t \qquad [9.33]$$

Todas las ondas excepto la primera, $\mathbf{E}_{1r}$, sufren un número impar de reflexiones *dentro* de la película. De la figura 4.43 se deduce que para cada reflexión interna la componente del campo paralelo al plano de incidencia cambia de fase ya sea en π o 0 dependiendo del ángulo interno incidente, $\theta_i < \theta_c$. La componente del campo perpendicular al plano de incidencia no sufre cambio de fase por reflexión interna cuando $\theta_i < \theta_c$. Entonces, no existe cambio de fase relativo entre las ondas resultantes de un número impar de tales reflexiones (figura 9.44). Como en el *primer caso especial*, si $\Lambda = m\lambda$, la segunda, tercera, cuarta, etc., onda estarán todas en fase en P. La onda $\mathbf{E}_{1r}$, sin embargo, debido a su reflexión en la superficie superior de la película, estará desfasada 180° con respecto a las demás ondas. El desfase está incluido en el hecho que $r = -r'$ y r' ocurre únicamente con potencias impares. La suma de amplitudes escalares, es decir, la *amplitud total reflejada* en el punto P, es entonces

$$E_{0r} = E_0r - (E_0trt' + E_0tr^3t' + E_0tr^5t' + \cdots)$$

o

$$E_{0r} = E_0r - E_0trt'(1 + r^2 + r^4 + \cdots)$$

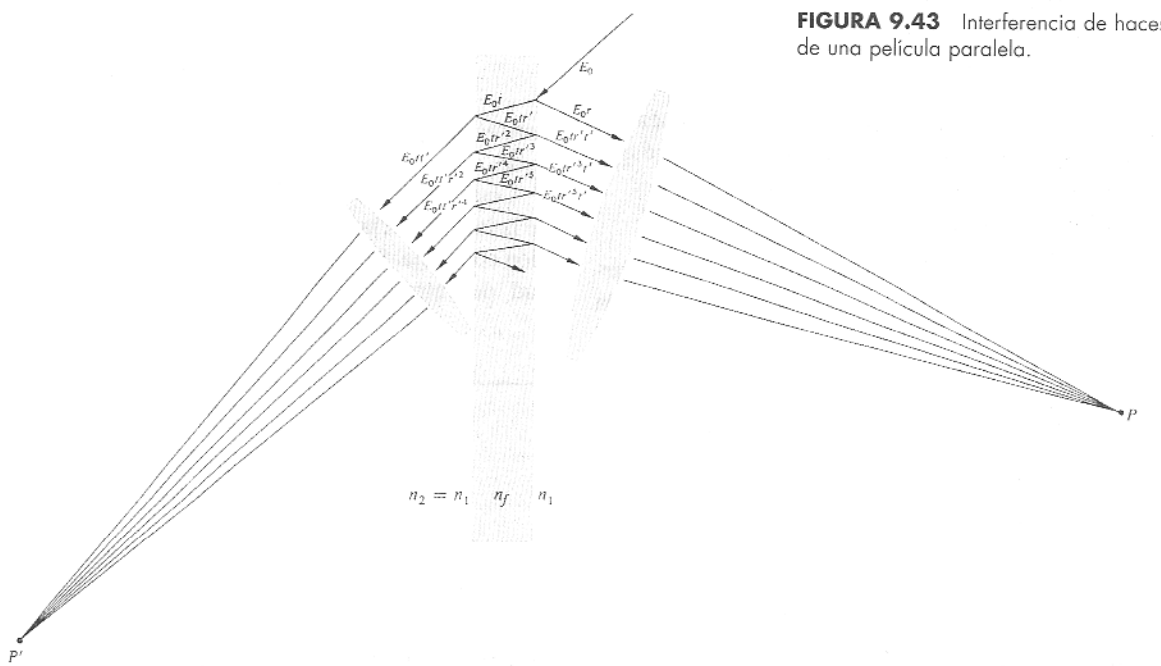


FIGURA 9.43 Interferencia de haces múltiples de una película paralela.

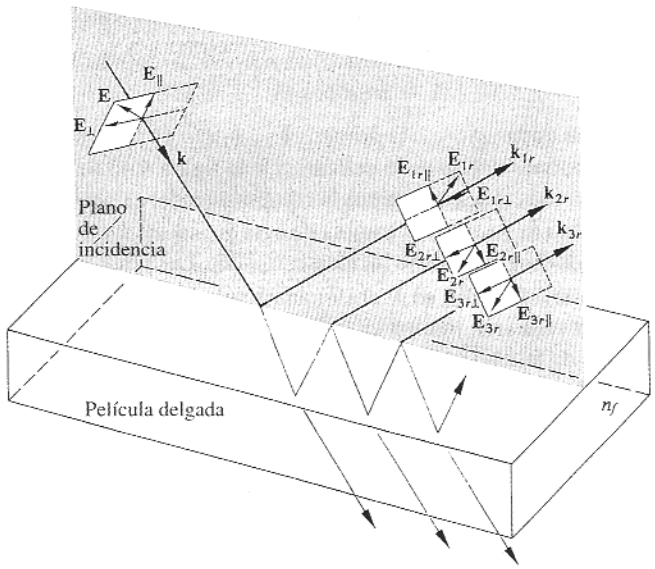


FIGURA 9.44 Desfases producidos únicamente de reflexiones (internas $\theta_i < \theta_p'$).

donde como $\Lambda = m\lambda$, hemos reemplazado solamente r' por $-r$. La serie geométrica entre paréntesis converge a una suma finita $1/(1 - r^2)$ siempre y cuando $r^2 < 1$ de modo que

$$E_{0r} = E_0 r - \frac{E_0 trt'}{(1 - r^2)} \tag{9.49}$$

En la sección 4.10, al analizar el tratamiento de Stokes del principio de reversibilidad (ecuación 4.86), se demostró que $tt' = 1 - r^2$ y, por lo tanto, se deduce que

$$E_{0r} = 0$$

En consecuencia, cuando $\Lambda = m\lambda$ la segunda, tercera, cuarta, etc. onda anulará exactamente la primera onda reflejada tal y como se muestra en la figura 9.45. En este caso no se refleja luz y toda la energía incidente será transmitida. El *segundo caso especial* se da cuando $\Lambda = (m + \frac{1}{2})\lambda$. Ahora bien, el primer y segundo rayos están en fase mientras que todas las demás ondas adyacentes están desfasadas $\lambda/2$, es decir, la segunda está desfasada con la tercera, la tercera está desfasada con la cuarta, etc. La *amplitud escalar* resultante es entonces

$$E_{0r} = E_0 r + E_0 trt' - E_0 tr^3 t' + E_0 tr^5 t' - \cdots$$

o

$$E_{0r} = E_0 r + E_0 rtt'(1 - r^2 + r^4 - \cdots)$$

La serie entre paréntesis es igual a $1/(1 + r^2)$; en tal caso

$$E_{0r} = E_0 r\left[1 + \frac{tt'}{(1 + r^2)}\right]$$

Una vez más, $tt' = 1 - r^2$; por lo tanto, tal y como se ilustra en la figura 9.46

$$E_{0r} = \frac{2r}{(1 + r^2)} E_0$$

Dado que esta disposición particular conduce a la suma de la primera y de la segunda onda, que tienen amplitudes relativamente grandes, debería dar como resultado una densidad de flujo reflejada grande. Puesto que la irradiancia es proporcional a $E^2_{0r}/2$, de la ecuación (3.44)

$$I_r = \frac{4r^2}{(1 + r^2)^2}\left(\frac{E_0^2}{2}\right) \tag{9.50}$$

Esto es en realidad el máximo $(I_r)_{\text{máx}}$ como se demostrará más tarde.

Consideraremos ahora, de manera más general, el problema de la interferencia de haces múltiples, utilizando la representación compleja. Sea nuevamente $n_1 = n_2$, evitando así la necesidad de introducir diferentes coeficientes de reflexión y

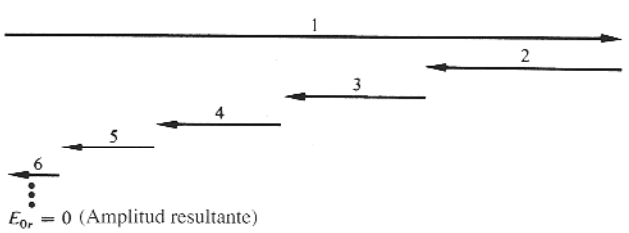


FIGURA 9.45 Diagrama de fasores.

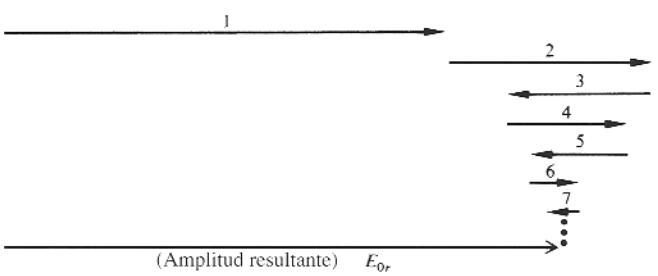


FIGURA 9.46 Diagrama de fasores.

transmisión en cada interfaz. Los campos ópticos en el punto P están dados por

$$\tilde{E}_{1r} = E_0 r e^{i\omega t}$$
$$\tilde{E}_{2r} = E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)}$$
$$\tilde{E}_{3r} = E_0 t r'^3 t' e^{i(\omega t - 2\delta)}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{E}_{Nr} = E_0 t r'^{(2N-3)} t' e^{i[\omega t - (N-1)\delta]}$$

donde $E_0 e^{i\omega t}$ es la onda incidente.

Los términos δ, 2δ,..., $(N-1)\delta$ son las contribuciones a la fase procedentes de una diferencia de longitud de camino óptico entre rayos adyacentes ($\delta = k_0\Lambda$). Existe una contribución adicional proveniente de la distancia óptica recorrida para llegar al punto P, pero como es común a todos los rayos, se ha omitido. El desfase relativo sufrido por el primer rayo como resultado de la reflexión está incluido en la cantidad r'. La *onda escalar reflejada resultante* es entonces

$$\tilde{E}_r = \tilde{E}_{1r} + \tilde{E}_{2r} + \tilde{E}_{3r} + \cdots + \tilde{E}_{Nr}$$

o después de substituir (figura 9.47)

$$\tilde{E}_r = E_0 r e^{i\omega t} + E_0 t r' t' e^{i(\omega t - \delta)} + \cdots + E_0 t r'^{(2N-3)} t' \times e^{i[\omega t - (N-1)\delta]}$$

Esto puede reescribirse como

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t}\{r + r' t t' e^{-i\delta}[1 + (r'^2 e^{-i\delta}) + (r'^2 e^{-i\delta})^2 + \cdots + (r'^2 e^{-i\delta})^{N-2}]\}$$

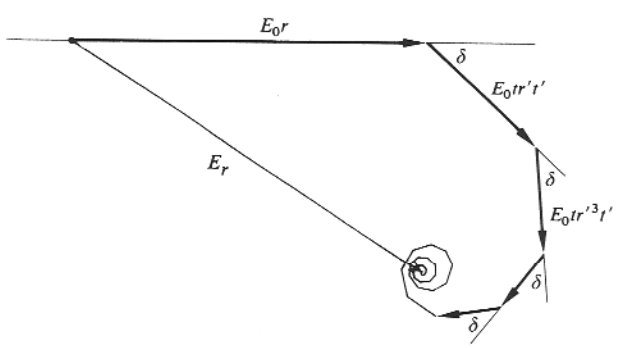


FIGURA 9.47 Diagrama de fasores.

Si $|r'^2 e^{-i\delta}| < 1$, y si el número de términos en la serie se aproxima al infinito, la serie convergerá. La onda resultante se transforma en

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t}\left[r + \frac{r' t t' e^{-i\delta}}{1 - r'^2 e^{-i\delta}}\right] \tag{9.51}$$

En el caso de absorción cero, cuando no se extrae energía de las ondas, podemos utilizar las relaciones $r = -r'$ y $tt' = 1 - r^2$ para volver a escribir la ecuación (9.51) como

$$\tilde{E}_r = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{r(1 - e^{-i\delta})}{1 - r^2 e^{-i\delta}}\right]$$

La densidad de flujo reflejada en P es entonces $I_r = \tilde{E}_r \tilde{E}_r^*/2$, o sea

$$I_r = \frac{E_0^2 r^2 (1 - e^{-i\delta})(1 - e^{+i\delta})}{2(1 - r^2 e^{-i\delta})(1 - r^2 e^{+i\delta})}$$

que puede transformarse en

$$I_r = I_i \frac{2r^2(1 - \cos\delta)}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos\delta} \tag{9.52}$$

El símbolo $I_i = E^2_0/2$ representa la densidad de flujo incidente ya que, naturalmente, E_0 era la amplitud de la onda incidente. De forma parecida, las amplitudes de las ondas transmitidas proporcionadas por

$$\tilde{E}_{1t} = E_0 t t' e^{i\omega t}$$
$$\tilde{E}_{2t} = E_0 t t' r'^2 e^{i(\omega t - \delta)}$$
$$\tilde{E}_{3t} = E_0 t t' r'^4 e^{i(\omega t - 2\delta)}$$
$$\vdots$$
$$\tilde{E}_{Nt} = E_0 t t' r'^{2(N-1)} e^{i[\omega - (N-1)\delta]}$$

pueden sumarse para dar como resultado

$$\tilde{E}_t = E_0 e^{i\omega t}\left[\frac{tt'}{1 - r^2 e^{-i\delta}}\right] \tag{9.53}$$

(Puesto que estamos interesados en la irradiancia, se omitió un factor común de $e^{-i\delta/2}$ procedente de la transmisión a través de la película que contribuye a que haya un desfase de $\pi/2$ entre las ondas transmitidas y las reflejadas pero no interesa aquí.)

Multiplicando la ecuación (9.53) por su complejo conjugado obtenemos (problema 9.37) la irradiancia del haz transmitido

$$I_t = \frac{I_i (tt')^2}{(1 + r^4) - 2r^2 \cos\delta} \tag{9.54}$$

Si usamos la identidad trigonométrica $\cos\delta = 1 - 2\,\text{sen}^2(\delta/2)$, las ecuaciones (9.52) y (9.54) se transforman en

$$I_r = I_i \frac{[2r/(1-r^2)]^2\,\text{sen}^2(\delta/2)}{1 + [2r/(1-r^2)]^2\,\text{sen}^2(\delta/2)} \tag{9.55}$$

y

$$I_t = I_i \frac{1}{1 + [2r/(1-r^2)]^2\,\text{sen}^2(\delta/2)} \tag{9.56}$$

donde la energía no es absorbida, es decir, $tt' + r^2 = 1$. Si no se absorbe nada de la energía incidente, la densidad de flujo de la onda incidente será exactamente igual a la suma de la densidad de flujo reflejada por la película más la densidad de flujo total transmitida al salir de la película. De las ecuaciones (9.55) y (9.56) se deduce que efectivamente así es, es decir

$$I_i = I_r + I_t \tag{9.57}$$

Esto no será cierto, sin embargo, si la película dieléctrica está recubierta de una capa delgada semitransparente de metal. Las corrientes superficiales inducidas en el metal disiparán una porción de la energía electromagnética incidente.

Consideremos las ondas transmitidas conforme a la descripción de la ecuación (9.54). Existirá un máximo cuando el denominador sea lo más pequeño posible, es decir, cuando cos $\delta = 1$, en cuyo caso $\delta = 2\pi m$ y

$$(I_t)_{\text{máx}} = I_i$$

Bajo estas condiciones, la ecuación (9.52) indica que

$$(I_r)_{\text{mín}} = 0$$

como era de esperar de la ecuación (9.57). Nuevamente, de la ecuación (9.54) está claro que se producirá un mínimo en la densidad de flujo transmitido cuando el denominador sea un máximo, es decir, cuando $\cos\delta = -1$. En ese caso $\delta = (2m+1)\pi$ y

$$(I_t)_{\text{mín}} = I_i \frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \tag{9.58}$$

El máximo correspondiente en la densidad de flujo reflejado es

$$(I_r)_{\text{máx}} = I_i \frac{4r^2}{(1+r^2)^2} \tag{9.59}$$

Obsérvese que la distribución de franjas de inclinación constante tiene sus máximos cuando $\delta = (2m+1)\pi$ o

$$\frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d\cos\theta_t = (2m+1)\pi$$

que es el mismo resultado que se obtuvo antes, ecuación (9.36) usando únicamente las dos primeras ondas reflejadas. Obsérvese también que la ecuación (9.59) comprueba que la ecuación (9.50) era en verdad un máximo.

La forma de las ecuaciones (9.55) y (9.56) sugiere que debemos introducir una cantidad nueva, el *coeficiente F de fuerza*, de modo que

$$F \equiv \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 \tag{9.60}$$

con lo cual estas ecuaciones se podrán escribir como

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F\,\text{sen}^2(\delta/2)}{1 + F\,\text{sen}^2(\delta/2)} \tag{9.61}$$

y

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F\,\text{sen}^2(\delta/2)} \tag{9.62}$$

El término $[1 + F\,\text{sen}^2(\delta/2)]^{-1} \equiv \mathcal{A}(\theta)$ se denomina **función de Airy** y representa la distribución de la densidad de flujo transmitida tal y como se dibuja en la figura 9.48. La función complementaria $[1 - \mathcal{A}(\theta)]$, es decir, la ecuación (9.61), se dibuja también en la figura 9.49. Cuando $\delta/2 = m\pi$ la función de Airy es igual a la unidad para todos los valores de F y por lo tanto de r. Al aproximarse ésta a uno, la densidad de flujo transmitido es muy pequeña, excepto dentro de máximos agudos centrados en los puntos $\delta/2 = m\pi$. La interferencia de haces múltiples conduce a una redistribución de la densidad de energía en comparación con la distribución sinusoidal de dos haces (parecido a las curvas correspondientes a una baja reflectancia). Este efecto se demostrará sucesivamente cuando consideremos la red de difrac-

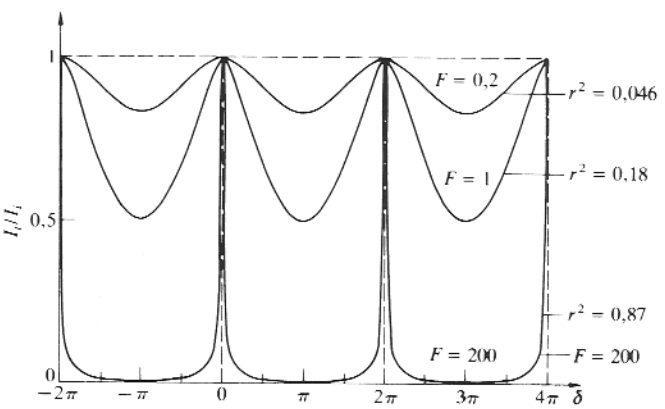


FIGURA 9.48 Función de Airy.

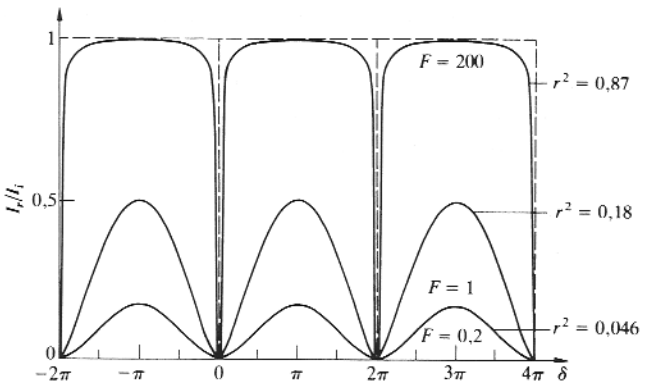


FIGURA 9.49 Uno menos la función de Airy.

ción. En esa ocasión podremos ver exactamente el mismo efecto de máximos agudos, resultantes del aumento del número de fuentes coherentes que contribuyen la distribución de interferencia. Recordemos que la función de Airy es, de hecho, una función de θ_t o θ_i debido a su dependencia de δ, como se deduce de las ecuaciones (9.34) y (9.35), de ahí la notación $\mathscr{A}(\theta)$. Cada máximo de la curva de densidad de flujo corresponde a un δ determinado y, por lo tanto, a una θ_i particular. En el caso de una placa plana paralela, las franjas, en luz transmitida, consistirán de una serie de anillos brillantes delgados sobre un fondo casi completamente oscuro. En luz reflejada, las franjas serán estrechas y oscuras sobre un fondo casi uniformemente brillante.

Las franjas de espesor constante pueden también hacerse agudas y estrechas por medio de un recubrimiento ligero de plata sobre las superficies reflectoras a fin de producir interferencia de haces múltiples.

9.6.1 El interferómetro de Fabry-Perot

El interferómetro de haces múltiples, construido por Charles Fabry y Alfred Perot a finales del siglo pasado, es de suma importancia en la óptica moderna puesto que, además de ser un dispositivo espectroscópico con un poder de resolución extremadamente alto, también sirve como cavidad resonante básica para el láser. En principio, el instrumento consta de dos superficies planas, paralelas, altamente reflectoras y separadas por una distancia d. Ésta es la configuración más simple si bien, como veremos, también se utilizan ampliamente otras formas. En la práctica, dos planos ópticos de vidrio semiplateados o aluminizados forman las superficies reflectoras. El espacio de aire contenido generalmente varía de algunos milímetros a varios centímetros cuando el aparato se usa para interferometría, y a menudo para mayores distancias cuando se emplea como cavidad resonante de láser. Si el espacio puede variarse mecánicamente con el movimiento de uno de los espejos, se llama interferómetro. Cuando los espejos se mantienen fijos y se ajustan en paralelo fijando con un tornillo algún tipo de espaciador (invar o cuarzo se usan comúnmente), suele llamársele **etalón** (aunque, claro está, es un interferómetro en el sentido más amplio). Es más, si las dos superficies de una placa simple de cuarzo se pulen y se platean oportunamente, servirán como etalón; el espacio no necesariamente es aire. Los lados no plateados de las placas a menudo se realizan de manera que tengan una ligera forma de cuña (unos cuantos minutos de arco) para reducir la figura de interferencia procedente de las reflexiones de esos lados.

El etalón de la figura 9.50 se muestra iluminado por una fuente ancha que puede ser un arco de mercurio o un haz de láser de He-Ne cuyo diámetro mide varios centímetros. Esto se puede hacer enviando el haz dentro de la parte posterior de un telescopio enfocado al infinito; entonces se podrá hacer luz difusa haciéndola pasar a través de una placa de vidrio esmerilado. A través del etalón se traza únicamente un rayo emitido desde algún punto S_1 sobre la fuente. Entrando por la placa parcialmente plateada, se refleja varias veces dentro del espacio. Los rayos transmitidos son recogidos por una lente y enfocados sobre una pantalla, donde interfieren para formar un punto brillante u oscuro. Consideremos este plano de incidencia particular que contiene todos los rayos reflejados. Cualquier otro rayo emitido desde un punto diferente S_2, paralelo al rayo original y en el mismo plano de incidencia, formará un punto en el mismo punto P sobre la pantalla. Como veremos, el análisis de la sección anterior puede volverse a aplicar, de tal forma que la ecuación (9.54) determine la densidad de flujo transmitida I_t.

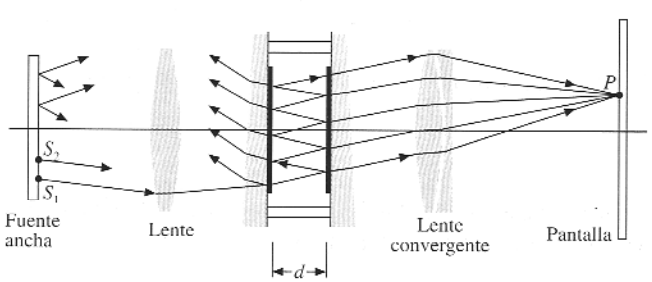
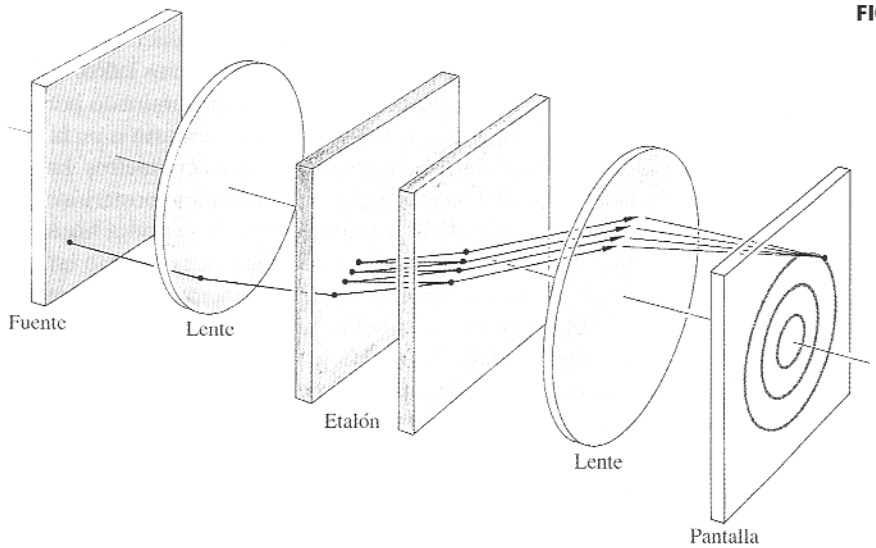


FIGURA 9.50 Etalón de Fabry-Perot.

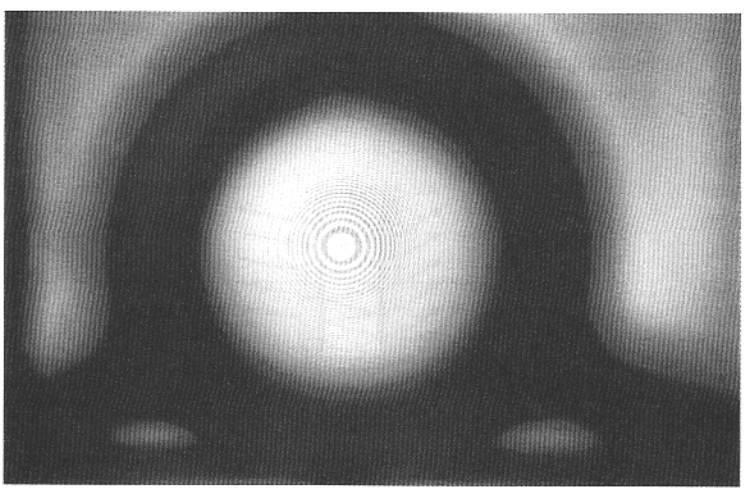
Las ondas múltiples generadas en la cavidad y que llegan a P ya sea de S_1 o S_2, son coherentes entre sí. Pero los rayos que salen de S_1 son totalmente incoherentes con respecto a los de S_2, de modo que no hay interferencia mutua. La contribución a la irradiancia I_t, en P es precisamente la suma de las contribuciones de las dos irradiancias.

Todos los rayos incidentes en el espacio separador con un determinado ángulo resultarán en una sola franja circular de irradiancia uniforme (figura 9.51). Con una fuente difusa ancha, las bandas de interferencia serán anillos concéntricos estrechos, correspondientes a la distribución de transmisión de haces múltiples.

El sistema de franjas puede observarse visualmente, mirando directamente hacia el etalón, mientras que se enfoca al infinito. El trabajo de la lente convergente, que ya no es necesaria, lo realiza el ojo. Para valores grandes de d, los anillos se hallarán muy cerca entre sí y tal vez se necesite un telescopio para aumentar la distribución. Un monocular relativamente barato valdrá igual, permitiendo así fotografiar las franjas localizadas en el infinito. Como es de esperar, de las consideraciones de la



(a)



(b)

FIGURA 9.51 Etalón de Fabry-Perot. (Foto de E.H.)

sección 9.5, es posible producir franjas no localizadas usando una fuente puntual brillante.

Las películas de metal parcialmente transparentes que se emplean frecuentemente para aumentar la reflectancia ($R = r^2$), absorberán una fracción A de la densidad de flujo; esta fracción se denomina **absortancia**.

La expresión

$$tt' + r^2 = 1$$

o

$$T + R = 1 \qquad [4.60]$$

donde T es la transmitancia, ahora deberá volverse a escribir como

$$T + R + A = 1 \qquad (9.63)$$

Las películas metálicas presentan una complicación más, es decir un desplazamiento adicional de fase $\phi(\theta_i)$, que puede diferir de cero o π. El desfase entre dos ondas transmitidas sucesivamente es entonces

$$\delta = \frac{4\pi n_f}{\lambda_0} d \cos \theta_t + 2\phi \qquad (9.64)$$

Para las condiciones que están siendo consideradas, θ_i es pequeño y ϕ puede considerarse constante. Por lo general, d es tan grande y λ_0 tan pequeño que ϕ puede omitirse. Podemos ahora expresar la ecuación (9.54) como

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta}$$

o de manera equivalente

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{T}{1 - R}\right)^2 \frac{1}{1 + [4R/(1 - R)^2] \operatorname{sen}^2(\delta/2)} \qquad (9.65)$$

Utilizando la ecuación (9.63) y la definición de la función de Airy, obtenemos

$$\frac{I_t}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{(1 - R)}\right]^2 \mathscr{A}(\theta) \qquad (9.66)$$

comparada con la ecuación para absorción cero

$$\frac{I_t}{I_i} = \mathscr{A}(\theta) \qquad [9.62]$$

Dado que la parte absorbida A no es nunca cero, los máximos de la densidad de flujo transmitido $(I_t)_{\text{máx}}$ siempre serán algo menor que I_i. [Recordemos que para $(I_t)_{\text{máx}}$, $\mathscr{A}(\theta) = 1$.]

Por lo tanto, el *máximo de transmisión* se define como $(I_t/I_i)_{máx}$:

$$\frac{(I_t)_{\max}}{I_i} = \left[1 - \frac{A}{(1 - R)}\right]^2 \qquad (9.67)$$

Una película de plata de 50 mm de espesor se acercaría mucho a su valor máximo de R, o sea, alrededor de 0,94, mientras que T y A serán respectivamente de 0,01 y 0,05. En este caso, el máximo de transmisión disminuirá a $\frac{1}{36}$. La irradiancia relativa de la distribución de franjas estará todavía determinada por la función de Airy, ya que

$$\frac{I_t}{(I_t)_{\max}} = \mathscr{A}(\theta) \qquad (9.68)$$

Una medida de la nitidez de las franjas, es decir, con qué rapidez decae la irradiancia en uno de los lados del valor máximo, es proporcionada por el ancho medio γ. Ilustrado en la figura 9.52, γ es el ancho del máximo, en radianes, cuando $I_t = (I_t)_{\text{máx}}/2$.

Los máximos en la transmisión se dan para valores específicos del desfase $\delta_{\text{máx}} = 2\pi m$. Por consiguiente, la irradiancia disminuirá a la mitad de su valor máximo [es decir, $\mathscr{A}(\theta) = \frac{1}{2}$] cada vez que $\delta = \delta_{\text{máx}} \pm \delta_{1/2}$. Dado que

$$\mathscr{A}(\theta) = [1 + F \operatorname{sen}^2(\delta/2)]^{-1}$$

entonces cuando

$$[1 + F \operatorname{sen}^2 (\delta_{1/2}/2)]^{-1} = \tfrac{1}{2}$$

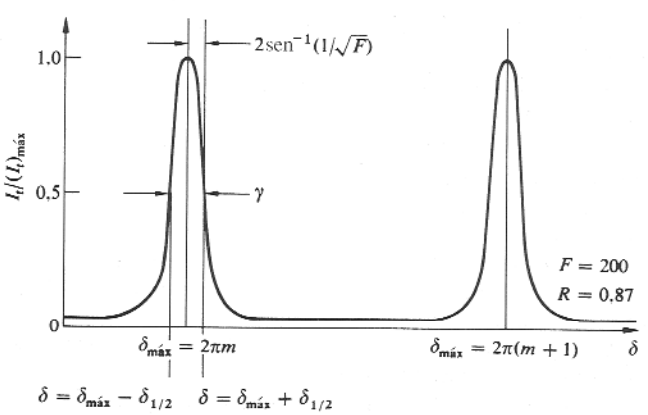


FIGURA 9.52 Franjas de Fabry-Perot.

se deduce que

$$\delta_{1/2} = 2 \operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{F})$$

Ya que F es, por lo general, bastante grande, $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{F}) \approx 1/\sqrt{F}$ y por tanto el ancho medio $\gamma = 2\delta_{1/2}$, es igual

$$\gamma = 4/\sqrt{F} \tag{9.69}$$

Recordemos que $F = 4R/(1 - R)^2$, de manera que cuanto mayor sea R, más agudos serán los máximos.

Otro valor particularmente interesante es la relación de la separación de los máximos adyacentes con respecto al ancho medio. Denominada **fineza**, $\mathscr{F} \equiv 2\pi/\gamma$ ó, de la ecuación (9.69),

$$\mathscr{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} \tag{9.70}$$

En el espectro visible, la fineza de los instrumentos Fabry-Perot más corrientes es alrededor de 30. La limitación física de $\mathscr{F}$ es establecida por las desviaciones en los espejos del paralelismo plano. Tengamos en cuenta que al aumentar la fineza, el ancho medio disminuye, al igual que el máximo de transmisión. Dicho de paso, finezas de cerca de 1.000 se logran con sistemas de espejos curvos revestidos con finas películas dieléctricas [13].

Espectroscopia de Fabry-Perot

El interferómetro de Fabry-Perot se utiliza a menudo para examinar la estructura detallada de líneas espectrales. No intentaremos llevar a cabo un análisis exhaustivo de espectroscopia por interferencia, sino que definiremos la terminología relevante y bosquejaremos brevemente las deducciones oportunas [14].

Como se ha visto, una onda de luz hipotética y enteramente monocromática genera un sistema particular de franjas circulares. Pero δ es una función de λ_0, de tal manera que si la fuente estuviera formada por dos componentes monocromáticas, el resultado serían dos sistemas anulares superpuestos. Cuando las franjas individuales se superponen parcialmente, existe cierta cantidad de ambigüedad a la hora de decidir cuándo los dos sistemas son individualmente distinguibles, es decir, cuándo se pueden *resolver*. El criterio de Lord Rayleigh [15] para resolver dos imágenes de rendija superpuestas y con la misma irradiancia, es bien aceptado si bien de manera algo arbitraria en la presente aplicación. Su uso, sin embargo, permitirá llevar a cabo una comparación de instrumentos de prisma o de red. La característica esencial de este criterio es que las franjas son *precisamente resolubles* cuando la irradiancia combinada de ambas franjas en el centro o punto de silla, de la franja ancha resultante es $8/\pi^2$ veces el máximo de la irradiancia, lo cual quiere, sencillamente, decir que se vería una franja ancha brillante con una región central gris. Para ser un poco mas analíticos al respecto, examinemos la figura 9.53 y tengamos en cuenta la deducción anterior del ancho medio. Consideremos el caso en que dos franjas constitutivas tienen irradiancias iguales, $(I_a)_{\text{máx}} = (I_b)_{\text{máx}}$. Los máximos en la resultante, que se dan en $\delta = \delta_a$ and $\delta = \delta_b$, tendrán irradiancias iguales

$$(I_t)_{\text{máx}} = (I_a)_{\text{máx}} + I' \tag{9.71}$$

Para el punto de silla, la irradiancia, $(8/\pi^2)(I_t)_{\text{máx}}$ es la suma de dos irradiancias constitutivas, por lo tanto, recordando la ecuación (9.68)

$$(8/\pi^2)\frac{(I_t)_{\text{máx}}}{(I_a)_{\text{máx}}} = [\mathscr{A}(\theta)]_{\delta-\delta_a+\Delta\delta/2} + [\mathscr{A}(\theta)]_{\delta=\delta_b+\Delta\delta/2} \tag{9.72}$$

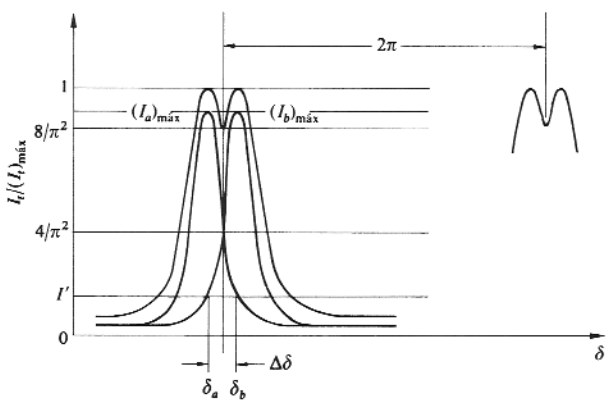


FIGURA 9.53 Franjas superpuestas.

[13] El artículo «Multiple Beam Interferometry» de H. D. Polster, *Appl. Opt.*, **8**, 522 (1969) podría resultar interesante. Véase también «The Optical Computer», E. Abraham, S. Seaton y S. Smith, *Sci. Am.* (Febrero de 1983), pág. 85, para un análisis del empleo del interferómetro de Fabry-Perot como transistor óptico.

[14] Un análisis más exhaustivo podrá hallarse en Born y Wolf. *Principles of Optics*, y en W. E. Williams, *Applications of Interferometry* para citar dos solamente.

[15] Se reconsiderará este criterio con respecto a la difracción en el siguiente capítulo (véase figura 10.40).

Utilizando $(I_t)_{máx}$ proporcionado por la ecuación (9.71), junto con el hecho de que

$$\frac{I'}{(I_a)_{máx}} = [\mathscr{A}(\theta)]_{\delta=\delta_a+\Delta\delta}$$

podemos resolver la ecuación (9.72) para $\Delta\delta$. Para valores mayores de F,

$$(\Delta\delta) \approx \frac{4{,}2}{\sqrt{F}} \tag{9.73}$$

Esto entonces representa el incremento de fase más pequeño, $(\Delta\delta)_{mín}$, que separa dos franjas resolubles y que puede relacionarse con incrementos mínimos equivalentes en longitud de onda $(\Delta\lambda_0)_{mín}$, frecuencia $(\Delta\nu)_{mín}$ y número de onda $(\Delta k)_{mín}$. De la ecuación (9.64), para $\delta = 2\pi m$, se tiene

$$m\lambda_0 = 2n_f d \cos\theta_t + \frac{\phi\lambda_0}{\pi} \tag{9.74}$$

Eliminando el término $\phi\lambda_0/\pi$, que es claramente despreciable, y llevando a cabo luego una diferenciación, el resultado será

$$m(\Delta\lambda_0) + \lambda_0(\Delta m) = 0$$

o

$$\frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)} = -\frac{m}{(\Delta m)}$$

El signo menos se omitirá puesto que únicamente significa que el orden aumenta al disminuir λ_0. Cuando δ cambia en 2π, m cambia en 1 y entonces

$$\frac{2\pi}{(\Delta\delta)} = \frac{1}{(\Delta m)}$$

por lo tanto

$$\frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)} = \frac{2\pi m}{(\Delta\delta)} \tag{9.75}$$

La relación entre λ_0 y la diferencia de longitud mínima, $(\Delta\lambda_0)_{mín}$, se denomina ***poder de resolución cromático*** $\mathscr{R}$ de cualquier espectroscopio. Por lo tanto, a incidencia casi normal

$$\mathscr{R} \equiv \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{mín}} \approx \mathscr{F}\frac{2n_f d}{\lambda_0} \tag{9.76}$$

o

$$\mathscr{R} \approx \mathscr{F}m$$

Para una longitud de onda de 500 nm, $n_f d = 10$ mm y $R = 90\%$, el poder de resolución está muy por encima del millón, un rango alcanzable por las mejores redes de difracción. Se deduce también, en este ejemplo, que $(\Delta\lambda_0)_{mín}$ es inferior que una millonésima de λ_0. En términos de frecuencia, el ***ancho de banda mínimo resoluble*** es

$$(\Delta\nu)_{mín} = \frac{c}{\mathscr{F}2n_f d} \tag{9.77}$$

en tanto que $|\Delta\nu| = |c\Delta\lambda_0/\lambda_0^2|$.

A medida que la longitud de onda de las dos componentes presentes en la fuente va aumentando, los máximos que se muestran superpuestos en la figura 9.53 van separándose y a medida que la diferencia de longitud de onda aumenta, la franja de orden *m*ésimo para una longitud de onda λ_0 se acercará al orden $(m + 1)$ésimo para la otra longitud de onda $(\lambda_0 - \Delta\lambda_0)$. La diferencia de longitud de onda particular donde se da la superposición, $(\Delta\lambda_0)_{fsr}$ se denomina ***rango espectral libre***. De la ecuación (9.75), un cambio de δ de 2π corresponde a $(\Delta\lambda_0)_{fsr} = \lambda_0/m$, o a incidencia casi normal,

$$(\Delta\lambda_0)_{fsr} \approx \lambda_0^2/2n_f d \tag{9.78}$$

y de manera similar

$$(\Delta\nu)_{fsr} \approx c/2n_f d \tag{9.79}$$

Continuando con el ejemplo anterior, es decir, $\lambda_0 = 500$ nm y $n_f d = 10$ mm, $(\Delta\lambda_0)_{fsr} = 0{,}0125$ nm. Si intentamos aumentar el poder de resolución aumentando únicamente d, el rango espectral libre decrecerá, produciendo así la superposición de órdenes y la confusión consiguiente. Lo que se necesita es que $(\Delta\lambda_0)_{mín}$ sea *lo más pequeña posible* y $(\Delta\lambda_0)_{fsr}$ *tan grande como sea posible*. Sin embargo, he aquí que

$$\frac{(\Delta\lambda_0)_{fsr}}{(\Delta\lambda_0)_{mín}} = \mathscr{F} \tag{9.80}$$

Este resultado no debería ser tan sorprendente en vista de la definición original de $\mathscr{F}$.

Tanto las aplicaciones como las configuraciones del interferómetro Fabry-Perot son verdaderamente numerosas. Se han

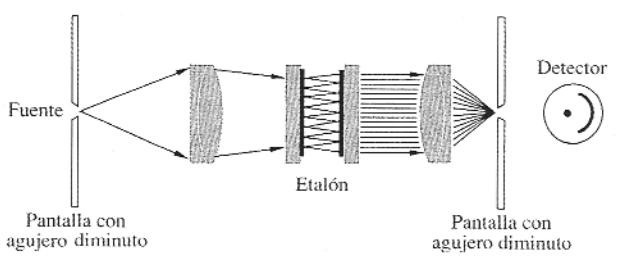


FIGURA 9.54 Barrido de punto central.

dispuesto etalones en serie con otros etalones, así como con espectroscopios de red y de prisma y se han usado películas dieléctricas multicapa para reemplazar los recubrimientos metálicos de los espejos.

Las técnicas de barrido que se usan abundantemente en la actualidad, aprovechan la linealidad superior de los detectores fotoeléctricos con respecto a las placas fotográficas para obtener medidas de densidad de flujo más fiables. La composición básica para *barridos de punto central* se ilustra en la figura 9.54. El barrido se logra variando δ, cambiando n_f o d antes que cos θ_t. En algunas disposiciones, n_f varía lentamente al alterarse la presión del aire dentro del etalón. Alternativamente, la vibración mecánica de uno de los espejos con un desplazamiento de $\lambda_0/2$ será suficiente para barrer el rango espectral libre que corresponde a $\Delta\delta = 2\pi$. Una técnica conocida para lograrlo utiliza una montura piezoeléctrica para el espejo, material que cambiará su longitud y, por lo tanto d, conforme le es aplicado un voltaje cuyo perfil determina el movimiento del espejo.

En lugar de registrar fotográficamente la irradiancia sobre una región grande del espacio, en un solo punto en el tiempo, este método registra la irradiancia sobre una región grande en el tiempo y en un solo punto en el espacio.

También la configuración misma del etalón ha sufrido algunas variaciones importantes. Por primera vez en 1956, Pierre Connes describió *el interferómetro Fabry-Perot de espejo esférico*. Desde entonces, los sistemas con espejos curvos han adquirido importancia como cavidades de láser y además están siendo utilizados cada vez más como analizadores espectrales.

9.7 Aplicaciones de películas monocapa y multicapa

Los usos ópticos recientes de los recubrimientos de películas delgadas dieléctricas son realmente numerosos. Los recubrimientos para eliminar reflexiones indeseables de diferentes superficies, desde cristales de escaparates hasta objetivos de cámara de alta calidad, son muy comunes en la actualidad (figura 9.55). El mercado ofrece divisores de haz no absorbentes y multicapa así como espejos *dicroicos* (divisores de haz seleccionadores de colores que transmiten y reflejan longitudes de onda particulares).

La figura 9.56 es un diagrama segmentado que ilustra el uso de un *espejo frío* junto con un *reflector térmico* para canalizar la radiación infrarroja hacia la parte posterior de un proyector

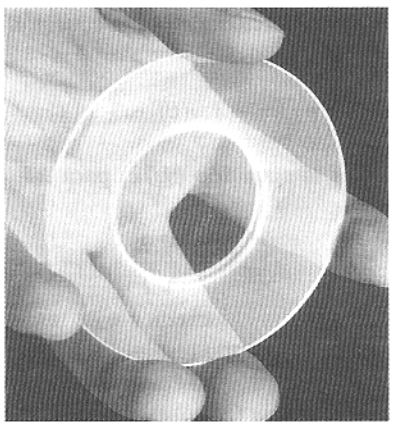


FIGURA 9.55 Este disco de vidrio lleva un recubrimiento antirreflectante en forma de círculo aplicado en ambas caras. (Foto de E.H.)

de películas. La radiación infrarroja intensa e indeseable emitida por la fuente, se elimina del haz para evitar problemas de calentamiento sobre la película fotográfica. La mitad superior de la figura 9.56 es un espejo corriente plateado en la parte posterior y que se presenta para comparación. Las células fotovoltaicas solares que son una de las principales fuentes de suministro de energía en los vehículos espaciales, e incluso en los cascos y visores de los astronautas, están apantalladas con revestimientos similares para control del calor.

Pueden hacerse filtros de banda ancha o estrecha de multicapas que transmiten solamente en un rango espectral específico, para que cubran la región desde el infrarrojo hasta el ultravioleta. En el visible, por ejemplo, desempeñan un papel

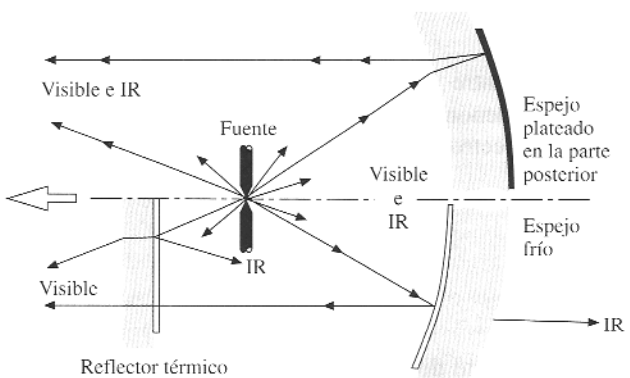


FIGURA 9.56 Diseño compuesto en el que se muestra un sistema común en la mitad superior y uno con recubrimiento en la parte inferior.

importante en la división de la imagen en las cámaras de televisión a color, mientras que en el IR, se usan para sistemas de gobierno de misiles, láseres de CO_2 y sensores de horizonte por satélite. Las aplicaciones de dispositivos de películas delgadas son múltiples, al igual que sus estructuras, que van desde recubrimientos sencillos de una capa hasta disposiciones intrincadas de cien o más capas.

En el análisis de la teoría de películas de multicapas que se utilizó aquí se abordarán los campos magnético y eléctrico *totales* y sus condiciones de contorno en varias regiones. Se trata de un planteamiento mucho más práctico para los sistemas de multicapas que la técnica de ondas múltiples que se empleó anteriormente. [16]

9.7.1 Análisis matemático

Consideremos la onda linealmente polarizada que se muestra en la figura 9.57 que incide sobre una película dieléctrica fina entre dos medios transparentes y semiinfinitos. En la práctica, esto podría equivaler a una capa dieléctrica con un espesor de fracción de una longitud de onda, colocada en la superficie de una lente, un espejo, o un prisma. Cabe aclarar inmediatamente un punto: cada onda E_{rI}, E'_{rII}, E_{tII}, etc., representa la resultante de todas las ondas posibles que viajan en esa dirección y en ese punto en el medio. Por lo tanto, el proceso de suma es inherente. Como se vio en la sección 4.6.2, las condiciones de contorno necesitan que las componentes tangenciales tanto de los campos eléctricos (**E**) como magnéticos ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$) sean continuas a través de las fronteras (es decir, igual en ambos lados). En la frontera I

$$E_{\mathrm{I}} = E_{i\mathrm{I}} + E_{r\mathrm{I}} = E_{t\mathrm{I}} + E'_{r\mathrm{II}} \tag{9.81}$$

y

$$H_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_{i\mathrm{I}} - E_{r\mathrm{I}})n_0 \cos\theta_{i\mathrm{I}}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_{t\mathrm{I}} - E'_{r\mathrm{II}})n_1 \cos\theta_{t\mathrm{II}} \tag{9.82}$$

donde se ha utilizado el hecho que **E** y **H** en medios no magnéticos están relacionados a través del índice de refracción y el vector de onda unitario:

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, n\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

[16] Para un análisis no matemático fácil de leer, véase P. Baumeister y G Pincus, «Optical Interference Coatings», *Sci. Amer.*, **223**, 59 (Diciembre de 1970).

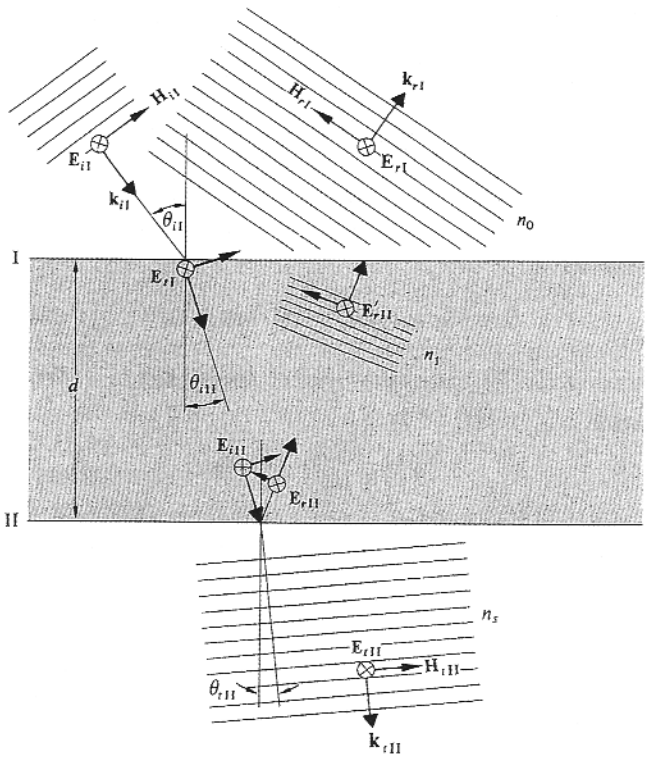


FIGURA 9.57 Campos en las fronteras.

En la frontera II

$$E_{\mathrm{II}} = E_{i\mathrm{II}} + E_{r\mathrm{II}} = E_{t\mathrm{II}} \tag{9.83}$$

y

$$H_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_{i\mathrm{II}} - E_{r\mathrm{II}})n_1 \cos\theta_{i\mathrm{II}}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_{t\mathrm{II}} n_s \cos\theta_{t\mathrm{II}} \tag{9.84}$$

donde el substrato tiene un índice n_s. De acuerdo con la ecuación (9.33), una onda que cruza la película una vez sufre un desfase de $k_0(2n_1 d \cos\theta_{i\mathrm{II}})/2$ que se indicará por $k_0 h$ de modo que

$$E_{i\mathrm{II}} = E_{t\mathrm{I}} e^{-ik_0 h} \tag{9.85}$$

y

$$E_{r\mathrm{II}} = E'_{r\mathrm{II}} e^{+ik_0 h} \tag{9.86}$$

Las ecuaciones (9.83) y (9.84) pueden escribirse ahora como

$$E_{\text{II}} = E_{t\text{I}}e^{-ik_0h} + E'_{r\text{II}}e^{+ik_0h} \tag{9.87}$$

y

$$H_{\text{II}} = (E_{t\text{I}}e^{-ik_0h} - E'_{r\text{II}}e^{+ik_0h})\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos\theta_{i\text{II}} \tag{9.88}$$

Estas dos últimas ecuaciones pueden resolverse para $E_{t\text{I}}$ y $E'_{r\text{II}}$ que al sustituirlas en las ecuaciones (9.81) y (9.82), dan como resultado

$$E_{\text{I}} = E_{\text{II}} \cos k_0h + H_{\text{II}}(i \operatorname{sen} k_0h)/\Upsilon_1 \tag{9.89}$$

y

$$H_{\text{I}} = E_{\text{II}}\Upsilon_1 i \operatorname{sen} k_0h + H_{\text{II}} \cos k_0h \tag{9.90}$$

donde

$$\Upsilon_1 \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1 \cos\theta_{i\text{II}}$$

Cuando **E** se halla en el plano de incidencia, los cálculos anteriores dan unas ecuaciones similares, siempre y cuando ahora

$$\Upsilon_1 \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_1/\cos\theta_{i\text{II}}$$

En la notación matricial, las relaciones lineales anteriores adquieren la forma

$$\begin{bmatrix} E_{\text{I}} \\ H_{\text{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k_0h & (i \operatorname{sen} k_0h)/\Upsilon_1 \\ \Upsilon_1 i \operatorname{sen} k_0h & \cos k_0h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{\text{II}} \\ H_{\text{II}} \end{bmatrix} \tag{9.91}$$

o

$$\begin{bmatrix} E_{\text{I}} \\ H_{\text{I}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1\begin{bmatrix} E_{\text{II}} \\ H_{\text{II}} \end{bmatrix} \tag{9.92}$$

La *matriz característica* $\mathcal{M}_1$ pone en relación los campos en los dos límites adyacentes. Por lo tanto, se infiere que al colocar dos películas superpuestas en el substrato, habrá tres superficies límite o interfaces, y ahora

$$\begin{bmatrix} E_{\text{II}} \\ H_{\text{II}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_{\text{II}}\begin{bmatrix} E_{\text{III}} \\ H_{\text{III}} \end{bmatrix} \tag{9.93}$$

Multiplicando ambos lados de esta expresión por $\mathcal{M}_1$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} E_{\text{I}} \\ H_{\text{I}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_{\text{II}}\begin{bmatrix} E_{\text{III}} \\ H_{\text{III}} \end{bmatrix} \tag{9.94}$$

En general, si p es el número de capas, cada una con valores específicos de n y h, entonces el primero y el último límite están relacionados por

$$\begin{bmatrix} E_{\text{I}} \\ H_{\text{I}} \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_{\text{II}} \cdots \mathcal{M}_p\begin{bmatrix} E_{(p+1)} \\ H_{(p+1)} \end{bmatrix} \tag{9.95}$$

La matriz característica del sistema completo es la resultante del producto (en la secuencia apropiada) de las matrices individuales de dos por dos, esto es

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{M}_{\text{II}} \cdots \mathcal{M}_p = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{9.96}$$

Para ver cómo todo esto encaja, deduciremos unas expresiones para los coeficientes de amplitud de reflexión y transmisión utilizando el sistema anterior. Reformulando la ecuación (9.92) en términos de condiciones límites [(9.81), (9.82) y (9.84)] y estableciendo

$$\Upsilon_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_0 \cos\theta_{i\text{I}}$$

y

$$\Upsilon_s = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}n_s \cos\theta_{t\text{II}}$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix} (E_{i\text{I}} + E_{r\text{I}}) \\ (E_{i\text{I}} - E_{r\text{I}})\Upsilon_0 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_1\begin{bmatrix} E_{t\text{II}} \\ E_{t\text{II}}\Upsilon_s \end{bmatrix}$$

Desarrollando las matrices, la última relación se transforma en

$$1 + r = m_{11}t + m_{12}\Upsilon_s t$$

y

$$(1 - r)\Upsilon_0 = m_{21}t + m_{22}\Upsilon_s t$$

dado que

$$r = E_{r\text{I}}/E_{i\text{I}} \quad \text{y} \quad t = E_{t\text{II}}/E_{i\text{I}}$$

Por consiguiente,

$$r = \frac{\Upsilon_0 m_{11} + \Upsilon_0\Upsilon_s m_{12} - m_{21} - \Upsilon_s m_{22}}{\Upsilon_0 m_{11} + \Upsilon_0\Upsilon_s m_{12} + m_{21} + \Upsilon_s m_{22}} \tag{9.97}$$

y

$$t = \frac{2\Upsilon_0}{\Upsilon_0 m_{11} + \Upsilon_0\Upsilon_s m_{12} + m_{21} + \Upsilon_s m_{22}} \tag{9.98}$$

Para calcular ya sea r o t para cualquier configuración de películas, necesitamos computar únicamente las matrices características de cada película, multiplicarlas y a continuación substituir los elementos de la matriz resultante dentro de las ecuaciones anteriores.

9.7.2 Recubrimientos antirreflectantes

Consideremos ahora el caso muy importante de incidencia normal, es decir

$$\theta_{i\text{I}} = \theta_{i\text{II}} = \theta_{t\text{II}} = 0$$

que, además de ser el más simple, es a menudo bastante aproximado en situaciones prácticas. Si ponemos un subíndice sobre r para indicar el número de capas presentes, el coeficiente de reflexión para una sola película es

$$r_1 = \frac{n_1(n_0 - n_s)\cos k_0 h + i(n_0 n_s - n_1^2)\operatorname{sen} k_0 h}{n_1(n_0 + n_s)\cos k_0 h + i(n_0 n_s + n_1^2)\operatorname{sen} k_0 h} \quad (9.99)$$

Multiplicando r_1 por su conjugado complejo se obtiene la reflectancia

$$R_1 = \frac{n_1^2(n_0 - n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s - n_1^2)^2 \operatorname{sen}^2 k_0 h}{n_1^2(n_0 + n_s)^2 \cos^2 k_0 h + (n_0 n_s + n_1^2)^2 \operatorname{sen}^2 k_0 h} \quad (9.100)$$

Esta fórmula se simplifica mucho cuando $k_0 h = \frac{1}{2}\pi$, lo cual equivale a decir que el espesor óptico h de la película es un múltiplo impar de $\frac{1}{4}\lambda_0$. En este caso $d = \frac{1}{4}\lambda_f$, y

$$R_1 = \frac{(n_0 n_s - n_1^2)^2}{(n_0 n_s + n_1^2)^2} \quad (9.101)$$

que, sorprendentemente, será igual a cero cuando

$$n_1^2 = n_0 n_s \quad (9.102)$$

Generalmente, d se escoge de tal manera que h sea igual a $\frac{1}{4}\lambda_0$ en la región amarillo-verde de espectro visible, donde el ojo es más sensible. La criolita ($n = 1{,}35$), un compuesto de fluoruro de aluminio y sodio, y el fluoruro de magnesio, ($n = 1{,}38$) son películas comunes de bajo índice. Puesto que MgF_2 es, con mucho, el que más dura, se utiliza más a menudo. Sobre un substrato de vidrio, ($n_s \approx 1{,}5$), los índices de estas películas son aún un tanto grandes para satisfacer la ecuación (9.102). A pesar de ello, una sola capa de $\frac{1}{4}\lambda_0$ de MgF_2, reducirá la reflectancia del vidrio de alrededor del 4% a un poco más del 1%, en el espectro visible. En la actualidad, se ha convertido en una práctica común aplicar recubrimientos antirreflectantes a los elementos de instrumentos ópticos. En los objetivos de cámaras, algunos recubrimientos reducen la neblina debida a luz parásita difundida internamente y hacen aumentar considerablemente la luminosidad de la imagen. Para longitudes de onda en ambos lados de la región central amarillo-verde, R aumenta y la superficie de la lente aparecerá azul-roja en la luz reflejada.

Para una doble capa de recubrimiento antirreflectante de cuarto de longitud de onda

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathrm{I}}\mathcal{M}_{\mathrm{II}}$$

o más específicamente

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 0 & i/Y_1 \\ iY_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & i/Y_2 \\ iY_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (9.103)$$

Con incidencia normal esto se transforma en

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} -n_2/n_1 & 0 \\ 0 & -n_1/n_2 \end{bmatrix} \quad (9.104)$$

Al substituir los elementos apropiados de la matriz en la ecuación (9.97) se obtiene como resultado r_2 que, cuando se eleva al cuadrado, produce la reflectancia

$$R_2 = \left[\frac{n_2^2 n_0 - n_s n_1^2}{n_2^2 n_0 + n_s n_1^2}\right]^2 \quad (9.105)$$

A fin de que R_2 sea exactamente igual a cero para una longitud de onda determinada, necesitamos que

$$\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 = \frac{n_s}{n_0} \quad (9.106)$$

Este tipo de película se denomina recubrimiento *doble-cuarto con único mínimo.* Cuando n_1 y n_2 son lo más pequeños posible, el mínimo único más ancho de la reflectancia será igual a cero para la frecuencia escogida. Debería quedar claro de la ecuación (9.106) que $n_2 > n_1$; por lo tanto, en la actualidad se acostumbra indicar un sistema (vidrio)-(índice alto)-(índice bajo)-(aire) como *gHLa.* El dióxido de circonio ($n = 2{,}1$), el dióxido de titanio ($n = 2{,}40$) y el sulfuro de cinc ($n = 2{,}32$) se usan comúnmente para capas H mientras que el fluoruro de magnesio ($n = 1{,}38$) y el fluoruro de cerio ($n = 1{,}63$) sirven a menudo como capas L.

Pueden diseñarse otros esquemas de capas dobles y triples a fin de satisfacer requisitos específicos para respuesta espectral, ángulo de incidencia, costos, etc. La figura 9.58 es una escena fotografiada con una lente zoom de quince elementos y con una lámpara de 150 vatios apuntando directamente a la cámara. Los elementos de las lentes se cubrieron con una sola capa de MgF_2. Para la figura 9.59 se utilizó un recubrimiento antirreflectante de tres capas. Es evidente la reducción del resplandor y la mejora en el contraste.

9.7.3 Sistemas periódicos de multicapas

El tipo más sencillo de sistema periódico es *la pila de cuarto de onda* que consta de varias capas de un cuarto de onda. La

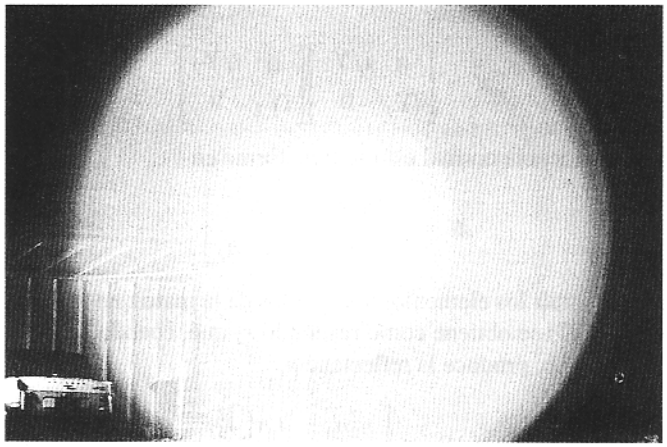


FIGURA 9.58 Elementos de lente recubiertos con una sola capa de MgF_2. (Foto cedida por Optical Coating Laboratory, Inc., Santa Rosa, CA.)

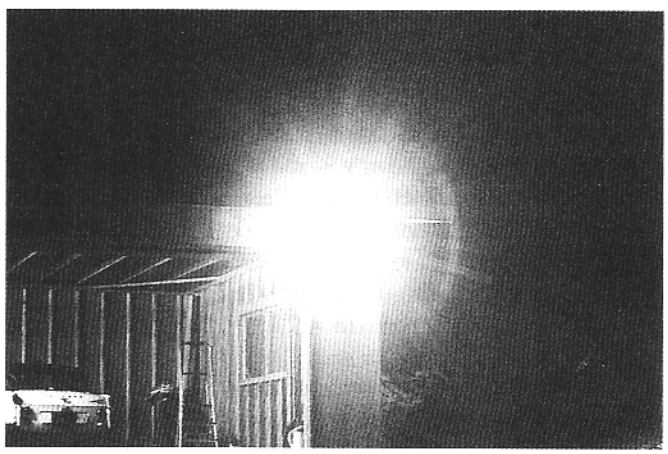


FIGURA 9.59 Elementos de lente recubiertos con una estructura de películas multicapa. (Foto cedida por Optical Coating Laboratory, Inc., Santa Rosa, CA.)

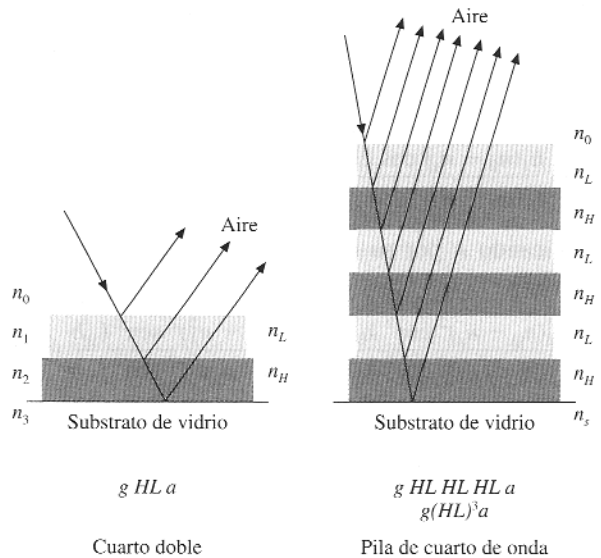


FIGURA 9.60 Estructura periódica. Se ha omitido la refracción por razones de simplicidad.

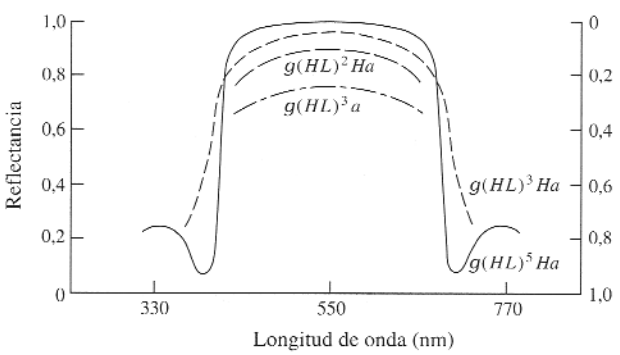


FIGURA 9.61 Reflectancia y transmitancia para varias estructuras periódicas.

estructura periódica de los materiales alternadamente de índices altos y bajos, ilustrada en la figura 9.60, se indica por

$$g(HL)^3a$$

La figura 9.61 ilustra la forma general de una parte de la reflectancia espectral para unos cuantos filtros de multicapas. El ancho de la zona central de elevada reflectancia aumenta al aumentar los valores del cociente de índices n_H/n_L mientras que su altura aumenta con el número de capas. Cabe observar que la reflectancia máxima de una estructura periódica tal como $g(HL)^ma$ puede aumentarse más al agregar otra capa H de modo que ahora tenga la forma $g(HL)^mHa$. Con esta disposición pueden producirse superficies de espejos de reflectancia muy elevada.

El pico pequeño en el lado de longitudes de onda cortas de la zona central puede reducirse al agregar una película de un octavo de onda con índice bajo en ambos extremos de la pila, en cuyo caso la disposición total se indicará por

$$g(0.5L)(HL)^mH(0.5L)a$$

El efecto producido será el aumento de la transmitancia de longitudes de onda corta y elevadas frecuencias, denominándose, por lo tanto, *filtro de paso alto.* Del mismo modo, la estructura

$$g(0{,}5H)L(HL)^m(0{,}5H)a$$

corresponde sencillamente al caso en que las capas terminales H tienen un espesor de $\lambda_0/8$. Tiene una transmitancia mayor para el rango de longitudes de onda grandes, frecuencias bajas y sirve como *filtro de paso bajo.*

Para incidencia no normal, hasta 30°, la degradación es a menudo escasa en la respuesta de los recubrimientos de capas delgadas. Por lo general, el efecto de aumentar el ángulo de incidencia equivale a un desplazamiento de toda la curva de reflectancia hacia longitudes de onda ligeramente más cortas. Esta clase de comportamiento se pone de relieve por varias estructuras periódicas que ocurren de forma natural, por ejemplo, plumas de pavos reales y colibrí, alas de mariposas así como el lomo de algunas variedades de escarabajos.

El último sistema de multicapas que consideraremos es la *interferencia,* o más precisamente el *filtro Fabry-Perot.* Si la separación entre las placas de un etalón es del orden de λ, los máximos de transmisión estarán ampliamente separados en longitud de onda. Será entonces posible bloquear todos los máximos, excepto uno, con el empleo de filtros absorbentes de vidrio coloreado o gelatina. La luz transmitida entonces corresponde a un máximo agudo único mientras que el etalón sirve como filtro de banda estrecho. Tales dispositivos pueden fabricarse depositando películas semitransparentes de metal sobre un soporte de vidrio, seguido por un espaciador de MgF_2 y otro recubrimientos de metal.

Los filtros de Fabry-Perot, totalmente dieléctricos y esencialmente sin absorción, tienen una estructura análoga. Dos ejemplos posibles de ello son los siguientes:

$$g\ HLH\ LL\ HLH\ a$$

y

$$g\ HLHL\ HH\ LHLH\ a$$

La matriz característica del primero de ellos es

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_H\mathcal{M}_L\mathcal{M}_H\mathcal{M}_L\mathcal{M}_L\mathcal{M}_H\mathcal{M}_L\mathcal{M}_H$$

pero de la ecuación (9.104)

$$\mathcal{M}_L\mathcal{M}_L = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

o

$$\mathcal{M}_L\mathcal{M}_L = -\mathcal{I}$$

donde $\mathcal{I}$ es la matriz unitaria. La capa central doble que corresponde a una cavidad Fabry-Perot, tiene un espesor de media longitud de onda ($d = \frac{1}{2}\lambda_f$). Por lo tanto, no tiene efecto sobre la reflectancia en la *longitud de onda particular que está siendo estudiada,* denominándose, por consiguiente, capa ausente, y en consecuencia

$$\mathcal{M} = -\mathcal{M}_H\mathcal{M}_L\mathcal{M}_H\mathcal{M}_H\mathcal{M}_L\mathcal{M}_H$$

Las mismas condiciones prevalecen de nuevo en el centro y, al final, darán como resultado

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A la frecuencia determinada para la cual se diseñó el filtro, r a incidencia normal, de acuerdo con la ecuación (9.97) reduce a

$$r = \frac{n_0 - n_s}{n_0 + n_s}$$

el valor para el substrato no revestido. En concreto, para vidrio ($n_s = 1{,}5$), en el aire ($n_0 = 1$) el máximo teórico de transmisión es del 96% (sin tener en cuenta las reflexiones de la superficie posterior del substrato así como pérdidas tanto en el filtro bloqueador como en las películas mismas).

9.8 Aplicaciones de la interferometría

Los principios de interferometría han tenido muchas aplicaciones físicas. De ellos, algunos tienen únicamente significado histórico o pedagógico, mientras que otros se emplean ampliamente. La invención del láser y la posibilidad de emplear luz cuasimonocromática altamente coherente ha facilitado enormemente la creación de nuevas configuraciones de interferómetros.

9.8.1 Interferencia con luz esparcida

Probablemente el primer estudio del que se tenga noticias sobre franjas de interferencia producidas por luz esparcida

se encuentra en el libro *Optiks* de Sir Isaac Newton (1704, Libro dos, parte IV). Nuestro interés presente en este fenómeno es doble. Primero, proporciona una manera muy fácil para ver algunas franjas de interferencia hermosamente coloreadas. Segundo, es la base para un interferómetro muy simple y útil.

Para ver las franjas, se espolvorea ligeramente una capa delgada de talco común sobre la superficie de cualquier espejo plateado en su cara posterior (el rocío valdrá igualmente). No importa ni el espesor ni la uniformidad del recubrimiento. El uso de una fuente puntual brillante, sin embargo, es crucial. Una fuente apropiada puede hacerse pegando una pieza pesada de cartón con un orificio de $\frac{1}{4}$ de pulgada de diámetro sobre una buena linterna de bolsillo. Inicialmente, nos alejamos del espejo unos tres o cuatro pies; las franjas serán demasiado finas y estarán muy cerca unas de otras si nos colocamos más cerca. Sostengamos la linterna a lo largo de la mejilla e iluminemos el espejo de tal manera que pueda verse el reflejo brillante de la bombilla sobre él. Las franjas se verán entonces claramente como bandas alternadas brillantes y oscuras.

En la figura 9.62 se muestran dos rayos coherentes que salen de la fuente puntual y llegan al punto P después de viajar por diferentes rutas. Un rayo se refleja en el espejo siendo a continuación difundido hacia P por un solo grano transparente de talco. El segundo rayo se difunde primero por el grano hacia abajo, a continuación cruza el espejo y es reflejado hacia atrás hacia P. La diferencia de longitud de camino óptico resultante determina la interferencia en P. A incidencia normal, el patrón es una serie de anillos concéntricos de radio [17]

$$\rho \approx \left[\frac{nm\lambda a^2 b^2}{d(a^2 - b^2)}\right]^{1/2}$$

Ahora consideremos un dispositivo afín, muy útil a la hora de comprobar sistemas ópticos, la **placa difusora** que generalmente consiste en una lámina transparente, ligeramente rugosa. En una disposición como la de la figura 9.63, sirve como elemento de división de amplitud. En esta aplicación debe dotarse de un centro de simetría, es decir, cada lugar que produce esparcimiento o difusión necesita tener un duplicado localizado simétricamente respecto al punto central.

[17] Para más detalles, véase a A. J de Witte, «Interference in Scattered Light», *Am. J. Phys.*, **35**, 301 (1967).

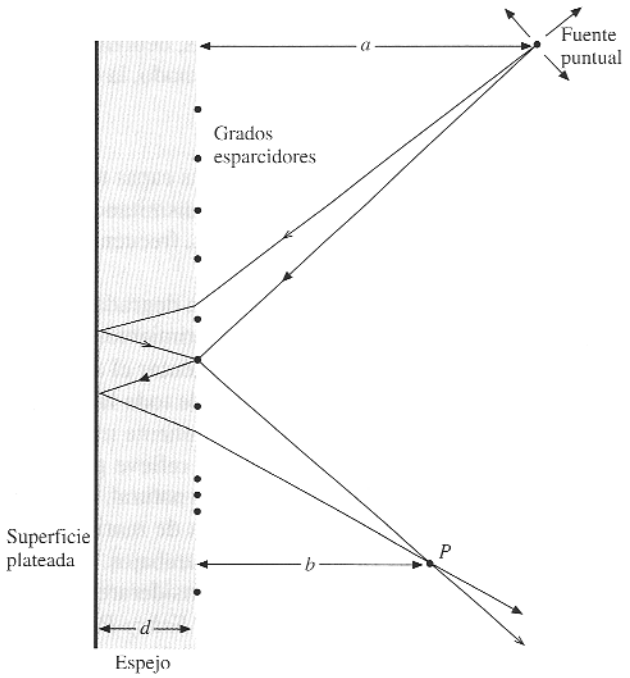


FIGURA 9.62 Interferencia de luz esparcida o difundida. (Fuente desconocida)

En el sistema en consideración, una fuente de luz puntual cuasimonocromática S tiene su imagen, por medio de la lente L_1 sobre la superficie, en el punto A del espejo que está siendo analizado. Una parte de la luz procedente de la fuente es difundida por la placa correspondiente iluminando, por lo tanto, toda la superficie del espejo que, a su vez, refleja la luz hacia atrás en dirección de la placa difusora. Esta onda, así como la luz que forma la imagen del orificio en el punto A, pasa nuevamente a través de la placa llegando finalmente al plano imagen (ya sea sobre una pantalla o una cámara). Las franjas se forman en este último plano. El proceso de interferencia, que es patente en la formación de estas imágenes, se produce porque cada punto en el plano imagen final es iluminado por luz que llega por dos rutas diferentes: una originándose en A y la otra en algún punto B que refleja luz difundida. Realmente, por más que pueda parecer extraño a primera vista, se producen franjas bien definidas, como puede apreciarse en la figura 9.64.

Examinando el paso de la luz a través del sistema de manera algo más detallada, consideremos la luz incidente inicialmente sobre la placa difusora y supongamos que la onda sea plana, tal

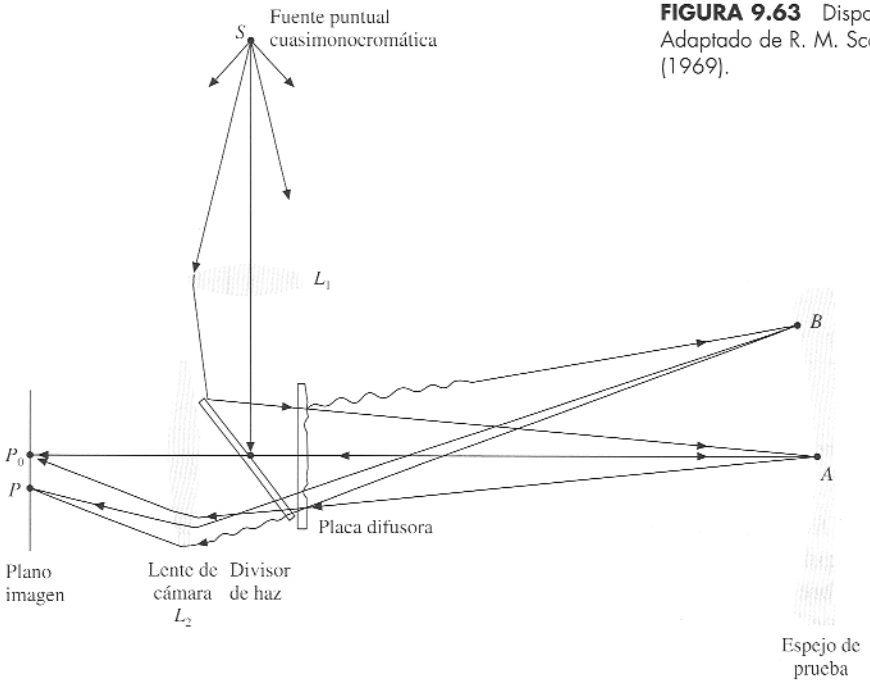


FIGURA 9.63 Disposición con placa difusora. Adaptado de R. M. Scott, *Appl. Opt.*, **8**, 531 (1969).

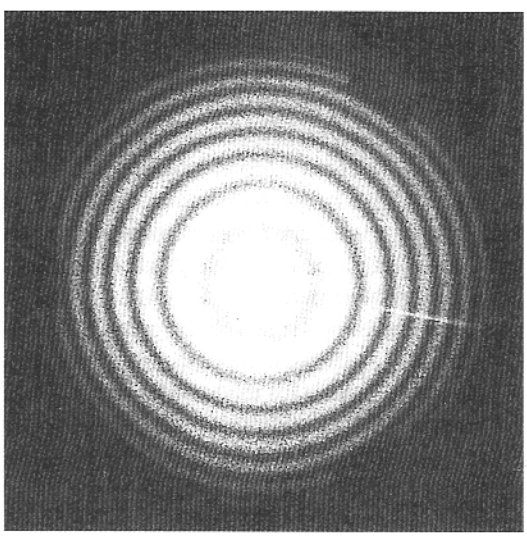


FIGURA 9.64 Franjas en luz esparcida.

y como se muestra en la figura 9.65. Tras cruzar la placa difusora, el frente de onda plano incidente $\mathbf{E}_i$ se distorsionará transformándose en un frente de onda transmitido $\mathbf{E}_T$. Imaginemos que esta onda, a su vez, esté dividida en una serie de componentes de Fourier que consta de ondas planas, es decir,

$$\mathbf{E}_T = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \cdots \tag{9.107}$$

Dos de estas componentes se ilustran en la figura 9.65*a*. Ahora supongamos que se le asigna un sentido específico a estas componentes, esto es, $\mathbf{E}_1$ representa la luz que viaja hacia al punto A en la figura 9.63 y $\mathbf{E}_2$ aquella que viaja hacia B. El análisis de los pasos sucesivos podría continuarse de la misma forma. Representemos la parte del frente de onda que regresa de A por el frente de onda $\mathbf{E}_A$ en la figura 9.65*b*. La placa difusora la transformará en una onda irregular transmitida, indicada por $\mathbf{E}_{AT}$ en la misma figura. Esto corresponde nuevamente a una configuración compleja, pudiendo sin embargo dividirse en componentes de Fourier formadas por ondas planas análogamente al caso anterior. En la figura 9.65*b* se han dibujado dos de estos frentes de onda constitutivos, uno viajando a la izquierda y el otro inclinado según un ángulo θ. El último frente de onda, indicado por $\mathbf{E}_{A\theta}$, es enfocado por la lente L_2 en el punto P sobre la pantalla (figura 9.63).

El frente de onda que regresa de B a la placa difusora se indica por $\mathbf{E}_B$ en la figura 9.65c. Después de cruzar la placa disfusora, se transformará en la onda $\mathbf{E}_{BT}$. Una de las compo-

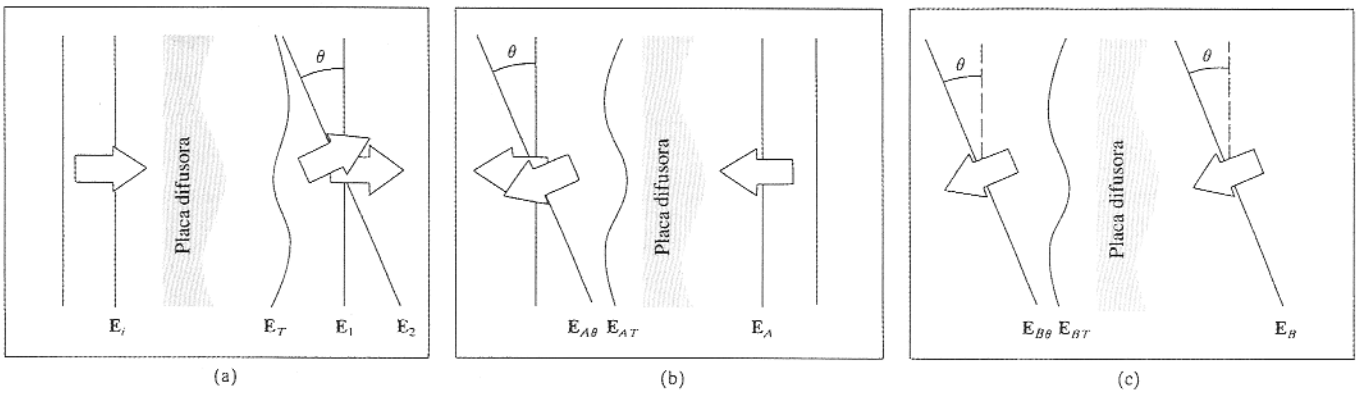


FIGURA 9.65 Frentes de onda atravesando la placa difusora.

nentes de Fourier de este frente de onda, indicado por $\mathbf{E}_{B\theta}$, está inclinada según un ángulo θ y, por lo tanto, estará enfocada en el mismo punto P sobre la pantalla.

Algunas de las ondas que llegan a P serán coherentes en el sentido de que habrá interferencia. Para obtener la irradiancia resultante I_P, primero se suman las amplitudes de todas las ondas que llegan a P, es decir, $\mathbf{E}_P$ elevándose luego al cuadrado y calculando el promedio en el tiempo de $\mathbf{E}_P$.

En el análisis anterior, se consideraron únicamente dos fuentes puntuales en el espejo. A decir verdad, naturalmente toda la superficie del espejo es iluminada por la luz incidente y cada punto del mismo servirá como fuente secundaria de ondas que regresan. La placa difusora deformará todas las ondas y ellas, a su vez, podrán descomponerse en componentes de onda plana. En cada serie de ondas componentes habrá una inclinada según un ángulo θ y todas ellas estarán enfocadas en el mismo punto P en la pantalla. La amplitud resultante entonces tendrá la forma

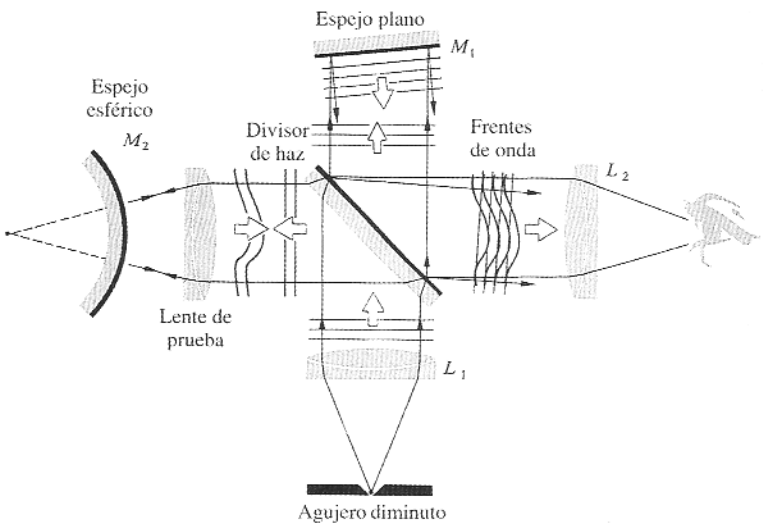
$$\mathbf{E}_P = \mathbf{E}_{A\theta} + \mathbf{E}_{B\theta} + \cdots$$

Puede imaginarse que la luz que llega al plano imagen esté parcialmente formada por dos campos ópticos especialmente interesantes de los cuales, uno, resulta de la luz que se esparció únicamente a su paso por la placa hacia el espejo mientras que el otro se debe a la luz esparcida únicamente en su camino hacia el plano imagen. El primero ilumina ampliamente el espejo de prueba resultando, finalmente, en una imagen de él sobre la pantalla. El último, inicialmente enfocado hacia la región cerca de A, esparce una mancha difusa en la pantalla. El punto A se escoge de tal manera que el área pequeña en su proximidad esté libre de aberraciones. En este caso, la onda reflejada en él sirve como referencia con la cual llevar a cabo una comparación del frente de onda correspondiente a toda la superficie del espejo. La figura de interferencia mostrará, como una serie de franjas de contorno, cualquier desviación de la superficie del espejo respecto a la perfección [18].

9.8.2 Interferómetro de Twyman-Green

El interferómetro de Twyman-Green es esencialmente una variación del interferómetro de Michelson. Se trata de un instrumento de gran importancia en el terreno de los ensayos de la óptica moderna. Entre sus características físicas sobresalientes están (como se ilustra en la figura 9.66) una fuente puntual cuasimonocromática y una lente L_1 que proporciona una fuente de entrada de *ondas planas,* y una lente L_2 que permite que toda la luz de la abertura entre en el ojo de modo que pueda observarse todo el campo, es decir, cualquier porción de M_1 y M_2. Un láser continuo sirve como fuente superior ya que asegura grandes diferencias de longitud de camino y, además, tiempos de exposición fotográfica cortos que tienden a reducir los indeseables efectos de la vibración. Las versiones del interferómetro de Twyman-Green con láser se hallan entre las herramientas ópticas de ensayo más efi-

[18] Para profundizar en el análisis sobre la placa difusora, el lector podrá consultar los artículos breves de J. M. Burch, *Nature,* **171**, 889 (1953) y *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 600 (1962). También ha de hacerse referencia a J. Strong, *Concepts of Classical Optics,* pág. 383. Asimismo, véase R. M. Scott, «Scatter Plate Interferometry», *Appl. Opt.* 8, 531 (1969) y J. B. Houston, Jr., «How to Make and Use a Scatterplate Interferometer», *Optica/ Spectra* (junio de 1970), pág. 32.



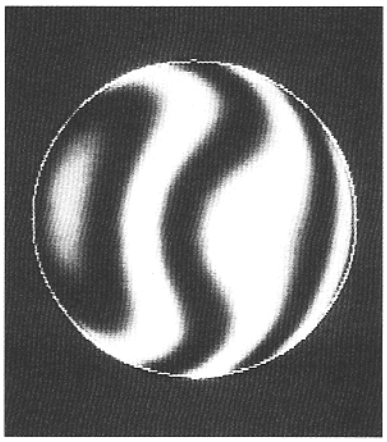


FIGURA 9.66 Interferómetro de Twyman-Green. (Foto de E.H.)

caces. Tal y como se muestra en la figura, el dispositivo ha sido preparado para probar una lente. El centro de curvatura del espejo esférico M_2 coincide con el punto focal de la lente. Si la lente que está siendo probada está libre de aberraciones, la luz reflejada emergente que regresa al divisor de haz será nuevamente una onda plana. Sin embargo, si el astigmatismo, la coma, o la aberración esférica deforman el frente de onda, podrá verse y fotografiarse la distribución de franjas que manifiesta claramente estas distorsiones. Cuando M_2 es reemplazado por un espejo plano, otros elementos (por ejemplo, prismas, planos ópticos, etc.) pueden probarse igual de bien. El óptico que interpreta la distribución de franjas podrá entonces marcar la superficie en aquellos puntos altos o bajos que habrá de corregirse con una operación de pulido. En la fabricación de los sistemas ópticos más selectos, telescopios, cámaras para gran altura, etc., los interferogramas pueden incluso barrerse electrónicamente analizando sucesivamente los datos resultantes por ordenador. Los trazadores automáticos de gráficos controlados por ordenador pueden producir automáticamente mapas del contorno de la superficie o dibujos en perspectiva «tridimensional» del frente de onda distorsionado generado por el elemento que está siendo probado. Es posible utilizar estos procedimientos durante todo el proceso de fabricación para así garantizar la alta calidad de los instrumentos ópticos. Los sistemas complejos con aberraciones en el frente de onda en el rango de fracciones de longitud de onda son el resultado de lo que podría llamarse la nueva tecnología.

9.8.3 El interferómetro rotatorio de Sagnac

El interferómetro de Sagnac se emplea extensivamente para medir la velocidad rotacional. En concreto, el **láser de anillo** que es esencialmente un interferómetro de Sagnac que contiene un láser en uno o más de sus brazos, se proyectó específicamente para este propósito. El primer giroscopio de láser anular se introdujo en 1963 y varios dispositivos de esta índole están aún siendo investigados (figura 9.67). Los experimentos iniciales que impulsaron estos esfuerzos fueron realizados por Sagnac en 1911. En aquel entonces, Sagnac hacía girar todo el interferómetro, espejos, fuente y detector, alrededor de un eje perpendicular que pasaba por su centro (figura 9.68). Recordemos, de la sección 9.4.2, que dos haces superpuestos atraviesan el interferómetro, uno a derechas y otro a izquierdas. La rotación efectivamente reduce el camino seguido por un haz en comparación con el del otro. En el interferómetro, el resultado es un desplazamiento de la franja proporcional a la velocidad angular de rotación ω. En el láser de anillo, es la diferencia de frecuencia entre los dos haces la que es proporcional a ω.

Consideremos la disposición ilustrada en la figura 9.68. La esquina A (y cualquier otra esquina) se mueve con una velocidad lineal $v = R\omega$, donde R es la mitad de la diagonal del cuadrado. Según el concepto clásico, hallamos que el tiempo de viaje de la luz a lo largo de AB es

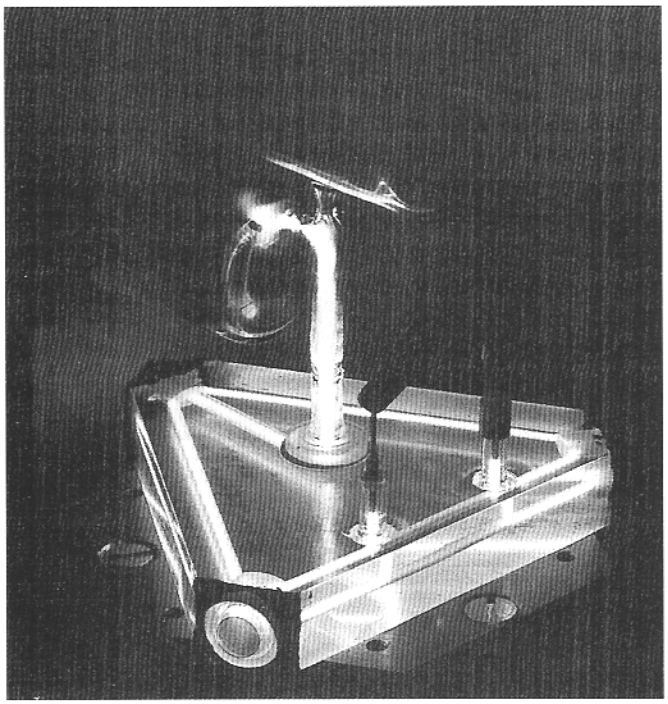


FIGURA 9.67 Giroscopio de láser de anillo. (Foto cedida por Autonetics, una división de Boeing North America, Inc., una filial de propiedad absoluta de la Compañía Boeing.)

$$t_{AB} = \frac{R\sqrt{2}}{c - v/\sqrt{2}}$$

o

$$t_{AB} = \frac{2R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

El tiempo de viaje de la luz de A a D es

$$t_{AD} = \frac{2R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

El tiempo total de viaje tanto a derechas como a izquierdas es proporcionado respectivamente por

$$t_{\circlearrowright} = \frac{8R}{\sqrt{2}c + \omega R}$$

y

$$t_{\circlearrowleft} = \frac{8R}{\sqrt{2}c - \omega R}$$

Para $\omega R << c$ la diferencia entre estos dos intervalos es

$$\Delta t = t_{\circlearrowright} - t_{\circlearrowleft}$$

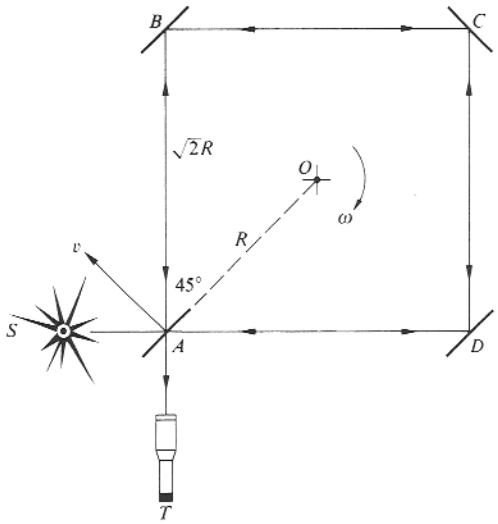


FIGURA 9.68 El interferómetro rotatorio de Sagnac. Originalmente era de 1 m × 1 m con ω = 120 rev/min.

o, usando la serie binómica

$$\Delta t = \frac{8R^2\omega}{c^2}$$

Esto puede expresarse en términos del área $A = 2R^2$ del cuadrado formado por los haces de luz como

$$\Delta t = \frac{4A\omega}{c^2}$$

Sea el período de luz monocromática utilizada igual a $\tau = \lambda/c$, entonces el desplazamiento fraccional de las franjas proporcionado por $\Delta N = \Delta t/\tau$, es

$$\Delta N = \frac{4A\omega}{c\lambda}$$

un resultado que ha sido comprobado experimentalmente. En concreto, Michelson y Gale [19] recurrieron a este método para determinar la velocidad angular de la Tierra.

El tratamiento clásico anterior es lógicamente defectuoso en cuanto supone que las velocidades excedan c lo cual es contrario a los dictados de la teoría de la relatividad especial. Asimismo, parece que la teoría de la relatividad general predominaría debido a que el sistema se acelera. De hecho, todos estos formalismos conducen a los mismos resultados.

[19] Michelson y Gale, *Astrophys. J.* **61**, 140 (1925).

PROBLEMAS

9.1 Volviendo a la sección 9.1, sea

$$\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

y

$$\tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$$

donde las formas de los frentes de onda no están especificadas explícitamente y $\tilde{\mathbf{E}}_1$ y $\tilde{\mathbf{E}}_2$ son vectores complejos dependientes del espacio y del ángulo de fase inicial. Demuestre que el término de interferencia viene dado por

$$I_{12} = \tfrac{1}{2}(\tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2^* + \tilde{\mathbf{E}}_1^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2) \qquad (9.108)$$

Usted tendrá que evaluar los términos de la siguiente forma

$$\langle \tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{-2i\omega t} \rangle_T = \tilde{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{E}}_2 / T \int_t^{t+T} e^{2i\omega t'} dt'$$

para $T >> \tau$ (véase otra vez el problema 3.7). Demuestre que la ecuación (9.108) conduce a la ecuación (9.11) para ondas planas.

9.2 En la sección 9.1, consideramos la distribución espacial de la energía para dos fuentes puntuales. Dijimos que para el caso donde la separación $a >> \lambda$, el promedio espacial de I_{12} es cero. ¿Por qué esto es cierto? ¿Qué sucede cuando a es mucho menor que λ?

9.3* Vuelva a la figura 2.22 y demuestre que si dos ondas electromagnéticas planas que forman un ángulo θ tienen la misma amplitud, E_θ, el patrón de interferencia resultante en el plano xy es una distribución de la irradiancia de coseno al cuadrado proporcionada por

$$I(y) = 4E_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} y \operatorname{sen}\theta\right)$$

Localice los ceros de irradiancia. ¿Cuál es el valor de la separación entre franjas? ¿Qué le ocurre a la separación a medida que θ aumenta? Compare su análisis con el que conduce a la ecuación (9.17). [*Sugerencia*: empiece con las expresiones para ondas de la sección 2.7 cuyas fases ya se calcularon y escríbalas como exponenciales].

9.4 ¿Obtendremos un patrón de interferencia en el experimento de Young (figura 9.8) si reemplazamos la fuente de rendija S por una bombilla con un único filamento largo? ¿Qué ocurriría si reemplazáramos las rendijas S_1 y S_2 por esas mismas bombillas?

9.5* La figura P.9.5 ilustra una distribución de salida que se midió con un micrófono diminuto cuando dos pequeños piezoaltavoces a una distancia de 15 cm se apuntaron hacia el micrófono a una distancia de 1,5 m. Puesto que la velocidad del sonido a 20°C es de 343 m/s, calcule la frecuencia aproximada a la que funcionaron los altavoces. Analice la naturaleza de la distribución y explique por qué tiene un mínimo central.

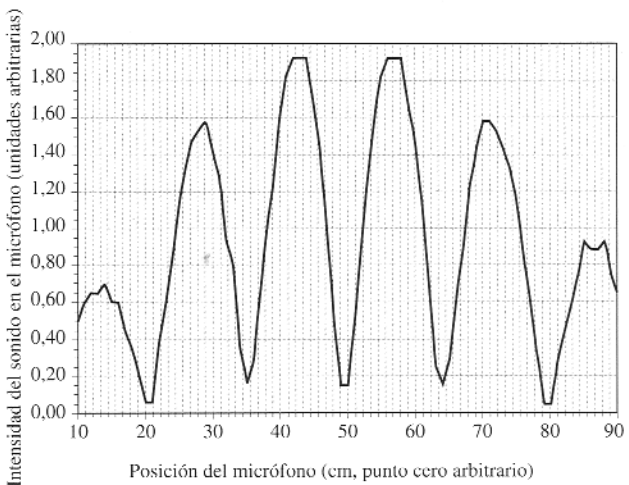


FIGURA P.9.5. Datos cedidos por CENCO.

9.6* Dos antenas de radio de 1,0 MHz emitiendo en fase están separadas por 600 m a lo largo de una línea norte-sur. Un receptor de radio colocado a 2,0 km al este es equidistante con respecto a ambas antenas transmisoras y puede captar una señal bastante fuerte. ¿A qué distancia hacia el norte debería moverse el receptor para que capte de nuevo una señal casi igual de fuerte?

9.7 Un haz alargado de luz roja de un láser He-Ne ($\lambda_0 = 632{,}8$ nm) inciden en una pantalla que contiene dos rendijas horizontales muy estrechas separadas por 0,200 mm. Una distribución de franjas aparece en una pantalla blanca colocada a una distancia de 100 m.

(a) ¿A qué distancia (en radianes y milímetros) por encima y por debajo del eje central se hallan los primeros ceros de irradiancia?
(b) ¿A qué distancia (en mm) del eje se halla la quinta franja brillante?
(c) Compare estos dos resultados.

9.8* Unas ondas planas rojas de un láser de rubí ($\lambda_0 = 694{,}3$ nm) en el aire, inciden en dos rendijas paralelas en una pantalla opaca. En un muro distante aparece una distribución de franjas y podemos ver que la cuarta franja brillante a 1° por encima del eje central. Calcule la separación entre las rendijas.

9.9* Una tarjeta de 3 × 5 contiene dos orificios cuyo diámetro es de 0,08 mm y que se hallan a una distancia, medida desde sus centros, de 0,10 mm, está iluminada por rayos paralelos de luz azul procedente de un láser de iones de argón ($\lambda_0 = 487{,}99$ nm). Si las franjas en una pantalla de observación tienen que hallarse a una distancia de 10 mm, ¿a qué distancia debería encontrarse la pantalla?

9.10* La luz blanca que incide en dos rendijas largas y estrechas emerge y puede observarse en una pantalla distante. Si la luz roja ($\lambda_0 = 780$ nm) en la franja de primer orden se superpone al violeta en la franja de segundo orden, ¿cuál es la longitud de onda de ésta?

9.11* Considerando el experimento de doble rendija, derive una ecuación para la distancia $y_{m'}$ del eje central al *mínimo m*-ésimo de irradiancia de tal forma que las primeras franjas oscuras en ambos lados del máximo central equivalga a $m' = \pm 1$. Identifique y justifique sus aproximaciones.

9.12* Referente al experimento de Young, derive una expresión general para el desplazamiento en la posición vertical del *máximo m*-ésimo resultante de la colocación de una fina lámina paralela de vidrio de índice n y espesor d directamente en una de las rendijas. Identifique sus suposiciones.

9.13* Unas ondas planas de luz monocromática inciden a un ángulo θ_i en una pantalla con dos rendijas estrechas separadas por una distancia a. Derive una ecuación para el ángulo medido desde el eje central que determina el emplazamiento del máximo m-ésimo.

9.14* La luz solar incidente en una pantalla con dos rendijas largas y estrechas colocadas a una distancia de 0,20 mm, proyecta una distribución en una hoja blanca de papel puesta a 2 m más atrás. ¿Cuál es la distancia que separa el violeta ($\lambda_0 = 400$ nm) en la franja de primer orden del rojo ($\lambda_0 = 600$ nm) en la franja de segundo orden?

9.15 A fin de examinar las condiciones bajo las cuales las aproximaciones de la ecuación (9.23) son válidas:

(a) Aplique la ley de cosenos al triángulo S_1S_2 en la figura 9.8*c* para obtener

$$\frac{r_2}{r_1} = \left[1 - 2\left(\frac{a}{r_1}\right)\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{a}{r_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

(b) Desarrolle esto en una serie de Maclaurin obteniéndose

$$r_2 = r_1 - a\operatorname{sen}\theta + \frac{a^2}{2r_1}\cos^2\theta + \cdots$$

(c) A la luz de la ecuación (9.17), demuestre que si $(r_1 - r_2)$ tiene que igualar a a sen θ es necesario que $r_1 >> a^2/\lambda$.

9.16 Un flujo de electrones cada uno con una energía de 0,5 eV, incide en un par de rendijas extremadamente delgadas, separadas por 10^{-2} mm. ¿Cuál es la distancia entre mínimos adyacentes en una pantalla colocada a 20 m detrás de las rendijas? ($m_e = 9{,}108 \times 10^{-31}$ kg., 1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J.).

9.17* Demuestre que para el biprisma de Fresnel de la figura 9.13 a viene dada por $a = 2d(n - 1)\alpha$.

9.18* En el doble espejo de Fresnel $s = 2$m, $\lambda_0 = 589$ nm y la separación de las franjas resultó ser de 0,5 mm. ¿Cuál es el ángulo de inclinación de los espejos si la distancia perpendicular de la fuente puntual real a la intersección de los dos espejos es de 1 m?

9.19* El biprisma de Fresnel se usa para obtener franjas de una fuente puntual que es colocada a 2 m de la pantalla mientras que el prisma se halla a mitad del camino entre la fuente y la pantalla. Sea la longitud de onda de la luz $\lambda_0 = 500$ nm y el índice de refracción del vidrio $n = 1{,}5$. ¿Cuál es el ángulo del prisma si la separación de las franjas es 0,5 mm?

9.20 ¿Cuál es la expresión general para la separación de las franjas de un biprisma de Fresnel de índice n sumergido en un medio con un índice de refracción n'?

9.21 Usando el espejo de Lloyd se observaron unas franjas de rayos X a una distancia de 0,0025 cm. Se utilizó una longitud de onda de 8,33 Å. Si la distancia fuente-pantalla es de 3 m, ¿a qué distancia por encima del plano del espejo estaba la fuente puntual de rayos X?

9.22 Imagínese que tenemos una antena a la orilla de un lago recogiendo una señal de una radioestrella lejana (figura P.9.22) que está

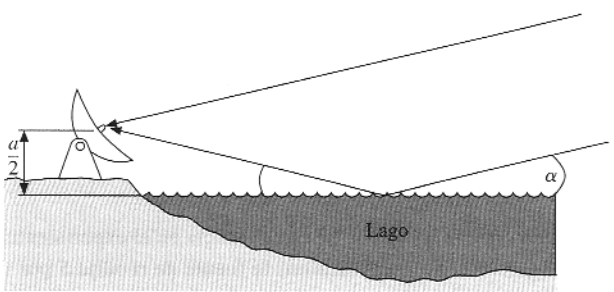


FIGURA P.9.22

apareciendo en el horizonte en ese momento. Escriba las expresiones para δ y para la posición angular de la estrella cuando la antena detecta su primer máximo.

9.23* Si la placa de la figura 9.17 es vidrio en el aire, demuestre que las amplitudes de E_{1r}, E_{2r} y E_{3r} son respectivamente 0,2 E_{0i}, 0,192 E_{0i} y 0,008 E_{0i} donde E_{0i} es la amplitud incidente. Utilice los coeficientes de Fresnel a incidencia normal, suponiendo que no haya absorción. Podrá repetir los cálculos para una película de agua en el aire.

9.24 Una película de jabón rodeada de aire tiene un índice de refracción de 1,34. Si una región de la película es color rojo oscuro ($\lambda_0 = 633$ nm) en luz reflejada normalmente, ¿cuál es su espesor mínimo allí?

9.25* Una película delgada de alcohol etílico ($n = 1{,}36$) extendida en una lámina de vidrio plano e iluminada por luz blanca revela una distribución de color en la reflexión. Si una región de la película refleja potentemente tan sólo luz verde (500 nm), ¿cuál es su espesor?

9.26* Una película de jabón cuyo índice es de 1,34, tiene una región cuyo espesor es de 5.500 nm. Calcule las longitudes de onda en el vacío de la radiación que no se refleja cuando la película está iluminada desde arriba por luz solar.

9.27 Considere el patrón circular de las franjas de Haidinger resultante de una película de 2 mm de espesor y un índice de refracción 1,5. Para iluminación monocromática de $\lambda_0 = 600$ nm, calcule el valor m de la franja central ($\theta_t = 0$). ¿Será brillante u oscura?

9.28 Ilumine el portaobjetos de un microscopio (o mejor aún, un cubreobjetos de vidrio delgado). Podrán verse fácilmente unas franjas coloreadas con una lámpara fluorescente normal y corriente (aunque algunas de las más modernas no funcionan en absoluto) que sirve como fuente ancha o un farol de mercurio como fuente puntual. Describa las franjas. Ahora gire el vidrio. ¿Cambia la distribución? Reproduzca las condiciones mostradas en las figuras 9.18 y 9.19. Inténtelo otra vez con una hoja de plástico, de las utilizadas para preservar alimentos, colocada a lo largo de la parte superior de una taza.

9.29 La figura P.9.29 ilustra la disposición que se utiliza para probar lentes. Demuestre que

$$d = x^2(R_2 - R_1)/2R_1R_2$$

cuando los valores de d_1 y d_2 son despreciables en comparación con $2R_1$ y $2R_2$, respectivamente. (Recuerde el teorema de geometría plana que relaciona los productos de los segmentos de las cuerdas intersectantes.) Pruebe que el radio de la m-ésima franja oscura es entonces

$$x_m = [R_1R_2m\lambda_f/(R_2 - R_1)]^{1/2}$$

¿Cuál es la relación con la ecuación (9.43)?

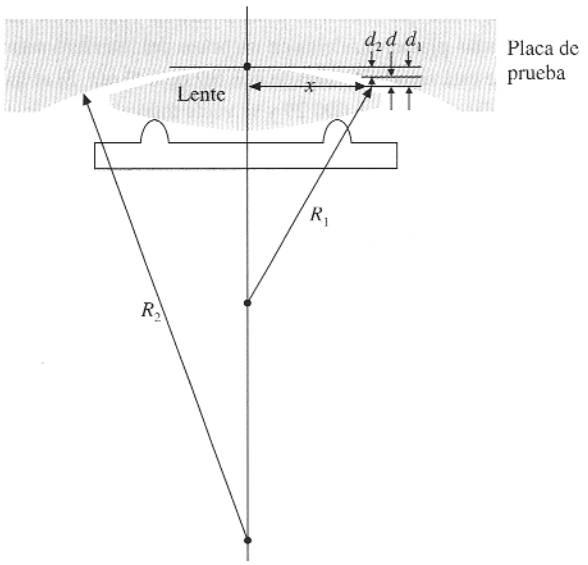


FIGURA P.9.29

9.30* En una película con luz cuasimonocromática con longitud de onda de 500 nm se observan unos anillos de Newton. Si el vigésimo anillo brillante tiene un radio de 1 cm, ¿cuál es el radio de curvatura de la lente que forma una parte del sistema interferencial?

9.31 Cuando un haz luminoso paralelo de longitud de onda 500 nm incide perpendicularmente sobre una película en forma de cuña y con índice de refracción 1,5 se observan unas franjas. ¿Cuál es el ángulo de la cuña si la separación de franjas es de $\frac{1}{3}$ cm?

9.32* Suponga que se forme una película de aire en forma de cuña entre dos láminas de vidrio, utilizando un trozo de papel de $7{,}618 \times 10^{-5}$ m de espesor como espaciador en los mismos extremos. Si desde arriba cae luz con longitud de onda de 500 nm, calcule el número de franjas brillante que se podrá ver en la cuña.

9.33 Un interferómetro de Michelson se ilumina con luz monocromática. Uno de sus espejos se desplaza sucesivamente de 2.53×10^{-5} m, notándose el paso de 92 pares de franjas brillantes y oscuras en el proceso. Calcule la longitud de onda del rayo incidente.

9.34* Se desplaza uno de los espejos del interferómetro de Michelson, observándose durante el proceso el paso de 1000 pares de franjas por el retículo de un telescopio de observación. Si el instrumento se ilumina con luz de 500 nm, ¿qué distancia se desplazó el espejo?

9.35* Supongamos que ponemos una cámara de 10,0 cm de extensión con ventanas planas paralelas en un brazo del interferómetro de Michelson que está siendo iluminado con luz de 600 nm. Si el índice de refracción del aire es de 1,000 29 y se vacía todo el aire de la célula, ¿cuántos pares de franjas se detectarán en el proceso?

9.36* En la figura P.9.36 se ilustra una forma del interferómetro de Jamin. ¿Cómo funciona? ¿Para qué podrá utilizarse?

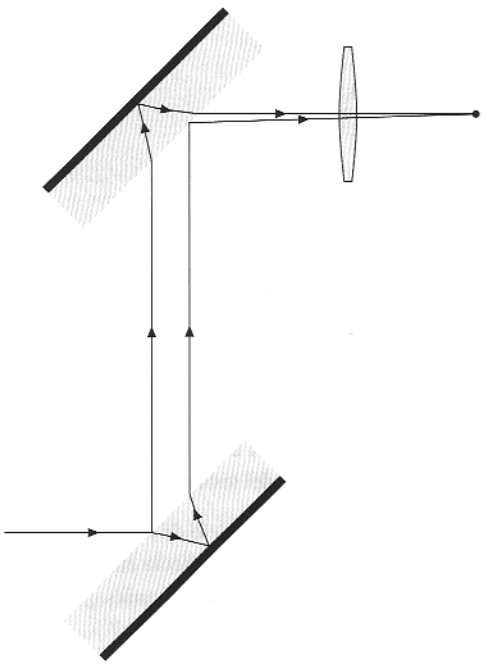


FIGURA P.9.36

9.37 Empezando con la ecuación (9.53) para las ondas transmitidas, calcule la densidad de flujo, es decir, la ecuación (9.54).

9.38 Dado que los espejos de un interferómetro de Fabry-Perot tienen un coeficiente de amplitud de reflexión $r = 0{,}8944$, calcule

(a) el coeficiente de fineza,

(b) el ancho medio,

(c) la fineza,

(d) el *factor de contraste* definido por

$$C \equiv \frac{(I_t/I_i)_{\text{máx}}}{(I_t/I_i)_{\text{mín}}}$$

9.39 Para satisfacer algunos de los detalles en la deducción del incremento de fase más pequeño separando dos franjas Fabry-Perot resolubles, es decir

$$(\Delta\delta) \approx 4.2/\sqrt{F} \qquad [9.73]$$

tenga en cuenta que

$$[\mathscr{A}(\theta)]_{\delta = \delta_a \pm \Delta\delta/2} = [\mathscr{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta/2}$$

Demuestre que la ecuación (9.72) puede escribirse de nuevo como

$$2[\mathscr{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta/2} = 0.81\{1 + [\mathscr{A}(\theta)]_{\delta = \Delta\delta}\}$$

Cuando F es grande γ es pequeña, y sen $(\Delta\delta) = \Delta\delta$. Demuestre que entonces se obtiene la ecuación (9.73).

9.40 Considere que la figura de interferencia del interferómetro de Michelson provenga de dos haces con igual densidad de flujo. Usando la ecuación (9.17) calcule el ancho medio. ¿Cuál es la separación, en δ, entre máximos adyacentes? ¿Cuál es entonces la fineza?

9.41* Tenga en cuenta que una película de espesor $\lambda_f/4$ e índice n_1 siempre reducirá la reflectancia del substrato sobre el cual está depositada, con tal que $n_s > n_1 > n_0$. Considere el caso más sencillo de incidencia normal y $n_0 = 1$. Demuestre que esto equivale a decir que las ondas reflejadas hacia atrás de las dos interfaces se anulan mutuamente.

9.42 Compruebe que la reflectancia de un substrato puede aumentarse recubriéndolo con una capa de $\lambda_f/4$ de alto índice, es decir, $n_1 > n_s$. Demuestre que las ondas reflejadas interfieren constructivamente. La pila de láminas cuarto de onda $g(HL)^m Ha$ puede considerarse como una serie de estructuras.

9.43 Determine el índice de refracción y el espesor de una película que se colocará sobre una superficie de vidrio ($n_v = 1{,}54$) tal que no se refleje la luz que incide normalmente con longitud de onda de 540 nm.

9.44 Una lente de vidrio para microscopio con un índice de 1,55 deberá recubrirse con una capa de fluoruro de magnesio a fin de aumentar la transmisión de la luz amarilla normalmente incidente ($\lambda_0 = 550$ nm). ¿Cuál es el espesor mínimo que debería depositarse en la lente?

9.45* Un objetivo de vidrio para cámara con un índice de 1,55 deberá recubrirse con una capa de fluoruro de aluminio y sodio ($n \approx 1{,}30$) a fin de reducir la reflexión de la luz verde normalmente incidente ($\lambda_0 = 500$ nm). ¿Cuál es el espesor que debería depositarse en la lente?

10 Difracción

10.1 Consideraciones preliminares

Un cuerpo opaco colocado a medio camino entre una pantalla y una fuente puntual proyecta una sombra complicada hecha de regiones claras y oscuras muy diferentes de las que podría esperarse de los principios de la óptica geométrica (figura 10.1).[1] El trabajo de Francesco Grimaldi en el siglo XVII fue el primer estudio detallado que se publicó sobre esta **desviación de la luz de su propagación rectilínea**, a la que denominó *«diffractio». El efecto es una característica general de los fenómenos ondulatorios que ocurren donde quiera que una parte de un frente de onda ya sea sonido, onda material o luz, esté obstruida de alguna manera.* Si al encontrar un obstáculo transparente u opaco se altera la amplitud o la fase de una región del frente de onda, esto producirá difracción.[2] Los varios segmentos del frente de onda que se propagan más allá del obstáculo interfieren, produciendo aquella distribución de densidad de energía particular denominada figura de difracción. No hay distinción física significativa entre *interferencia* y *difracción.* Sin embargo, se ha vuelto algo común, aunque no siempre apropiado, hablar de interferencia cuando se analiza la superposición de solamente unas pocas ondas y de difracción cuando se trata de un gran número de ondas. Aún así, nos referimos a interferencia de haces múltiples en un contexto y a difracción por una red en otro.

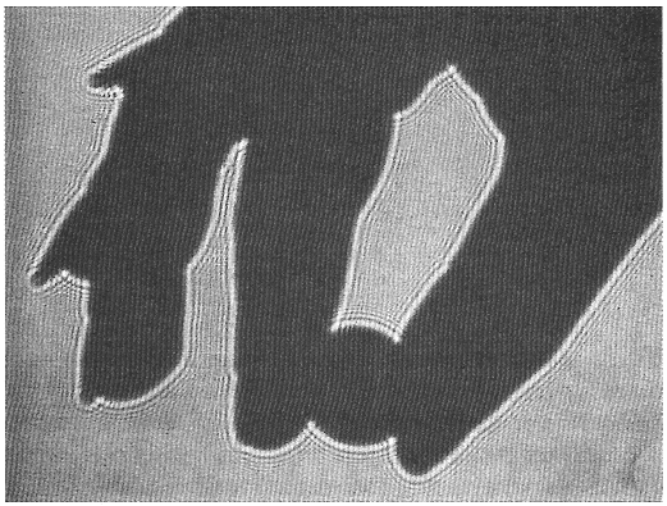
Sería interesante analizar la difracción bajo la perspectiva de la teoría moderna más potente de la luz, la electrodinámica cuántica (EDC), pero esto conllevaría un estudio terriblemente poco práctico al ser demasiado complicado y que añadiría más bien poco. Lo que *sí se puede hacer* es demostrar cualitativamente cómo la EDC puede aplicarse a unas situaciones básicas. Para nuestros propósitos, sin embargo, la teoría ondulatoria clásica que proporciona el formalismo efectivo más simple será más que suficiente. No obstante, donde se considere oportuno, se incorporarán al estudio observaciones del análisis de Fourier, si bien el tratamiento pormenorizado de dicho tema se posterga hasta el próximo capítulo.

El principio de Huygens-Fresnel

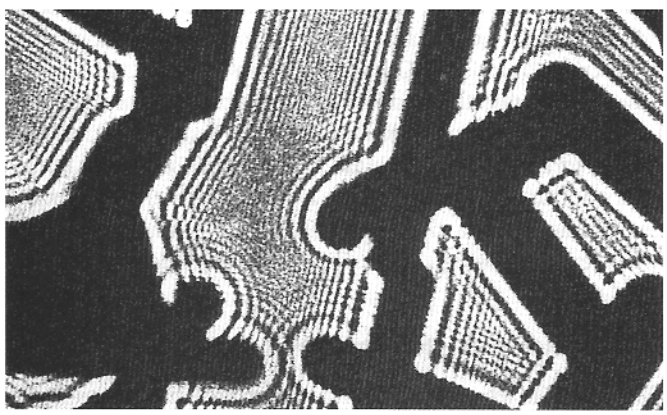
Para aproximarnos al problema, reconsideremos el principio de Huygens (sección 4.4.2). Cada punto en un frente de onda puede visualizarse como una fuente de trenes de onda esféricos secundarios, pudiendo supuestamente determinar el progreso del frente de onda o de cualquier porción de ella a través del espacio. En cualquier momento, se supone que la forma del frente de onda es la envolvente de los trenes de onda secundarios (figura 4.27). Dicha técnica, sin embargo, no toma en consideración la mayoría de los trenes de onda secundarios, reteniendo sólo la parte común a la envolvente. Como resultado de esta imperfección, el principio de Huygens no puede explicar, por sí mismo, los detalles del proceso de difracción, y así lo confirma la experiencia cotidiana. Las ondas sonoras (por ej., $\nu = 500$ Hz, $\lambda \approx 68$ cm) se «doblan» fácilmente alrededor de objetos grandes como los postes telefónicos y los árboles que, no obstante, proyectan unas sombras muy definidas cuando se iluminan con luz. Sin embargo, el principio de

[1] El efecto podrá verse fácilmente con una fuente bastante intensa. Una lámpara de alta intensidad que brilla a través de un pequeño orificio puede valer. Si miramos el patrón de sombras que aparece de un lápiz iluminado por una fuente puntual, veremos una región brillante poco usual alrededor de los bordes así como una franja muy débilmente iluminada a lo largo del centro de la sombra. Miren atentamente a la sombra formada por su mano en luz solar directa.

[2] Por lo general, no se toma en consideración la difracción asociada con obstáculos transparentes, aunque si alguna vez han conducido un automóvil de noche con unas cuantas gotitas de lluvia en sus gafas, conocerán sin duda alguna tal efecto. En caso contrario, póngase una gotita de agua o saliva en una lámina de cristal, sosteniéndola muy cerca del ojo y mire directamente a través de ella hacia una fuente puntual. Verá unas franjas brillantes y oscuras.



(a)



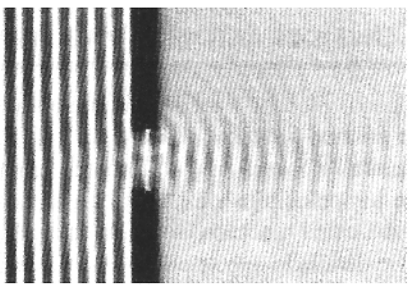
(b)

FIGURA 10.1 (*a*) La sombra de la mano de María sujetando una moneda, proyectada directamente en una película Polaroid 4 × 5 de 3.000 ASA con un haz láser de He-Ne y sin lentes. (Foto de E. H.). (*b*) Difracción de Fresnel de electrones producida por cristales de óxido de cinc. (Según H. Boersch de *Handbuck der Physik*, publicado por S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg.)

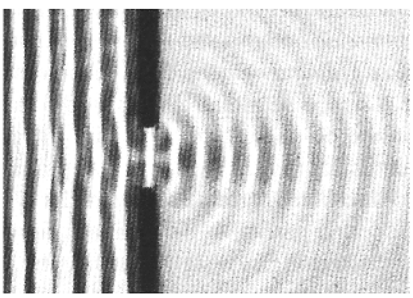
Huygens es independiente de cualquier consideración de longitud de onda, prediciendo las mismas configuraciones de onda en ambas situaciones.

La dificultad fue superada por Fresnel al añadir su concepto de interferencia. El **principio de Huygens-Fresnel** correspondiente establece que ***cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (de la misma frecuencia que la onda primaria). La amplitud del campo óptico en cualquier punto más allá es la superposición de todos estos trenes de onda (considerando sus amplitudes y fases relativas).***

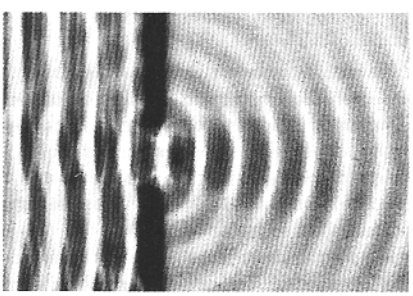
Aplicando estas ideas en el nivel cualitativo más simple, nos referiremos a las fotografías del tanque de ondas de la figura 10.2 y a la ilustración de la figura 10.3. Si cada punto despejado de la onda plana incidente actúa como fuente secundaria coherente, la máxima diferencia en las longitudes de



(a)



(b)



(c)

FIGURA 10.2 Difracción por una abertura con λ variable como se ve en un tanque de ondas. (Foto cedida por PSSC *Physics*, D. C. Heath, Boston, 1960.)

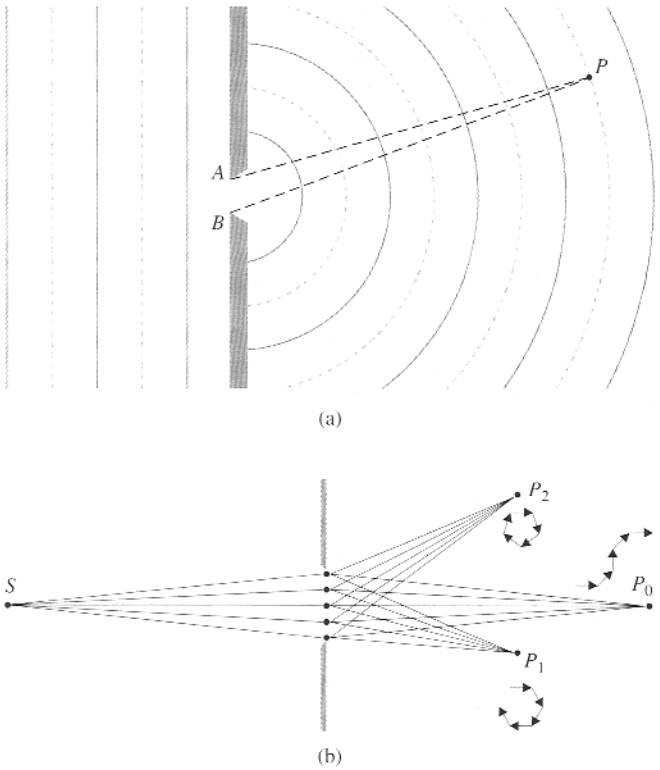


FIGURA 10.3 Difracción en una abertura pequeña. (*a*) Imagen de onda clásica. (*b*) Vista realizada con EDC y amplitudes de probabilidad.

camino óptico entre ellas será $\Lambda_{\text{máx}} = |\overline{AP} - \overline{BP}|$, correspondiendo a una fuente puntual en cada borde de la abertura. Pero $\Lambda_{\text{máx}}$ es menor que o igual a $\overline{AB}$, siendo éste el caso cuando P se encuentra en la pantalla. Cuando $\lambda > \overline{AB}$, como en la figura 10.3, se deduce que $\lambda > \Lambda_{\text{máx}}$, y puesto que las ondas estaban inicialmente en fase, interfieren todas ellas constructivamente (en grado variable) donde quiera que P esté (véase figura 10.2*c*). Por lo tanto, ***si la longitud de onda es grande comparada con la abertura, las ondas se extenderán según ángulos grandes en la región más allá de la obstrucción.*** Cuanto más pequeña sea la abertura, más circulares serán las ondas difractadas (remítase al análisis de este punto en el contexto de Fourier, pág. 396).

La situación antitética ocurre cuando $\lambda < \overline{AB}$, como en la figura 10.2*a*. Ahora, el área donde $\lambda > \Lambda_{\text{máx}}$ se limita a una pequeña región que se extiende hacia afuera directamente frente a la abertura, siendo solamente ahí donde todas las ondas secundarias interferirán constructivamente. Fuera de esta zona, algunas ondas secundarias pueden interferir negativamente, comenzando así la «sombra». Recordemos que la *sombra geométrica* ideal corresponde a $\lambda \to 0$.

Desde un punto de vista clásico, la razón por la que la luz va donde va más allá de la pantalla se debe a la «interferencia» de la multitud de ondas secundarias que se emiten de la abertura; es decir, todas ellas se combinan (como fasores) en cada punto de la región, en algunos reforzándose, en otros anulándose, según la *LCO*.

Según la mecánica cuántica (sección 4.1.1), la razón por la que la luz va donde va más allá de la pantalla se debe a la «interferencia» de la multitud de amplitudes de probabilidad para los fotones desde la abertura; es decir, todas ellas se combinan (como fasores) en cada punto de la región, en algunos reforzándose, en otros anulándose, según la *LCO*. Cuando el orificio tiene un ancho de algunas longitudes de onda, como en la figura 10.2*a*, los numerosos recorridos que llevan a cualquier punto P corresponden a una amplia gama de fases del fasor. Considérense todos los recorridos hacia un punto en el sentido directo como P_0. El recorrido de línea recta desde S hasta P_0 corresponde a un valor mínimo en *LCO*. Cualquier otro recorrido a través de la abertura hasta P_0 será algo más largo (según el tamaño del orificio) y tiene unos fasores (imaginaremos que todos ellos tengan el mismo tamaño) que se reagrupan alrededor del valor estacionario de *LCO*, como en la figura 4.71. Tienen unas pequeñas diferencias de ángulo de fase mutuo (mitad +, mitad –), por lo tanto uniéndoles punta con cola, giran de una manera, luego la otra, para así producir una amplitud de probabilidad resultante importante. Un contador de fotones en P_0 detectará mucha luz. Lejos del sentido directo (donde la *LCO* no es estacionaria), cada fasor tiene unas diferencias de ángulos de desfase relativamente grande para cada recorrido, siendo todos ellos del mismo signo. Colocados punta con cola, dan vueltas en espiral, totalizando poco o nada. Un detector en P_1 registrará pocas cuentas mientras que los registrados por otro detector P_2 serán aún menores.

Si ahora se reduce mucho el tamaño de la abertura, el número de cuentas en P_1 y P_2 aumentará si bien el número en P_0 disminuye. Con un orificio estrecho, todos los recorridos que llevan a P_1 o a P_2 están mucho más cerca unos a otros, teniendo casi la misma *LCO*. Las diferencias de ángulo de fase serán, por consiguiente, mucho más pequeñas, las espirales de fasores ya no se cerrarán sobre sí mismas mientras que las amplitudes de probabilidad resultantes, aunque pequeñas, serán perceptibles en todas partes.

Cualitativamente, tanto la EDC como el principio clásico de Huygens-Fresnel llevan aproximadamente a las mismas conclusiones: *la luz se difracta y la interferencia está en el corazón del proceso.*

El principio de Huygens-Fresnel tiene algunas limitaciones (que examinaremos más adelante) además del hecho de que todo hasta ahora es bastante hipotético. Gustav Kirchhoff desarrolló una teoría más rigurosa basándose directamente en la solución de la ecuación diferencial de onda. Kirchhoff, si bien era contemporáneo de Maxwell, llevó a cabo su trabajo antes de la demostración de Hertz (y la popularización resultante) de la propagación de las ondas electromagnéticas en 1887. Fue así como Kirchhoff empleó la antigua teoría elástico-sólida de la luz. Su análisis refinado dio credibilidad a la suposición de Fresnel, conduciendo a una formulación aún más precisa del principio de Huygens como consecuencia exacta de la ecuación de onda. Aún así, la teoría de Kirchhoff es, por sí misma, una aproximación que es válida para longitudes de onda suficientemente pequeñas, es decir, cuando el tamaño de las aberturas difractantes es grande en comparación con λ. La dificultad surge debido a que lo que se busca es la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales que satisfaga las condiciones de contorno impuestas por la obstrucción. Esta clase de solución rigurosa se obtiene solamente en unos pocos casos especiales. La teoría de Kirchhoff funciona bastante bien aunque se ocupe solamente de ondas escalares y sea insensible al hecho de que la luz es un campo vectorial transversal [3].

Debe recalcarse que el problema de la determinación de una solución exacta para una configuración difractante particular es uno de los más complicados de la óptica. La primera de tales soluciones, en la que se recurre a la teoría electromagnética de la luz, fue publicada por Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868-1951) en 1896. Pero si el problema era físicamente poco realista, ya que involucraba una pantalla plana, perfectamente conductora e infinitamente delgada aunque opaca, el resultado fue, no obstante, muy útil puesto que permitió analizar en profundidad los procesos fundamentales involucrados.

Incluso hoy en día, para muchas de las configuraciones de interés práctico no existen soluciones rigurosas. Por lo tanto, por necesidad, confiaremos en los tratamientos aproximados de Huygens-Fresnel y Kirchhoff. En tiempos recientes, a fin de llevar a cabo un estudio oportuno de las características del campo de difracción, se ha recurrido a las técnicas de microondas, lo que de otra manera sería casi imposible examinar ópticamente. La teoría de Kirchhoff ha resistido bien a esta clase de comprobación [4]. En muchos casos, el tratamiento más simple de Huygens-Fresnel resultará adecuado para nuestros propósitos.

10.1.1 Obstrucciones opacas

La difracción puede visualizarse como resultado de la interacción de ondas electromagnéticas con alguna clase de obstrucción física. Por lo tanto, haríamos bien en reexaminar los procesos involucrados, es decir, ¿qué ocurre en realidad dentro del material del objeto opaco?

Una descripción posible es considerar una pantalla como un continuo, es decir, omitir su estructura microscópica. Para una hoja de metal no absorbente (sin calentamiento de joule y por consiguiente con conductividad infinita) podemos escribir las ecuaciones de Maxwell para el metal y para el medio que le rodea, y sucesivamente acoplar los dos en los límites. Pueden obtenerse unas soluciones precisas para configuraciones muy simples. Las ondas reflejadas y difractadas resultan entonces de la distribución de corriente dentro de la hoja.

Ahora, examinando la pantalla en una escala submicroscópica, imaginemos que debido al campo eléctrico de la radiación incidente la nube electrónica de cada átomo vibre. El modelo clásico, que habla de osciladores electrónicos que vibran y vuelven a emitir con la frecuencia de la fuente sirve muy bien, así que no necesitamos preocuparnos por la descripción cuántica. La amplitud y fase de un oscilador particular dentro de la pantalla están determinadas por el campo eléctrico local que las rodea, siendo éste una superposición del campo incidente y de los campos de todos los otros electrones vibrantes. Una pantalla grande opaca sin aberturas, hecha de papel negro o de hoja de aluminio, tiene un efecto obvio: no hay campo óptico en la región situada detrás de ella. Los electrones que se hallan cerca de la superficie iluminada se ponen a oscilar con la luz incidente, emitiendo energía radiante que es finalmente «reflejada» hacia atrás o absorbida por el material en forma de calor o ambas cosas. En todo caso, la onda incidente y los campos de los osciladores electrónicos se superponen de tal manera que dan cero de luz en cualquier

[3] Una formulación vectorial de la teoría escalar de Kirchhoff es objeto de análisis en J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, pág. 283. Véanse también Sommerfeld, *Optics*, pág. 325 y B. B. Baker y E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, como referencia general de la difracción. La lectura de estos textos no es fácil en ningún caso.

[4] C. L. Andrews, *Am. J. Phys.* **19**, 250 (1951); S. Silver, J. *Opt. Soc. Am.* **52**,131 (1962).

punto detrás de la pantalla, lo cual podría parecer una forma de equilibrio muy especial, pero en realidad no lo es. Si la onda incidente no se anulara completamente se propagaría con mayor profundidad en el material de la pantalla, excitando la radiación de más electrones y debilitando aún más, a su vez, la onda hasta que finalmente se desvanecería (si la pantalla fuera lo suficientemente gruesa). Hasta un material opaco como la plata, en la forma de una hoja suficientemente delgada, es transparente (recordemos el espejo semiplateado).

Ahora, quitemos un pequeño segmento con forma de disco del centro de la pantalla de tal manera que la luz fluya a través de la abertura, quitando al mismo tiempo los osciladores que la cubren uniformemente de manera que los electrones que quedan dentro de la pantalla ya no se ven afectados por ellos. Como un primer y ciertamente aproximado acercamiento, *supongamos que la interacción mutua de los osciladores sea esencialmente despreciable,* es decir, los electrones en la pantalla no se ven absolutamente afectados por la eliminación de los electrones en el disco. El campo situado en la región más allá de la abertura será entonces el mismo que existía antes de quitar el disco, esto es, cero menos la contribución del disco solo. Exceptuando el signo, es como si se hubieran quitado la fuente y la pantalla dejando solamente los osciladores en el disco, en lugar de lo contrario. Dicho de otro modo, puede imaginarse que el campo de difracción, en esta aproximación, surja exclusivamente de un conjunto de osciladores ficticios sin interacción mutua, distribuidos uniformemente en la región de la abertura. Esto, por supuesto, es la esencia del principio de Huygens-Fresnel.

Podemos prever, sin embargo, que en lugar de no haber ninguna interacción entre todos los osciladores electrónicos, haya un efecto de corto alcance ya que los campos del oscilador disminuyen con la distancia. En esta visión físicamente más realista, los electrones situados cerca del borde de la abertura se ven afectados al quitar el disco. Para aberturas más grandes, el número de osciladores en el disco es mucho mayor que el de los que están en el borde. En dichos casos, si el punto de observación está muy alejado y en la dirección hacia adelante, el principio de Huygens-Fresnel debería, y así es, funcionar bien (figura 10.4). Para aberturas muy pequeñas o en puntos de observación cercanos a la abertura, los efectos de borde se hacen importantes, pudiendo así anticipar dificultades. En efecto, en un punto dentro de la abertura misma, los osciladores electrónicos en el borde tienen gran significado debido a su proximidad. Sin embargo, estos electrones ciertamente fueron afectados al quitar los osciladores adyacentes del disco, por consiguiente, la desviación del principio de Huygens-Fresnel debe ser considerable.

10.1.2 Difracción de Fraunhofer y Fresnel

Imaginemos que tenemos una pantalla opaca, Σ, que contiene una sola abertura pequeña iluminada por ondas planas de una

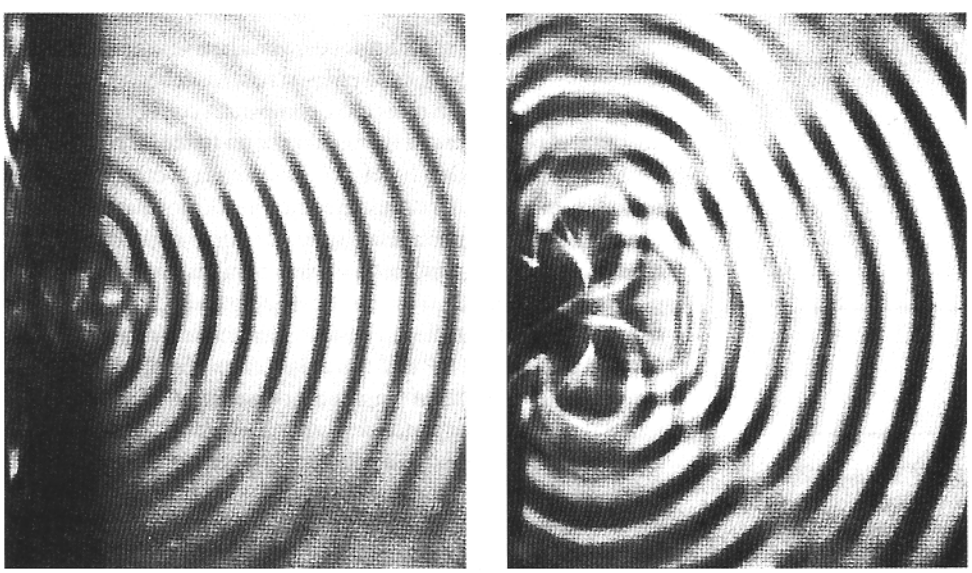


FIGURA 10.4 Fotos de un tanque de ondas. En un caso, las ondas se difractan simplemente por una rendija, en el otro varias fuentes puntuales, igualmente espaciadas, se extienden sobre la abertura y generan una figura similar. (Fotos cedidas por PSSC *Physics,* D. C. Heath, Boston, 1960.)

fuente puntual, S, muy lejana. El plano de observación σ es una pantalla paralela y muy cercana a Σ. Bajo estas condiciones, se proyecta sobre la pantalla una imagen de la abertura que es claramente reconocible a pesar de unas pequeñas franjas que se ven alrededor de su periferia (figura 10.5). Según el plano de observación va alejándose de Σ, la imagen de la abertura, si bien es aún fácilmente reconocible, va adquiriendo más estructura mientras que las franjas se vuelven más prominentes. Este fenómeno se denomina **difracción de Fresnel** o de **campo cercano.** Si se va alejando aún más el plano de observación, se producirá un cambio continuo en las franjas. A una gran distancia de Σ la distribución proyectada se habrá extendido considerablemente, teniendo muy poco o nada de parecido con la abertura real. De ahí en adelante, el movimiento de σ cambia esencialmente sólo el tamaño de la distribución y no su forma. Esta es la **difracción de Fraunhofer** o **de campo lejano**. Si en ese punto pudiéramos reducir suficientemente la longitud de onda de la radiación incidente, el patrón volvería al caso de Fresnel. Si λ se disminuyera aún más, de tal forma que se acercara a cero, las franjas desaparecerían mientras que la imagen adquiriría la forma limitadora de la abertura, como reza la óptica geométrica. Volviendo ahora a la disposición original, si se desplazara ahora la fuente puntual hacia Σ, las ondas esféricas incidirían en la abertura, dando lugar así a una distribución de Fresnel, incluso en un plano de observación distante.

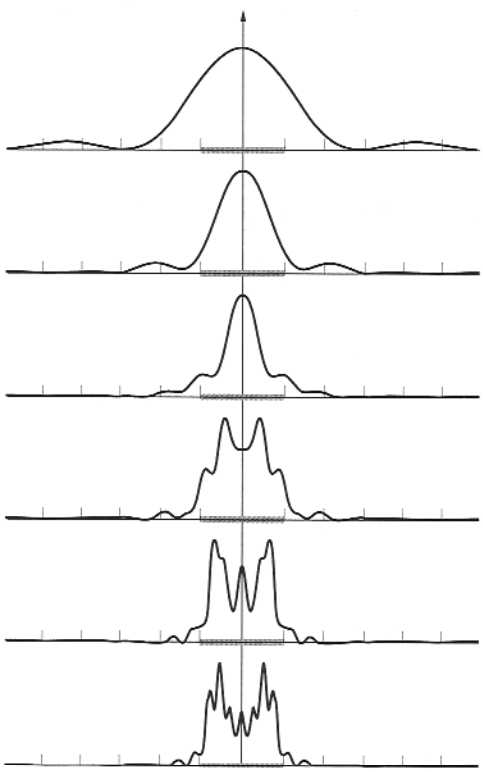


FIGURA 10.5 Una sucesión de distribuciones de difracción a distancias crecientes de una rendija única; Fresnel abajo (cercano) desplazándose hacia Fraunhofer arriba (lejos). Adaptado de *Fundamentals of Waves and Oscillations* de K. U. Ingard.

Consideremos una fuente puntual S y un punto de observación P, donde ambos estén muy lejos de Σ y donde no haya lentes (Problema 10.1). ***Siempre que la onda incidente y la emitida sean planas (difiriendo de ello en una pequeña fracción de longitud de onda) en la extensión de las aberturas difractoras (u obstáculos), se obtiene la difracción de Fraunhofer.*** Otra manera para alcanzar este resultado es darse cuenta de que la *fase* de cada contribución en P, es esencial para la determinación del campo resultante, debido a las diferencias en el recorrido atravesado. Asimismo, si los frentes de onda que inciden en la abertura y que se emiten de ella son planos, entonces estas diferencias de recorrido podrán describirse por una función lineal de las dos variables de la apertura. ***Esta linealidad de las variables de apertura constituye el criterio matemático definitivo de la difracción de Fraunhofer***. Por otro lado, cuando S o P o ambas están demasiado cerca de Σ como para poder considerar despreciable la curvatura de los frentes de onda de incidencia y de emisión, prevalece la difracción de Fresnel.

Cada punto en la apertura deberá visualizarse como una fuente de ondas de Huygens, cuya eficacia relativa debería preocuparnos un poco. Cuando S está cerca, comparada con el tamaño de la abertura, el orificio estará iluminado por un frente de onda esférico. La distancia desde S hasta cada punto en la apertura será diferente, y la amplitud del campo eléctrico incidente (que disminuye inversamente con la distancia) variará de punto a punto en la pantalla difractora. Distinto sería el caso para las ondas incidentes planas homogéneas. Lo mismo es válido para las ondas difractadas que de la apertura llegan hasta P. Aunque se emitan todas con la misma amplitud, si P está cerca, las ondas que convergen en él son esféricas y varían en amplitud a causa de las distancias diferentes desde distintas partes de la apertura hasta P. Idealmente, si P estuviera en el infinito (cualquiera que sea el sentido de esto), las ondas que llegarían ahí serían planas y no tendríamos porqué preocuparnos por las diferencias de la fuerza del campo. Esto también contribuye a la simplicidad del caso límite de Fraunhofer.

Por regla empírica, la difracción de Fraunhofer se producirá en una abertura (u obstáculo) con largo máximo a cuando

$$R > a^2/\lambda$$

donde R es la distancia más pequeña de las dos que van de S hasta Σ y de Σ hasta P (problema 10.1). Naturalmente, cuando $R = \infty$ la dimensión finita de la abertura es de poco interés. Asimismo, un aumento de λ desplaza claramente el fenómeno hacia el extremo de Fraunhofer.

Una realización práctica de la condición de Fraunhofer, cuando ambos S y P están efectivamente en el infinito, se logra recurriendo una disposición equivalente a la de la figura 10.6. La fuente puntual S se ubica en F_1, el foco principal de la lente L_1 y el plano de observación es el segundo plano focal de L_2. Según la terminología de la óptica geométrica, el plano de la fuente y σ son planos conjugados.

Las mismas ideas pueden extenderse a cualquier sistema de lentes que forme una imagen de una fuente u objeto extensos (Problema 10.5) [5]. En efecto, esa imagen sería una distribución de difracción de Fraunhofer. Es debido precisamente a estas importantes consideraciones prácticas, así como a su simplicidad inherente que examinaremos la difracción de Fraunhofer antes de la de Fresnel, aunque aquélla sea una caso especial de la última.

[5] Puede disponerse un láser He-Ne para que produzca distribuciones maravillosas sin necesidad de añadir lentes adicionales, lo cual requiere, sin embargo, mucho espacio.

10.1.3 Varios osciladores coherentes

Como un puente simple aunque lógico entre los estudios de la interferencia y de la difracción, consideremos la disposición de la figura 10.7. La ilustración muestra un conjunto lineal de N osciladores puntuales coherentes (o antenas emisoras), todos ellos idénticos incluso en su polarización. Por ahora, supongamos que los osciladores no tengan diferencia de fase intrínseca, es decir, cada uno tiene el mismo ángulo de fase inicial. Todos los rayos que se muestran son casi paralelos, encontrándose en un punto P muy distante. Si la extensión espacial del conjunto es comparativamente pequeña, las amplitudes de onda individuales que lleguen a P serán esencialmente iguales, habiendo recorrido casi las mismas distancias, esto es

$$E_0(r_1) = E_0(r_2) = \cdots = E_0(r_N) = E_0(r)$$

La suma de los trenes de onda esféricos interferentes produce un campo eléctrico en P proporcionado por la parte real de

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kr_1 - \omega t)} + E_0(r)e^{i(kr_2 - \omega t)} + \cdots + E_0(r)e^{i(kr_N - \omega t)} \tag{10.1}$$

Debe quedar claro, de la sección 9.1, que no debemos preocuparnos por la naturaleza vectorial del campo eléctrico para esta configuración. Por tanto ahora

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \times [1 + e^{ik(r_2 - r_1)} + e^{ik(r_3 - r_1)} + \cdots + e^{ik(r_N - r_1)}]$$

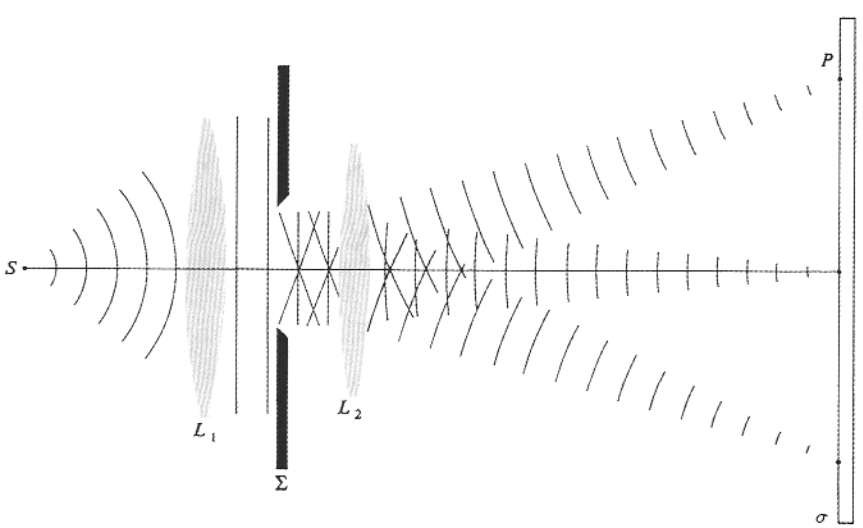


FIGURA 10.6 Difracción de Fraunhofer.

La diferencia de fase entre fuentes adyacentes se obtiene de la expresión $\delta = k_0\Lambda$, y puesto que $\Lambda = nd$ sen θ, en un medio con índice n, $\delta = kd$ sen θ. Utilizando la figura 10.7, se deduce que $\delta = k(r_2 - r_1)$, $2\delta = k(r_3 - r_1)$, etc. Entonces, el campo en P puede escribirse como

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}e^{ikr_1} \times [1 + (e^{i\delta}) + (e^{i\delta})^2 + (e^{i\delta})^3 + \cdots + (e^{i\delta})^{N-1}] \tag{10.2}$$

La serie geométrica entre paréntesis tiene el valor

$$(e^{i\delta N} - 1)/(e^{i\delta} - 1)$$

que puede ordenarse así:

$$\frac{e^{iN\delta/2}[e^{iN\delta/2} - e^{-iN\delta/2}]}{e^{i\delta/2}[e^{i\delta/2} - e^{-i\delta/2}]}$$

o de manera equivalente

$$e^{i(N-1)\delta/2}\left(\frac{\text{sen } N\delta/2}{\text{sen } \delta/2}\right)$$

Entonces el campo se transforma en

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{-i\omega t}\, e^{i[kr_1 + (N-1)\delta/2]}\left(\frac{\text{sen } N\delta/2}{\text{sen}\delta/2}\right) \tag{10.3}$$

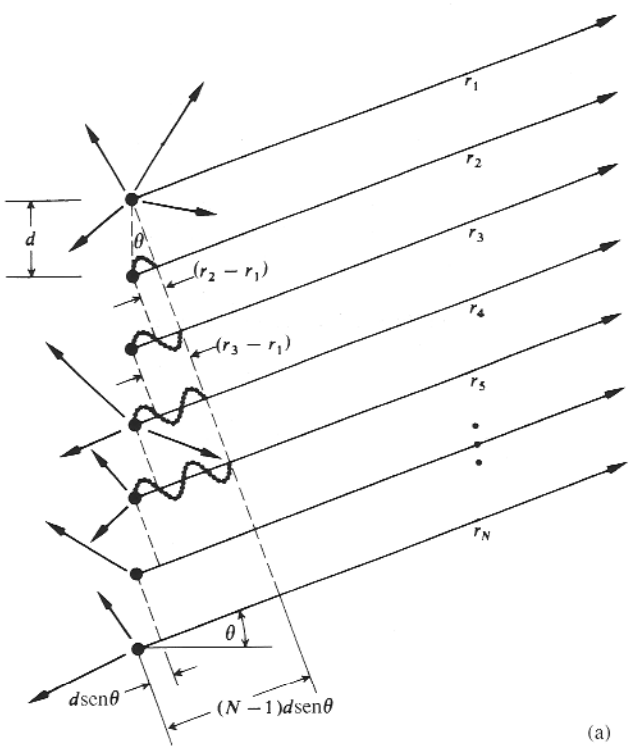
Obsérvese que si definimos R como la distancia desde el centro de la línea de los osciladores hasta el punto P, es decir

$$R = \tfrac{1}{2}(N-1)d \text{ sen } \theta + r_1$$

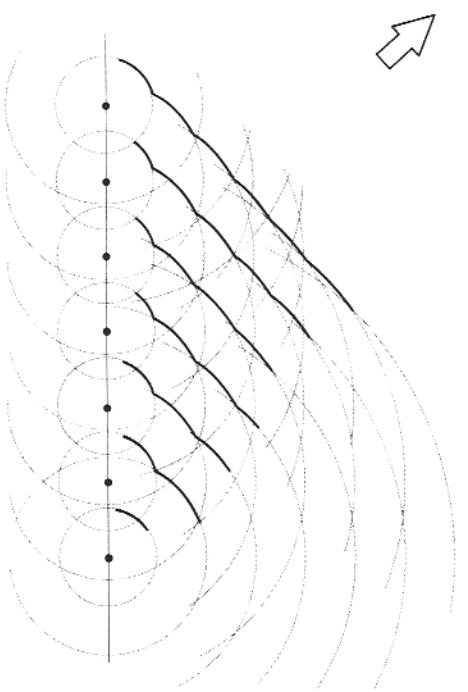
entonces la ecuación (10.3) se convierte en

$$\tilde{E} = E_0(r)e^{i(kR - \omega t)}\left(\frac{\text{sen } N\delta/2}{\text{sen } \delta/2}\right) \tag{10.4}$$

Finalmente, la distribución de densidad de flujo dentro de la distribución de difracción debida a N fuentes puntuales distan-



(a)



(b)

FIGURA 10.7 Disposición lineal de osciladores coherentes en fase. *(a)* Obsérvese que en el ángulo mostrado $\delta = \pi$ mientras que en $\theta = 0$, δ sería cero. *(b)* Una de las muchas series de frentes de onda emitidos por una línea de fuentes coherentes.

tes, idénticas y coherentes en una disposición lineal, es proporcional a $EE^*/2$ para E compleja o

$$I = I_0 \frac{\text{sen}^2(N\delta/2)}{\text{sen}^2(\delta/2)} \tag{10.5}$$

donde I_0 es la densidad de flujo que saliendo desde cualquier fuente puntual llegue a P (véase problema 10.2 para una deducción gráfica de la irradiancia). Para $N = 0$, $I = 0$, para $N = 1$, $I = I_0$ y para $N = 2$, $I = 4I_0 \cos^2(\delta/2)$ de acuerdo con la ecuación (9.17). La dependencia funcional de I con θ queda más clara en la forma

$$I = I_0 \frac{\text{sen}^2[N(kd/2)\,\text{sen}\,\theta]}{\text{sen}^2[(kd/2)\,\text{sen}\,\theta]} \tag{10.6}$$

El término $\text{sen}^2\,[N(kd/2)\,\text{sen}\,\theta]$ se somete a unas fluctuaciones rápidas, mientras que la función que la modula, $\{\text{sen}\,[(kd/2)\,\text{sen}\,\theta]\}^{-2}$, varía de manera relativamente lenta. La expresión combinada da lugar a una serie de picos principales agudos separados por picos pequeños complementarios. Los máximos principales se dan en direcciones θ_m, tales que $\delta = 2m\pi$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Dado que $\delta = kd\,\text{sen}\,\theta$

$$d\,\text{sen}\,\theta_m = m\lambda \tag{10.7}$$

Ya que $[\text{sen}^2 N\delta/2]/[\text{sen}^2\delta/2] = N^2$ para $\delta = 2m\pi$ (de la regla de L'Hospital), el valor de los máximos principales es $N^2 I_0$. Esto puede preverse ya que todos los osciladores están en fase en esa orientación. El sistema radiará un máximo en una dirección perpendicular a la disposición ($m = 0$, $\theta_0 = 0$ and π). Según θ aumenta, δ aumenta e I disminuye hasta cero en $N\delta/2 = \pi$, su primer mínimo. Obsérvese que si $d < \lambda$ en la ecuación (10.7), sólo existe $m = 0$ o máximo principal de orden cero. *Si estuviéramos mirando una fuente lineal idealizada de osciladores electrónicos separados por distancias atómicas, podríamos esperar sólo ese máximo principal en el campo luminoso.*

El conjunto de antenas de la figura 10.8 puede transmitir radiación en el haz estrecho o lóbulo que corresponde a un máximo principal (los platos parabólicos que se muestran reflejan hacia adelante mientras que la distribución de radiación ya no es simétrica alrededor del eje común). Supongamos que tenemos un sistema en el que podemos introducir un desplazamiento intrínseco de fase ε entre osciladores adyacentes. En ese caso

$$\delta = kd\,\text{sen}\,\theta + \varepsilon$$

Los varios máximos principales se darán en nuevos ángulos

$$d\,\text{sen}\,\theta_m = m\lambda - \varepsilon/k$$

Centrándose en el máximo central $m = 0$, puede variarse su orientación θ_0 a voluntad ajustando simplemente el valor de ε.

El principio de reversibilidad según el cual sin absorción el movimiento de ondas es reversible, lleva a la misma distribución de campo para una antena usada como transmisor o receptor. El conjunto, que funciona como radiotelescopio, puede por consiguiente «apuntarse» combinando la salida de las antenas individuales con un desplazamiento de fase oportuno, ε, introducido entre cada uno de ellos. Para un dado valor de ε, la salida del sistema corresponde a la señal que incide en el conjunto desde una dirección específica del espacio.

La figura 10.8 es una fotografía del primer radio interferómetro múltiple diseñado por W. N. Christiansen y construido en Australia en 1951. Consta de 32 antenas parabólicas, cada una de 2 m de diámetro, concebidas para funcionar en fase en la longitud de onda de la línea de 21 cm de emisión del hidrógeno. Las antenas están dispuestas a lo largo de una línea de base este-oeste con 7 m de separación entre cada una de ellas. Esta disposición particular utilizó la rotación de la Tierra como mecanismo de barrido [6].

Examinemos la figura 10.9 que representa una fuente lineal idealizada de osciladores electrónicos (es decir, las fuentes secun-

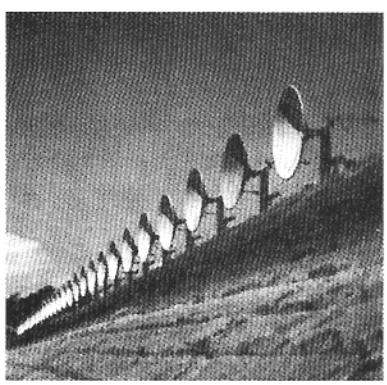


FIGURA 10.8 Radiotelescopio interferométrico en la Universidad de Sidney, Australia ($N = 32$, $\lambda = 21$ cm, $d = 7$ m, diámetro de 2 m, 700 pies de línea de base este-oeste). (Foto cedida por W. N. Christiansen.)

[6] Véase E. Brookner, «Phased-Array Radars», *Sci. Am.* (Febrero de 1985), pág. 94.

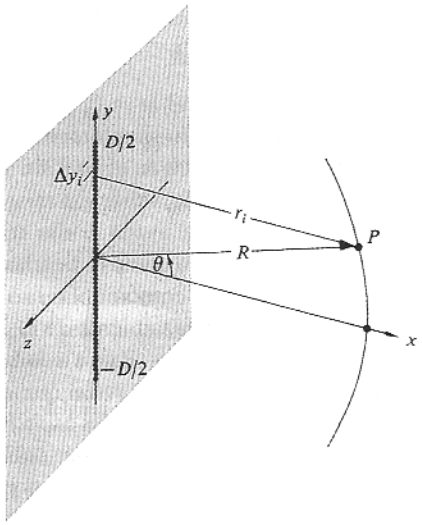


FIGURA 10.9 Fuente lineal coherente.

darias del principio de Huygens-Fresnel para una rendija larga cuyo ancho es mucho menor que λ, iluminada por ondas planas). Cada punto emite una ondita esférica que escribimos como

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r}\right) \operatorname{sen}(\omega t - kr)$$

indicando explícitamente la dependencia de la amplitud con el inverso de r. La cantidad $\mathcal{E}_0$ se denomina **eficacia de la fuente**. La situación presente es diferente de aquélla representada en la figura 10.7, porque ahora las fuentes son muy débiles, su número, N, es desmesuradamente grande mientras que la separación entre ellas es sumamente pequeña. Un segmento diminuto pero finito Δy_i del conjunto contendrá $\Delta y_i(N/D)$ fuentes, donde D es la longitud total del conjunto. Supongamos entonces que el conjunto esté dividido en M de tales segmentos (es decir, i va de 1 a M). La contribución del segmento i a la intensidad del campo eléctrico en P es, por consiguiente,

$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i}\right) \operatorname{sen}(\omega t - kr_i)\left(\frac{N\Delta y_i}{D}\right)$$

siempre que Δy_i sea tan pequeña que la diferencia relativa de fase de los osciladores en su interior sea despreciable (r_i = constante) y sus campos se sumen constructivamente. Podemos hacer de manera que el conjunto se transforme en una fuente lineal continua (coherente) dejando que N se acerque al infinito. Esta descripción, además de ser bastante realista en una escala macroscópica, permite el uso del cálculo infinitesimal para geometrías más complicadas. Ciertamente, al mismo tiempo que N tiende a infinito, las eficacias de fuente de los osciladores individuales tienen que disminuir hasta casi cero si la salida total debe conservarse finita. Podemos, por lo tanto, definir una constante $\mathcal{E}_L$ como la *eficacia de fuente por unidad de longitud* de la composición, es decir,

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D}\lim_{N\to\infty}(\mathcal{E}_0 N) \tag{10.8}$$

El campo neto en P de todos los segmentos M es

$$E = \sum_{i=1}^{M} \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \operatorname{sen}(\omega t - kr_i)\Delta y_i$$

Para una fuente lineal continua, Δy_i tiene que ser infinitesimal ($M \to \infty$), y la suma se transforma entonces en una integral definida

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\operatorname{sen}(\omega t - kr)}{r}\, dy \tag{10.9}$$

donde $r = r(y)$. La aproximación utilizada para evaluar la ecuación (10.9) debe depender de la posición de P con respecto al conjunto, marcando así la distinción entre la difracción de Fraunhofer y la de Fresnel. La fuente lineal óptica coherente no existe como entidad física, pero haremos buen uso de la misma como dispositivo matemático.

10.2 Difracción de Fraunhofer

10.2.1 La rendija única

Volvamos a la figura 10.9 donde ahora el punto de observación está muy distante de la fuente lineal coherente y $R >> D$. Bajo estas circunstancias $r(y)$ nunca se desvía sensiblemente de su valor medio R, de tal manera que la cantidad $(\mathcal{E}_L/R)$ en P es esencialmente constante para todos los elementos dy. De la ecuación (10.9) se deduce que el campo en P, debido al segmento diferencial dy de la fuente, es

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \operatorname{sen}(\omega t - kr)\, dy \tag{10.10}$$

donde $(\mathcal{E}_L/R)\, dy$ es la amplitud de la onda. Obsérvese que la fase es mucho más sensible a las variaciones en $r(y)$ que la

amplitud, así que tendremos que ser más cuidadosos al introducir aproximaciones en ella. Podemos desarrollar $r(y)$ exactamente de la misma manera que se hizo en el Problema (9.15), para que sea una función explícita de y, por lo tanto

$$r = R - y \operatorname{sen} \theta + (y^2/2R) \cos^2 \theta + \cdots \quad (10.11)$$

donde θ se mide desde el plano xz. El tercer término puede ignorarse siempre que su contribución a la fase sea despreciable aun cuando $y = \pm D/2$; es decir, $(\pi D^2/4\lambda R) \cos^2 \theta$ tiene que ser despreciable. Esto será cierto para todos los valores de θ cuando R sea oportunamente grande. Ahora tenemos la **condición de Fraunhofer** donde la distancia r es lineal en y; la distancia hasta el punto de observación y, por lo tanto la fase, pueden escribirse como función lineal de las variables de la abertura. Llevando a cabo una sustitución en la ecuación (10.10) e integrándola, llegamos a

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \operatorname{sen} [\omega t - k(R - y \operatorname{sen} \theta)] \, dy \quad (10.12)$$

y finalmente

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\operatorname{sen}[(kD/2) \operatorname{sen} \theta]}{(kD/2) \operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} (\omega t - kR) \quad (10.13)$$

Para simplificar las cosas, pongamos que

$$\beta \equiv (kD/2) \operatorname{sen} \theta \quad (10.14)$$

de tal modo que

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right) \operatorname{sen} (\omega t - kR) \quad (10.15)$$

La cantidad que puede medirse rápidamente es la irradiancia (olvidando las constantes) $I(\theta) = \langle E^2 \rangle_T$ o

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.16)$$

donde $\langle \operatorname{sen}^2 (\omega t - kR) \rangle_T = \frac{1}{2}$. Cuando $\theta = 0$, sen $\beta/\beta = 1$ y $I(\theta) = I(0)$, lo que corresponde al *máximo principal. La irradiancia procedente de una fuente lineal coherente idealizada en la aproximación de Fraunhofer* es entonces

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad (10.17)$$

o, usando la *función sinc* (véase Tabla I del Apéndice),

$$I(\theta) = I(0) \operatorname{sinc}^2 \beta$$

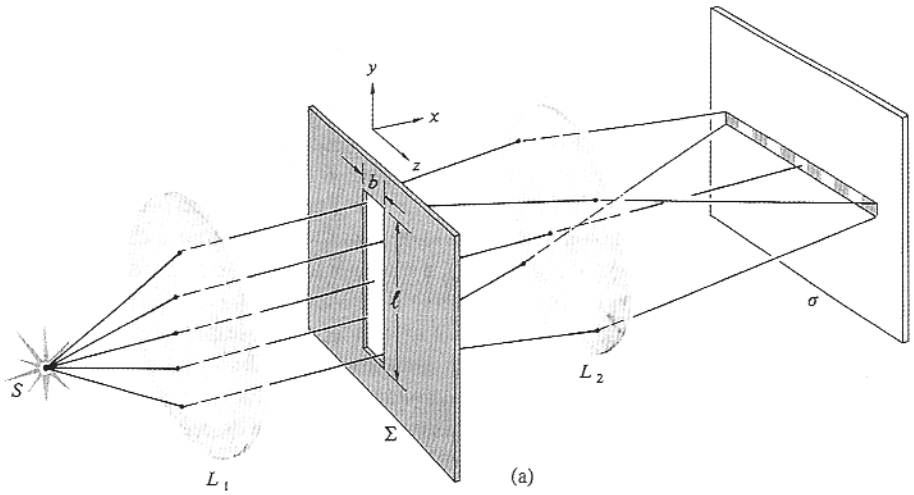
Hay simetría alrededor del eje y, siendo esta expresión válida para la medida de θ en cualquier plano que contenga a ese eje. Obsérvese que ya que $\beta = (\pi D/\lambda)$ sen θ, when $D >> \lambda$, la irradiancia disminuye muy rápido conforme θ se desvía de cero. Esto se debe al hecho de que β se hace muy grande para valores grandes de la longitud D (alrededor de 1 cm cuando se usa luz). La fase de la fuente lineal equivale, por medio de la ecuación (10.15), a la de una fuente puntual localizada en el centro del conjunto, a una distancia R de P. Finalmente, una fuente lineal coherente relativamente larga ($D >> \lambda$) puede visualizarse como un emisor puntual simple que radia fundamentalmente hacia delante, $\theta = 0$; dicho de otra forma, su emisión se asemeja a una onda circular en el plano xz. Por el contrario, obsérvese que si $\lambda >> D$, β es pequeña, sen $\beta \approx \beta$, e $I(\theta) \approx I(0)$. La irradiancia es entonces constante para todo θ y la fuente lineal se asemeja a una fuente puntual que emite ondas esféricas.

Podemos ahora pasar a considerar el problema de la difracción de Fraunhofer por una rendija o un agujero rectangular estrecho alargado (figura 10.10). El ancho de una abertura de este tipo puede ser de varios cientos de λ y su longitud medir unos pocos centímetros. El procedimiento usual a seguir en el análisis es dividir la rendija en una serie de tiras diferenciales largas (dz por ℓ), paralelas al eje y, como se muestra en la figura 10.11. Inmediatamente reconocemos, sin embargo, que cada una de tales tiras es una fuente lineal coherente larga, pudiendo por consiguiente reemplazarse por un punto emisor en el eje z. En efecto, cada uno de dichos emisores radia una onda circular en ($y = 0$ o) el plano xz. Esto es efectivamente lógico ya que la rendija es larga y los frentes de onda emergentes no están prácticamente obstruidos en la dirección de la rendija. Por consiguiente, habrá muy poca difracción paralela a los bordes de la rendija. El problema, como tal, se ha reducido al de encontrar el campo en el plano xz debido a un número infinito de fuentes puntuales que se extienden a través del ancho de la rendija a lo largo del eje z. Sólo necesitamos evaluar la integral de la contribución dE de cada elemento dz en la aproximación de Fraunhofer pero, una vez más, esto equivale a una fuente lineal coherente de tal manera que la solución completa para la rendija es, como hemos visto,

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\beta} \right)^2 \quad [10.17]$$

con tal que

$$\beta = (kb/2) \operatorname{sen} \theta \quad (10.18)$$



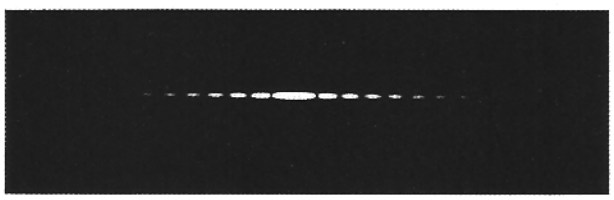

(b)

FIGURA 10.10 (*a*) Difracción de Fraunhofer producida por una sola rendija. (*b*) Distribución de difracción de una sola rendija vertical en iluminación con fuente puntual.

y θ se mida desde el plano xy (véase problema 10.3). Obsérvese que aquí la fuente lineal es corta, $D = b$, β no es grande y aunque la irradiancia disminuya rápidamente se observarán unos máximos subsidiarios de orden superior. Los extremos de $I(\theta)$ se dan para valores de β que hacen que $dI/d\beta$ sea cero, esto es

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0)\frac{2 \operatorname{sen} \beta(\beta \cos \beta - \operatorname{sen} \beta)}{\beta^3} = 0 \quad (10.19)$$

La irradiancia tiene mínimos iguales a cero cuando $\operatorname{sen} \beta = 0$, de donde

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \quad (10.20)$$

De la ecuación (10.19) se deduce también que cuando

$$\beta \cos \beta - \operatorname{sen} \beta = 0$$

$$\tan \beta = \beta \quad (10.21)$$

Las soluciones de esta ecuación trascendente pueden obtenerse gráficamente como se muestra en la figura 10.12. Los puntos de intersección de las curvas $f_1(\beta) = \tan \beta$ con la línea recta $f_2(\beta) = \beta$ son comunes a ambas, satisfaciendo así la ecuación (10.21). Solamente uno de tales extremos existe entre mínimos adyacentes [ecuación (10.20)] de tal manera que $I(\theta)$ debe tener máximos subsidiarios de estos valores de β (es decir, $\pm 1{,}430\,3\pi$, $\pm 2{,}459\,0\pi$, $\pm 3{,}470\,7\pi, \ldots$).

Hay una manera especialmente sencilla de entender lo que está pasando aquí, ayudándose con la figura 10.13. Supongamos que todos los puntos de la abertura emitan rayos en cualquier dirección en el plano xz. La luz que sigue propagándose directamente hacia adelante en la figura 10.13*a* es el rayo no difractado, todos los rayos llegan a la pantalla de visualización en fase, formando un punto central luminoso. Si la pantalla no está verdaderamente en el infinito, los rayos que convergen hacia ella no son exactamente paralelos pero si ella está en el infinito o mejor aún, colocando una lente, los rayos equivalen a los de la figura. La figura 10.13*b* muestra el grupo específico de rayos que salen con un ángulo θ_1 donde la diferencia de longitud de camino entre los rayos desde la parte superior a la inferior, $b \operatorname{sen} \theta_1$, se hace equivaler a una longitud de onda. Un rayo desde la mitad de la rendija se retrasará en $\frac{1}{2}\lambda$ detrás

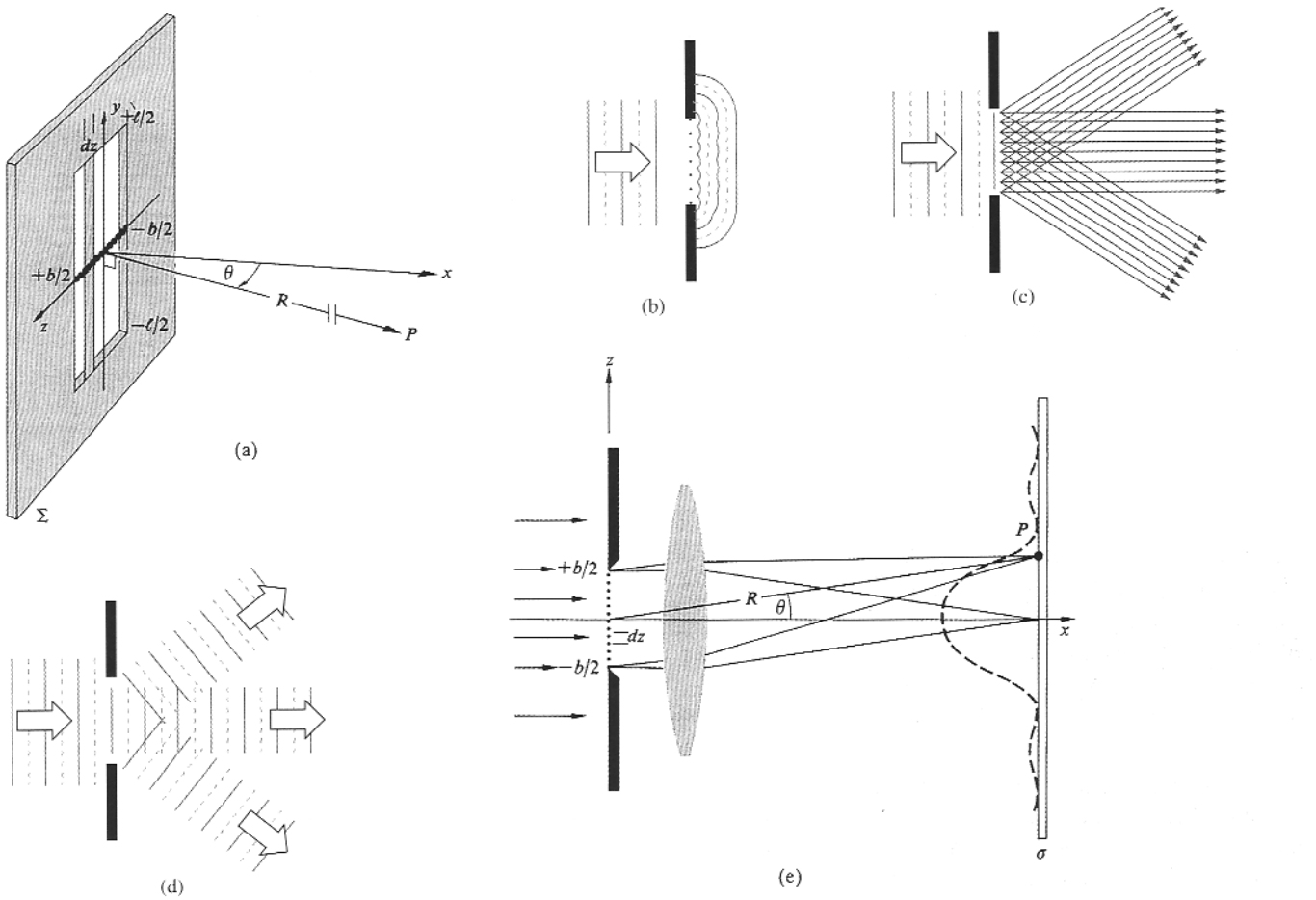


FIGURA 10.11 *(a)* El punto P en σ se halla a una distancia infinita de Σ. *(b)* Trenes de onda de Huygens emitidos en la apertura. *(c)* Representación equivalente en términos de rayos. Cada punto emite rayos en todas las direcciones. Los rayos paralelos en distintas direcciones son visibles. *(d)* Estos haces de rayos corresponden a ondas planas que pueden considerarse como componentes de Fourier tridimensionales. *(e)* Una rendija única iluminada por ondas planas monocromáticas.

de un rayo desde la parte superior, anulándolo totalmente. De manera parecida, un rayo procedente de justo debajo del centro anulará un rayo procedente de justo debajo de la parte superior, etc.; en toda la abertura se anularán pares de rayos, dando como resultado un mínimo. La irradiancia ha pasado de su máximo central al primer cero en ambos lados para sen $\theta_1 = \pm\lambda/b$.

Según el ángulo vaya creciendo más, unas pequeñas fracciones de los rayos interferirán nueva y constructivamente mientras que la irradiancia subirá para formar un pico subsidiario. Un aumento suplementario del ángulo dará lugar a otro mínimo, como se muestra en la figura 10.13*c*, cuando b sen $\theta_2 = 2\lambda$. Ahora, supongamos que la abertura esté dividida en cuartos. Rayo tras rayo, el cuarto superior anulará el que está debajo, y el sucesivo, el tercero, anulará al cuarto. Los pares de rayos en los mismos puntos en segmentos adyacentes están desfasados en $\lambda/2$ e interferirán de manera destructiva. Entonces, por lo general, la irradiancia tendrá valor cero cuando

$$b \text{ sen } \theta_m = m\lambda$$

donde $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, que equivale a la ecuación (10.20), puesto que $\beta = m\pi = (kb/2) \text{ sen } \theta_m$.

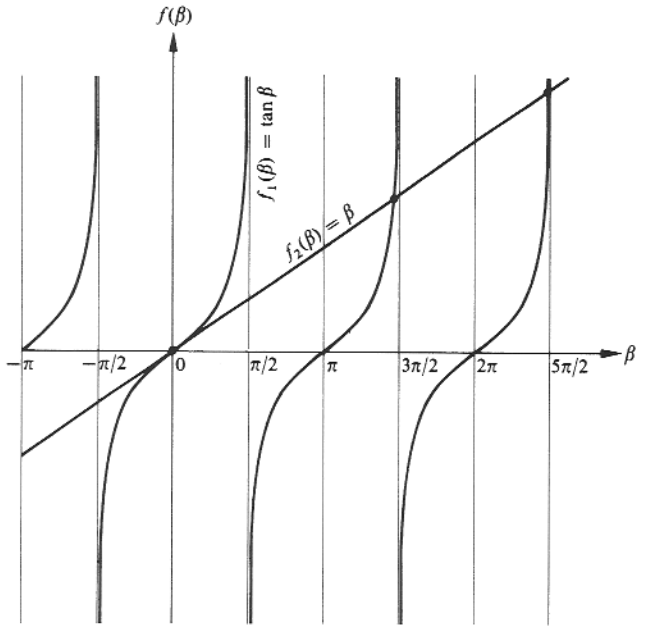


FIGURA 10.12 Los puntos de intersección de las 2 curvas son las soluciones de la ecuación (10.21).

Llegados a este punto, debemos hacer una advertencia: uno de los fallos del principio de Huygens-Fresnel es que no tiene en debida consideración las variaciones de la amplitud con el ángulo sobre la superficie de cada onda secundaria. Volveremos de nuevo a esto cuando consideremos el *factor de oblicuidad* en la difracción de Fresnel donde el efecto es significativo. En la difracción de Fraunhofer la distancia desde la abertura hasta el plano de observación es tan grande que no hace falta que nos preocupemos por ello, siempre que θ permanezca pequeña.

La figura 10.14 es un gráfico de la densidad de flujo expresada por la ecuación (10.17). Visualicemos algún punto en la curva, por ejemplo, el tercer máximo subsidiario en $\beta = 3.4707\pi$; como $\beta = (\pi b/\lambda)$ sen θ, al aumentar el ancho b de la rendija debe disminuirse θ, si se desea que β permanezca constante. Bajo estas condiciones, la distribución se encoge hacia el máximo principal, como lo haría si también λ disminuyera. Si la fuente emite luz blanca, los máximos de orden superior mostrarán una sucesión de colores que van esfumándose hacia el rojo al aumentar θ. Cada componente coloreada de la luz tiene sus mínimos y sus máximos subsidiarios en posiciones angulares características de esa longitud de onda (problema 10.6). En efecto, solamente en la región alre-

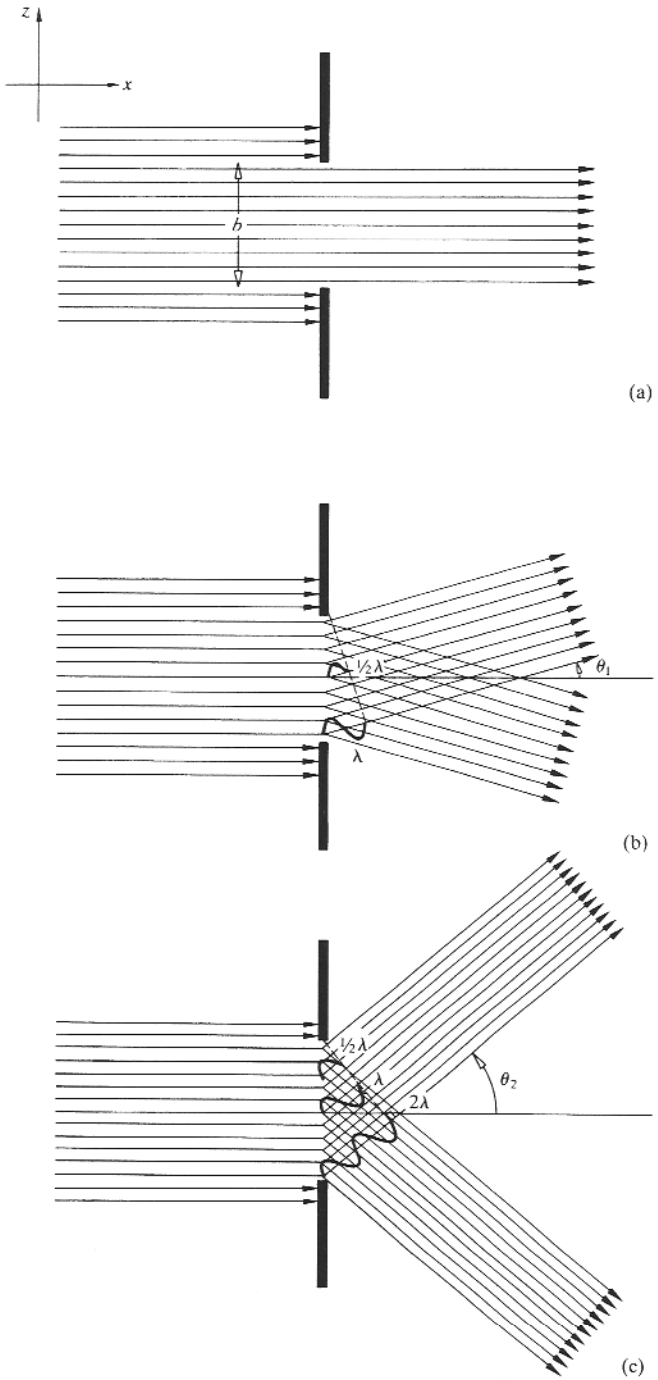


FIGURA 10.13 Difracción de la luz en varias direcciones. Aquí la abertura es una rendija única, como en la figura 10.11.

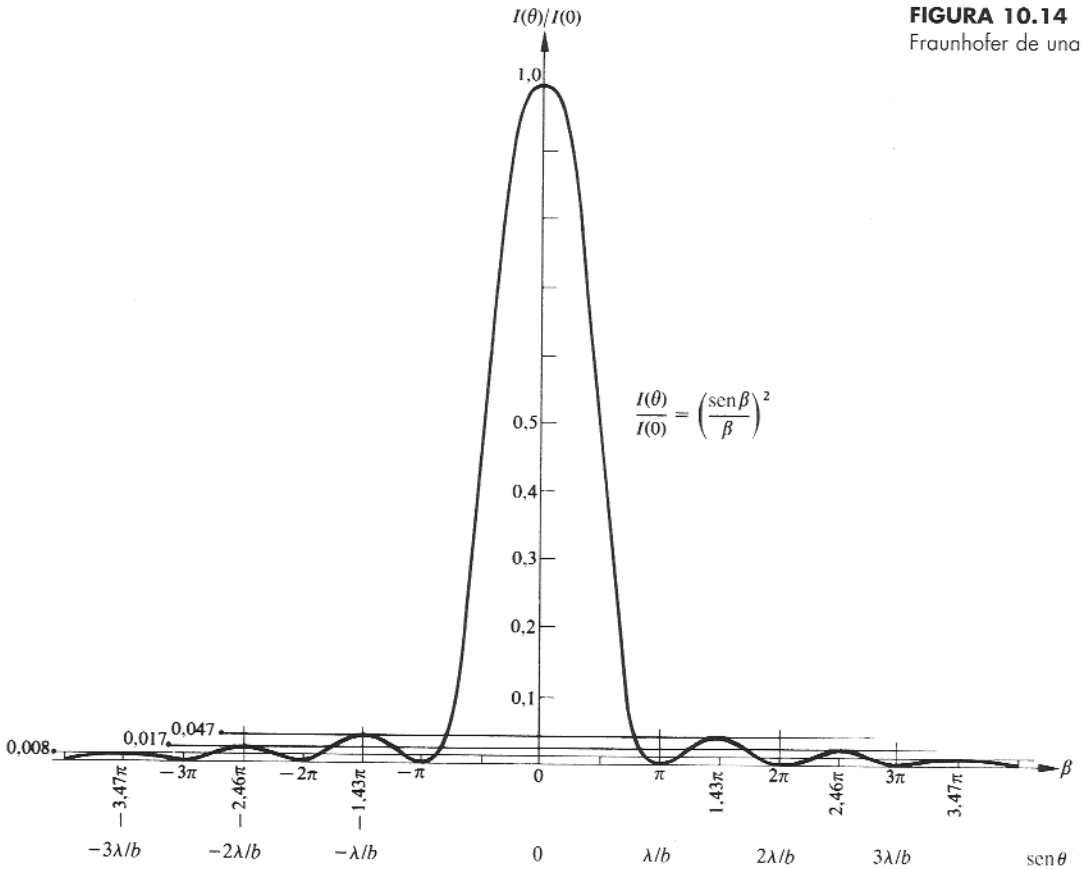


FIGURA 10.14 Distribución de difracción de Fraunhofer de una sola rendija.

dedor de $\theta = 0$ todos los colores constitutivos se superpondrán para dar luz blanca.

La fuente puntual S en la figura 10.10 formaría su imagen en el centro de la distribución si se quitara la pantalla difractora Σ. Bajo este tipo de iluminación, la distribución producida con la rendija en su lugar es una serie de rayas en el plano yz de la pantalla σ, muy semejante a una imagen ensanchada de S (figura 10.10*b*). Una fuente lineal incoherente (en lugar de S) puesta paralelamente a la rendija, en el plano focal del colimador L_1, ensanchará la distribución a una serie de bandas. Cualquier punto en la fuente lineal genera una figura de difracción independiente que está desplazada, con respecto a las otras, a lo largo de la dirección y. Sin pantalla difractora, la imagen de la fuente lineal sería una línea paralela a la rendija original. Con la pantalla en su lugar, la línea se extiende como lo hizo el punto imagen de S (figura 10.15). Recordemos que es la dimensión pequeña de la rendija la que produce la extensión.

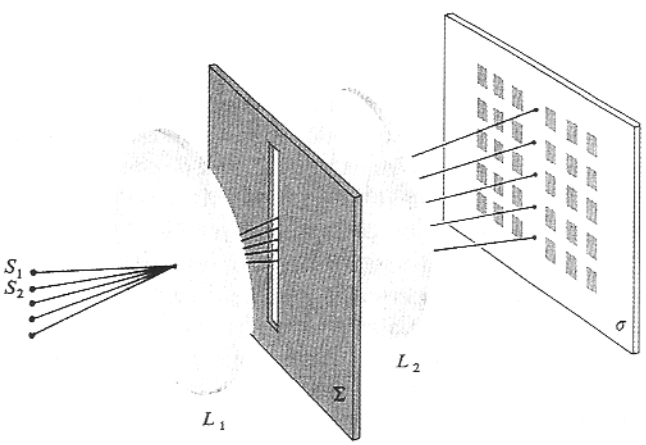


FIGURA 10.15 Distribución de difracción de rendija única con fuente lineal. Véase primero la fotografía 10.18.

El patrón de una sola rendija se observa muy fácilmente sin la ayuda de equipo especial. Cualquier número de fuentes servirá (por ejemplo, una luz distante en la calle por la noche, una pequeña lámpara incandescente, la luz del sol que fluye a través de un espacio diminuto en la persiana de una ventana); casi todo lo que se parezca a una fuente lineal o puntual podrá servir. Probablemente, la mejor fuente para nuestros propósitos es una bombilla normal y corriente, transparente, *de filamento recto* (del tipo en el que el filamento es vertical y con unas tres pulgadas de largo). Podemos usar la imaginación para crear toda clase de disposición de rendijas únicas (por ejemplo, un peine o un tenedor volteado para disminuir el espacio proyectado entre los dientes o un rasguño en una capa de tinta china en un portaobjetos de microscopio). Con un calibre barato se puede formar una rendija variable de buena calidad. Se sostiene el calibre cerca del ojo, con unas milésimas de ancho, paralelo al filamento de la lámpara, enfocando el ojo más allá de la rendija al infinito de tal forma que su cristalino sirva como L_2.

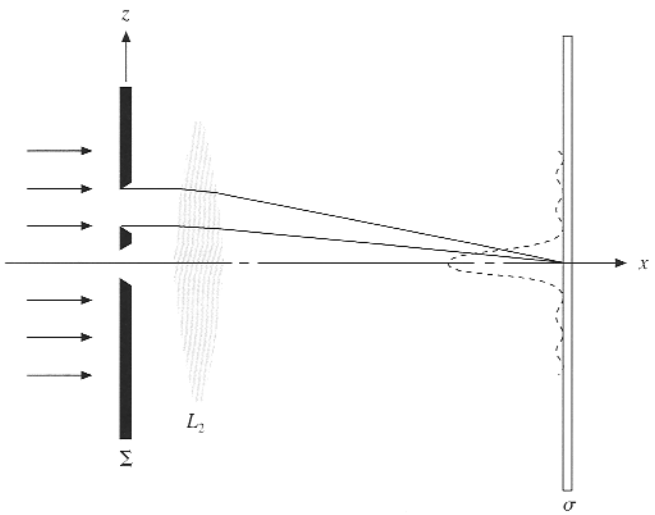


FIGURA 10.16 Disposición de doble rendija.

10.2.2 La doble rendija

Al principio podría parecer de la figura 10.11 que la ubicación del máximo principal está siempre en línea con el centro de la abertura difractora; esto, sin embargo, por lo general no es cierto. La figura de difracción está en realidad centrada alrededor del eje de la lente y tiene exactamente la misma forma y ubicación, independientemente de la posición de la rendija, siempre que no se cambie su orientación y las aproximaciones sean válidas (figura 10.16). Todas las ondas que viajan paralelamente al eje de la lente convergen en el segundo punto focal de L_2; esta es, por lo tanto, la imagen de S y el centro de la figura de difracción. Supongamos ahora que tenemos dos rendijas largas de ancho b y una separación a de centro a centro (figura 10.17). Cada abertura, por sí misma, generaría la misma figura de difracción de rendija única en la pantalla de visualización σ. En cualquier punto en σ, las contribuciones de las dos rendijas se superponen y, si bien la amplitud de cada cual tiene que ser esencialmente igual, sus fases pueden diferir significativamente. Como la misma onda primaria excita las fuentes secundarias en cada rendija, los trenes de onda resultantes serán coherentes y por lo tanto deberá haber interferencia. Si la onda plana primaria es incidente en Σ con un ángulo θ_i (véase problema 10.3), habrá una diferencia de fase relativa constante entre las fuentes secundarias. Con incidencia normal, todos los trenes de onda se emiten en fase. La franja de interferencia en un punto particular de observación está determinada por las diferencias en las longitudes de camino óptico atravesados por los trenes de onda que se superponen desde las dos rendijas. Como veremos, la distribución de densidad de flujo (figura 10.18) es el resultado de un sistema de interferencia de doble rendija que varía rápidamente, modulado por una distribución de difracción de rendija única.

Para obtener una expresión para la perturbación óptica en un punto en σ, tenemos solamente que reformular levemente el análisis de rendija única. Cada una de las dos aberturas se divide en tiras diferenciales (dz por ℓ) que, a su vez, se comportan como un número infinito de fuentes puntuales alineadas a lo largo del eje z. La contribución total al campo eléctrico, en la aproximación de Fraunhofer [ecuación (10.12)], es entonces

$$E = C\int_{-b/2}^{b/2} F(z)\,dz + C\int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\,dz \qquad (10.22)$$

donde $F(z) = \text{sen}\,[\omega t - k(R - z\,\text{sen}\,\theta)]$. El factor de amplitud constante C es la potencia original secundaria por unidad de longitud a lo largo del eje z (suponiendo que sea independiente de z en cada abertura) dividida por R que se mide desde su origen hasta P y que se considera como constante. Nos ocuparemos solamente de las densidades de flujo relativas en σ, así que el valor real de C por ahora no resulta ser muy interesante

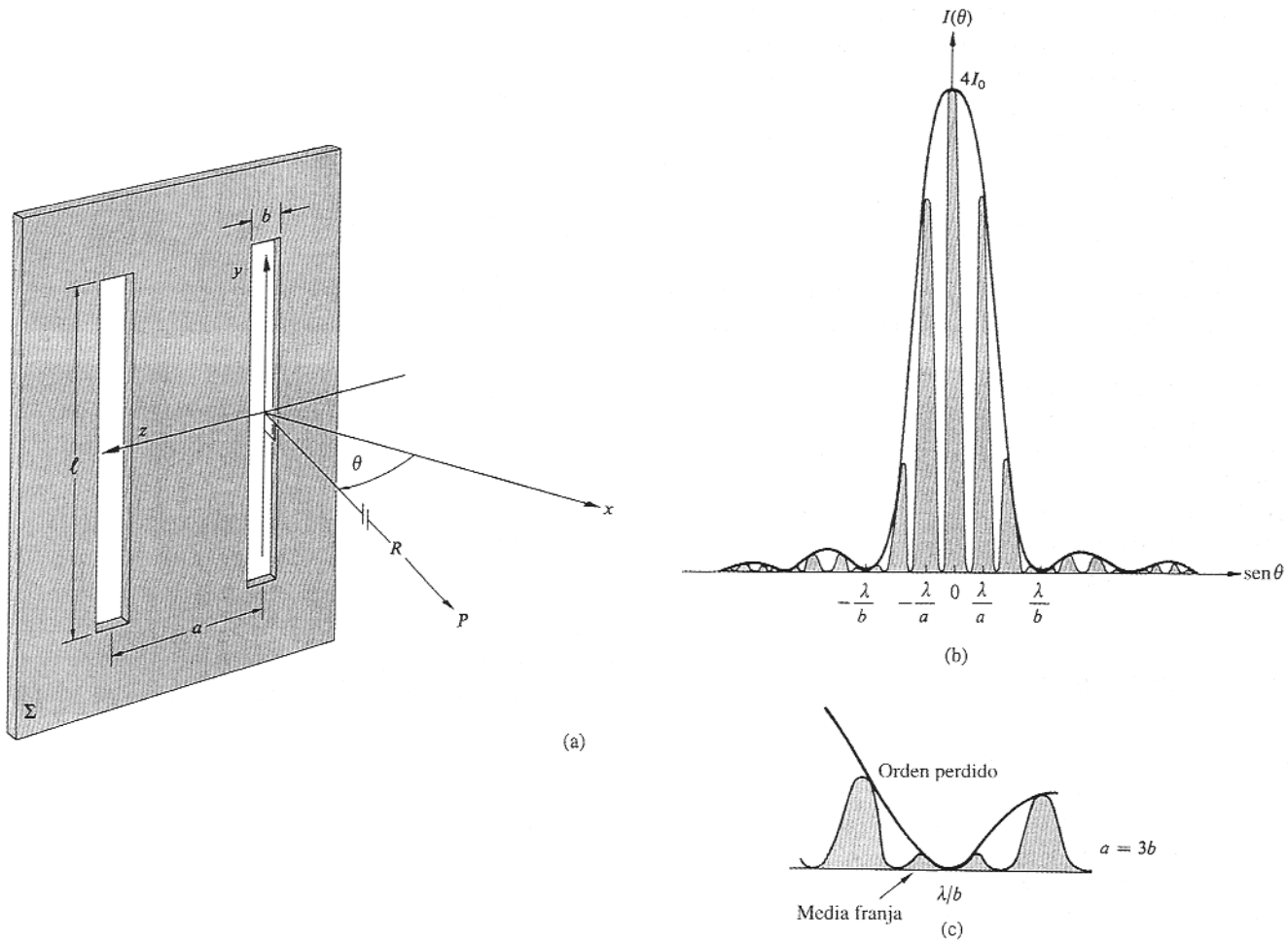


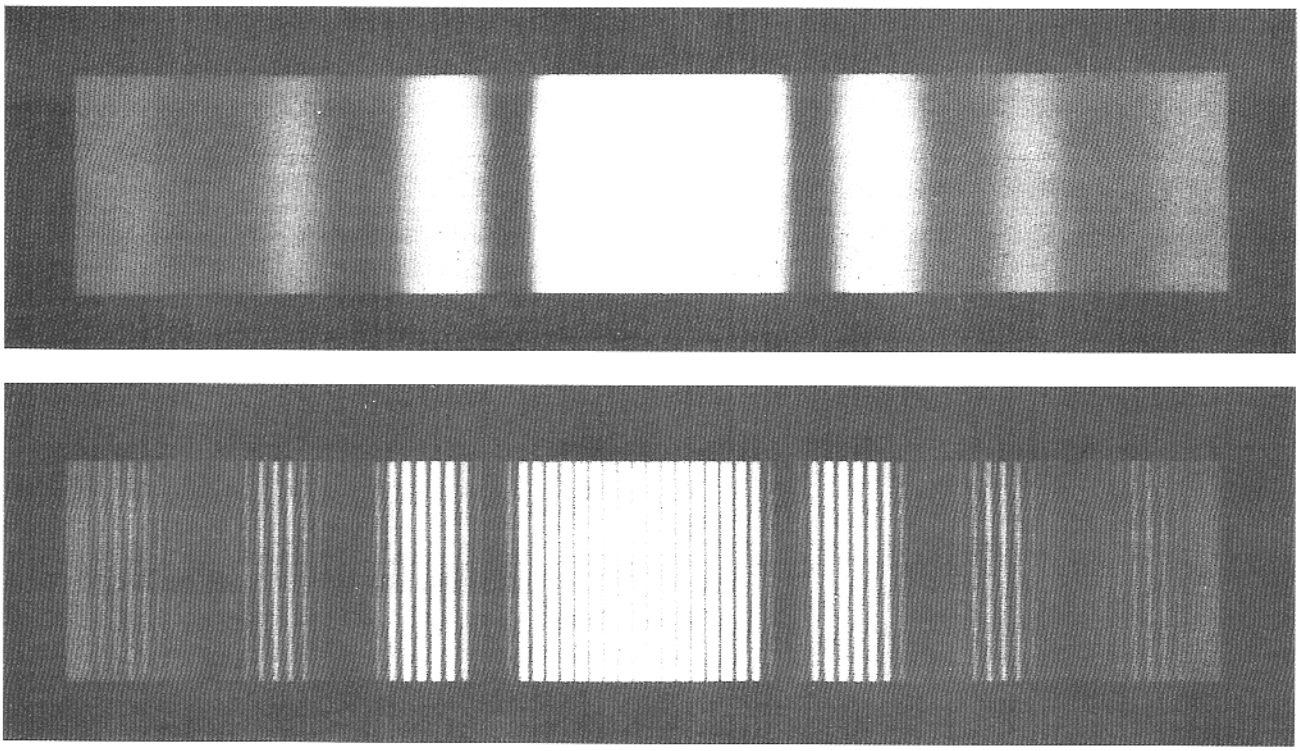
FIGURA 10.17 *(a)* Geometría de doble rendija. El punto P en σ se halla, básicamente, a una distancia infinita. *(b)* Distribución de doble rendija ($a = 3b$).

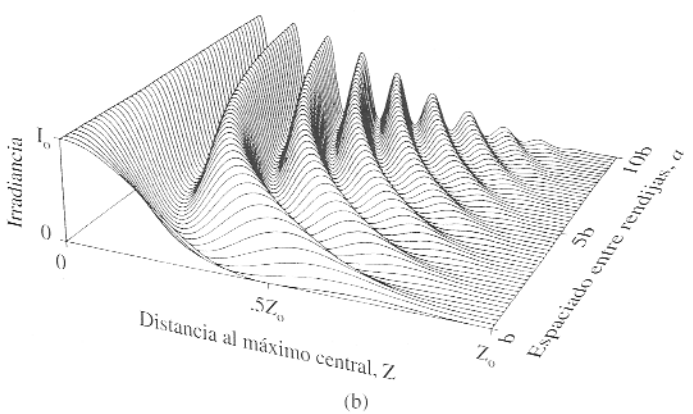
para nosotros. La integración de la ecuación (10.22) proporciona

$$E = bC\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}\right)[\operatorname{sen}(\omega t - kR) + \operatorname{sen}(\omega t - kR + 2\alpha)] \tag{10.23}$$

con $\alpha \equiv (ka/2)\operatorname{sen}\theta$ y, como antes, $\beta \equiv (kb/2)\operatorname{sen}\theta$. Esto es precisamente la suma de los dos campos en P, uno de cada rendija, según la ecuación (10.15). La distancia desde la primera rendija hasta P es R, con una contribución a la fase de $-kR$. La distancia desde la segunda rendija hasta P es $(R - a\operatorname{sen}\theta)$ o $(R - 2\alpha/k)$ que proporciona como resultado un término de fase igual a $(-kR + 2\alpha)$, como en la segunda función seno. La cantidad 2β es la diferencia de fase ($k\Lambda$), entre dos rayos casi paralelos, que llegan a un punto P en σ, desde los bordes de una de las dos rendijas. La cantidad 2α es la diferencia de fase entre las dos ondas que llegan a P, habiéndose originado una en un punto cualquiera en la primera rendija y la otra viniendo del punto correspondiente en la segunda rendija. Simplificando la ecuación (10.23) un poco más, queda

$$E = 2bC\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}\right)\cos\alpha\operatorname{sen}(\omega t - kR + \alpha)$$





(b)

FIGURA 10.18 Distribuciones de Fraunhofer para una rendija única y otra doble. *(a)* Fotografías tomadas con luz monocromática. El rayado cruzado débil aparece perfectamente en el proceso de revelado. (Fotos cedidas por de M. Cagnet, M. Francon y J. C.Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen,* Berlín-Heidelberg-Nueva York: Springer, 1962.) *(b)* Cuando el espaciado de la rendija es igual a *b*, las dos rendijas se fusionan para formar una sola (con ancho 2*b*) apareciendo así la distribución de rendija única —es la primera curva cerca de Ud. La curva más distante corresponde a las dos rendijas separadas por $a = 10b$. Obsérvese que todos los primeros mínimos de difracción de las distribuciones de dos rendijas están a una distancia Z_0 desde el máximo central. Obsérvese cómo las curvas se van asemejando cada vez más a la figura 10.17*b* a medida que *b* se vuelve más pequeño con respecto a *a*. (Reimpreso de «Graphical Representations of Fraunhofer Interference and Diffraction», *Am. J. Phys.* **62**, 6 (1994) con la autorización de A. B. Bartlett, University of Colorado y B. Mechtly, Northeast Missouri State University y la American Association of Physics Teachers.)

que cuando se eleva al cuadrado y se promedia sobre un intervalo de tiempo relativamente largo es la irradiancia

$$I(\theta) = 4I_0\left(\frac{\text{sen}^2\beta}{\beta^2}\right)\cos^2\alpha \qquad (10.24)$$

En la dirección $\theta = 0$ (es decir, cuando $\beta = \alpha = 0$), I_0 es la contribución a la densidad de flujo de cada rendija e $I(0) = 4I_0$ es la densidad de flujo total. El factor cuatro se debe al hecho de que la amplitud del campo eléctrico es el doble de lo que sería en ese punto con una rendija cubierta.

Si en la ecuación (10.24) b se hace sumamente pequeña ($kb << 1$), entonces $(\text{sen}\,\beta)/\beta \approx 1$, y la ecuación se reduce a la expresión de la densidad de flujo para un par de fuentes lineales largas, es decir, el experimento de Young, ecuación (9.17). Si, por otro lado, $a = 0$, las dos rendijas se funden en una, $\alpha = 0$, y la ecuación (10.24) queda $I(0) = 4I_0(\text{sen}^2\beta)/\beta^2$. Esto equivale a la ecuación (10.17) para la difracción de rendija única donde la potencia original se ha duplicado. Podríamos entonces visualizar la expresión total como si fuera generada por un término de interferencia $\cos^2\alpha$ modulado por un término de difracción $(\text{sen}^2\beta)/\beta^2$. Si las rendijas son finitas en ancho pero muy estrechas, la distribución de difracción de cualquiera de las rendijas será uniforme sobre una ancha región central y dentro de esa región aparecerán bandas que se asemejan a las franjas idealizadas de Young. En posiciones angulares (valores de θ) donde

$$\beta = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

los efectos de difracción son tales que no llega luz a σ, y claramente no se dispone de ella para la interferencia. En puntos en donde

$$\alpha = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$$

las distintas contribuciones al campo eléctrico estarán completamente fuera de fase y se anularán, independientemente de la cantidad real de luz disponible en el proceso de difracción.

En la figura 10.17*b* se ilustra la distribución de la irradiancia para la distribución de Fraunhofer de doble rendija. Obsérvese que es una combinación de las figuras 9.9 y 10.14. La curva es para el caso específico en el que $a = 3b$ (es decir, $\alpha = 3\beta$). Puede hacerse una idea aproximada de cómo será el patrón ya que si $a = mb$, donde m es cualquier número, habrá $2m$ franjas brillantes (contando también las «franjas fraccionarias») [7] dentro del pico central de difracción (problema 10.10). Puede ocurrir que un máximo de interferencia y un mínimo de difracción (cero) correspondan al mismo valor θ. En ese caso no hay luz disponible en esa posición precisa para participar en el proceso de interferencia y decimos que el máximo suprimido es un *orden perdido*.

La distribución de doble rendija también se puede observar muy fácilmente y vale la pena hacer un esfuerzo para verlo. Una bombilla tubular de filamento es de nuevo la mejor fuente lineal. Para obtener las rendijas, cúbrase un portaobjetos de microscopio con tinta china o si hubiera un poco de suspensión coloidal de grafito en alcohol sería aún mejor (es más opaca). Rayemos la tinta seca con una hoja de afeitar para conseguir un par de rendijas y póngamonos a unos 10 pies de la fuente. Sostengamos las rendijas paralelas al filamento y cerca del ojo el cual, cuando se enfoque al infinito, servirá como la lente que se necesita. Interpongamos celofán rojo o azul y observemos el cambio en el ancho de las franjas. Vean lo que sucede cuando se cubre una y después ambas rendijas con un portaobjetos de microscopio. Muevan lentamente las rendijas en dirección z; entonces, manteniéndolas estacionarias, muévase el ojo en la dirección z. Compruébese que la posición del centro del patrón está efectivamente determinada por la lente y no por la abertura.

10.2.3 Difracción por muchas rendijas

El procedimiento para obtener la función de irradiancia para una onda monocromática difractada por muchas rendijas es esencialmente el mismo que se utilizó al analizar dos rendijas. De nuevo aquí los límites de integración deben alterarse oportunamente. Consideremos el caso de N rendijas estrechas, largas y paralelas, cada una de ancho b y una separación a de centro a centro, como se ilustra en la figura 10.19. Con el origen del sistema coordenado una vez más en el centro de la primera rendija, la perturbación óptica total en un punto en la pantalla está proporcionada por

$$E = C\int_{-b/2}^{b/2} F(z)\,dz + C\int_{a-b/2}^{a+b/2} F(z)\,dz + C\int_{2a-b/2}^{2a+b/2} F(z)\,dz + \cdots + C\int_{(N-1)a-b/2}^{(N-1)a+b/2} F(z)\,dz \qquad (10.25)$$

[7] Obsérvese que m no necesita ser un número entero. Además, si m es un número entero, habrá «medias franjas», como se muestra en la figura 10.17*c*.

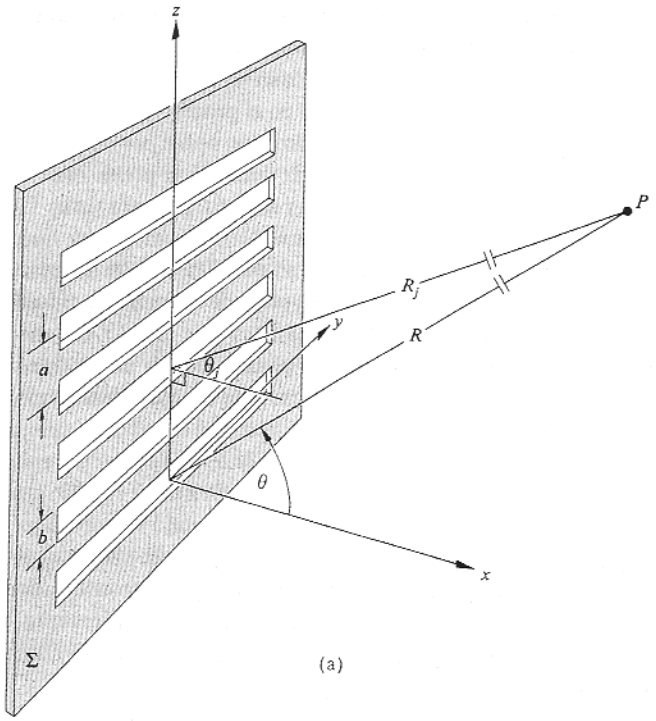


FIGURA 10.19a Geometría de rendijas múltiples. El punto P en σ se halla nuevamente a una distancia infinita de Σ.

donde, como antes, $F(z) = \text{sen}\,[\omega t - k(R - z\,\text{sen}\,\theta)]$. Esto se aplica a la condición de Fraunhofer, de tal manera que la configuración de la abertura debe ser tal que todas las rendijas estén cerca del origen mientras que la aproximación [ecuación (10.11)]

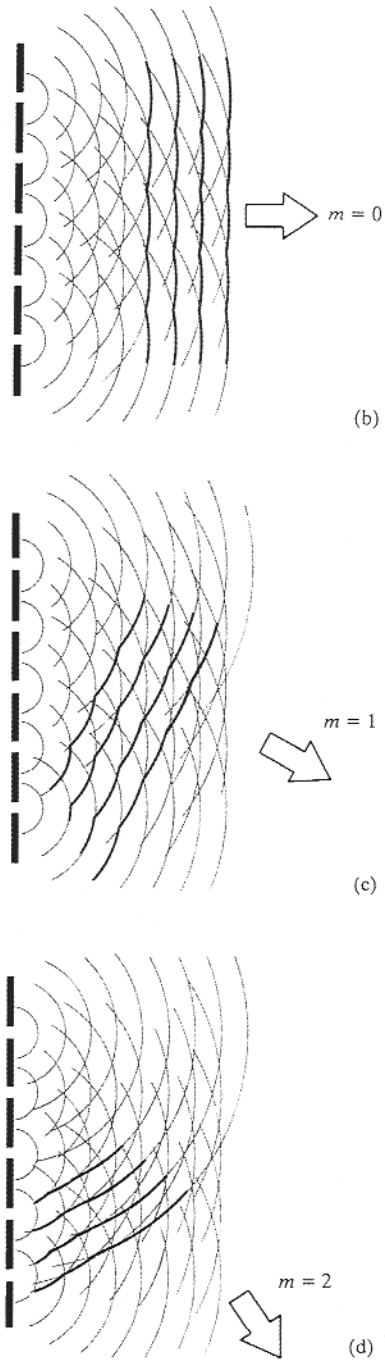
$$r = R - z\,\text{sen}\,\theta \tag{10.26}$$

se aplica a todo el conjunto. La contribución de la rendija j-ésima (donde la primera está numerada como cero), que se obtiene evaluando sólo esa integral en la ecuación (10.25), será entonces

$$E_j = \frac{C}{k\,\text{sen}\,\theta}[\text{sen}\,(\omega t - kR)\,\text{sen}\,(kz\,\text{sen}\,\theta) - \cos\,(\omega t - kR)\cos\,(kz\,\text{sen}\theta)]_{ja-b/2}^{ja+b/2}$$

con tal que $\theta_j \approx \theta$. Después de alguna operación, esto se convierte en

$$E_j = bC\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)\text{sen}\,(\omega t - kR + 2\alpha j) \tag{10.27}$$



recordando que $\beta = (kb/2)\,\text{sen}\,\theta$ y $\alpha = (ka/2)\,\text{sen}\,\theta$. Obsérvese que esto equivale a la expresión para una fuente lineal

[ecuación (10.15)] y, por supuesto, para una rendija única donde, según la ecuación (10.26) y la figura 10.19, $R_j = R - ja$ sen θ, de manera que $-kR + 2\alpha j = -kR_j$. La perturbación óptica total proporcionada por la ecuación (10.25) es simplemente la suma de las contribuciones de cada una de las rendijas, es decir,

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} E_j$$

o

$$E = \sum_{j=0}^{N-1} bC\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right) \text{sen}\,(\omega t - kR + 2\alpha j) \quad (10.28)$$

Esto, a su vez, puede escribirse como la parte imaginaria de una exponencial compleja:

$$E = \text{Im}\left[bC\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right) e^{i(\omega t - kR)} \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i2\alpha})^j\right] \quad (10.29)$$

Pero, ya hemos evaluado esta misma serie geométrica en el proceso de simplificación de la ecuación (10.2). La ecuación (10.29) por lo tanto se reduce a la forma

$$E = bC\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)\left(\frac{\text{sen}\ N\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right) \text{sen}[\omega t - kR + (N-1)\alpha] \quad (10.30)$$

La distancia del centro del conjunto hasta el punto P es igual a $[R - (N-1)(a/2)$ sen $\theta]$ y, por consiguiente, la fase de E en P corresponde a la de una onda emitida desde el punto medio de la fuente. La función de distribución de densidad de flujo es

$$I(\theta) = I_0\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\text{sen}\ N\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2 \quad (10.31)$$

Obsérvese que I_0 es la densidad de flujo en la dirección $\theta = 0$ emitida por cualquiera de las rendijas y que $I(0) = N^2 I_0$. Dicho de otro modo, las ondas que llegan a P en la dirección hacia adelante están todas en fase y sus campos se suman constructivamente. Cada rendija por sí misma engendraría precisamente la misma distribución de densidad de flujo. Superpuestas, las distintas contribuciones dan como resultado un sistema de interferencia de ondas múltiples, modulado por la envolvente de difracción de rendija única. Si el ancho de cada abertura se disminuyera hasta cero, la ecuación (10.31) se convertiría en la ecuación de densidad de flujo [ecuación (10.6)] para una disposición coherente y linear de osciladores. Como ocurría en ese análisis de la [ecuación (10.17)], los **máximos principales** se dan cuando (sen $N\alpha$/sen α) = N, es decir, cuando

$$\alpha = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

o, de manera equivalente, dado que $\alpha = (ka/2)$ sen θ,

$$a \text{ sen } \theta_m = m\lambda \quad (10.32)$$

con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Esto es muy general y da lugar a las mismas posiciones de θ para estos máximos independientemente del valor de $N \geq 2$. Existen mínimos, con densidad de flujo cero, en todas partes (sen $N\alpha$/sen $\alpha)^2 = 0$ o cuando

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{N}, \pm\frac{2\pi}{N}, \pm\frac{3\pi}{N}, \ldots, \pm\frac{(N-1)\pi}{N}, \pm\frac{(N+1)\pi}{N}, \ldots \quad (10.33)$$

Entre máximos principales consecutivos (es decir, en el rango en α de π) habrá por consiguiente $N - 1$ mínimos. Y, por supuesto, entre cada par de mínimos, tendrá que haber un **máximo secundario**. El término (sen $N\alpha$/sen $\alpha)^2$, que podemos considerar que engloba los efectos de interferencia, tiene un numerador que varía rápidamente y otro que varía lentamente. Los máximos secundarios están, por consiguiente, localizados aproximadamente en puntos donde sen $N\alpha$ tiene su valor más grande, a saber

$$\alpha = \pm\frac{3\pi}{2N}, \pm\frac{5\pi}{2N}, \ldots \quad (10.34)$$

Los $N - 2$ *máximos secundarios* entre máximos principales consecutivos son claramente visibles en la figura 10.20. Podemos hacernos una idea de la densidad de flujo en esos máximos, volviendo a escribir la ecuación (10.31) como

$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{\text{sen}\ N\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\right)^2 \quad (10.35)$$

donde en los puntos de interés $|\text{sen}\ N\alpha| = 1$. Para un valor de N grande, α es pequeña y $\text{sen}^2\,\alpha \approx \alpha^2$. En el primer máximo secundario $\alpha = 3\pi/2N$, en cuyo caso

$$I \approx I(0)\left(\frac{\text{sen}\,\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2 \quad (10.36)$$

habiendo disminuido la densidad de flujo alrededor de $\frac{1}{22}$ de la del máximo principal adyacente (véase problema 10.12). Ya que (sen $\beta)/\beta$ para β de valores pequeños varía lentamente,

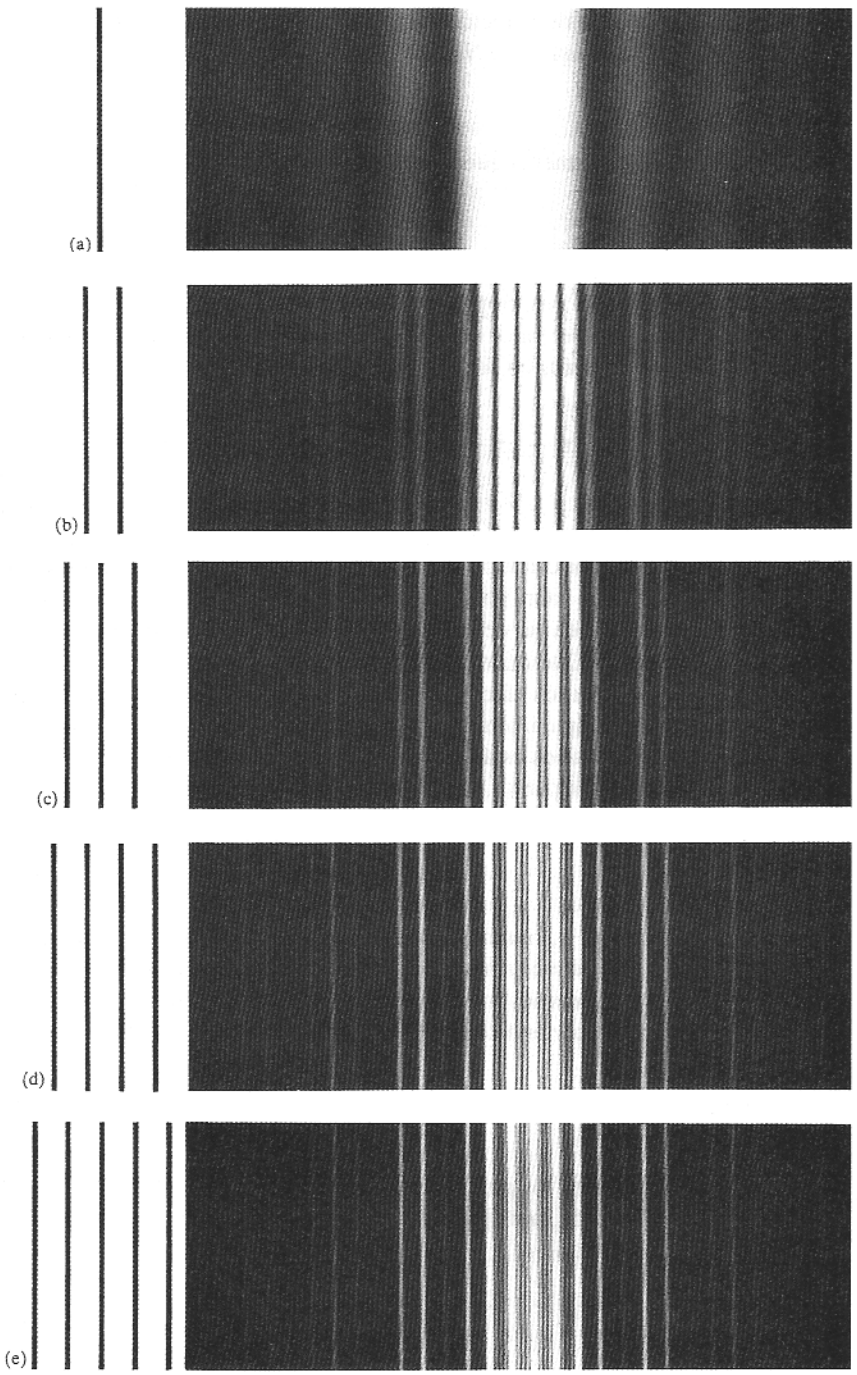


FIGURA 10.20 Figuras de difracción para los sistemas de rendijas que se muestran a la izquierda. (Francis Weston Sears, Optics, © 1949, Addison-Wesley, Inc., Reading, MA. Reimpresión autorizada por Addison-Wesley Longman, Inc.)

no diferirá sensiblemente de uno, cerca del máximo principal de orden cero, de tal manera que $I/I(0) \approx \frac{1}{22}$. Este coeficiente de densidad de flujo para el siguiente máximo secundario baja hasta $\frac{1}{62}$ y continúa disminuyendo conforme α se acerca a un

valor a medio camino entre los máximos principales. En ese punto de simetría, $\alpha \approx \pi/2$, sen $\alpha \approx 1$ mientras que el coeficiente de densidad de flujo tiene su valor más bajo de aproximadamente $1/N^2$. De ahí en adelante $\alpha > \pi/2$ y las densidades de flujo de los máximos subsidiarios comienzan a aumentar.

Intentemos reproducir la figura 10.20 utilizando una bombilla tubular y unas rendijas hechas en casa. Probablemente les costará ver claramente los máximos secundarios, con el efecto de que la única diferencia perceptible entre las distribuciones de las rendijas dobles y múltiples puede ser un ensanchamiento evidente de las regiones oscuras entre los máximos principales. Como en la figura 10.20, las regiones oscuras se harán más anchas que las bandas brillantes conforme N vaya aumentando y los máximos secundarios desaparezcan. Si consideramos que el ancho de cada máximo principal está acotado por dos ceros adyacentes, cada uno se extenderá sobre una longitud en θ (sen $\theta \approx \theta$) de aproximadamente $2\lambda/Na$. Cuando N aumenta, los máximos principales mantienen su espaciado relativo (λ/a) mientras se van estrechando cada vez más. La figura 10.21 muestra el caso de seis rendijas donde $a = 4b$.

El término de interferencia de rendijas múltiples de la ecuación 10.35 tiene la forma $(\text{sen}^2 N\alpha)/N^2 \text{sen}^2 \alpha$; entonces, para valores elevados de N, $(N^2 \text{sen}^2 \alpha)^{-1}$ puede visualizarse como la curva debajo de la cual $\text{sen}^2 N\alpha$ varía rápidamente. Obsérvese que para pequeños valores de α este término de interferencia se asemeja a $\text{sinc}^2 N\alpha$.

10.2.4 La abertura rectangular

Consideremos la configuración mostrada en la figura 10.22. Una onda plana monocromática que se propaga en la dirección x incide en la pantalla difractora opaca Σ. Deseamos encontrar la distribución de densidad de flujo correspondiente (campo lejano) en el espacio o, de manera equivalente, en algún punto P distante arbitrario. De acuerdo con el principio de Huygens-Fresnel, un área diferencial dS dentro de la abertura, puede visualizarse como si estuviera cubierta con fuentes puntuales secundarias coherentes. Pero la extensión de dS es mucho más pequeña que λ, de tal manera que todas las contribuciones en P permanecen en fase, interfiriendo constructivamente. Esto es cierto independientemente de θ, es decir, dS emite una onda esférica (problema 10.13). Si ε_A es la eficacia original por unidad de área, *suponiendo que sea constante en toda la abertura,* entonces la perturbación óptica en P debida a dS es la parte real o la imaginaria de

$$dE = \left(\frac{\varepsilon_A}{r}\right) e^{i(\omega t - kr)}\, dS \tag{10.37}$$

En este caso debemos elegir y depende solamente de si preferimos ondas sinusoidales o cosenoidales, no habiendo ninguna diferencia, excepto por un desplazamiento de fase. La distancia desde dS hasta P es

$$r = [X^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2]^{1/2} \tag{10.38}$$

y, como hemos visto, la condición de Fraunhofer se satisface cuando esta distancia se acerca al infinito. Como antes, será suficiente reemplazar r por la distancia $\overline{OP}$, es decir, R, en el término de amplitud siempre que la abertura sea relativamente pequeña. Pero la aproximación para r en la fase requiere un tratamiento más cuidadoso; $k = 2\pi/\lambda$ es un número grande. Para ello, desarrollamos la ecuación (10.38) y utilizando la

$$R = [X^2 + Y^2 + Z^2]^{1/2} \tag{10.39}$$

obtenemos

$$r = R[1 + (y^2 + z^2)/R^2 - 2(Yy + Zz)/R^2]^{1/2} \tag{10.40}$$

En el caso del campo lejano R es muy grande en comparación con las dimensiones de la abertura y el término $(y^2 + z^2)/R^2$ es ciertamente despreciable. Ya que P está muy lejos de Σ, θ puede aún mantenerse pequeño aunque Y y Z sean bastante grandes, lo cual mitiga cualquier preocupación acerca de la dirección de los emisores (factor de oblicuidad). Ahora

$$r = R[1 - 2(Yy + Zz)/R^2]^{1/2}$$

y eliminando todos los términos excepto los dos primeros en la expansión binomial, obtenemos

$$r = R[1 - (Yy + Zz)/R^2]$$

La perturbación total que llega a P es

$$\tilde{E} = \frac{\varepsilon_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Abertura}} e^{ik(Yy + Zz)/R}\, dS \tag{10.41}$$

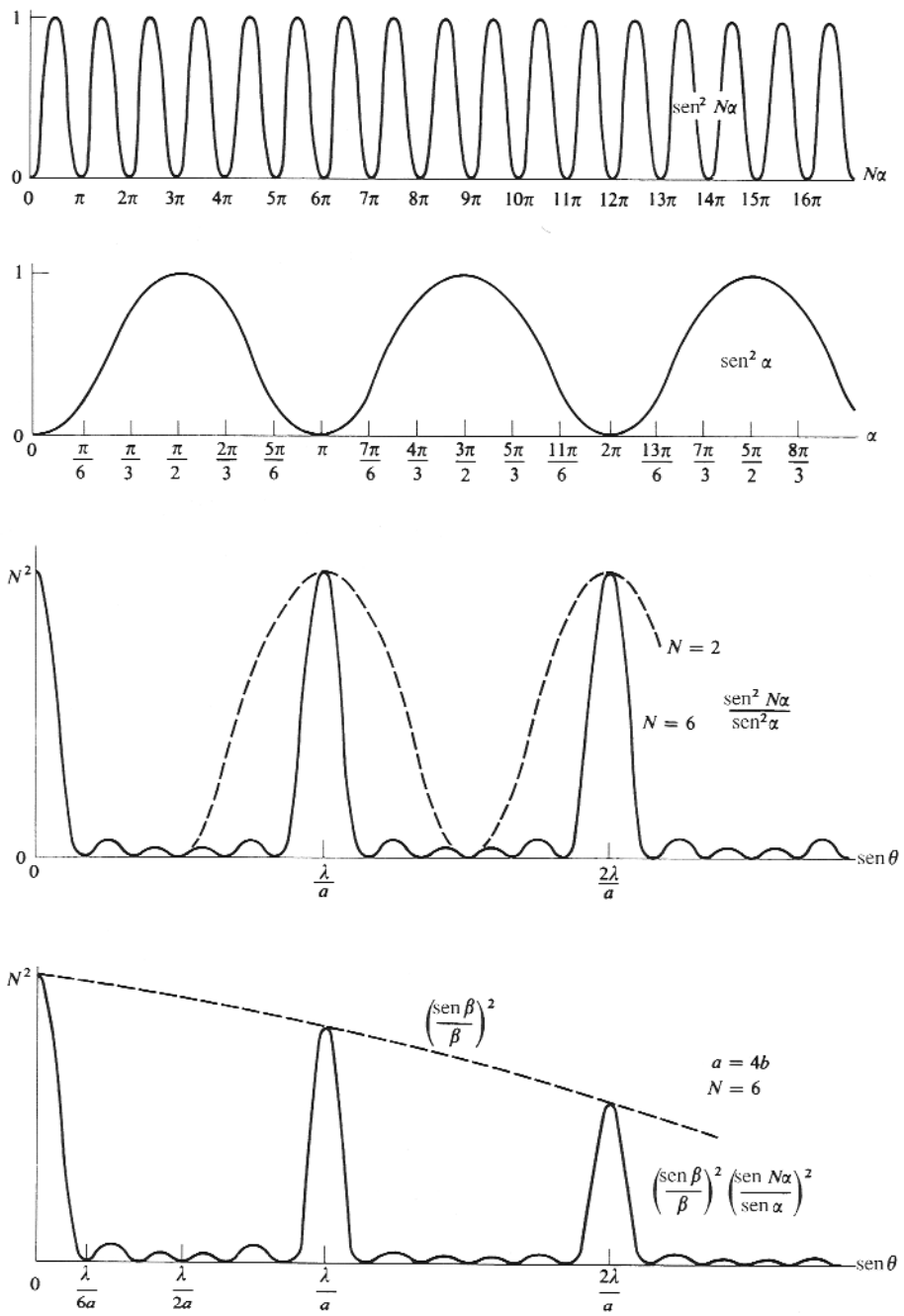


FIGURA 10.21 Difracción de rendijas múltiples ($a = 4b$, $N = 6$).

Consideremos la configuración específica que se muestra en la figura 10.23. La ecuación (10.41) puede ahora escribirse como

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikYy/R}\, dy \int_{-a/2}^{a/2} e^{ikZz/R}\, dz$$

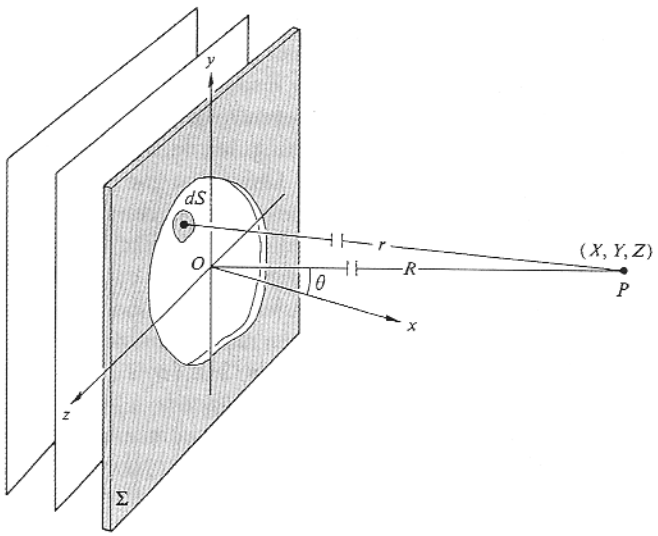


FIGURA 10.22 Difracción de Fraunhofer de una abertura arbitraria, donde r y R son muy grandes en comparación con el tamaño del agujero.

donde $dS = dy\,dz$. Con $\beta' \equiv kbY/2R$ y $\alpha' \equiv kaZ/2R$ obtenemos

$$\int_{-b/2}^{+b/2} e^{ikYy/R}\,dy = b\left(\frac{e^{i\beta'} - e^{-i\beta'}}{2i\beta'}\right) = b\left(\frac{\text{sen }\beta'}{\beta'}\right)$$

y de manera parecida

$$\int_{-a/2}^{+a/2} e^{ikZz/R}\,dz = a\left(\frac{e^{i\alpha'} - e^{-i\alpha'}}{2i\alpha'}\right) = a\left(\frac{\text{sen }\alpha'}{a'}\right)$$

de modo que

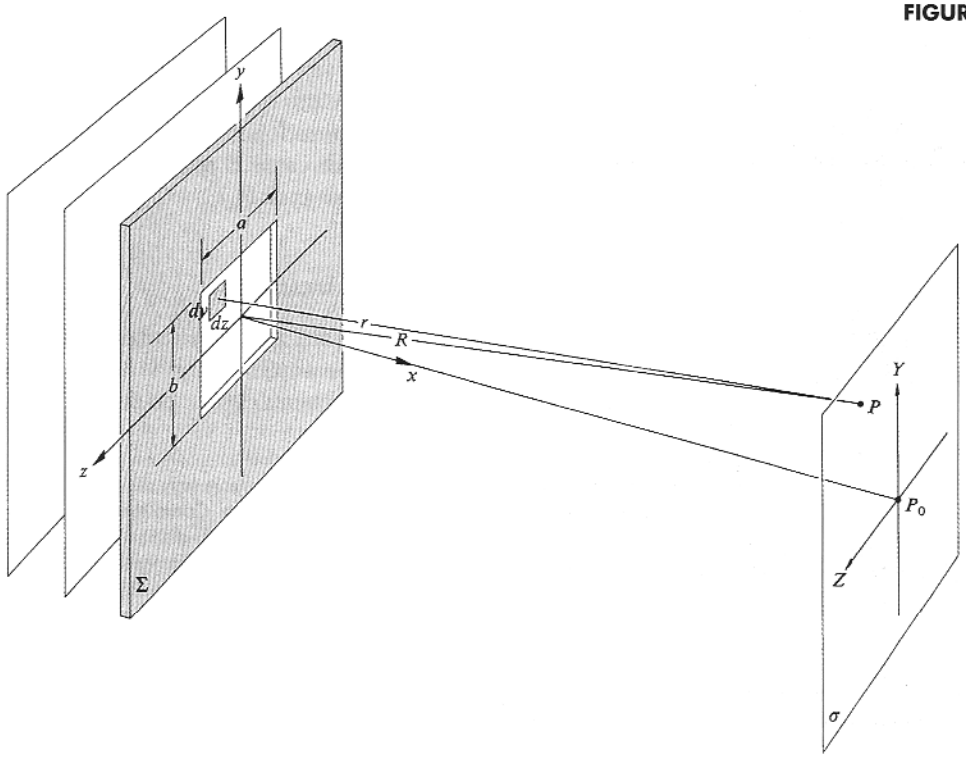
$$\tilde{E} = \frac{A\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R}\left(\frac{\text{sen }\alpha'}{\alpha'}\right)\left(\frac{\text{sen }\beta'}{\beta'}\right) \qquad (10.42)$$

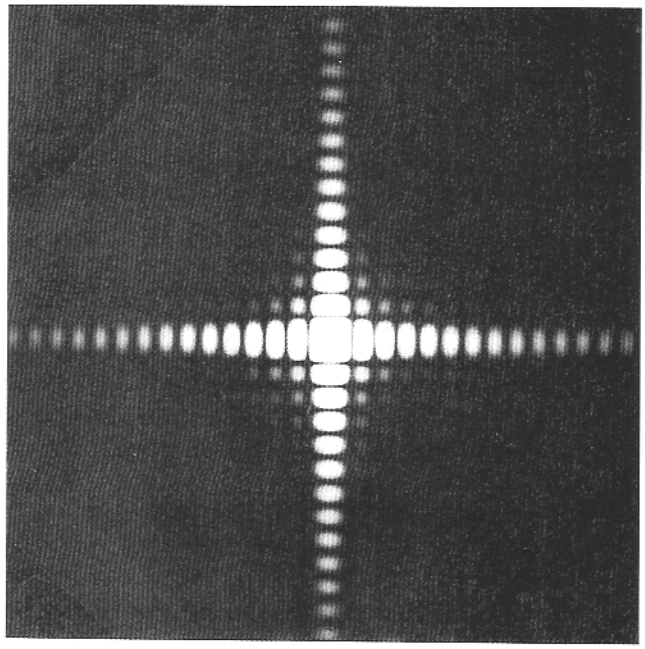
donde A es el área de la abertura. Ya que $I = \langle(\text{Re }\tilde{E})^2\rangle_T$,

$$I(Y, Z) = I(0)\left(\frac{\text{sen }\alpha'}{\alpha'}\right)^2\left(\frac{\text{sen }\beta'}{\beta'}\right)^2 \qquad (10.43)$$

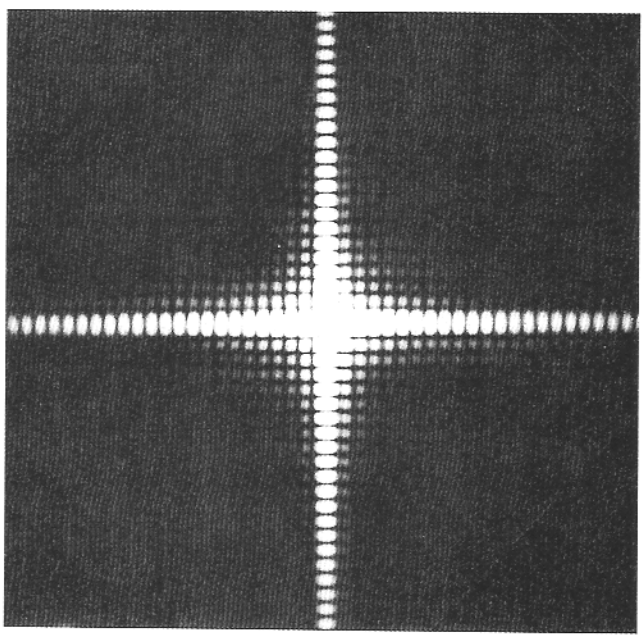
donde $I(0)$ es la irradiancia en P_0, es decir, en $Y = 0$, $Z = 0$ (véase figura 10.24). En valores de Y y Z tales que $\alpha' = 0$ o

FIGURA 10.23 Abertura rectangular.





(a)



(b)

FIGURA 10.24 *(a)* Distribución de Fraunhofer de una abertura cuadrada. *(b)* La misma distribución con mayor exposición para hacer resaltar algunos de los términos más débiles. (Foto de *E.H.*)

$\beta' = 0$, $I(Y, Z)$ adquiere la forma conocida de la figura 10.14. Cuando β' ó α' son múltiplos enteros de π distintos de cero o, de manera equivalente, cuando Y y Z son múltiplos enteros de $\lambda R/b$ y $\lambda R/a$ respectivamente, diferentes de cero, $I(Y, Z) = 0$ y obtenemos así un retículo rectangular de líneas nodales como se indica en la figura 10.25. Obsérvese que la distribución en las direcciones Y, Z varía *inversamente* con las dimensiones y, z de la abertura. Una abertura rectangular horizontal producirá una figura con un rectángulo vertical en su centro.

A lo largo del eje β', $\alpha' = 0$ estando los máximos secundarios localizados aproximadamente a medio camino entre los ceros, es decir, en $\beta'_m = \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \pm 7\pi/2, \ldots$. En cada máximo secundario sen $\beta'_m = 1$, y por supuesto a lo largo del eje β'_m ya que $\alpha' = 0$, (sen $\alpha')/\alpha' = 1$ de tal manera que las irradiancias relativas se aproximan simplemente por

$$\frac{I}{I(0)} = \frac{1}{\beta'^2_m} \tag{10.44}$$

De manera parecida, a lo largo del eje α'

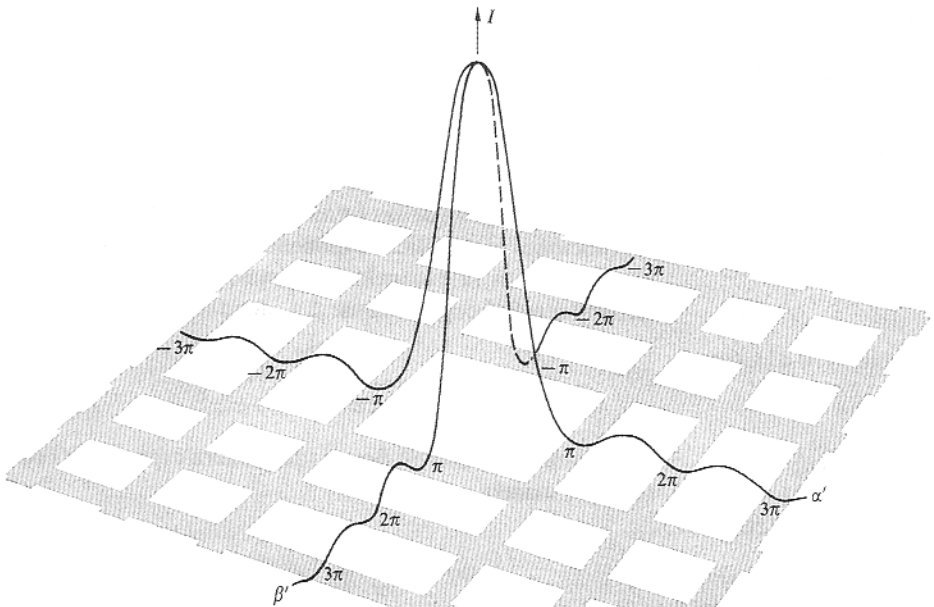
$$\frac{I}{I(0)} = \frac{1}{\alpha'^2_m} \tag{10.45}$$

El cociente de densidades de flujo [8] disminuye muy rápidamente de 1 hasta $\frac{1}{22}$, hasta $\frac{1}{62}$, hasta $\frac{1}{122}$, etc. Aún así, los máximos secundarios fuera de eje son todavía más pequeños; por ejemplo, los máximos en las cuatro esquinas (cuyas coordenadas corresponden a las combinaciones apropiadas de $\beta' = \pm 3\pi/2$ y $\alpha' = \pm 3\pi/2$) más cercanas al máximo central, tienen cada una irradiancias relativas de $(\frac{1}{22})^2$.

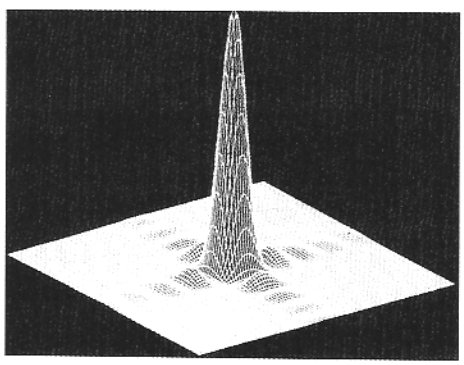
10.2.5 La abertura circular

La difracción de Fraunhofer en una abertura circular, es un efecto de enorme importancia práctica en el estudio de la instrumentación óptica. Imaginemos un conjunto típico: ondas planas que

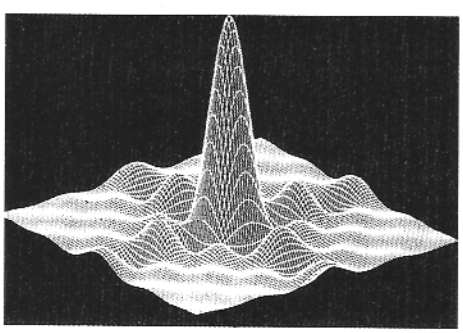
[8] Estas fotografías especiales se tomaron durante una sesión de laboratorio de un curso universitario de primer grado. Como fuente de ondas planas se utilizó un láser de He-Ne de 1,5 mW. El dispositivo se colocó en un cuarto oscuro alargado, proyectándose directamente el patrón en una película Polaroid 4 × 5 (ASA 3.000) sita a unos 30 pies de una abertura pequeña, así que no fue necesario una lente convergente. El obturador de guillotina colocado directamente enfrente del láser, había sido realizado de cartón por un estudiante y, por consiguiente, no se dispone del tiempo de exposición. Cualquier obturador de cámara (una cámara réflex de lente única sin lente y con la parte trasera abierta) servirá pero con la de cartón fue más divertido.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 10.25 *(a)* Distribución de la irradiancia para una abertura cuadrada. *(b)* Irradiancia producida por la difracción de Fraunhofer en una abertura cuadrada. *(c)* Distribución del campo eléctrico producida por la difracción de Fraunhofer mediante una abertura cuadrada. (Fotos cedidas por R.G. Wilson, Illinois, Wesleyan University.)

inciden en una pantalla Σ que contiene una abertura circular y la consiguiente distribución de difracción de campo lejano extendido en una pantalla de observación distante σ. Usando una lente convergente L_2, se puede acercar σ a la abertura sin cambiar la distribución. Ahora, si L_2 llena exactamente la abertura difractora en Σ, colocándose dentro de ella, la forma de la distribución permanece esencialmente sin alteración. La onda luminosa que llega a Σ es recortada de tal forma que solamente un segmento circular se propaga a través de L_2 para formar una imagen en el plano focal. Se trata obviamente del mismo proceso que ocurre en el ojo, en un telescopio, en un microscopio o en una lente de cámara. La imagen de una fuente puntual distante formada por una lente convergente perfectamente libre de aberraciones nunca es un punto, sino más bien un tipo de figura de difracción. Estamos fundamentalmente recogiendo tan sólo una fracción del frente de onda incidente no pudiendo, por lo tanto, esperar formar una imagen perfecta. Como se muestra en la última sección, la expresión de la perturbación óptica en P que surge en una abertura arbitraria en el caso de campo lejano, es

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Abertura}} e^{ik(Yy+Zz)/R}\, dS \qquad [10.41]$$

Para una abertura circular, la simetría sugiere el uso de coordenadas esféricas tanto en el plano de la abertura como en el plano de observación, como se muestra en la figura 10.26. Por consiguiente, hagamos

$$z = \rho \cos \phi \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi$$

$$Z = q \cos \Phi \qquad Y = q \operatorname{sen} \Phi$$

El elemento diferencial del área es ahora

$$dS = \rho \, d\rho \, d\phi$$

Substituyendo estas expresiones en la ecuación (10.41), ésta queda

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\rho=0}^{a} \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{i(kpq/R)\cos(\phi - \Phi)} \rho \, d\rho \, d\phi \tag{10.46}$$

Debido a la simetría axial completa, la solución debe ser independiente de Φ. Podríamos resolver entonces la ecuación (10.46) con $\Phi = 0$ al igual que con cualquier otro valor, simplificando así las cosas un poco.

La porción de la doble integral asociada con la variable ϕ,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(kpq/R)\cos\phi} \, d\phi$$

aparece con mucha frecuencia en las matemáticas de la física. Se trata de una función única en el sentido de que no puede reducirse a ninguna de las formas más corrientes, tales como las funciones hiperbólicas exponenciales o trigonométricas y en efecto, con la excepción de éstas, es quizás la que se encuentra más frecuentemente. La cantidad

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu\cos v} \, dv \tag{10.47}$$

se denomina *función de Bessel* (de primera especie) de orden cero. De manera más general

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(mv + u\cos v)} \, dv \tag{10.48}$$

representa la función de Bessel de orden m. En la mayoría de los manuales matemáticos se recogen valores numéricos de

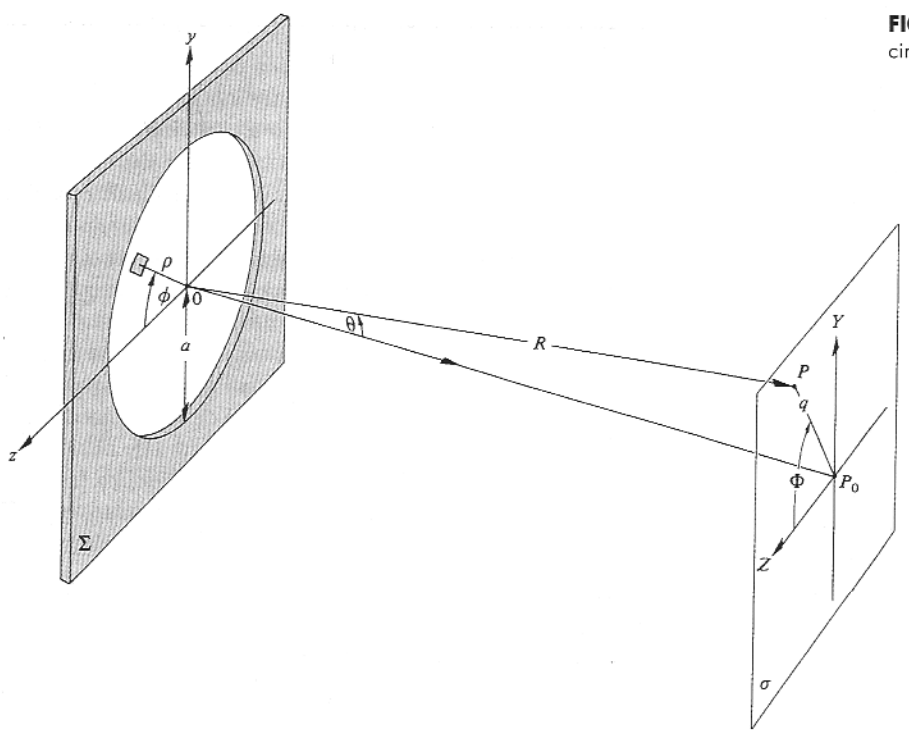


FIGURA 10.26 Geometría de la abertura circular.

$J_0(u)$ y $J_1(u)$ para un intervalo grande de valores de u. Precisamente como el seno y el coseno, las funciones de Bessel tienen desarrollos en serie y ciertamente no son más esotéricas que esas otras conocidas desde la infancia. Como se vio en la figura 10.27, $J_0(u)$ y $J_1(u)$ son funciones oscilatorias lentamente decrecientes que no hacen nada particularmente dramático.

La ecuación (10.46) puede escribirse nuevamente como

$$\tilde{E} = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi \int_0^a J_0(k\rho q/R)\rho \, d\rho \qquad (10.49)$$

Otra propiedad general de las funciones de Bessel a la que nos referimos como relación de repetición es

$$\frac{d}{du}[u^m J_m(u)] = u^m J_{m-1}(u)$$

Cuando $m = 1$, esto claramente lleva a

$$\int_0^u u' J_0(u')\, du' = u J_1(u) \qquad (10.50)$$

donde u' sirve solamente como variable muda. Si ahora regresamos a la integral de la ecuación (10.49) y reemplazamos la variable de manera que $w = k\rho q/R$, entonces $dp = (R/kq)\, dw$ y

$$\int_{\rho=0}^{\rho=a} J_0(k\rho q/R)\rho \, d\rho = (R/kq)^2 \int_{w=0}^{w=kaq/R} J_0(w) w \, dw$$

Utilizando la ecuación (10.50) obtenemos

$$\tilde{E}(t) = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} 2\pi a^2 (R/kaq) J_1(kaq/R) \qquad (10.51)$$

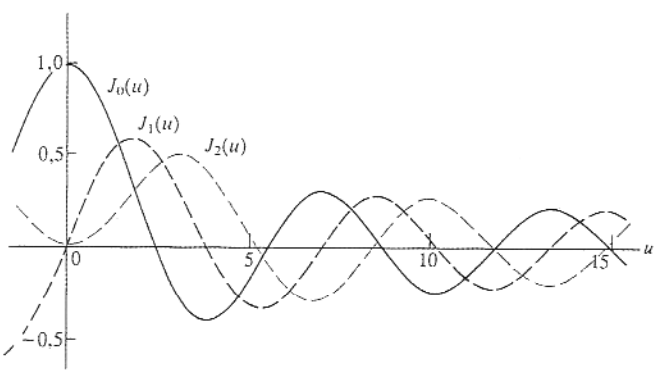


FIGURA 10.27 Funciones de Bessel.

La irradiancia en el punto P es $\langle(\mathrm{Re}\,\tilde{E})^2\rangle$ or $\frac{1}{2}\tilde{E}\tilde{E}^*$, es decir,

$$I = \frac{2\mathcal{E}_A^2 A^2}{R^2}\left[\frac{J_1(kaq/R)}{kaq/R}\right]^2 \qquad (10.52)$$

donde A es el área de la abertura circular. Para calcular la irradiancia en el centro del patrón (es decir, en P_0), pongamos $q = 0$. De la relación de repetición anterior ($m = 1$) se deduce que

$$J_0(u) = \frac{d}{du} J_1(u) + \frac{J_1(u)}{u} \qquad (10.53)$$

De la ecuación (10.47) vemos que $J_0(0) = 1$ y de la ecuación (10.48), $J_1(0) = 0$. La relación de $J_1(u)/u$ cuando u se acerca a cero tiene el mismo límite (regla de L'Hospital) del coeficiente de las derivadas separadas de su numerador y denominador, esto es, $dJ_1(u)/du$ sobre uno. Esto significa que el lado derecho de la ecuación (10.53) es el doble de su valor límite, de tal manera que $J_1(u)/u = \frac{1}{2}$ en $u = 0$. La irradiancia en P_0 es por consiguiente

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}_A^2 A^2}{2R^2} \qquad (10.54)$$

que es el mismo resultado que se obtuvo para la abertura rectangular [ecuación (10.43)]. Si se supone que R sea básicamente constante en el patrón, podemos escribir

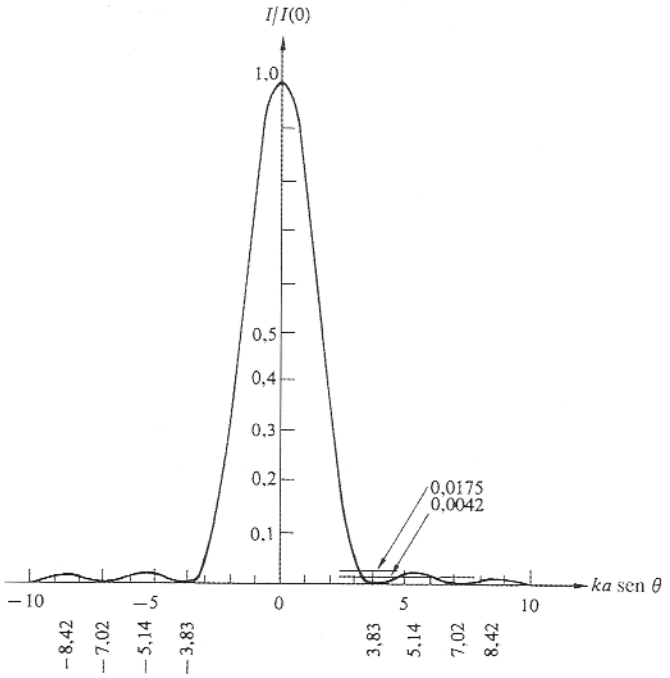
$$I = I(0)\left[\frac{2J_1(kaq/R)}{kaq/R}\right]^2 \qquad (10.55)$$

Ya que sen $\theta = q/R$, la irradiancia puede escribirse como función de θ:

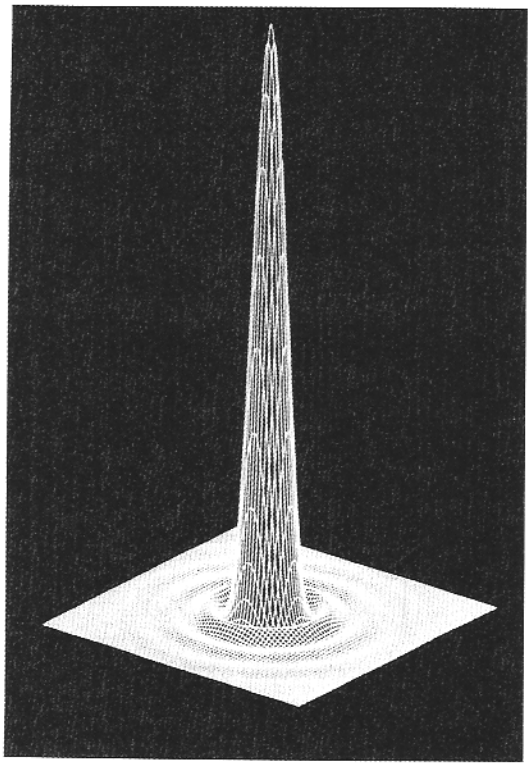
$$I(\theta) = I(0)\left[\frac{2J_1(ka\ sen\ \theta)}{ka\ \mathrm{sen}\ \theta}\right]^2 \qquad (10.56)$$

y como tal se representa gráficamente en la figura 10.28. Debido a la simetría axial, el máximo central creciente corresponde a un núcleo circular de alta irradiancia denominado **disco de Airy**. Fue Sir George Biddell Airy (1801-1892), astrónomo real de Inglaterra, quien dedujo por primera vez la ecuación (10.56). El disco central está rodeado por un anillo oscuro que corresponde al primer cero de la función $J_1(u)$. De la tabla 10.1, $J_1(u) = 0$ cuando $u = 3{,}83$, es decir, $kaq/R = 3{,}83$. El radio q_1 dibujado hacia el centro de este primer anillo oscuro puede considerarse como la extensión del disco de Airy. Está dado por

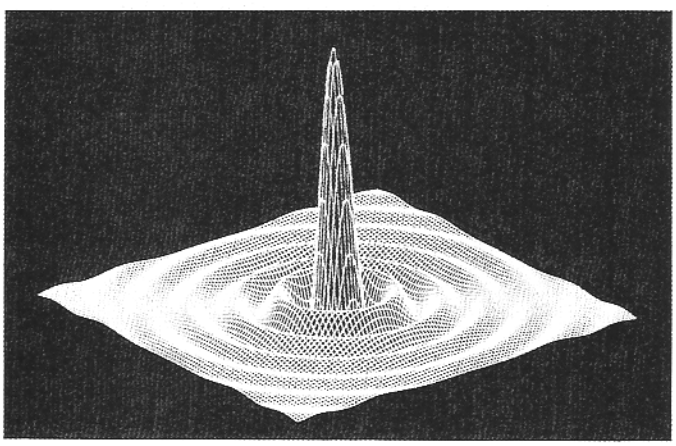
$$q_1 = 1{,}22\frac{R\lambda}{2a} \qquad (10.57)$$



(a)



(c)



(b)

FIGURA 10.28 *(a)* Distribución de Airy. *(b)* Campo eléctrico producido por la difracción de Fraunhofer en una abertura circular. *(c)* Irradiancia resultante de la difracción de Fraunhofer en una abertura circular. (Fotos cedidas por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.)

Para una lente enfocada sobre la pantalla σ, la distancia focal $f \approx R$ y así

$$q_1 \approx 1.22 \frac{f\lambda}{D} \tag{10.58}$$

donde D es el diámetro de la abertura, es decir, $D = 2a$. (El *diámetro* del disco de Airy en el espectro visible *es aproximadamente* igual al $f/\#$ de la lente en millonésima de metro.) Como se muestra en las figuras 10.29 a 10.31, q_1 varía inversa-

TABLA 10.1 Funciones de Bessel*

x	$J_1(x)$*	x	$J_1(x)$	x	$J_1(x)$
0,0	0,000 0	3,0	0,339 1	6,0	−0,276 7
0,1	0,049 9	3,1	0,300 9	6,1	−0,255 9
0,2	0,099 5	3,2	0,261 3	6,2	−0,232 9
0,3	0,148 3	3,3	0,220 7	6,3	−0,208 1
0,4	0,196 0	3,4	0,179 2	6,4	−0,181 6
0,5	0,242 3	3,5	0,137 4	6,5	−0,153 8
0,6	0,286 7	3,6	0,095 5	6,6	−0,125 0
0,7	0,329 0	3,7	0,053 8	6,7	−0,095 3
0,8	0,368 8	3,8	0,012 8	6,8	−0,065 2
0,9	0,405 9	3,9	−0,027 2	6,9	−0,034 9
1,0	0,440 1	4,0	−0,066 0	7,0	−0,004 7
1,1	0,470 9	4,1	−0,103 3	7,1	0,025 2
1,2	0,498 3	4,2	−0,138 6	7,2	0,054 3
1,3	0,522 0	4,3	−0,171 9	7,3	0,082 6
1,4	0,541 9	4,4	−0,202 8	7,4	0,109 6
1,5	0,557 9	4,5	−0,231 1	7,5	0,135 2
1,6	0,569 9	4,6	−0,256 6	7,6	0,159 2
1,7	0,577 8	4,7	−0,279 1	7,7	0,181 3
1,8	0,581 5	4,8	−0,298 5	7,8	0,201 4
1,9	0,581 2	4,9	−0,314 7	7,9	0,219 2
2,0	0,576 7	5,0	−0,327 6	8,0	0,234 6
2,1	0,568 3	5,1	−0,337 1	8,1	0,247 6
2,2	0,556 0	5,2	−0,343 2	8,2	0,258 0
2,3	0,539 9	5,3	−0,346 0	8,3	0,265 7
2,4	0,520 2	5,4	−0,345 3	8,4	0,270 8
2,5	0,497 1	5,5	−0,341 4	8,5	0,273 1
2,6	0,470 8	5,6	−0,334 3	8,6	0,272 8
2,7	0,441 6	5,7	−0,324 1	8,7	0,269 7
2,8	0,409 7	5,8	−0,311 0	8,8	0,264 1
2,9	0,375 4	5,9	−0,295 1	8,9	0,255 9

*$J_1(x) = 0$ para $x = 0$, 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, . . .
Adaptado de E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, reimpreso con el permiso de John Wiley & Sons, Inc.

mente con el diámetro del agujero. Conforme D se acerca a λ, el disco de Airy puede ser efectivamente muy grande mientras que la abertura circular comienza a parecerse a una fuente puntual de ondas esféricas.

Los ceros de orden superior ocurren con valores de kaq/R iguales a 7,02; 10,17; etc. Los máximos secundarios están localizados donde u satisface la condición

$$\frac{d}{du}\left[\frac{J_1(u)}{u}\right] = 0$$

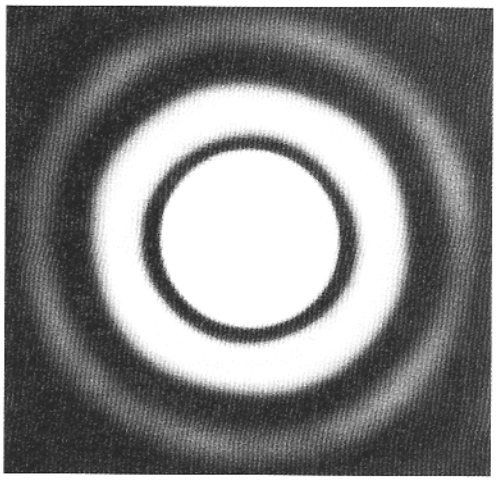


FIGURA 10.29 Anillos de Airy (agujero de 0,5 mm de diámetro). (Foto de E.H.)

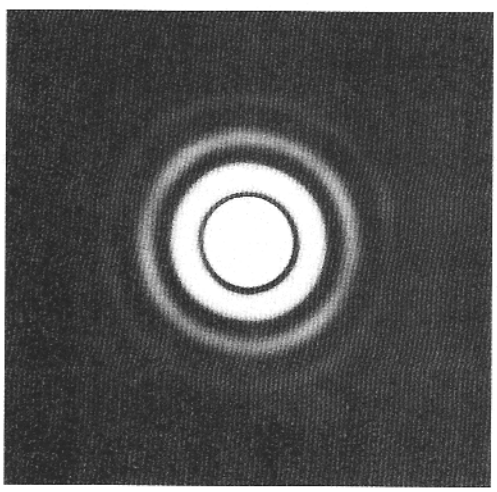
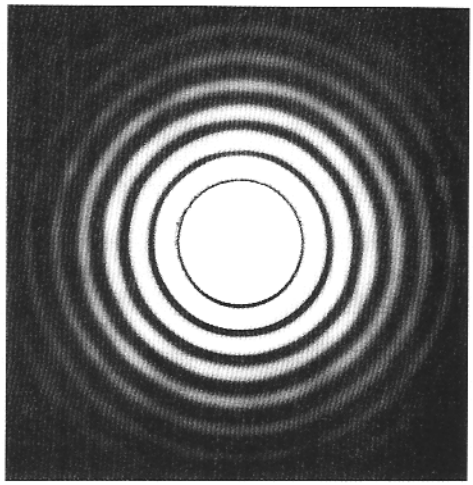


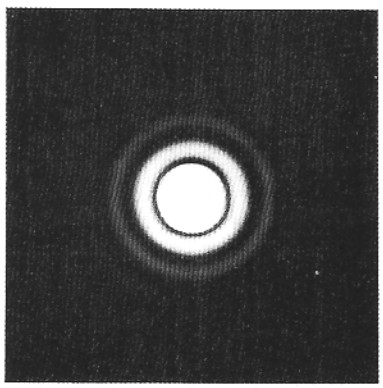
FIGURA 10.30 Anillos de Airy (agujero de 1,0 mm de diámetro). (Foto de E.H.)

que equivale a $J_2(u) = 0$. Entonces, según las tablas, estos máximos secundarios se dan cuando kaq/R es igual a 5,14; 8,42; 11,6; etc.; después de lo cual, $I/I(0)$ disminuye desde 1 hasta 0,0175; 0,0042 y 0,0016, respectivamente (problema 10.22).

Las aberturas circulares son preferibles a las rectangulares por lo que a la forma de las lentes respecta, ya que la curva de irradiancia del círculo es más ancha alrededor del pico central y dis-



(a)



(b)

FIGURA 10.31 *(a)* Anillos de Airy - exposición larga (agujero de 1,5 mm de diámetro). *(b)* Disco central de Airy - exposición corta con la misma abertura. (Fotos de E. H.)

minuye más rápidamente de ahí en adelante. Precisamente qué fracción de la energía luminosa total incidente en σ está confinada dentro de los varios máximos es una cuestión de interés, siendo sin embargo demasiado compleja para poderse resolver aquí[9]. Al integrar la irradiancia sobre una región particular de la distribución, se halla que el 84% de la luz llega dentro del disco de Airy y el 91% dentro de los límites del segundo anillo oscuro.

[9] Véase Born y Wolf, *Principles of Optics*, pág. 398 o el excelente texto elemental de Towne, *Wave Phenomena*, pág. 464.

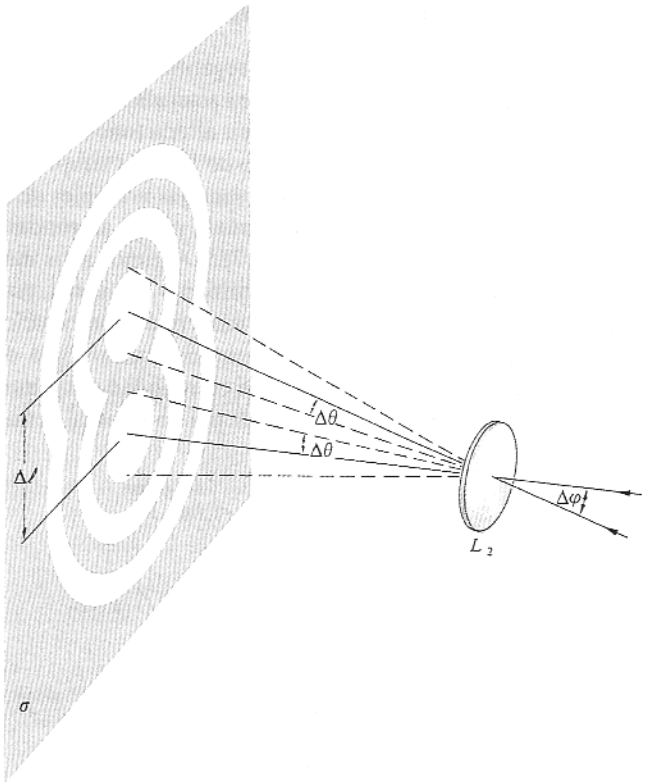
10.2.6 Resolución de sistemas formadores de imágenes

Imaginemos que tenemos una clase de sistema de lentes que forma una imagen de un objeto extenso. Si el objeto es luminescente cabe la posibilidad de imaginarlo como si estuviera formado por un conjunto de fuentes incoherentes. Por otro lado, un objeto visto bajo luz reflejada mostrará seguramente alguna correlación de fase entre sus distintos puntos de difusión. Cuando las fuentes puntuales son en efecto incoherentes, el sistema de lentes formará una imagen del objeto que consta de una distribución de figuras de Airy parcialmente superpuestas, aunque independientes. En las mejores lentes, donde las aberraciones son despreciables, la extensión de cada punto imagen debido a la difracción representa el límite máximo de la calidad de la imagen.

Supongamos que simplificamos las cosas un poco y que examinamos solamente dos fuentes puntuales distantes, incoherentes, de igual irradiancia. Consideremos, por ejemplo, dos estrellas vistas a través de la lente objetivo de un telescopio, donde la pupila de entrada corresponde a la abertura difractante. En la sección anterior vimos que el radio del disco de Airy estaba proporcionado por $q_1 = 1.22f\lambda/D$. Si $\Delta\theta$ es la medida angular correspondiente, entonces $\Delta\theta = 1.22\lambda/D$, ya que $q_1/f = \text{sen}\,\Delta\theta \approx \Delta\theta$. El disco de Airy para cada estrella se extenderá sobre un ancho angular medio $\Delta\theta$ alrededor de su imagen geométrica puntual, como se muestra en la figura 10.32. Si la separación angular de las estrellas es $\Delta\varphi$ y si $\Delta\varphi >> \Delta\theta$, las imágenes serán distintas y fácilmente resueltas. Conforme las estrellas vayan aproximándose una a otra, sus imágenes respectivas se unen, se superponen, formando una sola mezcla de franjas. Aplicando el criterio de Lord Rayleigh, las estrellas están *justamente resueltas* cuando el centro de un disco de Airy cae en el primer mínimo del patrón de Airy de la otra estrella. (Podríamos, sin lugar a duda, mejorar algo las cosas, pero el criterio de Rayleigh, si bien es arbitrario, tiene la virtud de ser particularmente sencillo.[10] La *separación angular mínima resoluble o límite angular de resolución* es

$$(\Delta\varphi)_{\text{min}} = \Delta\theta = 1.22\lambda/D \qquad (10.59)$$

[10] Con palabras de Rayleigh: «Esta regla es conveniente debido a su simplicidad, siendo suficientemente precisa en vista de la incertidumbre necesaria de lo que se entiende exactamente por resolución.» Véase sección 9.6.1. para un análisis más detallado.



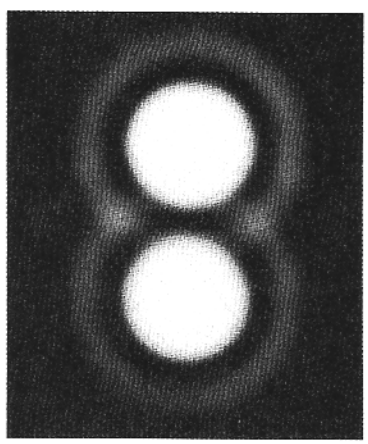
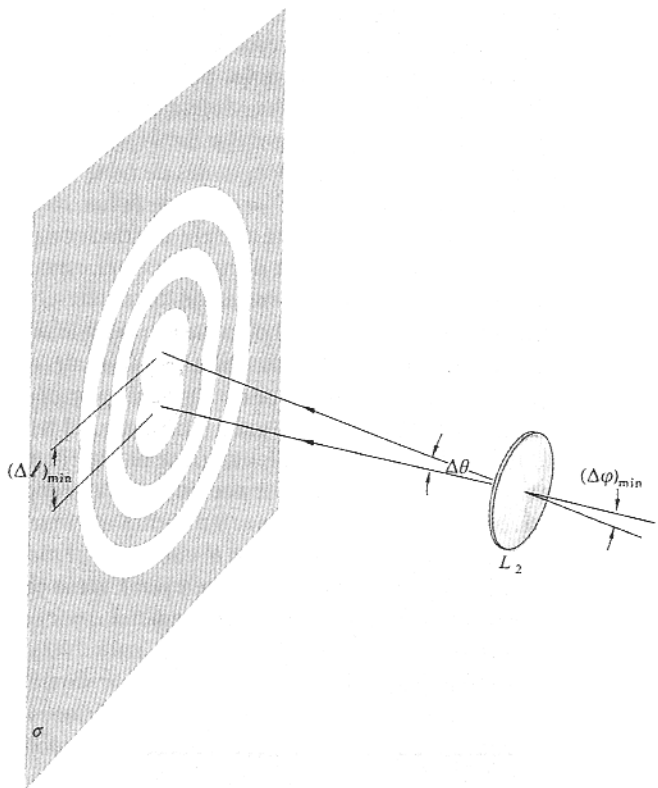


FIGURA 10.32 Imágenes superpuestas.

como se muestra en la figura 10.33. Si $\Delta\ell$ es la separación de centro a centro de las imágenes, el **límite de resolución** es

$$(\Delta\ell)_{\text{min}} = 1.22f\lambda/D \qquad (10.60)$$



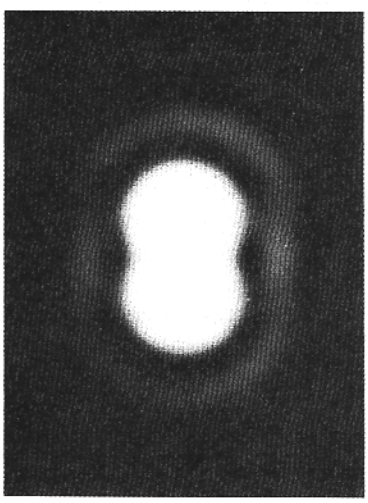


FIGURA 10.33 Imágenes superpuestas.

El **poder de resolución** de un sistema que forma imágenes se define generalmente como $1/(\Delta\varphi)_{\text{min}}$ ó $1/(\Delta\ell)_{\text{min}}$.

Si es necesario reducir la separación mínima resoluble entre imágenes (es decir, si el poder de resolución se debe aumentar), la longitud de onda, por ejemplo, podría hacerse más pequeña. Cuando utilizamos luz ultravioleta en lugar de luz visible en microscopia, podemos percibir detalles más finos. El microscopio electrónico utiliza longitudes de onda equivalentes de alrededor 10^{-4} hasta 10^{-5} veces la de la luz, lo cual permite examinar objetos que de otra manera estarían completamente oscurecidos por efectos de difracción en el espectro visible. Por otro lado, el poder de resolución de un telescopio puede incrementarse aumentando el diámetro de la lente objetivo o espejo. Además de recoger más radiación incidente, esto dará como resultado también un disco de Airy más pequeño y, por consiguiente, una imagen más aguda y brillante. El telescopio de 200 pulgadas de Monte Palomar tiene un espejo de 5 m de diámetro (despreciando la obstrucción de una pequeña región en su centro). En 550 nm tiene un límite angular de resolución de $2{,}7 \times 10^{-2}$ s de arco. Por el contrario, el radiotelescopio de 250 pies de diámetro de Jodrell Bank actúa en la longitud de onda bastante grande de 21 cm, teniendo, por consiguiente, un límite de resolución de solamente unos 700 s de arco. El diámetro de la pupila del ojo humano por supuesto varía. Suponiendo que sea de unos 2 mm bajo condiciones de luz brillante, con $\lambda = 550$ nm, $(\Delta\varphi)_{\text{min}}$ resulta ser alrededor de un minuto de arco. Con una distancia focal de unos 20 mm, $(\Delta\ell)_{\text{min}}$ en la retina es de 6.700 nm, es decir, aproximadamente el doble de la separación media entre receptores. El ojo humano, por consiguiente, debe ser capaz de resolver dos puntos separados por una pulgada, a una distancia de más o menos 100 yardas. Probablemente no seamos capaces de hacerlo tan bien; una parte en mil es más probable.

Un criterio más apropiado para el poder de resolución ha sido propuesto por C. Sparrow. Recordemos que en el límite de Rayleigh hay un mínimo central o punto de silla entre máximos adyacentes. Disminuyendo aún más la distancia entre las dos fuentes puntuales, la depresión central será más leve y por fin desaparecerá. La separación angular que corresponde a esa configuración es el límite de Sparrow. La parte superior del máximo resultante será ancha y plana, es decir, en el origen, que es el centro del máximo, la segunda derivada de la función de la irradiancia es cero; no hay cambio de pendiente (figura 10.40).

Contrariamente a la regla de Rayleigh, que tácitamente asume la incoherencia, la condición de Sparrow puede generalizarse muy fácilmente para fuentes coherentes. Además, unos estudios astronómicos de estrellas de igual brillantez han demostrado que el criterio de Sparrow es, con mucho, el más realista.

10.2.7 La red de difracción

Un ***red de difracción*** es un conjunto repetitivo de elementos difractores de una onda emergente, bien sean aberturas u obstáculos, que tienen el efecto de producir alteraciones periódicas en la fase, amplitud o ambas. Uno de los más simples de tales conjuntos es la configuración de rendijas múltiples de la sección 10.2.3. Parece que fue inventada por el astrónomo americano David Rittenhouse hacia 1785. Algunos años más tarde Joseph von Fraunhofer redescubrió, por su cuenta, este principio y siguió aportando un buen número de contribuciones importantes tanto a la teoría como a la tecnología de redes. Los primeros dispositivos eran en realidad conjuntos de rendijas múltiples, que consistían por lo general en un

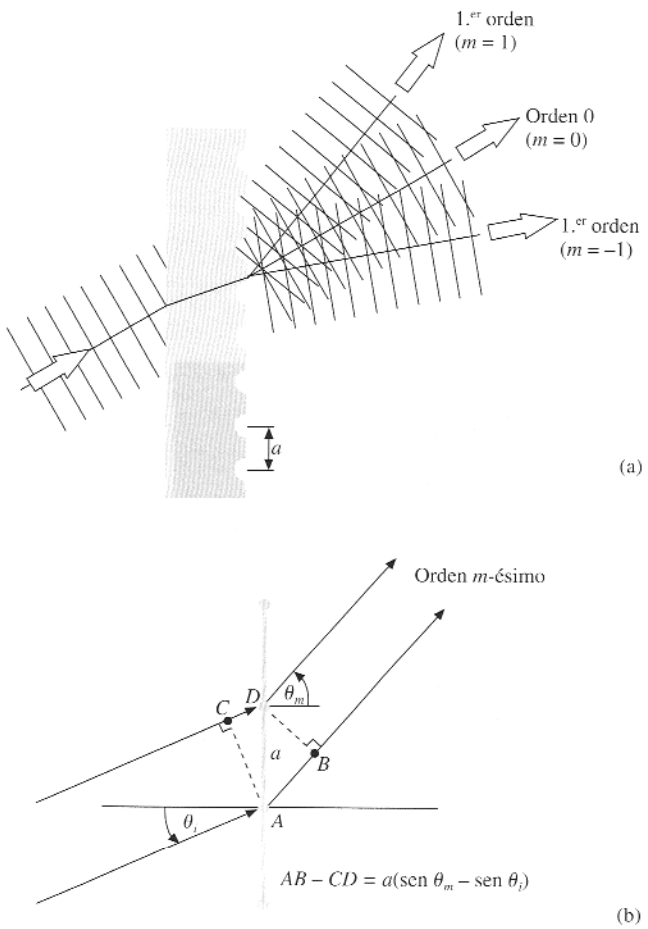
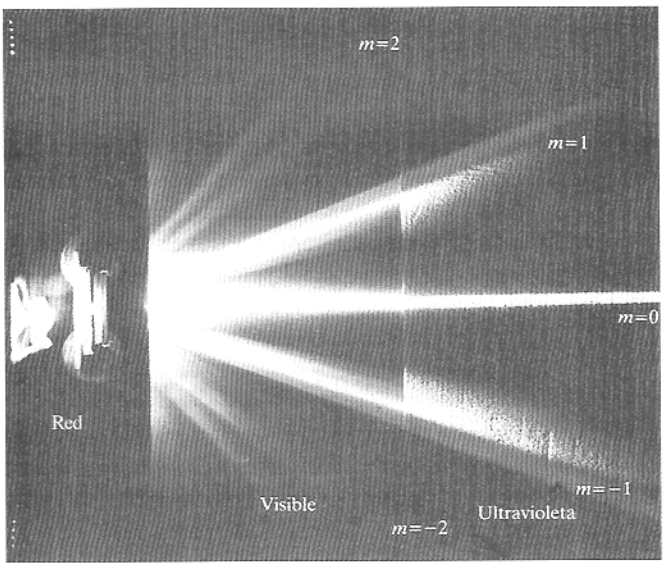
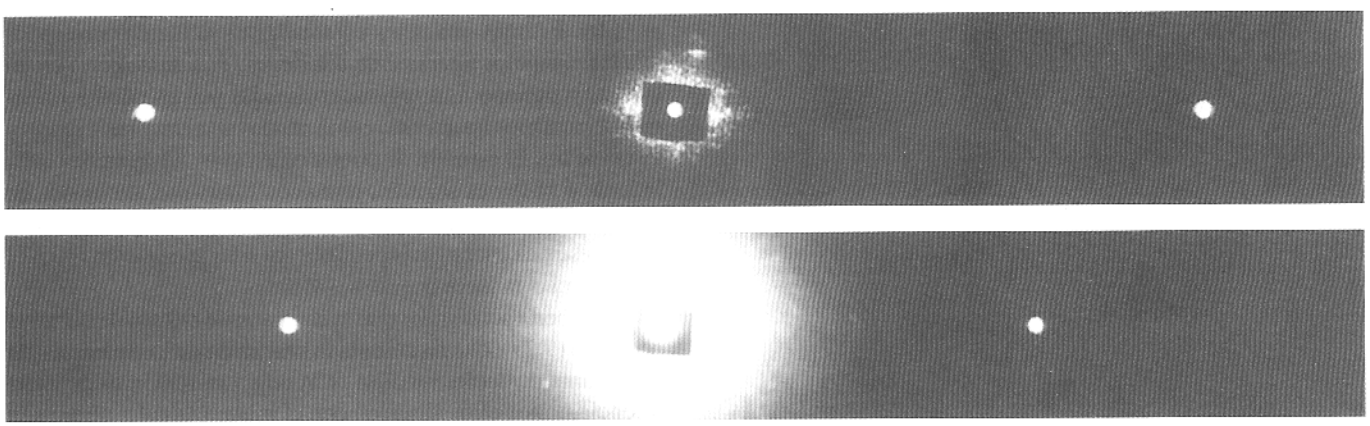


FIGURA 10.34 Red de transmisión.



(a)



(b)

FIGURA 10.35 Luz atravesando una red. *(a)* La zona a la izquierda es el espectro visible, la de la derecha es el ultravioleta. [Foto cedida por Klinger Educational Prod. Corp., College Point, N.Y.). *(b)* Vistas de frente de los haces difractados $m = 0$ y $m = \pm 1$ que se produjeron cuando la luz de un láser de He-Ne atravesó una red de 530 líneas/mm. En la versión superior, la red se hallaba en el aire (λ = 632,8 nm). En la versión inferior, la red estaba sumergida en agua. Del valor que se midió de θ_1, la ecuación del retículo dio como resultado λ_a = 471 nm y, por consiguiente, n_a = 1,34. (Fotos cedidas por A. F. Leung. Universidad China de Hong Kong).

retículo de alambre muy fino o hilo enrollado y extendido entre dos tornillos paralelos que servían como espaciadores. Al pasar a través de semejante sistema, un frente de onda se encuentra con regiones opacas y transparentes alternadas, sufriendo una modulación en *amplitud*. Asimismo, una configuración múltiple de rendijas se denomina ***red de transmisión de amplitud***. Otra forma más corriente de red de transmisión se hace rayando o raspando unas hendiduras paralelas en la superficie de una lámina de cristal clara y plana (figura 10.34*a*). Cada raspadura sirve como fuente de luz esparcida, formando juntas un conjunto regular de fuentes lineales paralelas. Cuando la red es totalmente transparente, de tal manera que la modulación en amplitud sea despreciable, las variaciones regulares del espesor óptico a través del retículo dan una modulación *en fase* y tenemos lo que se denomina *red de transmisión de fase* (figura 10.35*a*). En la representación de Huygens-Fresnel podemos visualizar los trenes de onda como radiados con diferentes fases sobre la superficie de la red. Un frente de onda emergente contiene, por consiguiente, unas variaciones periódicas en su forma más que en su amplitud lo cual, a su vez, equivale a una distribución angular de las ondas planas constitutivas.

Al reflejarse en esta clase de red, la luz esparcida por las varias características periódicas de la superficie llegarán a un punto P con una relación de fase definida. El patrón de interferencia correspondiente engendrado después de la reflexión es muy similar al que se produce por transmisión. Las redes diseñadas específicamente para funcionar de esta manera se denomina ***redes de reflexión de fase*** (figura 10.36). Tradicionalmente, las redes de esta clase son rayadas sobre películas finas de aluminio que han sido evaporadas sobre bloques de vidrio ópticamente planos. Puesto que el aluminio es bastante blando, hay menos desgaste de la herramienta de rayar de diamante, siendo también mejor reflector en la región ultravioleta.

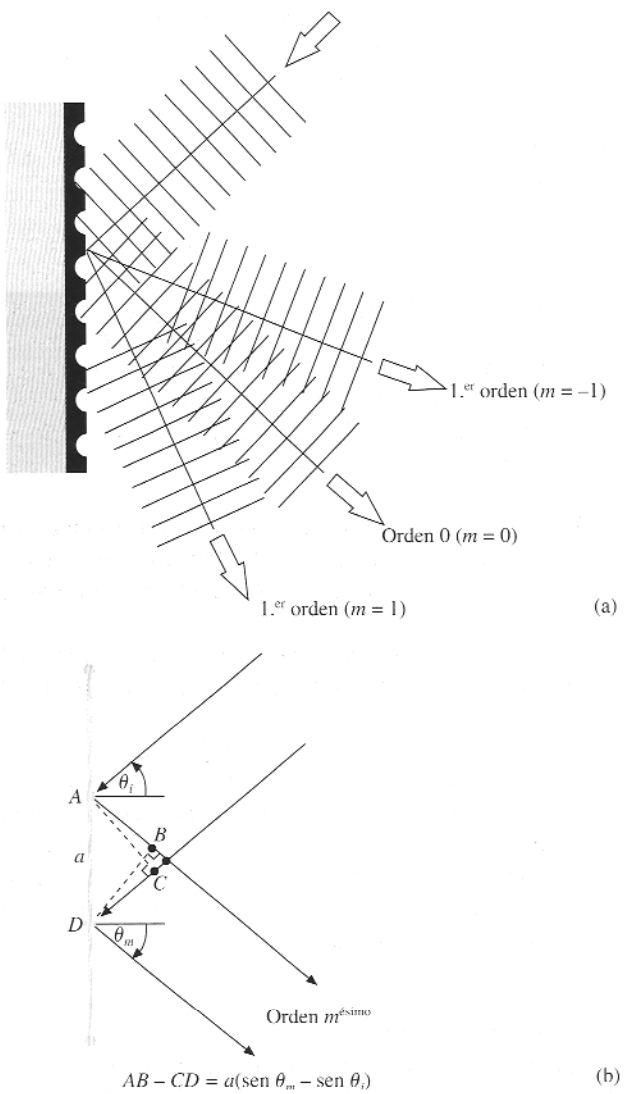


FIGURA 10.36 Red de reflexión.

La fabricación de redes rayadas es extremadamente difícil, razón por la cual su número es muy reducido. En la actualidad, la mayoría de ellos son moldes en plástico de muy alta calidad o buenas *réplicas* de redes rayadas maestras.

Si miráramos perpendicularmente a través de una red de transmisión hacia una fuente lineal paralela distante, los ojos servirían como lente de enfoque para la distribución de difracción. Recordemos el análisis de la sección 10.2.3 y la expresión

$$a \operatorname{sen} \theta_m = m\lambda \qquad [10.32]$$

denominada ***ecuación de red*** para incidencia normal. Los valores de m especifican el *orden* de los diversos máximos principales. Para una fuente que tenga un espectro continuo ancho, tal como un filamento de tungsteno, la imagen de orden cero, $m = 0$, corresponde a la imagen blanca de la fuente, no desviada, $\theta_0 = 0$. La ecuación de red depende de λ y así, para cualquier valor de $m \neq 0$, las distintas imágenes coloreadas de la fuente correspondientes a ángulos ligeramente diferentes (θ_m), se dispersa en un espectro continuo. Las regiones ocupadas por los débiles máximos secundarios aparecerán como bandas aparentemente desprovistas de luz. El espectro de primer orden $m = \pm 1$ aparece a cada lado de $\theta = 0$ y es seguido, junto con intervalos alternados de oscuridad, por los espectros de orden superior, $m = \pm 2, \pm 3$, etc. Obsérvese que cuanto más pequeña sea a en la ecuación (10.32), menor será el número de órdenes visibles.

No debería sorprender que la ecuación de red sea de hecho la ecuación (9.29), que representa la ubicación de los máximos en el conjunto de dobles rendijas de Young. Los máximos de interferencia, todos ellos situados con el mismo ángulo, ahora son sencillamente más agudos (al igual que la operación de haces múltiples del etalón de Fabry-Perot agudizó sus franjas). En el caso de doble rendija, cuando el punto de observación está, de alguna forma, alejado del centro exacto de un máximo de irradiancia de dos ondas, una de cada rendija, está más o menos en fase mientras que la irradiancia, aunque reducida, será todavía apreciable. Por lo tanto, las regiones luminosas son bastante anchas. Por el contrario, con sistemas de rayos múltiples, si bien todas las ondas interfieren constructivamente en los centros de los máximos, hasta un pequeño desplazamiento hará que algunas de ellas lleguen fuera de fase en un $\frac{1}{2}\lambda$ con respecto a otras. Por ejemplo, supongamos que P esté ligeramente desplazado de θ_1 de manera que a sen $\theta = 1{,}010\lambda$ en lugar de $1{,}000\lambda$. Cada onda procedente de rendijas sucesivas llegará a P desplazada en

$0{,}01\lambda$ con respecto a la anterior. Luego, a una distancia de 50 rendijas de la primera, la longitud de trayectoria se habrá desplazado en $\frac{1}{2}\lambda$ y la luz entre la rendija 1 y la rendija 51 prácticamente se anulará. Lo mismo ocurriría con las parejas de rendijas 2 y 52, 3 y 53, etc. El resultado es una disminución rápida de la irradiancia más allá de los centros de los máximos.

Consideremos ahora la situación algo más general de incidencia oblicua como se muestra en las figuras 10.34 y 10.36. La ecuación de la red, tanto para transmisión como para reflexión, queda

$$a(\text{sen } \theta_m - \text{sen } \theta_i) = m\lambda \qquad (10.61)$$

Esta expresión se aplica también, independientemente del índice de refracción de la red de transmisión misma (problema 10.37). Una de las principales desventajas de los dispositivos examinados hasta ahora, y en efecto la razón de su desuso en la actualidad, es que esparcen la energía disponible sobre varios órdenes espectrales de baja irradiancia. Para una red como la que se muestra en la figura 10.36 la mayoría de la luz incidente es sometida a *reflexión especular* al igual que en un espejo plano. De la ecuación de la red se deduce que $\theta_m = \theta_i$ corresponde al orden cero, $m = 0$. Toda esta luz fundamentalmente se pierde, al menos para propósitos espectroscópicos, ya que las longitudes de onda constitutivas se superponen.

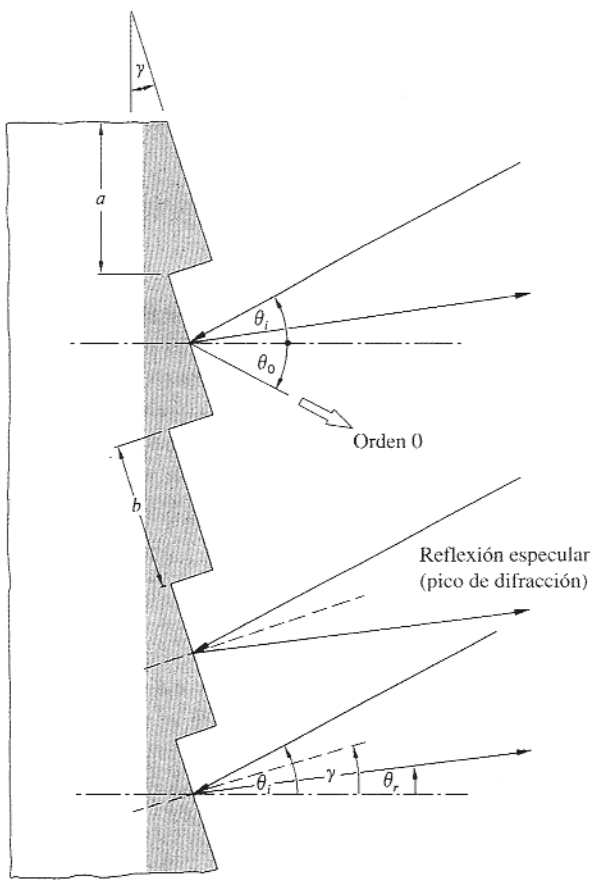


FIGURA10.37 Sección de una red de reflexión de fase con brillo.

En un artículo en la *Enciclopedia Británica* de 1888, Lord Rayleigh, sugirió que era posible, al menos teóricamente, desplazar la energía fuera del inútil orden cero hacia uno de los espectros de orden superior. Animado, Robert Williams Wood (1868-1955), en 1910, consiguió grabar unos surcos con una forma controlada, como se muestra en la figura 10.37. La mayoría de las redes modernas tienen esta forma o la de la variedad de ***brillo***. Las posiciones angulares de los órdenes diferentes de cero, los valores θ_m, están determinados por a, γ y, de interés más inmediato, θ_i. Pero θ_i y θ_m, se miden desde la normal al plano del retículo y no con respecto a las superficies individuales de los surcos. Por otro lado, la ubicación del máximo en la figura de difracción de una faceta simple corresponde a la *reflexión especular* lejos de esa cara, para cada surco. Se rige por el *ángulo de brillo* γ y se puede variar independientemente de θ_m. Esto es de alguna manera análogo a la disposición de antenas de la sección 10.1.3, donde pudimos controlar la posición espacial del patrón de interferencia [ecuación (10.6)] ajustando el desplazamiento relativo de fase entre las fuentes sin cambiar, en realidad, de orientaciones.

Consideremos la situación que se muestra en la figura 10.38 cuando la onda incidente es normal al plano de una red de reflexión con brillo, es decir, $\theta_i = 0$ y así para $m = 0$, $\theta_0 = 0$. Para *reflexión especular* $\theta_i - \theta_r = 2\gamma$ (figura 10.37), la mayoría de la radiación difractada se concentra ahora alrededor de $\theta_r = -2\gamma$. (θ_r es negativo porque los rayos incidente y refractado están en el mismo lado de la normal al retículo). Esto corresponderá a un orden particular diferente de cero, en un lado de la imagen central, cuando $\theta_m = -2\gamma$, es decir, a sen $(-2\gamma) = m\lambda$ para la λ y m deseadas.

Espectroscopía con redes

La mecánica cuántica que surgió al principio de los años veinte, tuvo su impulso inicial en el área de la física atómica. Se hicieron predicciones referentes a la estructura detallada del

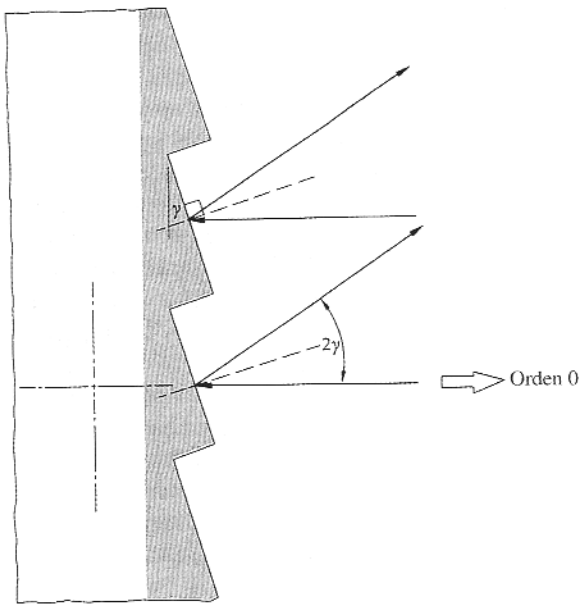


FIGURA10.38 Red con brillo.

átomo de hidrógeno como se manifestó por su radiación emitida mientras que la espectroscopía proporcionó la base vital de experiencias. La necesidad de redes más grandes y mejores se hizo evidente. Los espectrómetros de red, empleados sobre el rango desde los rayos X blandos hasta el infrarrojo lejano, han seguido despertando un interés continuo. En las manos del astrofísico o a bordo de un cohete, proporcionan información relativa a los orígenes del universo, información tan variada como la temperatura de una estrella, la rotación de una galaxia o el desplazamiento hacia el rojo en el espectro de un cuásar. Hacia mediados del siglo XX, George R. Harrison y George W. Stroke mejoraron destacadamente la calidad de las redes de alta resolución. Usaron una máquina de rayar [11] cuya operación estaba controlada por un servomecanismo guiado interferométricamente.

Examinemos ahora más detalladamente algunas de las principales características de un espectro de red. Imaginemos una fuente incoherente infinitesimalmente estrecha. El ancho efectivo de una línea espectral emergente puede definirse como la distancia angular entre los ceros a cada lado del máximo principal, es decir, $\Delta\alpha = 2\pi/N$, lo cual se deduce de la ecuación (10.33). Con incidencia oblicua podemos volver a definir α como $(ka/2)$ (sen θ − sen θ_i) y así un pequeño cambio en α está proporcionado por

$$\Delta\alpha = (ka/2)\cos\theta\,(\Delta\theta) = 2\pi/N \qquad (10.62)$$

donde el ángulo de incidencia es constante, es decir, $\Delta\theta_i = 0$. Por lo tanto, aun cuando la luz incidente es monocromática

$$\Delta\theta = 2\lambda/(Na\cos\theta_m) \qquad (10.63)$$

es el *ancho angular de una línea,* debido a *ensanchamiento instrumental.* Es interesante observar que el ancho angular de la línea varía inversamente con el ancho de la red misma, *Na.* Otra cantidad importante es la diferencia en la posición angular que corresponde a una diferencia en la longitud de onda. La **dispersión angular**, como en el caso de un prisma, se define como

$$\mathcal{D} \equiv d\theta/d\lambda \qquad (10.64)$$

Diferenciando la ecuación de la red, obtenemos

$$\mathcal{D} = m/(a\cos\theta_m) \qquad (10.65)$$

Esto significa que la separación angular entre dos líneas de diferente frecuencia aumenta al aumentar el orden.

Las redes planas con brillo y surcos casi rectangulares están montadas muy a menudo, de tal manera que el vector de propagación incidente es casi normal a una de las caras de los surcos. Esta es la condición de *autocolimación,* en la cual θ_i y θ_m están en el mismo lado de la normal y $\gamma \approx \theta_i \approx -\theta_m$ (véase figura 10.39) de donde

$$\mathcal{D}_{\text{auto}} = (2\tan\theta_i)/\lambda \qquad (10.66)$$

que es independiente de a.

Cuando la diferencia de longitudes de onda entre dos líneas es lo suficientemente pequeña para que se superpongan, el máximo resultante queda algo ambiguo. El poder de resolución cromático $\mathcal{R}$ de un espectrómetro se define como

$$\mathcal{R} \equiv \lambda/(\Delta\lambda)_{\min} \qquad [9.76]$$

donde $(\Delta\lambda)_{\min}$ es la diferencia mínima resoluble de longitudes de onda o **límite de resolución** y λ es la longitud de onda

[11] Para más detalles sobre estas máquinas maravillosas, véase A. R. Ingalls, *Sci. Amer.* **186**, 45 (1952) o el artículo de E. W. Palmer y J. F. Verrill, *Contemp. Phys.* **9**, 257 (1968).

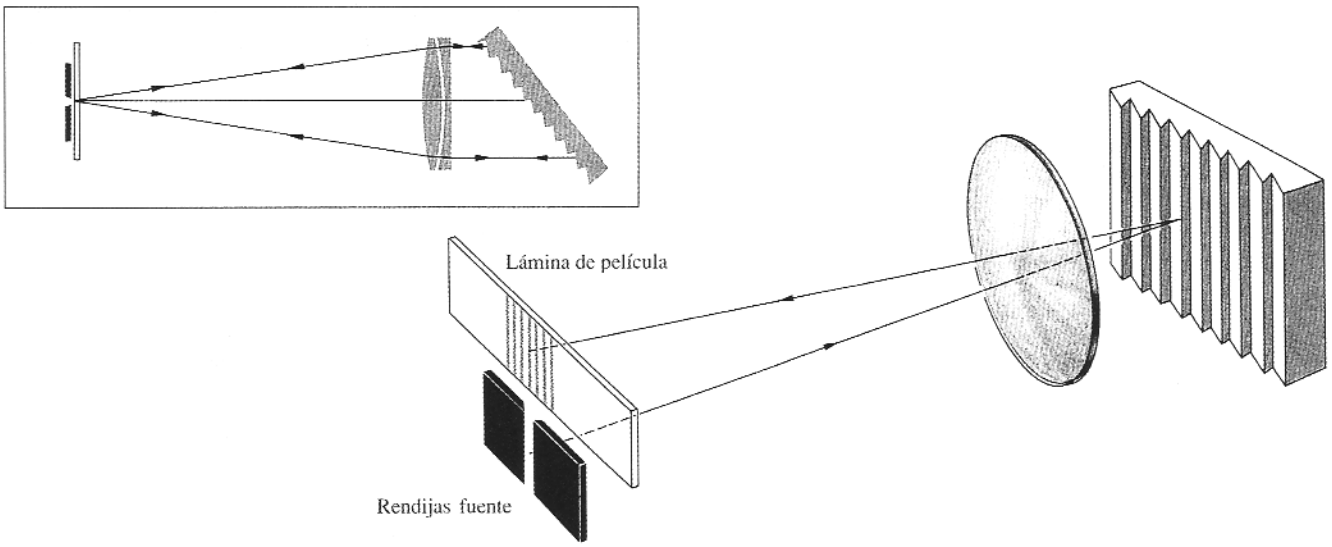


FIGURA 10.39 Montura autocolimadora de Littrow.

media. El criterio de Lord Rayleigh para la resolución de dos franjas de igual densidad de flujo requiere que el máximo principal de una coincida con el primer mínimo de la otra (compárese esto con la afirmación equivalente que se usó en la sección 9.6.1.). Como se muestra en la figura 10.40, en el límite de resolución la separación angular es la mitad del ancho de la línea, o de la ecuación (10.63)

$$(\Delta\theta)_{\text{min}} = \lambda/(Na\cos\theta_m)$$

Aplicando la expresión para la dispersión, obtenemos

$$(\Delta\theta)_{\text{min}} = (\Delta\lambda)_{\text{min}}\, m/(a\cos\theta_m)$$

Combinando estas dos ecuaciones obtenemos $\mathcal{R}$, es decir

$$\lambda/(\Delta\lambda)_{\text{min}} = mN \tag{10.67}$$

o

$$\mathcal{R} = \frac{Na(\text{sen}\,\theta_m - \text{sen}\,\theta_i)}{\lambda} \tag{10.68}$$

El poder de resolución es una función del ancho de la red Na, el ángulo de incidencia, y λ. Una red de 6 pulgadas de ancho y que contiene 15.000 líneas por pulgada, tendrá un total de 9×10^4 líneas y un poder de resolución, en el segundo orden, de $1{,}8 \times 10^5$. En la proximidad de 540 nm, el retículo podría resolver una diferencia de longitud de onda de 0,003 nm. Obsérvese que el poder de resolución no puede exceder de $2Na/\lambda$, lo cual ocurre cuando $\theta_i = -\theta_m = 90°$. Los valores más grandes de $\mathcal{R}$ se obtienen cuando la red se utiliza en autocolimación, de donde

$$\mathcal{R}_{\text{auto}} = \frac{2Na\,\text{sen}\,\theta_i}{\lambda} \tag{10.69}$$

y de nuevo θ_i y θ_m están ambas en el mismo lado de la normal. Para una de las redes con brillo de 260 mm de ancho de Harrison a unos 75° en una montura de Littrow, con $\lambda = 500$ nm, el poder de resolución supera ligeramente 10^6.

Ahora debemos considerar el problema de los órdenes superpuestos. La ecuación de la red deja muy claro que una línea de 600 nm en el primer orden tendrá exactamente la misma posición, θ_m, que una línea de 300 nm en el segundo orden o una línea de 200 nm cuando $m = 3$. Si las dos líneas de longitud de onda λ y $(\lambda + \Delta\lambda)$ en órdenes sucesivos $(m + 1)$ y m coinciden, entonces

$$a(\text{sen}\,\theta_m - \text{sen}\,\theta_i) = (m + 1)\lambda = m(\lambda + \Delta\lambda)$$

Esa diferencia de longitud de onda precisa se denomina **rango espectral libre***,

$$(\Delta\lambda)_{\text{fsr}} = \lambda/m \tag{10.70}$$

* N. del Revisor: *free spectral range* en inglés. Abreviatura correspondiente fsr.

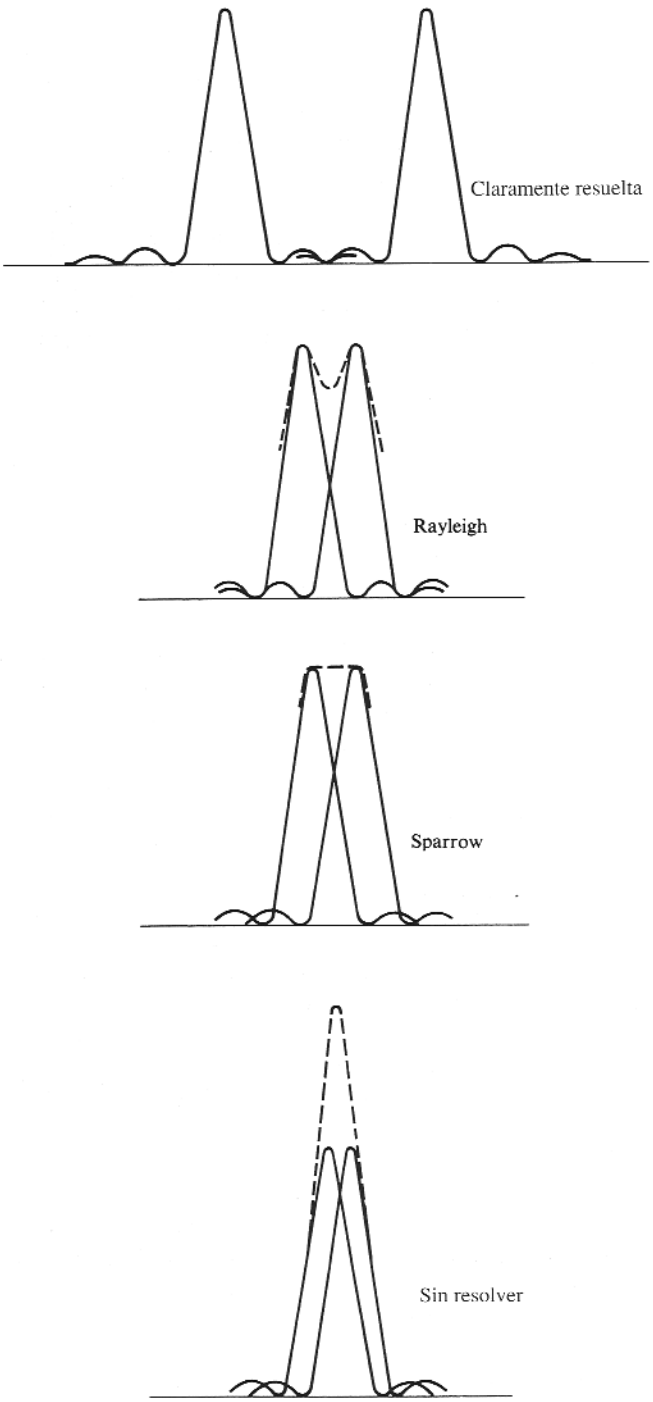


FIGURA 10.40 Imágenes puntuales superpuestas.

como lo era para el interferómetro de Fabry-Perot. En comparación con ese dispositivo, cuyo poder de resolución era

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}m \qquad [9.76]$$

podríamos tomar N como la fineza de una red de difracción (problema 10.38).

Una red de alta resolución con brillo para el primer orden, de tal manera que tenga el mayor rango espectral libre, requerirá una alta densidad de surcos (hasta alrededor de 1.200 líneas por mm) a fin de mantener $\mathcal{R}$. La ecuación (10.68) muestra que $\mathcal{R}$, puede mantenerse constante rayando menos líneas con un espaciado creciente tal que el ancho Na del retículo sea constante. Sin embargo, esto requiere un aumento de m y una disminución del rango libre espectral caracterizado por los órdenes superpuestos. Si esta vez N se mantiene constante mientras que sólo a se hace más grande, $\mathcal{R}$, aumenta al igual de m así que $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$ disminuye de nuevo. El ancho angular de una línea se reduce (es decir, las líneas espectrales se hacen más agudas) cuanto más basta sea la red, pero la dispersión en un orden dado disminuye, con el efecto de que las líneas en ese espectro se acercan unas a otras.

Hasta ahora hemos considerado un tipo particular de disposición periódica, esto es, la *red de líneas*. En la literatura [12] se encontrará bastante más información con respecto a sus perfiles, monturas, usos, etc.

Hay unos cuantos objetos caseros que pueden usarse como redes burdas. La superficie ranurada de un disco fonográfico funciona bien cerca de incidencia rasante mientras que los CD son redes reflectoras muy buenas. Es sorprendente que con $\theta_i \approx 90°$ un peine corriente de dientes finos separe las longitudes de onda constitutivas de la luz blanca. Esto ocurre exactamente en la misma forma que ocurriría con una red de reflexión más ortodoxa. En una carta enviada a un amigo, fechada el 12 de mayo de 1673, James Gregory indicaba que la luz del sol que pasaba a través de una pluma produciría una figura coloreada y pedía que sus observaciones se hicieran llegar al Sr. Newton. Si tenemos una pluma, veremos cómo ésta es una bonita red de transmisión.

Redes bi y tridimensionales

Supongamos que la pantalla de difracción Σ contenga un gran número, N, de objetos de difracción idénticos (aberturas u obs-

[12] Véase F. Kneubühl, «Diffraction Grating Spectroscopy», *Appl. Opt.* **8**, 505 (1969), R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics;* el extenso artículo de G. W. Stroke en la *Encyclopedia of Physics,* Vol. 29, editada por S. Flügge, pág. 426.

táculos) que se imaginarán como si estuvieran distribuidos sobre la superficie de Σ de forma totalmente al azar y que cada uno tenga una orientación similar. Imaginemos que la pantalla de difracción esté iluminada por ondas planas enfocadas por una lente perfecta L_2, después de salir de Σ (véase figura 10.16). Las aberturas individuales generan figuras de difracción de Fraunhofer idénticas, superponiéndose todas ellas en el plano imagen σ. Si no hay periodicidad regular en la ubicación de las aberturas, no podemos anticipar nada sino una distribución al azar en las fases relativas de las ondas que llegan a un punto arbitrario P en σ. Sin embargo, tenemos que ser muy cuidadosos porque hay una excepción que se da cuando P está en el eje central, es decir, $P = P_0$. Todos los rayos, de todas las aberturas, paralelos al eje central recorrerán iguales longitudes de camino óptico antes de alcanzar P_0, llegando, por consiguiente, en fase e interfiriendo constructivamente.

Consideremos ahora un grupo de rayos paralelos arbitrariamente dirigidos (no en la dirección del eje central), cada uno de los cuales se emite desde una abertura diferente, enfocándose todos ellos en algún punto en σ, de tal manera que cada onda correspondiente tenga la misma probabilidad de llegar con cualquier fase entre 0 y 2π. Lo que hay que determinar es el campo resultante de la superposición de los N fasores de igual amplitud, todos ellos con fases relativas al azar. La solución a este problema requiere un análisis esmerado en términos de teoría de las probabilidades, lo cual sería algo complicado aquí [13]. Lo importante es que la suma de un número de fasores escogidos a ángulos al azar no es simplemente cero, como podría imaginarse. Por razones estadísticas, el análisis general empieza imaginando un número elevado de pantallas de abertura individual, cada cual contiene un número N de aberturas de difracción al azar, iluminadas, a su vez, por una onda monocromática. No debería sorprender el que exista alguna diferencia, aunque pequeña, entre las figuras de difracción de dos distribuciones al azar distintas de, digamos, $N = 100$ agujeros —al fin y al cabo, son diferentes y cuanto más pequeño sea N, más patente será esto. Se puede prever que sus similitudes aparezcan en las estadísticas al considerar un gran número de dichas máscaras— de ahí, el planteamiento general.

Si se calcula un promedio de las numerosas distribuciones de irradiancias individuales resultantes para un punto *fuera del eje* en σ, se hallará que la irradiancia media (I_{med}) equivale a N multiplicada por la irradiancia (I_0) debida a una abertura individual: $I_{\text{med}} = NI_0$. Sin embargo, la irradiancia en un punto cualquiera que procede de una pantalla de abertura cualquiera, puede ser diferente de este valor promedio en una cantidad bastante grande, independientemente de la magnitud de N. Estas fluctuaciones de punto a punto alrededor del promedio, se hace patente en cada patrón particular en forma de granularidad que tiende a mostrar una estructura fibrosa radial. Si este moteado de grano fino se promedia en una pequeña región del patrón, que contenga sin embargo numerosas fluctuaciones, se promediará a NI_0.

Naturalmente, en cualquier experimento real, la situación no se acercará a la ideal – la luz monocromática no existe y tampoco existe un conjunto verdaderamente al azar de objetos de difracción (no superpuestos). No obstante, con una pantalla que contenga un número N de aberturas «al azar» bajo iluminación cuasimonocromática, de ondas casi planas, podemos anticipar la observación de una distribución de densidad de flujo moteada, muy parecida a la de una abertura individual pero N veces más intensa. Además, habrá un punto luminoso exactamente en el centro del eje, cuya densidad de flujo es N^2 veces la de una abertura individual. Si, por ejemplo, la pantalla contiene N agujeros rectangulares (figura 10.41*a*), la distribución resultante (figura 10.41*b*) se parecerá a la de la figura 10.24. De manera parecida, un conjunto de agujeros circulares representado en la figura 10.41*c* producirá los anillos de difracción de la figura 10.41*d*.

Conforme vaya aumentando el número de aberturas, el punto central tenderá a volverse tan brillante como para oscurecer el resto del patrón. Obsérvese también que las consideraciones anteriores se aplican cuando las aberturas se iluminan completa y coherentemente. En realidad, la distribución de densidad de flujo difractado estará determinada por el grado de coherencia (véase capítulo 12). La distribución pasará por toda la gama desde la no interferencia con luz completamente incoherente hasta el caso analizado anteriormente para iluminación completamente coherente (problema 10.40).

El mismo tipo de efectos aparece de lo que podríamos llamar una *red de fase* bidimensional. Por ejemplo, el halo o corona que se ve a menudo alrededor del Sol o de la Luna resulta de la difracción de gotitas de vapor de agua distribuidas al azar (es decir, partículas de nubes). Si desea reproducir el efecto, empañe un portaobjetos de microscopio con el aliento o frote una película muy delgada de polvo de talco en el mismo, empañándolo después. Míre hacia una fuente puntual de luz blanca: se

[13] Para un análisis estadístico, consúltense J. M. Stone, *Radiation and Optics*, pág. 146 y Sommerfeld, *Optics*, pág. 194. Examínese también «Diffraction Plates for Classrooms Demonstrations», de R. B. Hoover, *Am. J. Phys.* **37**, 871 (1969), y T. A. Wiggins, «Hole Gratings for Optics Experiments», *Am. J. Phys.* **53**, 227 (1985).

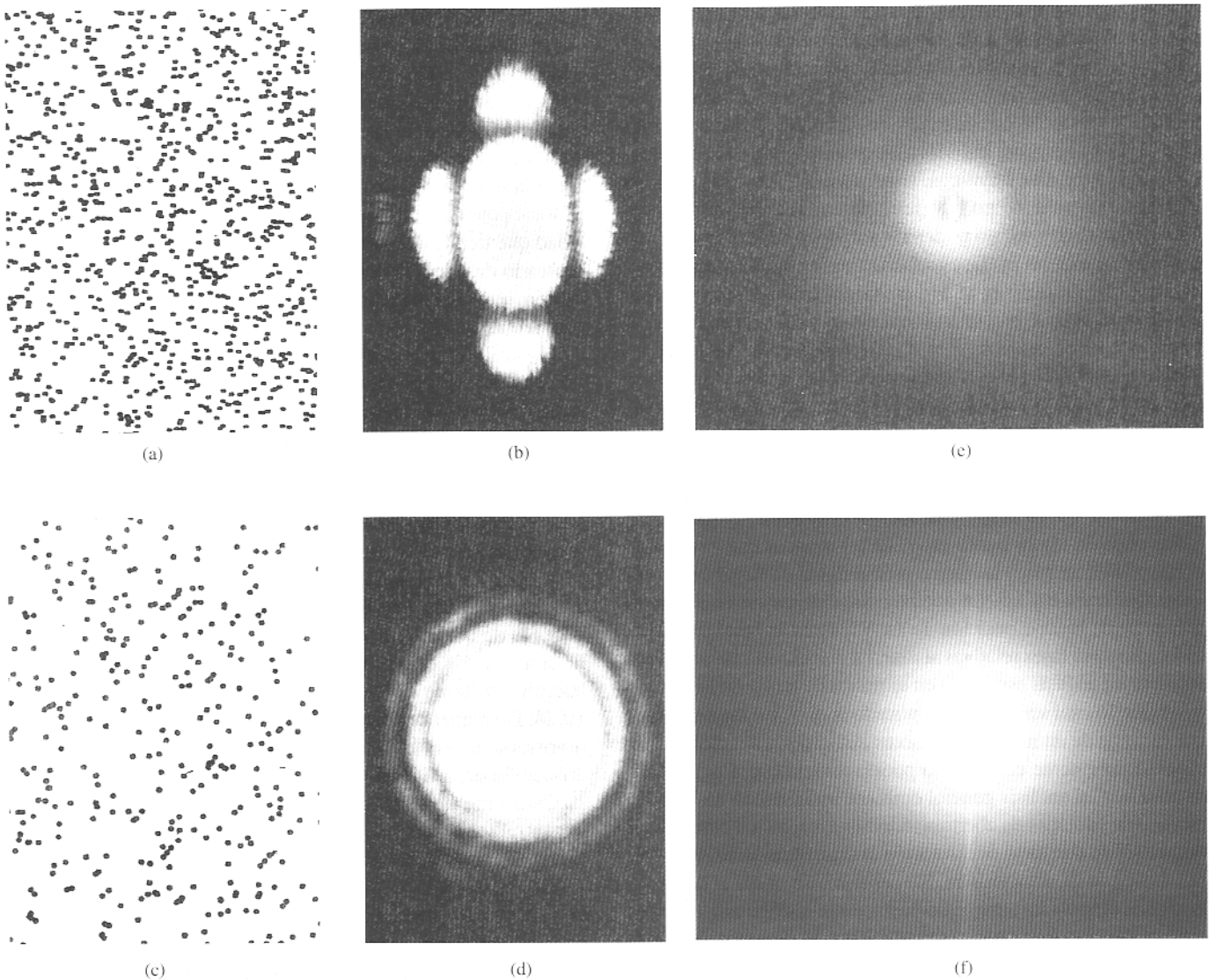
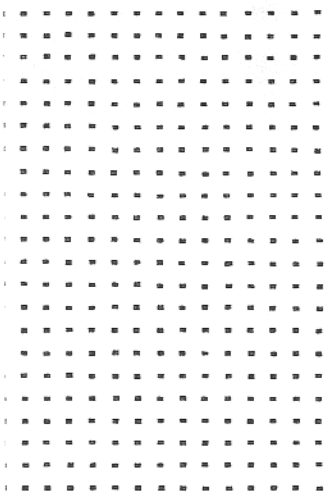


FIGURA 10.41 *(a)* Un conjunto al azar de aberturas rectangulares *(b)* La distribución de Fraunhofer de luz blanca resultante. *(c)* Un conjunto al azar de aberturas circulares. *(d)* La distribución de Fraunhofer de luz blanca resultante. (Fotos cedidas por The Ealing Corporation y Richard B. Hoover.) *(e)* Llama de una vela observada a través de un trozo de vidrio cargado de niebla. Los colores espectrales se visualizan como anillos concéntricos. (Fotos de E.H.). *(f)* Un sistema anular coloreado similar producido al mirar una fuente puntual de luz blanca a través de una lámina de vidrio cubierta con esporas esféricas transparentes de licopodio. (Fotos de E.H.)

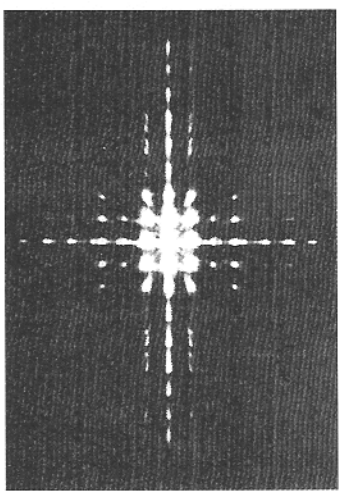
verá un patrón de anillos claros, coloreados, concéntricos [ecuación (10.56)] rodeando un disco central blanco. Si se ve sólo una mancha blanca, es que no hay una distribución de gotitas de aproximadamente el mismo tamaño; llévese a cabo entonces otro intento con el talco. Unas distribuciones sorprendentemente bonitas con sistemas de anillos aproximadamente concéntricos pueden verse a través de la *malla* de una media de nilón corriente. Si somos lo suficientemente afortunados y tenemos lámparas de vapor de mercurio en la calle, podrán observarse sus frecuencias espectrales visibles constitutivas sin

problemas. (De lo contrario, cúbrase la mayor parte de una lámpara fluorescente, dejando algo semejante a una pequeña fuente.) Obsérvese cómo aumenta la simetría al aumentar el número de capas de nilón. Por cierto, ésta es precisamente la forma en la que Rittenhouse, el inventor de la red, se interesó por el problema, sólo que él usó un pañuelo de seda.

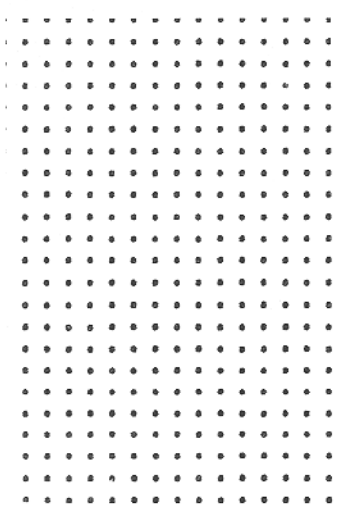
Consideremos el caso de un conjunto bidimensional *regular* de elementos de difracción (figura 10.42) bajo iluminación de ondas planas normalmente incidentes. Cada elemento pequeño se comporta como una fuente coherente y, debido a la periodicidad regular del retículo de emisores, cada onda emergente tiene una relación de fase fija con respecto a las otras. Habrá ahora ciertas direcciones en las que prevalezca la interferencia constructiva que se darán, obviamente, cuando las distancias desde cada elemento de difracción hasta P son tales que las ondas están casi en fase al llegar. El fenómeno puede observarse mirando una fuente puntual a través de una pieza de *tejido cuadrado*, una tela delgada (como el material de nilón para cortinas; véase figura 10.42*e*) o la malla metálica fina de un colador de té. La imagen difractada es efectivamente la superposición de dos



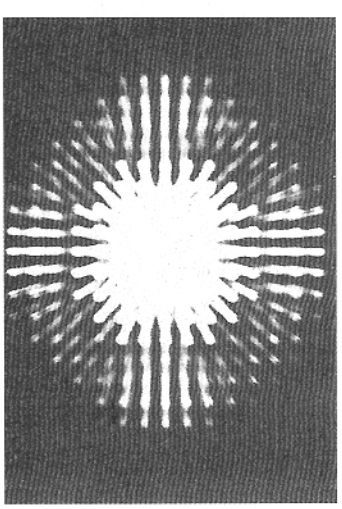
(a)



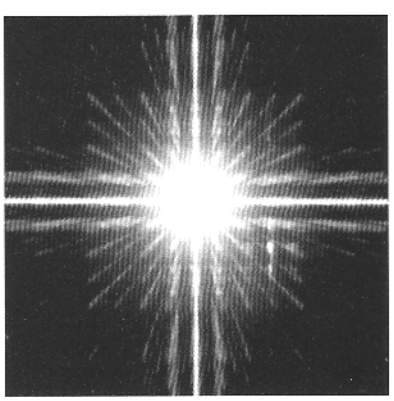
(b)



(c)



(d)



(e)

FIGURA 10.42 *(a)* Un conjunto ordenado de aberturas rectangulares *(b)* La distribución de Fraunhofer de luz blanca resultante. *(c)* Un conjunto ordenado de aberturas circulares. *(d)* La distribución de Fraunhofer de luz blanca resultante. (Fotos cedidas por The Ealing Corporation y Richard B. Hoover.) *(e)* Una fuente puntual de luz blanca vista a través de un trozo de tejido de entramado denso. (Fotos de E.H.)

distribuciones reticulares en ángulos rectos. Examínese atentamente el centro del patrón para ver la estructura reticular.

Acerca de la posibilidad de una *red tridimensional*, parece que no hay ninguna dificultad conceptual. Un conjunto espacial regular de centros de dispersión daría como resultado unos máximos de interferencia en unas direcciones escogidas En 1912, Max von Laue (1879-960) tuvo la genial idea de utilizar los átomos de espaciado regular dentro de un cristal como una red tridimensional. De la ecuación de la red [ecuación (10.61)] es evidente que si λ es mucho más grande del espaciado de la red, sólo podrá existir el orden cero ($m = 0$). Esto equivale a $\theta_0 = \theta_i$, es decir, la reflexión especular. Puesto que el espaciado entre átomos en un cristal tiene, por lo general, unos angstroms (1 Å = 10^{-1} nm), la luz puede difractarse tan sólo en el orden cero.

La solución de von Laue al problema miraba comprobar la red, no con luz, sino con rayos X, cuyas longitudes de onda eran comparables con las distancias interatómicas (figura 10.43). Un haz estrecho de radiación blanca (el rango de frecuencia ancho continuo emitido por un tubo de rayos X) se dirigió hacia un monocristal delgado. La placa fotográfica (figura 10.44) reveló una distribución de Fraunhofer que consistía en un conjunto de puntos caracterizados por su localización precisa. Estos lugares de interferencia constructiva se daban siempre que el ángulo entre el haz y un conjunto de planos atómicos dentro del cristal obedecían la ley de Bragg:

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \tag{10.71}$$

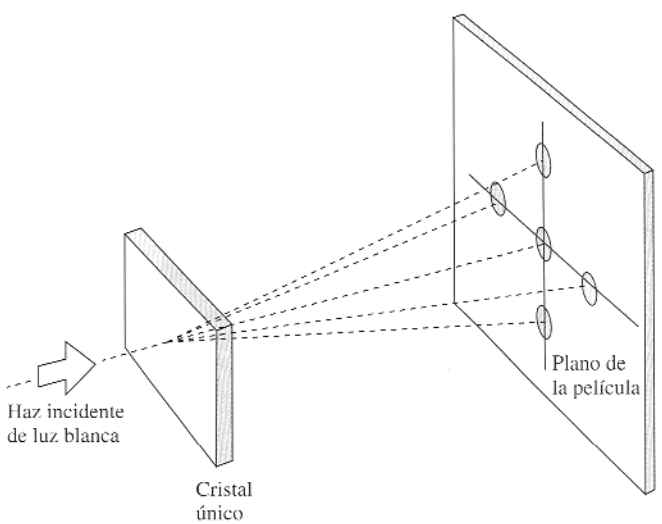


FIGURA 10.43 Distribución de transmisión de Laue.

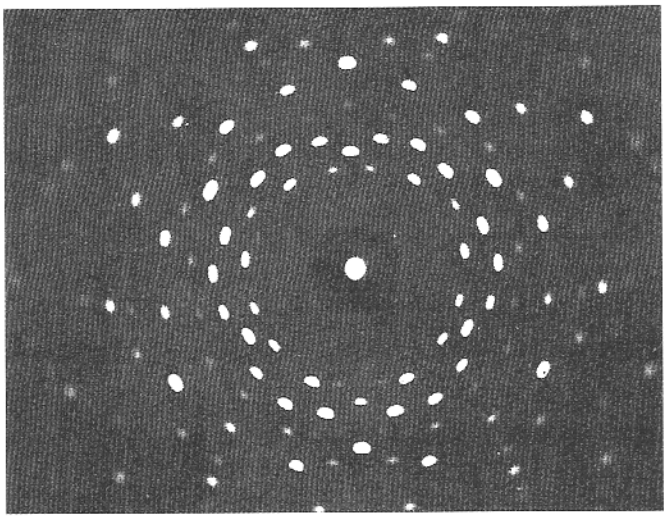


FIGURA 10.44 Figura de difracción de rayos X para cuarzo (SiO_2). (Fuente desconocida.)

Obsérvese que en los trabajos con rayos X, θ se mide característicamente desde el plano y no desde la normal a él. Cada conjunto de planos difracta una longitud de onda particular en una dirección particular. La figura 10.45 muestra de manera sorprendente el comportamiento análogo en un tanque de ondas.

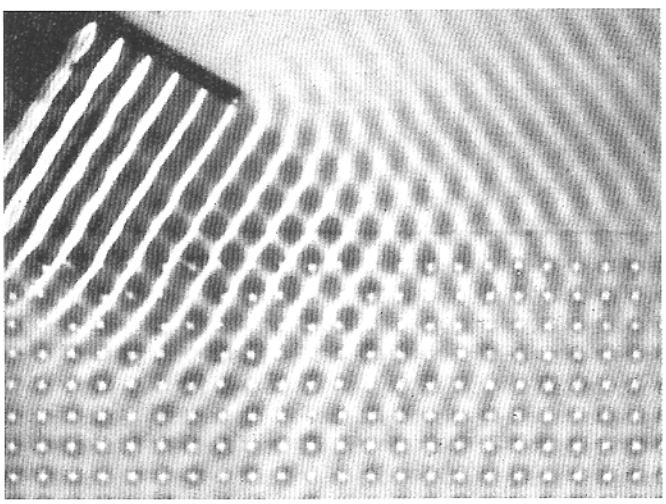


FIGURA 10.45 Ondas de agua en un tanque reflejándose en un conjunto de estacas que actúan como difusores puntuales. [Foto cedida por PSSC *Physics*, D. C Heath, Boston, 1960.)

En lugar de reducir λ al rango de los rayos X, podríamos también haberlo aumentado todo proporcionalmente por un factor de alrededor de un billón y haber realizado una red de esferas metálicas como una red para microondas.

10.3 Difracción de Fresnel

10.3.1 La propagación libre de una onda esférica

En la configuración de Fraunhofer, el sistema de difracción era relativamente pequeño, mientras que el punto de observación estaba muy distante. Bajo estas circunstancias, unas pocas características potencialmente problemáticas del principio de Huygens-Fresnel pudieron pasarse completamente por alto. Pero ahora vamos a analizar la región de campo cercano que se extiende hasta el elemento de difracción mismo, por lo tanto cualquiera de esas aproximaciones sería inapropiada. Por consiguiente, regresemos al principio de Huygens-Fresnel a fin de examinarlo nuevamente más de cerca. En todo instante, cada punto en el frente de onda primario se visualiza como emisor continuo de trenes de onda esféricos secundarios. Pero si cada ondita se radiara uniformemente en todas las direcciones, además de generarse una onda que viaja hacia adelante, aparecería también una onda que viajaría hacia atrás hacia la fuente. Puesto que no se encuentra ninguna onda semejante experimentalmente, de alguna manera debemos modificar la distribución de radiación de los emisores secundarios. Ahora introducimos la función $K(\theta)$, denominada **factor de oblicuidad o de inclinación**, a fin de describir la direccionalidad de las emisiones secundarias. Fresnel mismo reconoció la necesidad de introducir una cantidad de este tipo, pero lo único que hizo fue conjeturar acerca de su forma [14].

[14] Es interesante leer las propias palabras de Fresnel sobre este tema, teniendo en mente que él estaba hablando de la luz como vibración elástica del éter.

> «Ya que el impulso comunicado a cada parte de la onda primitiva estaba dirigido a lo largo de la normal, el movimiento que cada una tiende a imprimir en el éter debe ser más intenso en esta dirección que en cualquier otra; además, los rayos que emanarían de él, si actuaran solos, serían cada vez menos intensos según fueran desviándose cada vez más de esta dirección.
>
> La investigación de la ley de acuerdo a la cual su intensidad varía alrededor de cada centro de perturbación es, sin lugar a dudas, un tema muy difícil...»

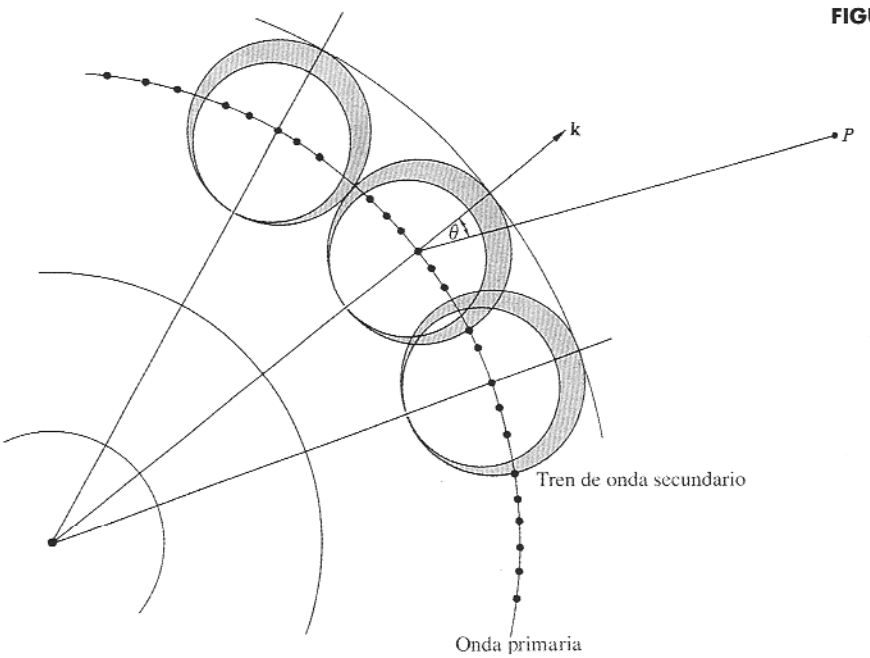


FIGURA 10.46 Trenes de onda secundarios.

Le tocó a la formulación más analítica de Kirchhoff facilitar una expresión real para $K(\theta)$, la cual, como veremos en la sección 10.4, resulta ser

$$K(\theta) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos\theta) \tag{10.72}$$

Como se muestra en la figura 10.46, θ es el ángulo que se forma con la normal al frente de onda primario, **k**, cuyo valor máximo es $K(0) = 1$ en la dirección hacia delante, eliminando además la onda que regresa ya que $K(\pi) = 0$.

Examinemos ahora la propagación libre de una onda esférica monocromática emitida por una *fuente puntual S*. Si el principio de Huygens-Fresnel es correcto, deberíamos ser capaces de sumar los trenes de onda secundarios que llegan al punto P y obtener, entonces, la onda primaria sin obstrucción. Durante este proceso, iremos acumulando algún conocimiento, distinguiremos algunos fallos y desarrollaremos una técnica muy útil. Consideremos la construcción que se muestra en la figura 10.47. La superficie esférica corresponde al frente de onda primario en algún tiempo arbitrario t' después de que haya sido emitida por S en $t = 0$. La perturbación, que tiene un radio ρ, puede representarse por cualquiera de las expresiones matemáticas que describen una onda armónica esférica, por ejemplo,

$$E = \frac{\mathcal{E}_0}{\rho}\cos(\omega t' - k\rho) \tag{10.73}$$

Como se ilustra, hemos dividido el frente de onda en varias regiones anulares cuyas fronteras corresponden a las intersecciones del frente de onda con una serie de esferas centradas en P de radios $r_0 + \lambda/2$, $r_0 + \lambda$, $r_0 + 3\lambda/2$, etc. Se trata de las **zonas de semiperíodo** o **de Fresnel**. Obsérvese que, para una fuente puntual secundaria en una zona, habrá una fuente puntual en la zona adyacente alejada de P de una distancia $\lambda/2$. Ya que cada zona, aunque pequeña, tiene una extensión finita, definimos un elemento diferencial de área dS en forma de anillo como se indica en la figura 10.48. Todas las fuentes puntuales dentro de dS son coherentes y *damos por sentado que cada una radia en fase con la onda primaria* [ecuación (10.73)]. Los trenes de onda secundarios recorren una distancia r para alcanzar P, en el tiempo t, llegando todos ellos con la misma fase, $\omega t - k(\rho + r)$. La amplitud de la onda primaria a una distancia ρ de S es $\mathcal{E}_0/\rho$. Por lo tanto, suponemos que la eficacia de la fuente por unidad de área $\mathcal{E}_A$ de los emisores secundarios en dS es proporcional a $\mathcal{E}_0/\rho$ por medio de una constante Q, es decir, $\mathcal{E}_A = Q\mathcal{E}_0/\rho$. Por consiguiente, la contribución de la perturbación óptica en P de las fuentes secundarias en dS es

$$dE = K\frac{\mathcal{E}_A}{r}\cos[\omega t - k(\rho + r)]\,dS \tag{10.74}$$

El factor de oblicuidad debe variar lentamente, pudiéndose suponer constante en una zona de Fresnel individual. Para obtener dS como función de r comenzamos por

$$dS = \rho\,d\varphi\,2\pi(\rho \operatorname{sen}\varphi)$$

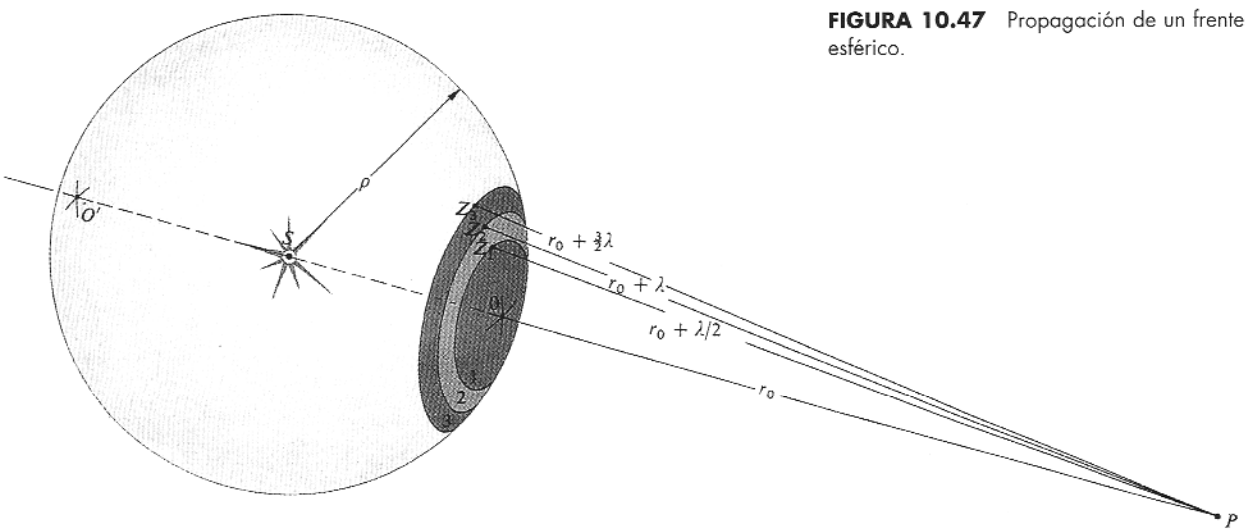


FIGURA 10.47 Propagación de un frente de onda esférico.

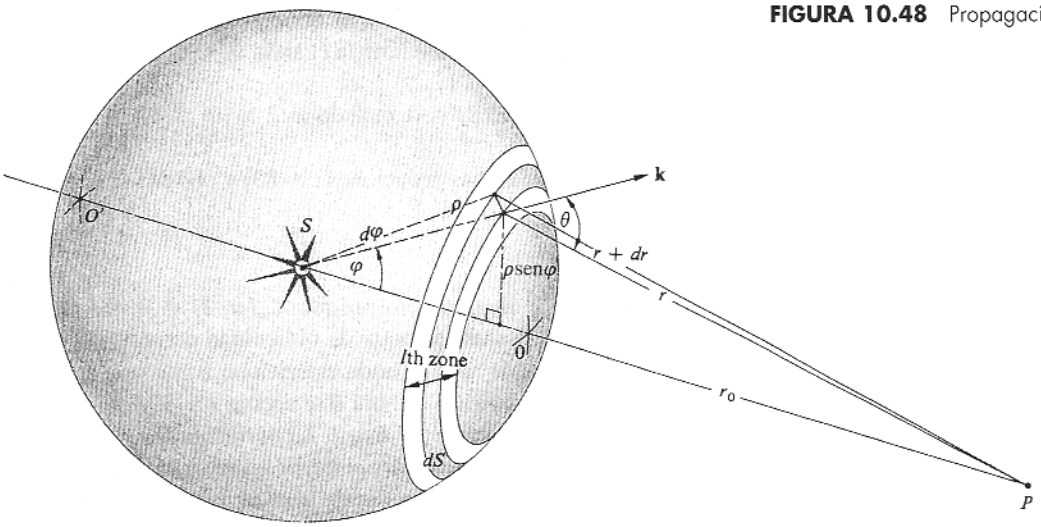


FIGURA 10.48 Propagación de un frente de onda esférico.

Aplicando la ley de cosenos, obtenemos

$$r^2 = \rho^2 + (\rho + r_0)^2 - 2\rho(\rho + r_0)\cos\varphi$$

Después de diferenciarla, obtenemos

$$2r\,dr = 2\rho(\rho + r_0)\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi$$

manteniendo constantes ρ y r_0. Utilizando el valor de $d\varphi$, encontramos que el área del elemento es por consiguiente

$$dS = 2\pi \frac{\rho}{(\rho + r_0)} r\,dr \tag{10.75}$$

La perturbación que llega a P de la zona l-ésima es

$$E_l = K_l 2\pi \frac{\mathcal{E}_A \rho}{(\rho + r_0)} \int_{r_{l-1}}^{r_l} \cos[\omega t - k(\rho + r)]\,dr$$

por lo tanto

$$E_l = \frac{-K_l \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} [\text{sen}(\omega t - k\rho - kr)]_{r = r_{l-1}}^{r = r_l}$$

Con la introducción de $r_{l-1} = r_0 + (l-1)\lambda/2$ y $r_l = r_0 + l\lambda/2$, la expresión se reduce (problema 10.42) a

$$E_l = (-1)^{l+1} \frac{2K_l \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} \text{sen}\,[\omega t - k(\rho + r_0)] \tag{10.76}$$

Obsérvese que la amplitud de E_l, se sucede entre valores positivos y negativos, dependiendo de si l es impar o par. Esto significa que las contribuciones de zonas adyacentes están fuera de fase y tienden a anularse. Es aquí donde el factor de oblicuidad constituye una diferencia decisiva. Según l vaya aumentando, θ aumenta y K disminuye, de tal manera que las contribuciones sucesivas de hecho no se anulan completamente unas a otras. Es interesante notar que E_l/K_l es independiente de cualquier variable de posición. Aunque las áreas de cada zona sean casi iguales, aumentan sin embargo ligeramente conforme l aumenta, lo que significa un número mayor de emisores. Pero la distancia media de cada zona hasta P también aumenta de tal manera que E_l/K_l se mantiene constante (véase problema 10.43).

La suma de las perturbaciones ópticas de todas las zonas m en P es

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_m$$

y ya que éstos se suceden en signo, podemos escribir

$$E = |E_1| - |E_2| + |E_3| - \cdots \pm |E_m| \tag{10.77}$$

Si m es impar, la serie puede redefinirse de dos maneras, bien sea como

$$E = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2}\right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{|E_{m-2}|}{2} - |E_{m-1}| + \frac{|E_m|}{2}\right) + \frac{|E_m|}{2} \tag{10.78}$$

o como

$$E = |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \left(\frac{|E_2|}{2} - |E_3| + \frac{|E_4|}{2}\right) - \left(\frac{|E_4|}{2} - |E_5| + \frac{|E_6|}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{|E_{m-3}|}{2} - |E_{m-2}| + \frac{|E_{m-1}|}{2}\right) - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m| \tag{10.79}$$

Ahora, tenemos dos posibilidades: o bien $|E_l|$ es mayor que la media aritmética de sus dos vecinos $|E_{l-1}|$ y $|E_{l+1}|$, o es menor que la misma. Es en realidad una cuestión que tiene que ver con la rapidez de cambio de $K(\theta)$. Cuando

$$|E_l| > (|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)/2$$

cada término entre paréntesis es negativo. De la ecuación (10.78) se deduce que

$$E < \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \tag{10.80}$$

y de la ecuación (10.79) que

$$E > |E_1| - \frac{|E_2|}{2} - \frac{|E_{m-1}|}{2} + |E_m| \tag{10.81}$$

Ya que el factor de oblicuidad va de 1 a 0 en muchas zonas, podemos despreciar cualquier variación entre zonas adyacentes, es decir, $|E_1| \approx |E_2|$ y $|E_{m-1}| \approx |E_m|$. La expresión (10.81), con el mismo grado de aproximación, queda

$$E > \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \tag{10.82}$$

De las ecuaciones (10.80) y (10.82) concluimos que

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} + \frac{|E_m|}{2} \tag{10.83}$$

Este mismo resultado se obtiene cuando

$$|E_l| < (|E_{l-1}| + |E_{l+1}|)/2$$

Cuando el último término $|E_m|$, en la serie de la ecuación (10.77), corresponde a un valor par de m, el mismo procedimiento (problema 10.44) lleva a

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} - \frac{|E_m|}{2} \tag{10.84}$$

Fresnel supuso que el factor de oblicuidad era tal que la última zona de contribución ocurriría cuando $\theta = 90°$, es decir

$$K(\theta) = 0 \text{ cuando } \pi/2 \leq |\theta| \leq \pi$$

En ese caso, ambas ecuaciones (10.83) y (10.84) se reducen a

$$E \approx \frac{|E_1|}{2} \tag{10.85}$$

cuando $|E_m|$ llega a cero porque $K_m(\pi/2) = 0$. De manera alternativa, usando el factor de oblicuidad correcto de Kirchhoff, dividimos *toda* la onda esférica en zonas con la última zona m rodeando a 0'. Ahora θ se acerca a π, $K_m(\pi) = 0$, $|E_m| = 0$ y una vez más $E \approx |E_1|/2$. *La perturbación óptica generada por el frente de onda completa sin obstrucción es aproximadamente igual a la mitad de la contribución de la primera zona.*

Si la onda primaria se propagara simplemente de S a P en un tiempo t, tendría la forma

$$E = \frac{\mathcal{E}_0}{(\rho + r_0)} \cos[\omega t - k(\rho + r_0)] \tag{10.86}$$

Y sin embargo la perturbación sintetizada de los trenes de onda secundarios de las ecuaciones (10.76) y (10.85), es

$$E = \frac{K_1 \mathcal{E}_A \rho \lambda}{(\rho + r_0)} \operatorname{sen}[\omega t - k(\rho + r_0)] \tag{10.87}$$

Puesto que estas dos ecuaciones tienen que ser exactamente equivalentes, interpretamos las constantes en la ecuación (10.87) para que así sea. Obsérvese que hay alguna latitud en la que podemos hacerlo. Preferimos que el factor de oblicuidad sea igual a uno en la dirección hacia adelante, es decir, $K_1 = 1$ (en lugar de $1/\lambda$), de donde se deduce que Q debe ser igual a $1/\lambda$. En ese caso, $\mathcal{E}_A \rho \lambda = \mathcal{E}_0$, lo cual es dimensionalmente correcto. Tenga presente que $\mathcal{E}_A$ es la eficacia de fuente de los trenes de onda secundarios por unidad de área sobre el frente de onda primario de radio ρ y $\mathcal{E}_0/\rho$ es la amplitud de esa onda primaria $E_0(\rho)$. Entonces $\mathcal{E}_A = E_0(\rho)/\lambda$. Hay otro problema, que es la diferencia de fase $\pi/2$ entre las ecuaciones (10.86) y (10.87) que puede explicarse si estamos dispuestos a suponer que las fuentes secundarias radian un cuarto de longitud de onda desfasadas con la onda primaria (véase sección 4.3.2).

Hemos encontrado que es necesario modificar el enunciado inicial del principio de Huygens-Fresnel, pero eso no debería alejarnos de nuestras razones bastante pragmáticas para usarlo, que son de dos clases: (1) puede demostrarse que la teoría

de Huygens-Fresnel es una aproximación de la formulación de Kirchhoff y, como tal, ya no es solamente un ingenio, y (2) proporciona, en una forma muy simple, muchas predicciones que están de acuerdo con las observaciones experimentales. No olvidemos que funcionaba muy bien en la aproximación de Fraunhofer.

10.3.2 La curva de vibración

Desarrollaremos ahora un método gráfico para analizar cualitativamente varios problemas de difracción que aparecen principalmente en configuraciones circularmente simétricas.

Imaginemos que la primera zona de Fresnel o polar de la figura 10.47 esté divida en N subzonas por la intersección de esferas, centradas en P de radios

$$r_0 + \lambda/2N,\ r_0 + \lambda/N,\ r_0 + 3\lambda/2N, \ldots,\ r_0 + \lambda/2$$

Cada subzona contribuye a la perturbación en P, cuya resultante es precisamente E_1. Ya que la diferencia de fase en la zona completa, desde O a su borde, es π radianes (correspondiendo a $\lambda/2$) cada subzona se desplaza π/N radianes. La figura 10.49 muestra la suma vectorial de los fasores de la subzona donde, por conveniencia, $N = 10$. La cadena de fasores se desvía muy ligeramente del círculo, porque el factor de oblicuidad se reduce en cada amplitud sucesiva. Cuando el número de subzonas se aumenta a infinito (es decir, $N \to \infty$)), el polígono de vectores se fusiona en un segmento de una espiral suave llamada **curva de vibración**. Para cada zona de Fresnel adicional, la curva de vibración da *media vuelta* y una fase de π mientras se mueve en espiral hacia adentro. Como se muestra en la figura 10.50, los puntos O_S, Z_{S1}, Z_{S2}, Z_{S3},..., O'_S en la espiral corresponden a los puntos O, Z_1, Z_2, Z_3,..., O' respectivamente, en el frente de onda de la figura 10.47. Cada punto Z_1, Z_2, Z_3... Z_m se halla en la periferia de una zona así que cada punto Z_{S1}, Z_{S2}...Z_{sm} está separado por media vuelta. Como veremos más tarde, en la ecuación (10.91), el radio de cada zona es proporcional a la raíz cuadrada de su designación numérica, m. El radio de la centésima zona será solamente diez veces el de la primera. Inicialmente, por lo tanto, el ángulo θ aumenta rápidamente y, de ahí en adelante, más lentamente conforme m vaya haciéndose más grande. Por consiguiente, $K(\theta)$ disminuye rápidamente solamente para las primeras zonas. El resultado es que la espiral se va enrollando al aumentar m, haciéndose cada vez más estrecha y desviándose de un círculo en una cantidad cada vez más pequeña cada revolución.

Recuérdese que la espiral está formada por un número infinito de fasores, cada uno desplazado en un pequeño ángulo de desfase. La fase relativa entre dos perturbaciones cualquiera en

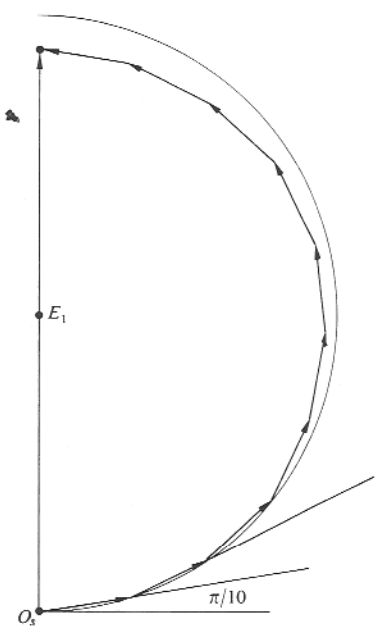


FIGURA 10.49 Suma de fasores.

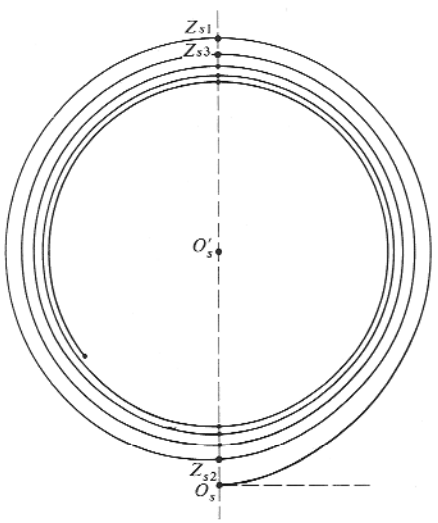


FIGURA 10.50 Curva de vibración.

P, procedentes de dos puntos en el frente de onda, digamos O y A, puede representarse como se muestra en la figura 10.51. El ángulo formado por las tangentes a la curva de vibración, en los puntos O_S y A_S es β, y ésta es la diferencia de fase deseada. Si se supone que el punto A se halla en la frontera de una región del frente de onda en forma de casquete, la resultante en P de la región completa es $\overrightarrow{O_sA_s}$ con un ángulo δ.

La perturbación total que llega a P de una onda sin obstáculos es la suma de las contribuciones de todas las zonas entre O y O'. La longitud del vector desde O_s hasta O'_s es, por lo tanto, precisamente esa amplitud. Obsérvese que, como estaba previsto, la amplitud $O_sO'_s$ es aproximadamente la mitad de la contribución de la primera zona, O_sZ_{s1}. Obsérvese que $\overrightarrow{O_sO'_s}$ tiene una fase de 90° con respecto a la onda que llega a P desde O. Una ondita emitida de O en fase con la excitación primaria llega a P aún en fase con la onda primaria. Esto significa que $\overrightarrow{O_sO'_s}$ está desfasada 90° con la onda primaria no obstruida. Como hemos visto, se trata de uno de los defectos de la formulación de Fresnel.

10.3.3 Aberturas circulares

Ondas esféricas

El procedimiento de Fresnel aplicado a una fuente puntual puede usarse como un método semicuantitativo a fin de estudiar la difracción en una abertura circular. Visualicemos una onda esférica monocromática incidiendo en una pantalla que contiene un agujero pequeño, como se ilustra en la figura 10.52. Primero registramos la irradiancia que llega a un sensor diminuto colocado en el punto P en el eje de simetría. Nuestra intención es mover el sensor por todas partes en el espacio y así obtener un mapa punto por punto de la irradiancia en la región más allá de Σ.

Supongamos que el sensor en P «ve» un número entero de zonas, m, que llenan la abertura. En realidad, el sensor solamente registra la irradiancia en P; las zonas no existen en realidad. Si m es par, entonces, debido a que $K_m \neq 0$

$$E = (|E_1| - |E_2|) + (|E_3| - |E_4|) + \cdots + (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

Como cada contribución adyacente es casi igual,

$$E \approx 0$$

e $I \approx 0$. Si, por otro lado, m es impar

$$E = |E_1| - (|E_2| - |E_3|) - (|E_4| - |E_5|) - \cdots - (|E_{m-1}| - |E_m|)$$

y

$$E \approx |E_1|$$

que es aproximadamente el doble de la amplitud de la onda sin obstrucción. Se trata de un resultado sorprendente. Insertando una pantalla en la trayectoria de la onda, tapando así la mayor parte del frente de onda, aumentamos la irradiancia en P en un

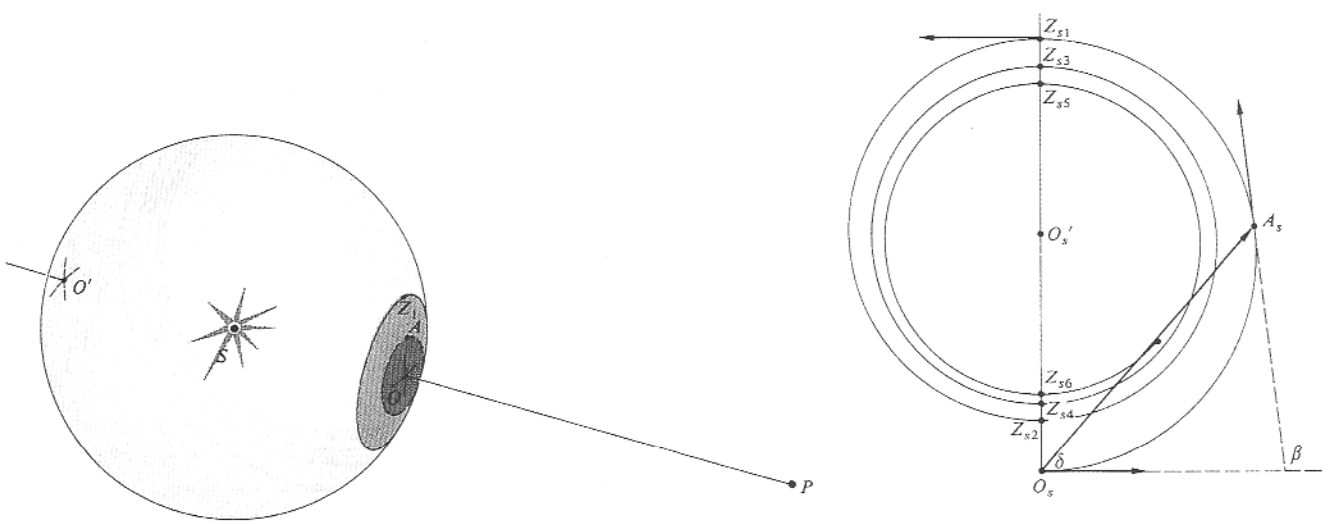
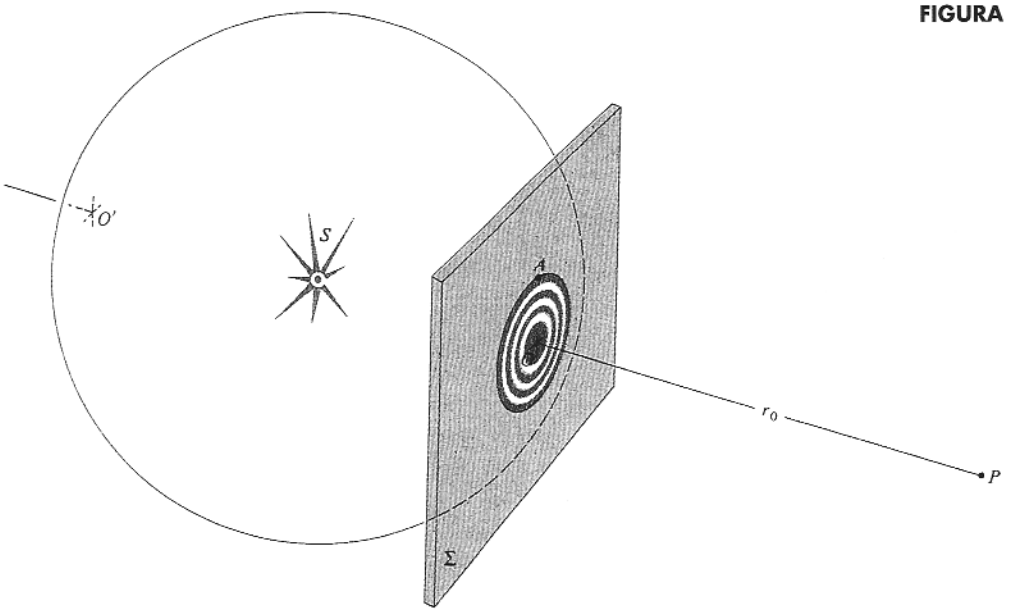


FIGURA 10.51 Frente de onda y curva de vibración correspondiente.

FIGURA 10.52 Abertura circular.



factor cuatro. La conservación de energía claramente exige que existan otros puntos donde la irradiancia haya disminuido. Y debido a la simetría completa del conjunto, se prevé una distribución en anillo circular. Si m no es un número entero (es decir, una fracción de una zona aparece en la abertura), la irradiancia en P se halla en algún lugar entre cero y su valor máximo.

Todo esto podrá verse un poco más claramente si imaginamos que la abertura se va expandiendo suavemente desde un valor inicial cerca de cero. La amplitud en P puede obtenerse de la curva de vibración donde A es un punto cualquiera en el borde del agujero. La magnitud del fasor O_sA_s es la amplitud deseada del campo óptico. Regresemos a la figura 10.51; conforme aumenta el agujero, A_s se mueve a izquierdas alrededor de la espiral hacia Z_{s1} y un máximo. Si se permite la aparición de la segunda zona, ésta reducirá O_sA_s a O_sZ_{s2}, que es casi cero, y P se transforma en un punto oscuro. Conforme aumenta la abertura, O_sA_s oscila en longitud desde casi cero hasta un número de máximos sucesivos, que decrecen gradualmente ellos también. Finalmente, cuando el agujero es bastante grande, la onda está esencialmente no obstruida, A_s se aproxima a O'_s mientras que ulteriores cambios en O_sA_s son imperceptibles.

Para dibujar el resto del patrón, movemos ahora el sensor a lo largo de cualquier línea perpendicular al eje, como se muestra en la figura 10.53. En P suponemos que dos zonas completas llenen la abertura y que $E \approx 0$. En P_1 la segunda zona ha sido parcialmente oscurecida y la tercera comienza a aparecer; E ya no es cero. En P_2 una buena porción de la segunda zona está escondida, mientras que la tercera es aún más evidente. Ya que las contribuciones de la primera y de la tercera zonas están en fase, el sensor, colocado en cualquier punto en el círculo punteado que pasa a través de P_2, registra un punto brillante. Conforme se mueve radialmente hacia afuera y van descubriéndose varias porciones de zonas sucesivas, el sensor detecta una serie de máximos y mínimos relativos. La figura 10.54 muestra las distribuciones de difracción para un número de agujeros cuyo diámetro varía de 1 mm a 4 mm según van apareciendo en una pantalla a 1 m de distancia. Comenzando por la parte superior izquierda y moviéndose a la derecha, los primeros cuatro agujeros son tan pequeños que solamente una fracción de la primera zona está descubierta. El sexto agujero descubre la primera y la segunda zona, siendo por consiguiente su centro negro. El noveno agujero descubre las primeras tres zonas y, por consiguiente, su centro es brillante de nuevo. Obsérvese que incluso poco más allá de la sombra geométrica en P_3, en la figura 10.53, la primera zona está parcialmente descubierta. Cada uno de los últimos segmentos contribuyentes es solamente una pequeña fracción de su zona respectiva y como tal es despreciable. La suma de todas las amplitudes de las zonas fraccionadas, si bien es pequeña, es aún finita. Más adentro de la sombra geométrica, sin embargo, toda la primera zona está completamente oscurecida, siendo los últimos términos nuevamente despreciables; esta vez la serie se acerca en efecto a cero y, por lo tanto, a la oscuridad.

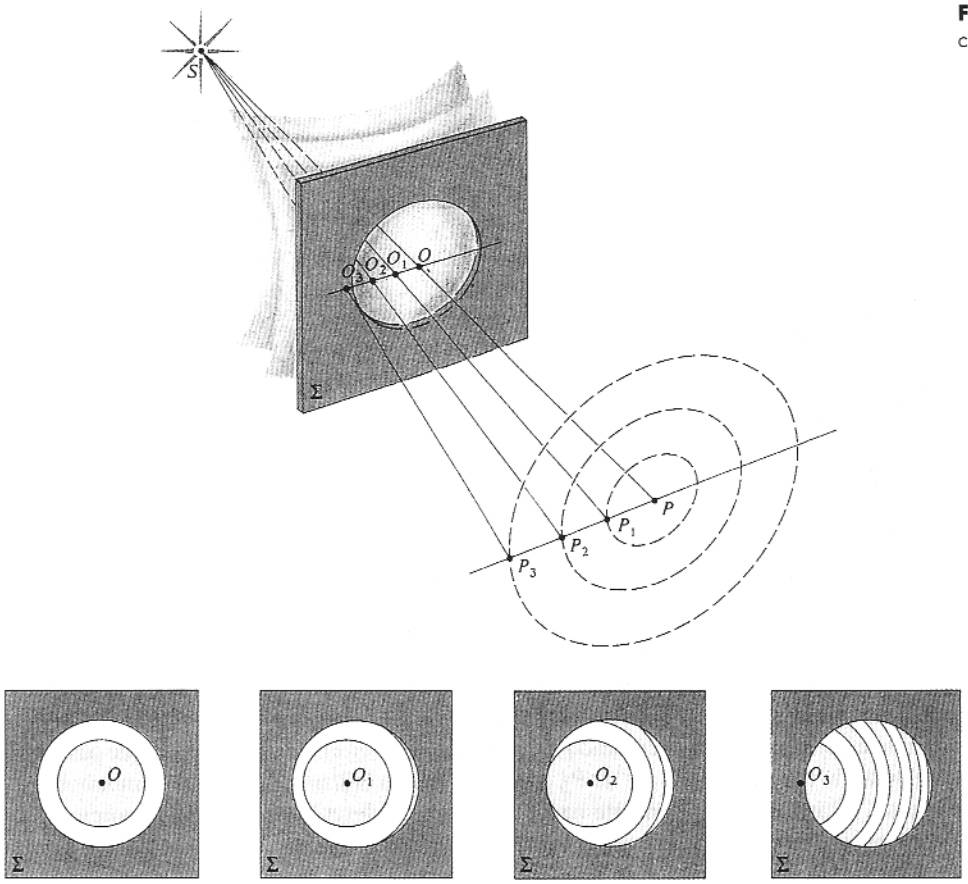


FIGURA 10.53 Zonas en una abertura circular.

Podemos obtener una mejor apreciación del tamaño real de las cosas que analizamos, calculando el número de zonas en una abertura dada. El área de cada zona (del problema 10.43) está proporcionada por

$$A = \frac{\rho}{(\rho + r_0)} \pi r_0 \lambda \tag{10.88}$$

Si la abertura tiene un radio R, una buena aproximación del número de zonas dentro de ella es simplemente

$$\frac{\pi R^2}{A} = \frac{(\rho + r_0)R^2}{\rho r_0 \lambda} \tag{10.89}$$

Por ejemplo, con una fuente puntual colocada 1 m detrás de la abertura ($\rho \approx 1$ m), un plano de observación situado a 1 metro enfrente de ella ($r_0 = 1$ m) y $\lambda = 500$ nm, hay 4 zonas con $R = 1$ mm y 400 zonas con $R = 1$ cm. Cuando tanto ρ como r_0 se aumentan hasta el punto donde solamente una pequeña fracción de una zona aparece en la abertura, se produce la difracción de Fraunhofer. Se trata esencialmente de un replanteamiento de la condición de Fraunhofer de la sección 10.1.2; véase también el problema 10.1.

De la ecuación (10.89) se deduce que el número de zonas que llena la abertura depende de la distancia r_0 desde P hasta O. Conforme P se mueve en cualquier dirección a lo largo del eje central, el número creciente o decreciente de zonas descubiertas oscila entre números enteros impares y pares. Por consiguiente, la irradiancia pasa a través de una serie de máximos y mínimos, lo cual claramente no ocurre en la configuración de Fraunhofer donde, por definición, no puede aparecer en la abertura más de una zona [15].

[15] D. S. Burch, «Fresnel Diffraction by a Circular Aperture», *Am. J. Phys.* **53**, 255 (1985).

Ondas planas

Supongamos ahora que la fuente puntual se haya movido tan lejos de la pantalla de difracción que la luz incidente pueda considerarse como una onda plana ($\rho \to \infty$). Refiriéndonos a la figura 10.55, deduciremos una expresión para el radio R_m de la zona m-ésima. Ya que $r_m = r_0 + m\lambda/2$, entonces

$$R_m^2 = (r_0 + m\lambda/2)^2 - r_0^2$$

y por lo tanto

$$R_m^2 = mr_0\lambda + m^2\lambda^2/4 \tag{10.90}$$

En la mayoría de los casos, el segundo término de la ecuación (10.90) es despreciable siempre que m no sea muy grande; por consiguiente

$$R_m^2 = mr_0\lambda \tag{10.91}$$

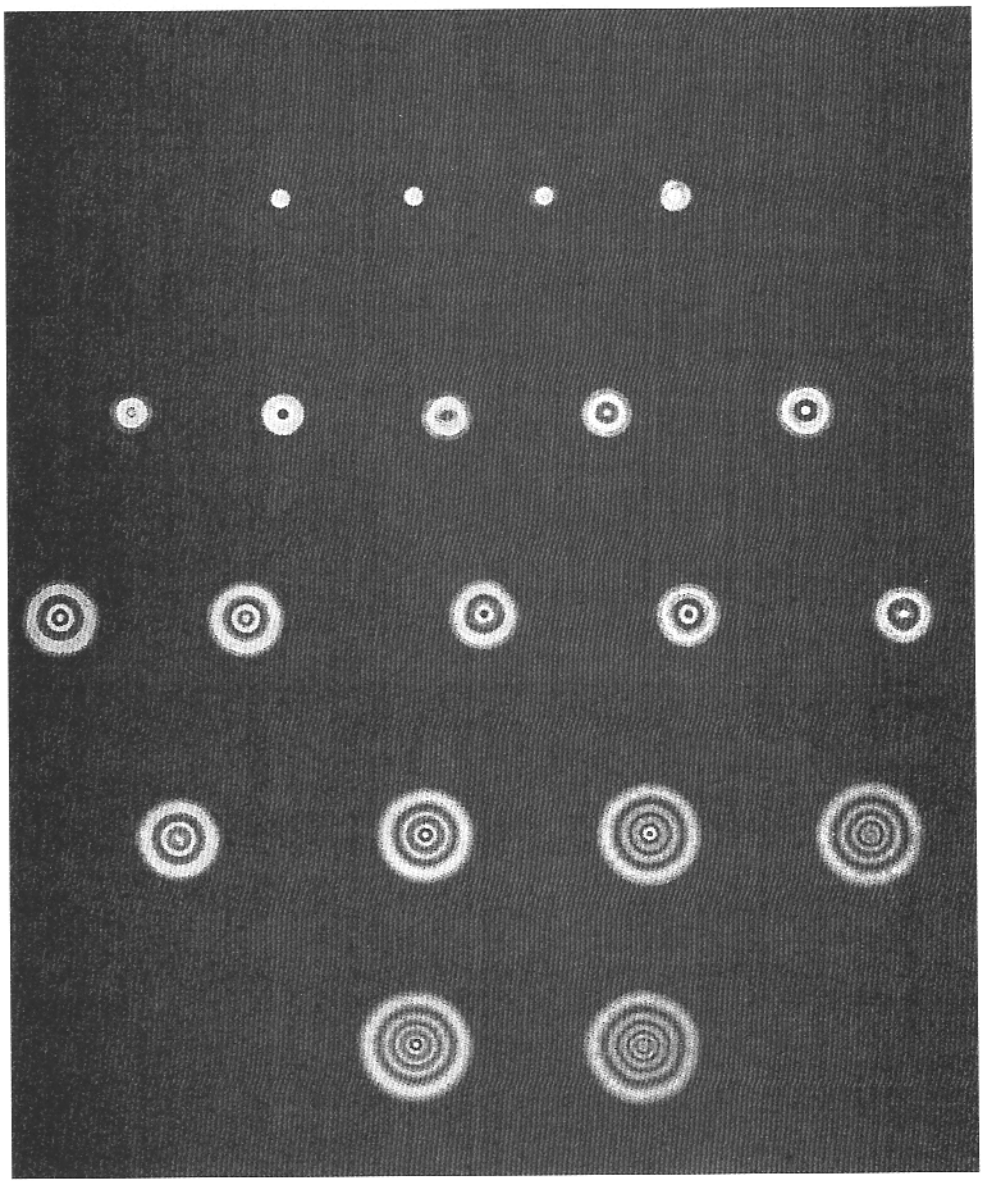


FIGURA 10.54 Figuras de difracción para aberturas circulares de tamaño creciente. (Francis Weston Sears, *Optics*, © 1949, Addison-Wesley, Inc., Reading, MA. Reimpresión autorizada por Addison-Wesley Longman, Inc.)

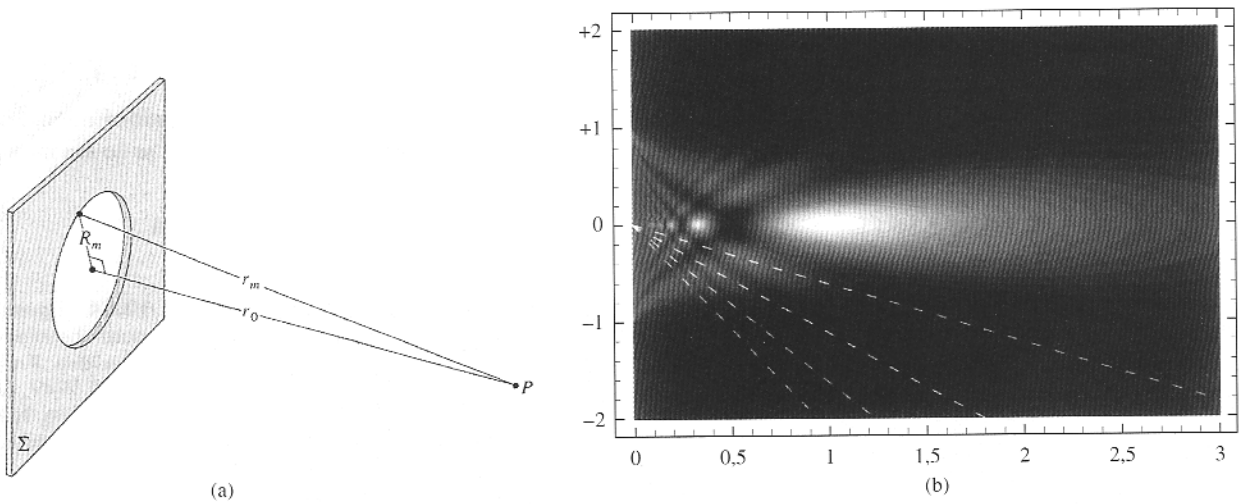


FIGURA 10.55 *(a)* Ondas planas incidentes en un agujero circular. *(b)* Sección transversal de la distribución tridimensional de la irradiancia. El eje horizontal se mide en unidades de R^2/λ y el eje vertical en R, donde R es el radio del agujero. Por lo tanto, la abertura se extiende de +1 a −1. A una distancia de $R^2/\lambda = r_0$ una zona de Fresnel llena la apertura y la irradiancia exhibe un máximo. Más allá, $I(r)$ se reduce de manera monótona hasta alcanzar el régimen de campo lejano. Los primeros cuatro ceros de la distribución de irradiancia de Fraunhofer se hallan en las líneas de rayas. (Foto cedida por G.W. Forbes, The Institute of Optics, University of Rochester.)

siendo los *radios proporcionales a las raíces cuadradas de los números enteros*. Utilizando un láser de He-Ne colimado ($\lambda_0 = 632{,}8$ nm), el radio de la primera zona es de 1 mm cuando se ve desde una distancia de 1,58 m. Bajo estas condiciones particulares, la ecuación (10.91) es aplicable siempre que $m << 10^7$, en cuyo caso $R_m = \sqrt{m}$ en milímetros. La figura 10.54 necesita una ligera modificación puesto que ahora las líneas $\overline{O_1P_1}$, $\overline{O_2P_2}$ y $\overline{O_3P_3}$ son perpendiculares traídas de los puntos de observación hasta Σ.

10.3.4 Obstáculos circulares

En 1818, Fresnel participó en un concurso convocado por la Academia francesa. Su artículo sobre la teoría de la difracción ganó el primer premio y el título *Mémoire Courronné* que le fueron otorgados sólo después de haber servido como base para una historia muy interesante. El jurado estaba formado por Pierre Laplace, Jean B. Biot, Siméon D. Poisson, Dominique F. Arago y Joseph L. Gay-Lussac, un grupo formidable, ciertamente. Poisson, crítico mordaz de la descripción ondulatoria de la luz, llegó a una conclusión extraordinaria y aparentemente indefendible de la teoría de Fresnel. Demostró que en el centro de la sombra de un obstáculo opaco circular se podría ver un punto brillante lo cual, en su opinión, demostraba lo absurdo del tratamiento de Fresnel. Podemos llegar a la misma conclusión considerando el siguiente tratamiento algo simplificado. Recordemos que una onda no obstruida produce una perturbación [ecuación (10.85)] proporcionada por $E \approx |E_1|/2$. Si algún tipo de obstáculo cubre precisamente la primera zona de Fresnel, de tal manera que se reste su contribución de $|E_1|$, entonces $E \approx -|E_1|/2$. Por consiguiente es posible que en algún punto P en el eje, la irradiancia quede inalterada por la inserción de esa obstrucción. Esta predicción sorprendente, ideada por Poisson a fin de proporcionar el golpe mortal a la teoría ondulatoria, se comprobó casi inmediatamente por Arago: el punto brillante en realidad existía. Curiosamente, el punto de Poisson, como se denomina ahora, había sido detectado muchos años (1723) antes por Maraldi, si bien su trabajo había pasado inadvertido durante mucho tiempo [16].

Examinemos ahora el problema un poco más de cerca, ya que es bastante evidente de la figura 10.56 que hay numerosas estructuras en el patrón real de sombra. Si el obstáculo

[16] Véanse J. E. Harvey y J. L. Forgham, «The Spot of Arago: New Relevance for an Old Phenomenon», *Am. J. Phys.* **52**, 243 (1984).

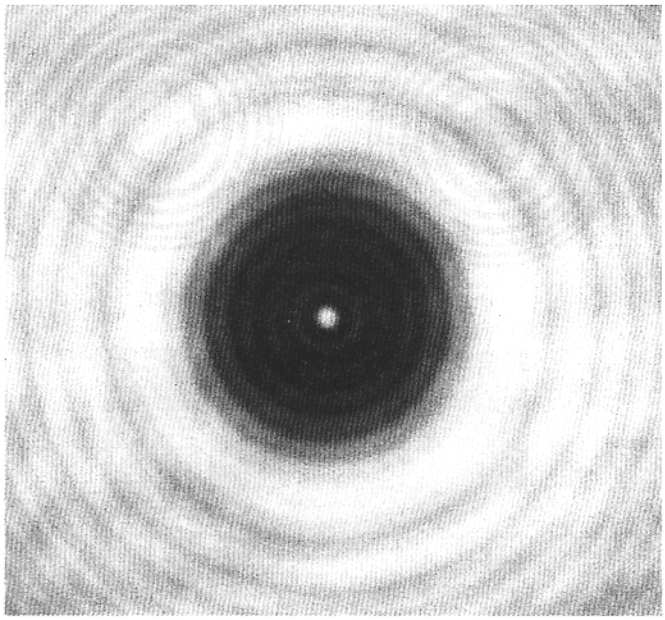


FIGURA 10.56 Sombra de un cojinete de 1/8″ de diámetro que se pegó a un portaobjetos común de microscopio y se iluminó con un haz de láser de He-Ne. Hay algunas franjas extrañas no concéntricas y débiles que se deben al portaobjetos de microscopio y a la lente en el haz. (Foto de E. H.)

opaco, sea un disco o esfera, oscurece las primeras zonas ℓ, entonces

$$E = |E_{\ell+1}| - |E_{\ell+2}| + \cdots + |E_m|$$

(donde, como antes, los signos no tienen significado absoluto que no sea el que los términos alternos deben restarse). Contrariamente al análisis para la abertura circular, E_m ahora se acerca a cero porque $K_m \to 0$. La serie debe evaluarse de la misma manera que la de la onda sin obstrucción [ecuaciones (10.78 y 10.79)]. Repitiendo ese proceso obtenemos

$$E \approx \frac{|E_{\ell+1}|}{2} \tag{10.92}$$

y la irradiancia en el eje central es, por lo general, sólo ligeramente más pequeña que la irradiancia de la onda no obstruida. *Hay un punto brillante en todas partes a lo largo del eje central excepto inmediatamente detrás del obstáculo circular.* Los trenes de onda que se propagan más allá de la circunferencia del disco se encuentran en fase en el eje central. Obsérvese que mientras P se mueve acercándose al disco, θ aumenta, $K_{\ell+1} \to 0$ y la irradiancia disminuye gradualmente a cero. Si el disco es grande, la zona $(\ell + 1)$ es muy estrecha, por lo tanto, cualquier irregularidad en la superficie del obstáculo puede oscurecer seriamente esa zona. Para que el punto de Poisson pueda observarse fácilmente, el obstáculo tiene que ser liso y circular.

Si A es un punto en la periferia del disco o esfera, A_s es el punto correspondiente en la curva de vibración (figura 10.57). Según el disco vaya aumentando para un punto P, A_s se mueve en espiral a izquierdas hacia O'_s mientras que la amplitud $A_sO'_s$ decrece gradualmente. Lo mismo ocurre si P se mueve hacia un disco de tamaño constante.

Fuera del eje, las zonas cubiertas en la figura 10.53 para la abertura circular estarán ahora expuestas y viceversa. Por consiguiente, una serie completa de anillos brillantes y oscuros rodearán el punto central.

De manera parecida, las imágenes S en P de un disco opaco formarían una imagen burda de cada punto en una fuente extensa. R. W. Pohl ha demostrado que un disco pequeño puede usarse, por lo tanto, como una lente positiva burda.

La distribución de difracción puede verse sin demasiada dificultad, siendo necesario un telescopio o unos gemelos de campaña. Péguese un pequeño cojinete de bola ($\approx \frac{1}{8}$ ó $\frac{1}{4}$ de pulgada de diámetro) a un portaobjetos de microscopio que servirá como mango. Colóquese el cojinete de bola a unos pocos metros más allá de la fuente puntual y obsérvelo a tres o cuatro metros de distancia. Colóquelo de manera que se halle directamente enfrente y oscurezca completamente la fuente. Será preciso un telescopio para amplificar la imagen ya que r_0 es muy

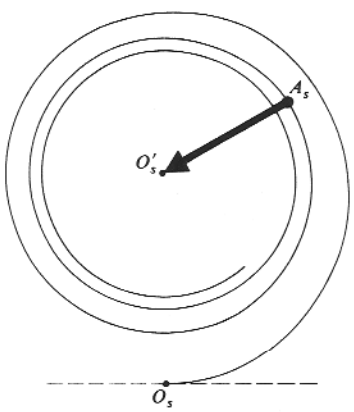


FIGURA 10.57 Curva de vibración aplicada a una obstrucción circular.

grande. Pudiendo mantener el telescopio estático, el sistema de anillos debería ser muy claro.

10.3.5 La placa zonal de Fresnel

En nuestras consideraciones anteriores, recurrimos al hecho según el cual las zonas sucesivas de Fresnel tendían a anularse unas a otras. Esto sugiere que observaríamos un enorme aumento de la irradiancia en P al eliminar todas las zonas pares o las impares. Una pantalla que altera la luz, bien sea en amplitud o en fase, procedente de zonas de semiperíodo alternas se denomina **placa zonal** [17].

Supongamos que construimos una placa zonal que deje pasar solamente las primeras veinte zonas impares obstruyendo las pares,

$$E = E_1 + E_3 + E_5 + \cdots + E_{39}$$

siendo cada uno de estos términos aproximadamente igual. Para un frente de onda no obstruido, la perturbación en P sería $E_1/2$ mientras que con la placa zonal en su lugar, $E \approx 20E_1$. La irradiancia se ha aumentado por un factor de 1600 veces. El mismo resultado sería lógicamente cierto si se hubieran dejado pasar a las zonas pares en lugar de las impares.

Para calcular los radios de las zonas que se muestran en la figura 10.58, remítanse a la figura 10.59. El borde exterior de la zona m se marca con el punto A_m. Por definición, una onda que recorre la trayectoria S-A_m-P debe llegar fuera de fase por $m\lambda/2$ con una onda que recorre la trayectoria S-O-P, es decir

$$(\rho_m + r_m) - (\rho_0 + r_0) = m\lambda/2 \qquad (10.93)$$

Claramente $\rho_m = (R_m^2 + \rho_0^2)^{1/2}$ y $r_m = (R_m^2 + r_0^2)^{1/2}$. Desarrollemos ambas expresiones utilizando la serie binómica. Ya que R_m es comparativamente pequeña, guardando únicamente los dos primeros términos obtenemos

$$\rho_m = \rho_0 + \frac{R_m^2}{2\rho_0} \quad \text{y} \quad r_m = r_0 + \frac{R_m^2}{2r_0}$$

[17] Parece ser que Lord Rayleigh inventó la placa zonal como lo atestigua este apunte del 11 de abril de 1871 en su agenda: «El experimento de tapar las zonas impares de Huygens a fin de aumentar la luz en el centro tuvo mucho éxito».

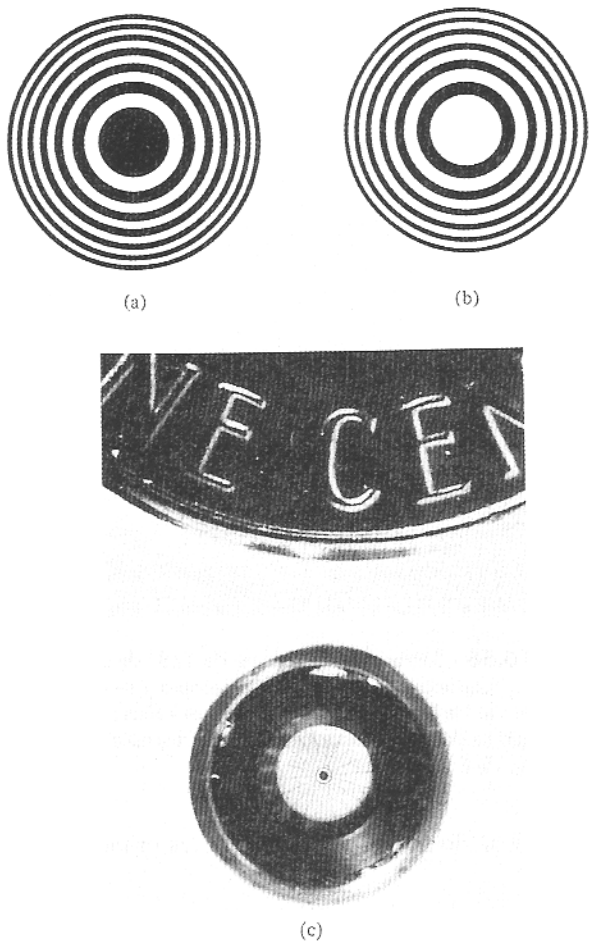


FIGURA 10.58 *(a)* y *(b)* Placas zonales. *(c)* Una placa zonal que se utilizaba para hacer la imagen partículas alfa procedentes de un objetivo puesto delante a 1 cm, en una película fotográfica situada detrás a 5 cm. La placa tiene un diámetro de 2,5 mm y contiene 100 zonas, de las cuales la más estrecha tiene un ancho de 5,3 μm. (Foto cedida por la Universidad de California, Lawrence Livermore National Laboratory y el Departamento de Energía.)

Finalmente, substituyendo en la ecuación (10.93), obtenemos

$$\left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{r_0}\right) = \frac{m\lambda}{R_m^2} \qquad (10.94)$$

Bajo iluminación de ondas planas ($\rho_0 \to \infty$) y la ecuación (10.94) se reduce a

$$R_m^2 = mr_0\lambda \qquad [10.91]$$

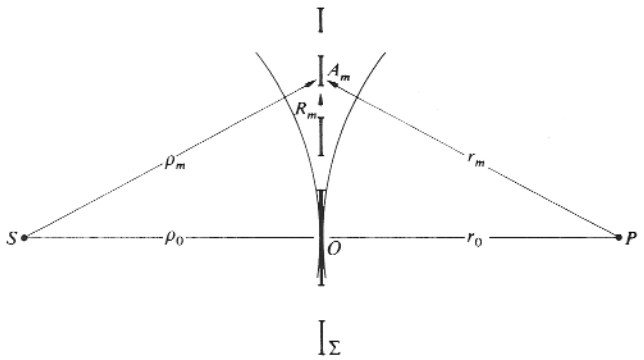


FIGURA 10.59 Geometría de la placa zonal.

que es una aproximación de la expresión exacta proporcionada por la ecuación (10.90). La ecuación (10.94) tiene forma idéntica a la ecuación para lentes delgadas, un hecho que no es una mera coincidencia ya que S en realidad tiene su imagen en P con luz difractada convergente. Por lo tanto, se dice que la *distancia focal primaria* es

$$f_1 = \frac{R_m^2}{m\lambda} \tag{10.95}$$

(Obsérvese que la placa zonal mostrará una extensa aberración cromática). Los puntos S y P se denominan focos conjugados. Con un haz incidente de luz colimada (figura 10.60) la distancia

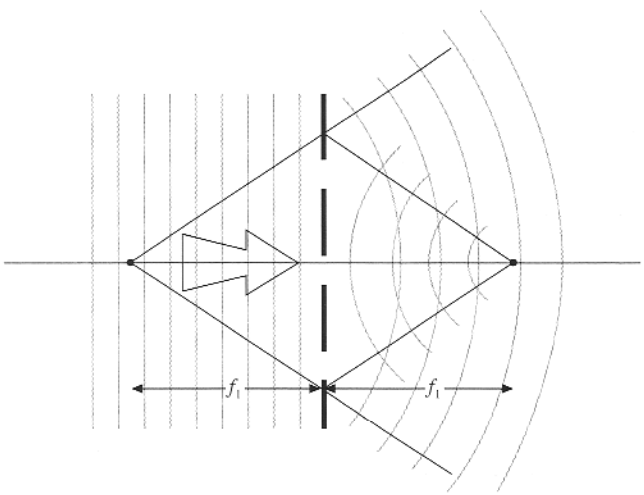


FIGURA 10.60 Focos de la placa zonal.

imagen es la distancia focal primaria o de *primer orden* que, a su vez, corresponde a un máximo principal en la distribución de la irradiancia. Además de esta imagen real, hay también una imagen virtual formada por luz divergente a una distancia f_1 enfrente de Σ. A una distancia f_1 de Σ, cada anillo en la placa está cubierto exactamente por una zona de semiperíodo en el frente de onda. Si movemos un sensor a lo largo del eje S-P hacia Σ, éste registra una serie de máximos y mínimos de irradiancia muy pequeños hasta que llega a un punto $f_1/3$ de Σ. En ese *punto focal de tercer orden* hay un máximo acentuado de irradiancia. Existirán unos puntos focales adicionales en $f_1/5, f_1/7$, etc., lo cual no ocurre con una lente y aún menos con un disco opaco simple.

Siguiendo una sugerencia de Lord Rayleigh, R. W. Wood construyó una *placa zonal de inversión de fase*. En lugar de tapar zonas alternas, aumentó su espesor, retardando así su fase en π. Como toda la placa es transparente, la amplitud debería ser doble mientras que la irradiancia debería aumentar por un factor de cuatro. En realidad, el dispositivo no funciona así de bien porque la fase no es en realidad constante en cada zona. Idealmente, debería actuarse de manera que el retardo varíe gradualmente en cada zona, saltando atrás en π al comienzo de la zona siguiente [18].

La manera usual de realizar una placa zonal óptica es dibujar una versión a gran escala y reducirla entonces fotográficamente. Pueden hacerse placas con cientos de zonas fotografiando una distribución de anillos de Newton, en luz colimada cuasimonocromática. Anillos de papel de aluminio sobre cartón funcionan muy bien para microondas.

Pueden realizarse placas zonales de metal con una estructura autosustentante de rayos de tal manera que las regiones transparentes estén desprovistas de material. Éstas funcionarán como lentes en el rango desde el ultravioleta hasta los rayos X blandos, donde el vidrio corriente es opaco.

10.3.6 Integrales de Fresnel y abertura rectangular

Consideraremos ahora una clase de problemas dentro del campo de la difracción de Fresnel, que ya no tienen la simetría cir-

[18] Véanse Ditchburn, *Light*, 2ª ed., pág. 232, M. Sussman, «Elementary Diffraction Theory of Zone Plates» *Am. J. Phys.* **28**, 394 (1960); Ora E. Myers, Jr., «Studies of Transmission Zone Plates», *Am. J. Phys.* **19**, 359 (1951) y J. Higbie, «Fresnel Zone Plate: Anomalous Foci», *Am. J. Phys.* **44**, 929 (1976).

cular de las configuraciones estudiadas anteriormente. Consideremos la figura 10.61 donde dS es un elemento de área situado en algún punto arbitrario A, cuyas coordenadas son (y, z). La ubicación del origen O está determinada por la perpendicular dibujada a Σ desde la posición de la fuente puntual monocromática. La contribución a la perturbación óptica en P de las fuentes secundarias en dS tiene la forma proporcionada por la ecuación (10.74). Utilizando lo que aprendimos de la onda que se propaga libremente ($\varepsilon_A \rho\lambda = \varepsilon_0$), podemos volver a escribir esa ecuación como

$$dE_p = \frac{K(\theta)\varepsilon_0}{\rho r\lambda} \cos\,[k(\rho + r) - \omega t]\, dS \qquad (10.96)$$

El signo de la fase ha cambiado con respecto al de la ecuación (10.74) y se escribe de esta forma para concordar con el tratamiento tradicional. *En el caso en que el tamaño de la abertura sea pequeño* en comparación con ρ_0 y r_0, podemos poner $K(\theta) = 1$ y dejar que $1/pr$ sea igual a $1/\rho_0 r_0$ en el coeficiente de amplitudes. Teniendo más cuidado con las aproximaciones que se introducen en la fase, apliquemos el teorema de Pitágoras a los triángulos SOA y POA para obtener

$$\rho = (\rho_0^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

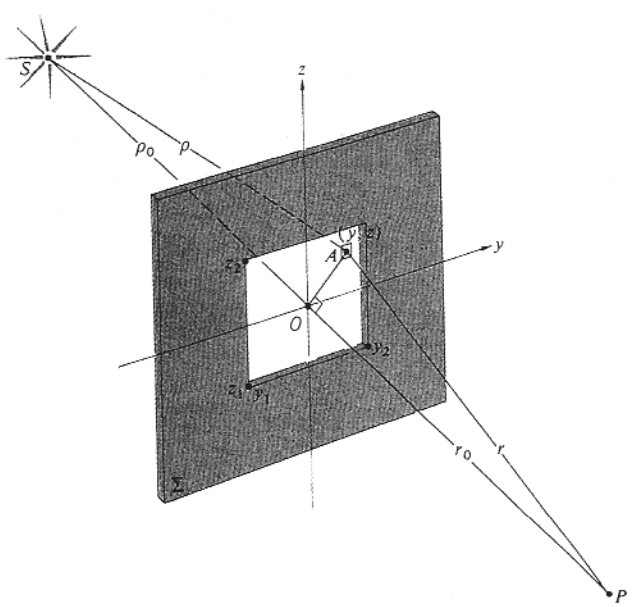


FIGURA 10.61 Difracción de Fresnel en una abertura rectangular.

y

$$r = (r_0^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Desarrollando estas fórmulas recurriendo a la serie binómica, se forma

$$\rho + r \approx \rho_0 + r_0 + (y^2 + z^2)\frac{\rho_0 + r_0}{2\rho_0 r_0} \qquad (10.97)$$

Obsérvese que ésta es una aproximación más evidente que la usada en el análisis de Fraunhofer [ecuación (10.40)] donde los términos de segundo grado y más elevados en las variables de la abertura no se tomaron en cuenta. La perturbación en P en la representación compleja es

$$\tilde{E}_p = \frac{\varepsilon_0 e^{-i\omega t}}{\rho_0 r_0 \lambda} \int_{y_1}^{y_2}\int_{z_1}^{z_2} e^{ik(\rho + r)}\, dy\, dz \qquad (10.98)$$

Siguiendo la forma usual de deducción, introducimos las variables adimensionales u y v definidas por

$$u \equiv y\left[\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda\rho_0 r_0}\right]^{1/2} \qquad v \equiv z\left[\frac{2(\rho_0 + r_0)}{\lambda\rho_0 r_0}\right]^{1/2} \qquad (10.99)$$

Substituyendo la ecuación (10.97) en la ecuación (10.98) y utilizando las nuevas variables, llegamos a

$$\tilde{E}_p = \frac{\varepsilon_0}{2(\rho_0 + r_0)} e^{i[k(\rho_0 + r_0) - \omega t]} \int_{u_1}^{u_2} e^{i\pi u^2/2}\, du \int_{v_1}^{v_2} e^{i\pi v^2/2}\, dv \qquad (10.100)$$

El término enfrente de la integral representa la perturbación no obstruida en P dividida por 2; llamémosla $\tilde{E}_u/2$. La integral misma puede evaluarse usando dos funciones, $\mathscr{C}(w)$ y $\mathscr{S}(w)$, donde w representa bien sea u o v. Estas cantidades denominadas **integrales de Fresnel**, están definidas por

$$\mathscr{C}(w) \equiv \int_0^w \cos\,(\pi w'^2/2)\, dw'$$

$$\mathscr{S}(w) \equiv \int_0^w \text{sen}\,(\pi w'^2/2)\, dw' \qquad (10.101)$$

Ambas funciones han sido extensamente estudiadas y sus valores numéricos están bien clasificados. A estas alturas, lo que nos interesa de ellas se deduce del hecho de que

$$\int_0^w e^{i\pi w'^2/2}\, dw' = \mathscr{C}(w) + i\mathscr{S}(w)$$

y ésta, a su vez, tiene la misma forma que la ecuación (10.100). La perturbación en P es entonces

$$\tilde{E}_p = \frac{\tilde{E}_u}{2}[\mathscr{C}(u) + i\mathscr{S}(u)]_{u_1}^{u_2}[\mathscr{C}(v) + i\mathscr{S}(v)]_{v_1}^{v_2} \qquad (10.102)$$

que puede evaluarse utilizando los valores clasificados de $\mathscr{C}(u_1)$, etc. Las matemáticas se hacen muy complejas si calculamos la perturbación en todos los puntos del plano de observación, dejando fija la posición de la abertura. En su lugar, fijaremos la línea S-O-P e imaginaremos que movemos la abertura mediante pequeños desplazamientos en el plano Σ. Esto tiene el efecto de trasladar el origen O con respecto a la abertura fija, barriendo así la distribución sobre el punto P. Cada nueva posición de O corresponde a una nueva serie de ubicaciones relativas de los límites y_1, y_2, z_1 y z_2 que, a su vez, dan nuevos valores de u_1, u_2, v_1 y v_2 los cuales, cuando se substituyen en la ecuación (10.102), proporcionan un nuevo valor de $\tilde{E}_p$. El error que se encuentra en tal procedimiento es despreciable siempre que la abertura se desplace a lo largo de unas distancias que son pequeñas comparadas con ρ_0. Este planteamiento es, por lo tanto, aún más apropiado para ondas incidentes planas en cuyo caso, si E_0 es la amplitud de la onda plana incidente en Σ, la ecuación (10.96) queda simplemente

$$dE_p = \frac{E_0 K(\theta)}{r\lambda}\cos(kr - \omega t)\, dS$$

donde, como antes, $\varepsilon_A = E_0/\lambda$. Esta vez con

$$u = y\left(\frac{2}{\lambda r_0}\right)^{1/2} \qquad v = z\left(\frac{2}{\lambda r_0}\right)^{1/2} \qquad (10.103)$$

donde hemos dividido el numerador y el denominador en la ecuación (10.99) por ρ_0 dejando que luego fuera a infinito, $\tilde{E}_p$ adquiere la misma forma de la ecuación (10.102) donde $\tilde{E}_u$ es de nuevo la perturbación no obstruida. La irradiancia en P es $\tilde{E}_p\tilde{E}_p^*/2$; por lo tanto

$$I_p = \frac{I_0}{4}\{[\mathscr{C}(u_2) - \mathscr{C}(u_1)]^2 + [\mathscr{S}(u_2) - \mathscr{S}(u_1)]^2\}$$
$$\times\{[\mathscr{C}(v_2) - \mathscr{C}(v_1)]^2 + [\mathscr{S}(v_2) - \mathscr{S}(v_1)]^2\} \qquad (10.104)$$

donde I_0 es la irradiancia no obstruida en P.

Como ejemplo simple, visualicemos un agujero cuadrado de 2 mm en cada lado bajo iluminación de ondas planas de 500 nm. Si P se halla a 4 m, estando directamente opuesto al punto O en el centro de la abertura, $u_2 = 1{,}0$, $u_1 = -1{,}0$, $v_2 = 1{,}0$ y $v_1 = -1{,}0$. Ambas integrales de Fresnel son funciones impares, es decir

$$\mathscr{C}(w) = -\mathscr{C}(-w) \quad \text{y} \quad \mathscr{S}(w) = -\mathscr{S}(-w)$$

Por consiguiente,

$$I_p = \frac{I_0}{4}\{[2\mathscr{C}(1)]^2 + [2\mathscr{S}(1)]^2\}^2$$

obteniéndose fácilmente un valor numérico. Para hallar la irradiancia en algún otro lugar en la figura, por ejemplo 0,1 mm a la izquierda del centro, movemos la abertura con respecto a la línea OP, después de lo cual $u_2 = 1{,}1$, $u_1 = -0{,}9$, $v_2 = 1{,}0$ y $v_1 = -1{,}0$. La resultante I_p será también igual a la que se encuentra a 0,1 mm a la derecha del centro. En efecto, debido a que la abertura es cuadrada, se obtiene el mismo valor 0,1 mm directamente arriba y debajo del centro (figura 10.62).

Podemos abordar el caso límite de propagación libre permitiendo que las dimensiones de la abertura aumenten indefinidamente. Recurriendo al hecho de que $\mathscr{C}(\infty) = \mathscr{S}(\infty) = \frac{1}{2}$ y $\mathscr{C}(-\infty) = \mathscr{S}(-\infty) = -\frac{1}{2}$ la irradiancia en P, enfrente al centro de la abertura, es

$$I_p = I_0$$

lo cual es exactamente correcto. Se trata de un resultado extraordinario puesto que cuando la extensión $\overline{OA}$ tiene valores elevados, todas las aproximaciones hechas en la deducción ya no son válidas. Nos debemos dar cuenta, sin embargo, de que una abertura relativamente pequeña capaz de satisfacer las aproximaciones puede ser aún lo suficientemente grande como para no exhibir ninguna difracción efectiva en la región frente a su centro. Por ejemplo, con $\rho_0 = r_0 = 1$ m, una abertura que subtiende un ángulo de uno o dos grados desde P puede corresponder a valores de $|u|$ y de $|v|$ de aproximadamente veinticinco a cincuenta. Las cantidades $\mathscr{C}$ y $\mathscr{S}$ están entonces muy cerca de sus valores límites de $\frac{1}{2}$. Al aumentar más las dimensiones de la abertura, más allá del punto donde se infringen las aproximaciones, se puede, por consiguiente, introducir tan sólo un error pequeño. Esto significa que no debemos preocuparnos mucho en restringir el tamaño real de la abertura (siempre que $r_0 >> \lambda$ y $\rho_0 >> \lambda$). Las contribuciones desde regiones del frente de onda alejadas de O deben ser muy pequeñas, una condición que se debe atribuir al factor de oblicuidad y a la dependencia con el inverso de r de la amplitud de los trenes de onda secundarios.

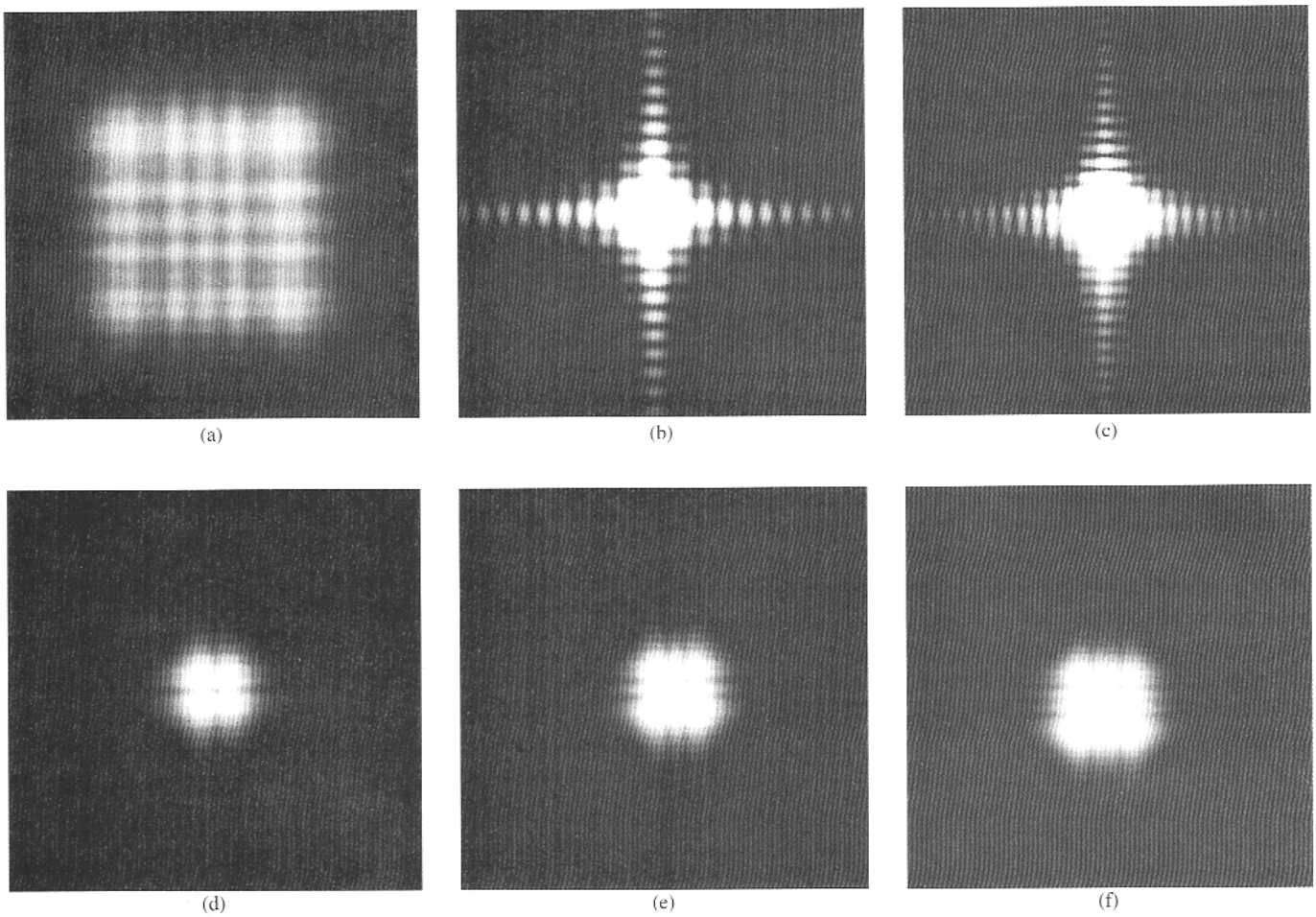


FIGURA 10.62 *(a)* Una distribución de Fresnel típica de una abertura cuadrada. *(b)-(f)* Una serie de distribuciones de Fresnel para varias aberturas cuadradas bajo condiciones idénticas. Obsérvese que a medida que el agujero aumenta en tamaño, la figura pasa de una distribución extendida semejante a la de Fraunhofer a otra bastante más localizada. (Foto de E.H.)

10.3.7 La espiral de Cornu

Marie Alfred Cornu (1841-1902), profesor de la École Polytechnique de París, proyectó una descripción geométrica original de las integrales de Fresnel, semejante a la curva de vibración ya considerada. La figura 10.63, denominada ***espiral de Cornu***, es un gráfico en el plano complejo de los puntos $\tilde{B}(w) \equiv \mathscr{C}(w) + i\mathscr{S}(w)$, donde w adquiere todos los valores posibles desde 0 hasta $\pm\infty$. Esto significa que representamos gráficamente $\mathscr{C}(w)$ en el eje horizontal o real y $\mathscr{S}(w)$ en el eje vertical o imaginario. Los valores numéricos apropiados se extraen de la tabla 10.2. Si $d\ell$ es un elemento de longitud de arco medida a lo largo de la curva, entonces

$$d\ell^2 = d\mathscr{C}^2 + d\mathscr{S}^2$$

De las definiciones (10.101)

$$d\ell^2 = (\cos^2 \pi w^2/2 + \operatorname{sen}^2 \pi w^2/2)dw^2$$

y

$$d\ell = dw$$

Los valores de w corresponden a la longitud de arco y están marcados a lo largo de la espiral en la figura 10.63. Cuando w se acerca a $\pm\infty$, la curva se mueve en espiral hacia sus valores

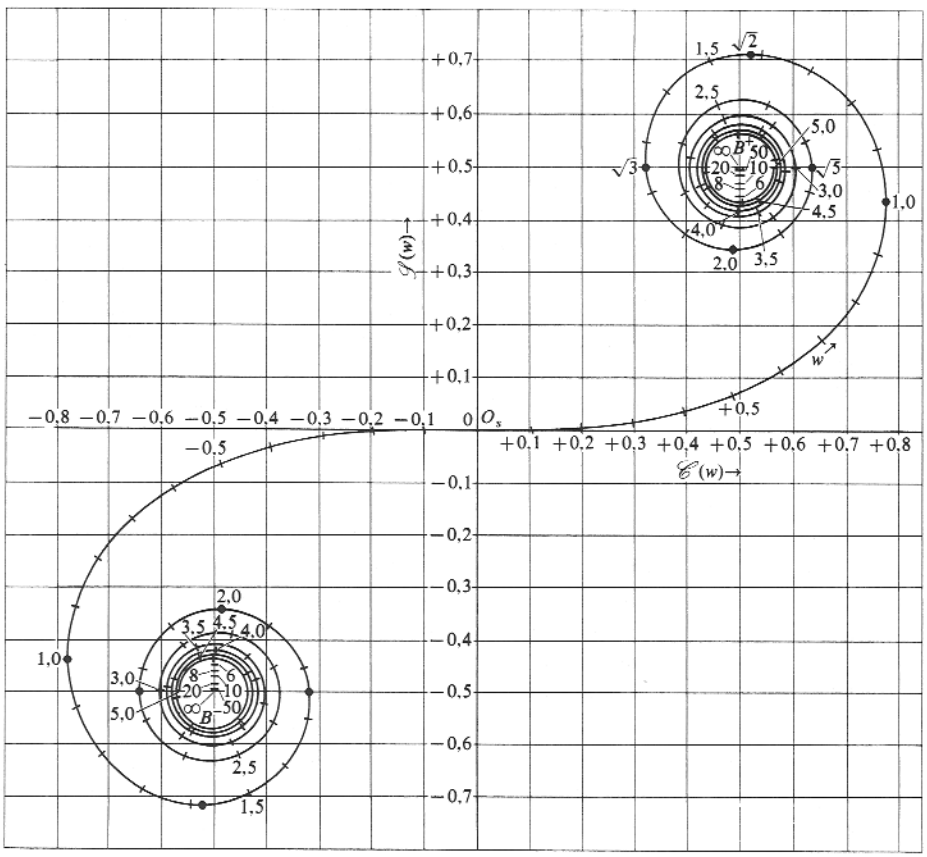


FIGURA 10.63 Espiral de Cornu.

límites en $\tilde{B}^+ = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ y $\tilde{B}^- = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$. La pendiente de la espiral es

$$\frac{d\mathscr{S}}{d\mathscr{C}} = \frac{\operatorname{sen} \pi w^2/2}{\cos \pi w^2/2} = \tan \frac{\pi w^2}{2} \qquad (10.105)$$

y así el ángulo entre la tangente a la espiral en cualquier punto y el eje $\mathscr{C}$ es $\beta = \pi w^2/2$.

La espiral de Cornu puede usarse como herramienta conveniente para determinaciones cuantitativas o como ayuda para conseguir una descripción cualitativa de una figura de difracción (como ocurría con la curva de vibración). Como ejemplo de sus usos cuantitativos, reconsideremos el problema de un agujero cuadrado de 2 mm que analizamos en la sección anterior ($\lambda = 500$ nm, $r_0 = 4$ m e iluminación con ondas planas). Deseamos encontrar la irradiancia en P justo frente al centro de la abertura, donde en este caso $u_1 = -1{,}0$ y $u_2 = 1{,}0$. La variable u se mide a lo largo del arco, es decir, w se reemplaza por u en la espiral. Coloquemos dos puntos en la espiral a distancias desde O_s iguales a u_1 y u_2 (Éstas son simétricas respecto a O_s porque P está ahora frente al centro de la abertura), denominándolos $\tilde{B}_1(u)$ y $\tilde{B}_2(u)$ respectivamente, como en la figura 10.64. El fasor $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ trazado desde $\tilde{B}_1(u)$ hasta $\tilde{B}_2(u)$ es precisamente el número complejo $\tilde{B}_2(u) - \tilde{B}_1(u)$,

$$\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u) = [\mathscr{C}(u) + i\mathscr{S}(u)]_{u_1}^{u_2}$$

siendo el primer término en la expresión [ecuación (10.102)] para $\tilde{E}_p$. De manera parecida, para $v_1 = -1{,}0$ y $v_2 = 1{,}0$, $\tilde{B}_2(v) - \tilde{B}_1(v)$ es

$$\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v) = [\mathscr{C}(v) + i\mathscr{S}(v)]_{v_1}^{v_2}$$

que es la última parte de $\tilde{E}_p$. Las magnitudes de estos dos números complejos son precisamente las longitudes de los fasores $\tilde{\mathbf{B}}_{12}$ oportunos que pueden obtenerse de la curva con

TABLA 10.2 Integrales de Fresnel

w	$\mathscr{C}(w)$	$\mathscr{S}(w)$	w	$\mathscr{C}(w)$	$\mathscr{S}(w)$
0,00	0,0000	0,0000	4,50	0,5261	0,4342
0,10	0,1000	0,0005	4,60	0,5673	0,5162
0,20	0,1999	0,0042	4,70	0,4914	0,5672
0,30	0,2994	0,0141	4,80	0,4338	0,4968
0,40	0,3975	0,0334	4,90	0,5002	0,4350
0,50	0,4923	0,0647	5,00	0,5637	0,4992
0,60	0,5811	0,1105	5,05	0,5450	0,5442
0,70	0,6597	0,1721	5,10	0,4998	0,5624
0,80	0,7230	0,2493	5,15	0,4553	0,5427
0,90	0,7648	0,3398	5,20	0,4389	0,4969
1,00	0,7799	0,4383	5,25	0,4610	0,4536
1,10	0,7638	0,5365	5,30	0,5078	0,4405
1,20	0,7154	0,6234	5,35	0,5490	0,4662
1,30	0,6386	0,6863	5,40	0,5573	0,5140
1,40	0,5431	0,7135	5,45	0,5269	0,5519
1,50	0,4453	0,6975	5,50	0,4784	0,5537
1,60	0,3655	0,6389	5,55	0,4456	0,5181
1,70	0,3238	0,5492	5,60	0,4517	0,4700
1,80	0,3336	0,4508	5,65	0,4926	0,4441
1,90	0,3944	0,3734	5,70	0,5385	0,4595
2,00	0,4882	0,3434	5,75	0,5551	0,5049
2,10	0,5815	0,3743	5,80	0,5298	0,5461
2,20	0,6363	0,4557	5,85	0,4819	0,5513
2,30	0,6266	0,5531	5,90	0,4486	0,5163
2,40	0,5550	0,6197	5,95	0,4566	0,4688
2,50	0,4574	0,6192	6,00	0,4995	0,4470
2,60	0,3890	0,5500	6,05	0,5424	0,4689
2,70	0,3925	0,4529	6,10	0,5495	0,5165
2,80	0,4675	0,3915	6,15	0,5146	0,5496
2,90	0,5624	0,4101	6,20	0,4676	0,5398
3,00	0,6058	0,4963	6,25	0,4493	0,4954
3,10	0,5616	0,5818	6,30	0,4760	0,4555
3,20	0,4664	0,5933	6,35	0,5240	0,4560
3,30	0,4058	0,5192	6,40	0,5496	0,4965
3,40	0,4385	0,4296	6,45	0,5292	0,5398
3,50	0,5326	0,4152	6,50	0,4816	0,5454
3,60	0,5880	0,4923	6,55	0,4520	0,5078
3,70	0,5420	0,5750	6,60	0,4690	0,4631
3,80	0,4481	0,5656	6,65	0,5161	0,4549
3,90	0,4223	0,4752	6,70	0,5467	0,4915
4,00	0,4984	0,4204	6,75	0,5302	0,5362
4,10	0,5738	0,4758	6,80	0,4831	0,5436
4,20	0,5418	0,5633	6,85	0,4539	0,5060
4,30	0,4494	0,5540	6,90	0,4732	0,4624
4,40	0,4383	0,4622	6,95	0,5207	0,4591

una regla, usando cualquiera de los ejes como escala. Entonces la irradiancia es simplemente

$$I_p = \frac{I_0}{4} |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|^2 |\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \tag{10.106}$$

y el problema está resuelto. Obsérvese que las longitudes de arco a lo largo de la espiral (es decir, $\Delta u = u_2 - u_1$ and $\Delta v = v_2 - v_1$) son proporcionales a las dimensiones totales de la abertura en las direcciones y y z, respectivamente. *Las longitudes de arco son, por consiguiente, constantes independientemente de la posición de P en el plano de observación.* Por otro lado, los fasores $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ y $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$ que se extienden sobre las longitudes de arco, no son constantes y dependen en efecto de la posición de P.

Manteniendo la posición de P frente al centro del agujero de difracción, supongamos ahora que el tamaño de la abertura sea ajustable. Conforme el agujero cuadrado se va abriendo gradualmente, Δv y Δu aumentan en correspondencia. Los puntos extremos $\tilde{B}_1$ y $\tilde{B}_2$ de cualquiera de estas longitudes de arco se mueven en espiral a izquierdas hacia sus valores límites de $\tilde{B}^-$ and $\tilde{B}^+$, respectivamente. Los fasores $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ y $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$, que son idénticos en este caso debido a la simetría, pasan a través de una serie de extremos. Por consiguiente, el punto central de la figura se desplaza gradualmente desde un brillo relativo a la oscuridad y hacia atrás. Mientras tanto, la distribución total de

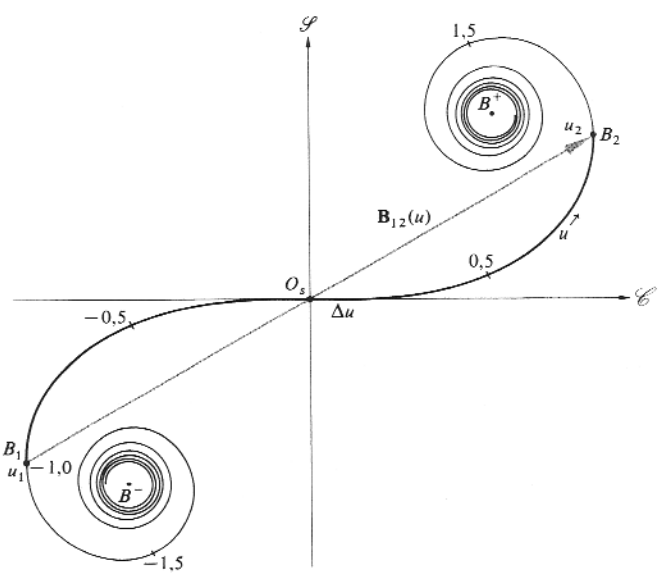


FIGURA 10.64 Espiral de Cornu.

irradiancia varía continuamente de una figura muy intrincada a la siguiente (figura 10.62). Para cualquier tamaño particular de abertura, la figura de difracción fuera del centro puede calcularse cambiando P de posición. Es útil visualizar la longitud de arco como un trozo de cuerda cuya dimensión es igual a Δv o Δu. Imaginémoslo sobre la espiral, con O_s inicialmente en su punto medio; conforme P se mueve, por ejemplo, hacia la izquierda a lo largo del eje y (figura 10.61), y_1, y por consiguiente u_1, se vuelven ambos negativos, mientras que y_2 y u_2 aumentan positivamente. Esto tiene el efecto de que nuestra cuerda Δu se desliza hacia arriba sobre la espiral. Según la distancia entre los puntos extremos de la cuerda Δu cambia, cambia también $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|$, variando, por lo tanto, la irradiancia (10.106) Cuando P está en el límite izquierdo de la sombra geométrica $y_1 = u_1 = 0$. Según el punto de observación se va moviendo hacia la sombra geométrica, u_1 aumenta *positivamente* y la cuerda Δu se halla ahora completamente en la mitad superior de la espiral de Cornu. Conforme u_1 y u_2 continúan aumentando, la cuerda se enrolla aún más estrechamente alrededor del límite $\tilde{B}^+$; sus extremos $\tilde{B}_1$ and $\tilde{B}_2$ se acercan más uno a otro con el resultado de que $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)|$ se hace bastante pequeño e I_p disminuye dentro de la región de sombra geométrica (profundizaremos en este punto en la siguiente sección). El mismo proceso se aplica al explorar en la dirección z; Δv es constante mientras que $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$ varía.

Si la abertura está totalmente abierta, revelando una onda sin obstrucción, $u_1 = v_1 = -\infty$, que significa que $\tilde{B}_1(u) = \tilde{B}_1(v) = \tilde{B}^-$ y $\tilde{B}_2(u) = \tilde{B}_2(v) = \tilde{B}^+$. La línea $\tilde{B}^-\tilde{B}^+$ forma un ángulo de 45° con el eje $\mathscr{C}$ y tiene una longitud igual a $\sqrt{2}$. Por consiguiente, los fasores $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u)$ y $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$ tienen cada uno una magnitud $\sqrt{2}$ y fase $\pi/4$, es decir, $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u) = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$ y $\mathbf{B}_{12}(v) = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$. De la ecuación (10.102) se deduce que

$$\tilde{E}_p = \tilde{E}_u e^{i\pi/2} \tag{10.107}$$

y, como en la sección 10.3.1, obtenemos una amplitud no obstruida, excepto por una discrepancia en la fase de $\pi/2$ [19]. Finalmente, usando (10.106), $I_p = I_0$.

Podemos llevar a cabo un modelo más tangible de lo que representa la espiral de Cornu, considerando la figura 10.65 que recoge un frente de onda cilíndrico propagándose desde una fuente lineal coherente. El procedimiento presente es exactamente igual al utilizado en la deducción de la curva de vibración. Se remite al lector a la sección 10.3.2 para un análisis más ameno. Baste decir que el frente de onda se divide en *zonas de franjas de medio período* por su intersección con una familia de cilindros que tienen un eje común y unos radios $r_0 + \lambda/2$, $r_0 + \lambda$, $r_0 + 3\lambda/2$, etc. *Las contribuciones de estas zonas de franjas son proporcionales a sus áreas, que decrecen rápidamente*. Esto está en contraste con las zonas circulares cuyos radios aumentan, manteniendo casi constantes de ese modo sus áreas. A su vez, cada zona de franja se divide en N subzonas que tienen una diferencia relativa de fase de π/N. La suma vectorial de todas las contribuciones de amplitud de las zonas situadas arriba de la línea central es una espiral poligonal. Si N va a ∞ y se incluyen las contribuciones generadas por las zonas de franja situadas debajo de la línea central, el polígono se suaviza en una espiral de Cornu continua. Esto no debe sorprender ya que la fuente lineal coherente genera un número infinito de distribuciones de fuentes puntuales superpuestas.

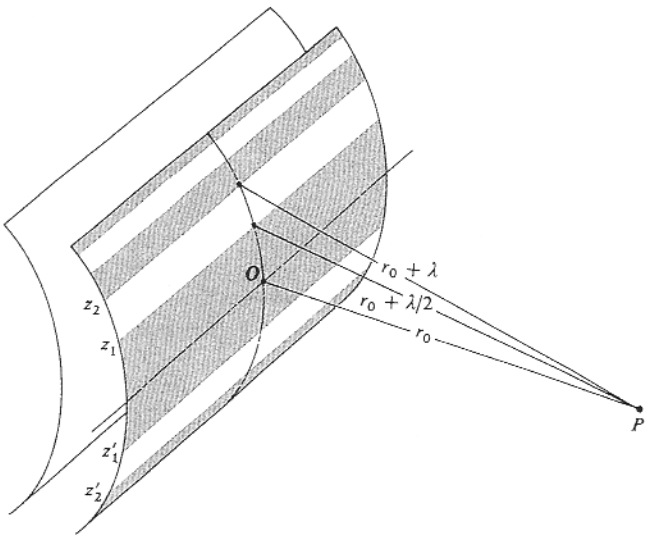


FIGURA 10.65 Zonas en un frente de onda cilíndrico.

En la figura 10.66 se recogen varios vectores unitarios tangentes a las distintas posiciones a lo largo de la espiral. El vector en O_s corresponde a la contribución del eje central que pasa a través de O en el frente de onda. Los puntos asociados con los límites de cada zona de franja, pueden localizarse en la espiral ya que en estas posiciones la fase relativa, β, es un múltiplo par o impar de π. Por ejemplo, el punto Z_{s1} en la espiral (figura 10.66), que está relacionado con z_1 (figura 10.65) en el frente de onda, está, por definición, desfasado 180° con O_s.

[19] La discrepancia en la fase se resolverá por medio de la teoría de Kirchhoff de la sección 10.4.

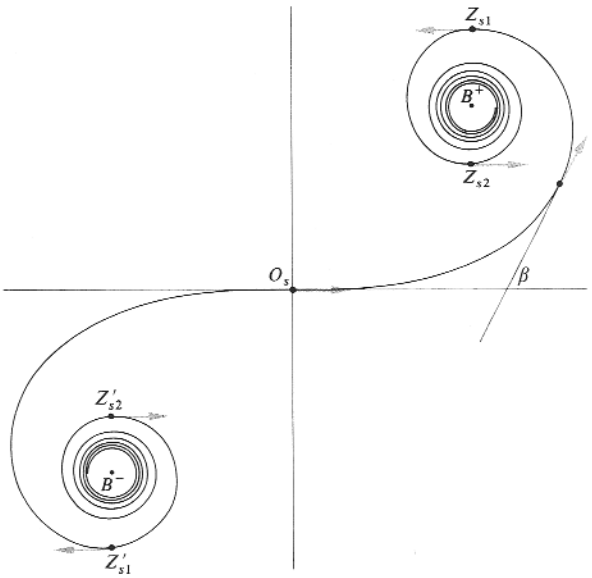


FIGURA 10.66 Espiral de Cornu relacionada con el frente de onda cilíndrico.

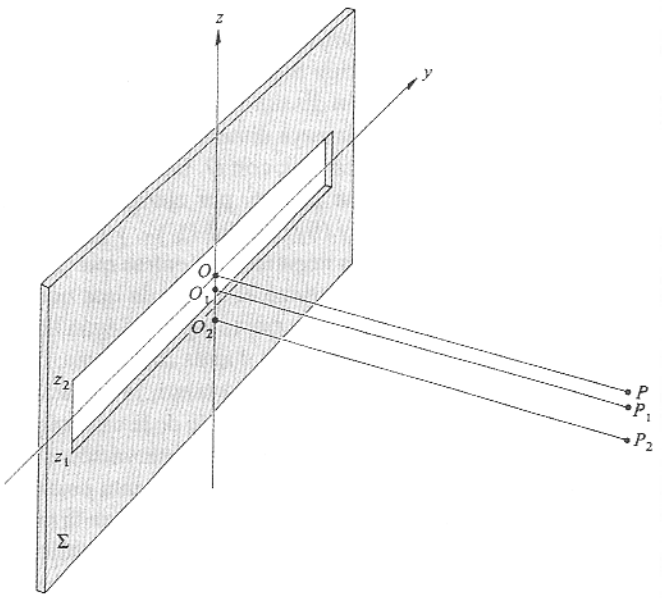
Por consiguiente, Z_{s1} debe estar localizado en la parte superior de la espiral donde $w = \sqrt{2}$, ya que ahí $\beta = \pi w^2/2 = \pi$.

Será útil, mientras vayamos avanzando en el análisis, visualizar la ocultación de estas zonas de franjas al estudiar los efectos de obstrucciones. Lógicamente, podría incluso realizarse una placa zonal apropiada que lograra esto provechosamente; esta clase de dispositivos se utilizan.

10.3.8 Difracción de Fresnel por una rendija

Podemos analizar la difracción de Fresnel en una rendija larga como una extensión del problema de la abertura rectangular. Solamente necesitamos alargar el rectángulo permitiendo que y_1 e y_2 se muevan muy lejos de O, como se muestra en la figura 10.67. Conforme el punto de observación se mueve a lo largo del eje y, siempre que los bordes verticales de cualquier extremo de la rendija estén básicamente en infinito, $u_2 \approx \infty$, $u_1 \approx -\infty$ y $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(u) \approx \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. De la ecuación (10.106), tanto para iluminación de fuente puntual o de ondas planas,

$$I_p = \frac{I_0}{2}\,|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \qquad (10.108)$$



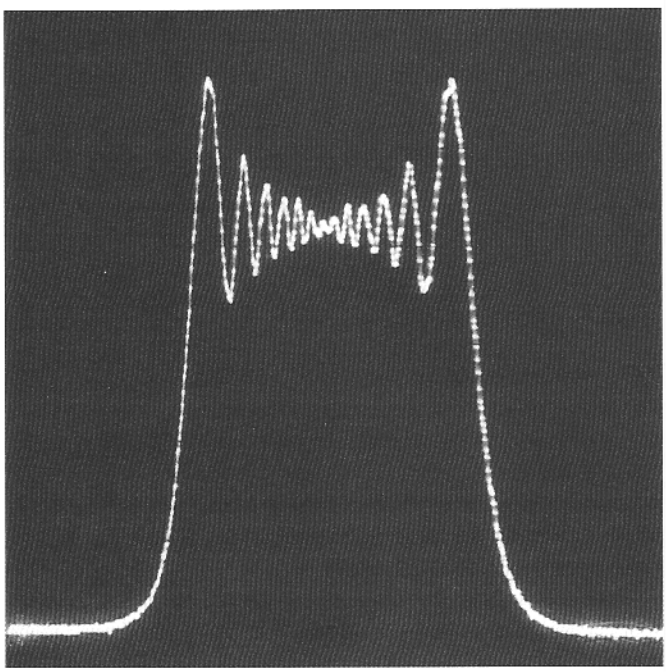


FIGURA 10.67 (*a*) Geometría de rendija única. (*b*) Típica distribución de irradiancia de campo cercano muy próxima a una rendija ancha. La apertura se iluminó con una láser de He-Ne detectándose la apertura con un fotodiodo. Aquí, la horizontal es paralela al eje z del diagrama. (Foto cedida por W. Klein, I. Physikalisches Institut, Alemania.)

y la distribución es independiente de y. Los valores de z_1 y z_2 que fijan el ancho de la rendija, definen el importante parámetro $\Delta v = v_2 - v_1$ que, a su vez, rige $\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)$. Imaginemos una vez más que tenemos una cuerda de longitud Δv descansando a lo largo de la espiral. En P, frente al punto O, la abertura es simétrica estando la cuerda centrada en O_s (figura 10.68). La cuerda $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|$ solamente necesita medirse y sustituirse en la ecuación (10.108) para calcular I_p. En el punto P_1, z_1, y por consiguiente v_1, son números negativos más pequeños mientras que z_2 y v_2 han aumentado positivamente. La longitud de arco Δv (la cuerda) se mueve hacia arriba de la espiral (figura 10.68) mientras que la cuerda del arco disminuye. Conforme el punto de observación vaya moviéndose hacia abajo en dirección a la sombra geométrica, la cuerda se enrolla alrededor de B^+ mientras que la cuerda de arco pasa a través de una serie de extremos relativos. Si Δv es muy pequeña, nuestro trozo de cuerda imaginario es pequeño y la cuerda de arco $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|$ decrece sensiblemente solamente cuando el radio de curvatura de la espiral misma es pequeño. Esto se da en la cercanía de $\tilde{B}^+$ o $\tilde{B}^-$, es decir, muy alejados dentro de la sombra geométrica. Por consiguiente, habrá luz bastante más allá de los bordes de la abertura, siempre que ésta sea relativamente pequeña. Obsérvese también que con valores pequeños de Δv habrá un máximo central ancho. En efecto, si Δv es mucho menor que uno, $r_0\lambda$, es mucho más grande que el ancho de abertura, de manera que prevalece la condición de Fraunhofer. Esta transición de la ecuación (10.108) a la forma de la ecuación (10.107) es más plausible cuando nos damos cuenta de que para w grande las integrales de Fresnel tienen representaciones trigonométricas (véase problema 10.46).

Según vaya ensanchándose la rendija, Δv adquiere valores más elevados, para una r_0 fija, hasta que se dé una configuración como la de la figura 10.69 para un punto frente al centro de la rendija. Si el punto de observación se mueve verticalmente bien sea hacia arriba o hacia abajo, Δv se desliza ya sea hacia abajo o hacia arriba de la espiral. Sin embargo, la cuerda de arco aumenta en ambos casos, de tal manera que el centro de la figura de difracción sea un mínimo relativo. Aparecen ahora franjas dentro de la imagen geométrica de la rendija, contrariamente a la distribución de Fraunhofer.

La figura 10.70 muestra dos curvas de $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|^2$ dibujadas frente a $(w_1 + w_2)/2$, que es el punto central de la longitud de arco Δw. (Recordemos que el símbolo w representa tanto a u como a v). Una familia de tales curvas que recorren el intervalo en Δw desde aproximadamente 1 hasta 10, cubriría la región de interés. Dichas curvas se calculan escogiendo primero un valor particular de Δw y leyendo después los valores $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|$ apropiados en la espiral de Cornu mientras que Δw se desliza sobre ella. Para una rendija larga

$$I_p = \frac{I_0}{2}|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2 \qquad [10.108]$$

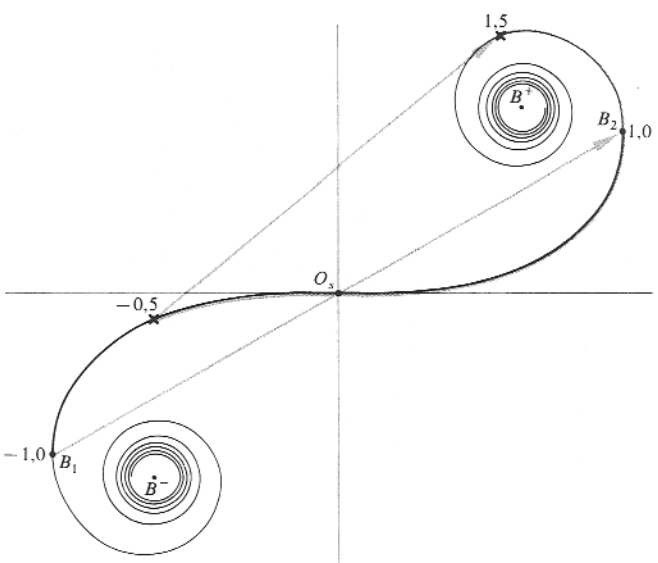


FIGURA 10.68 La espiral de Cornu de la rendija.

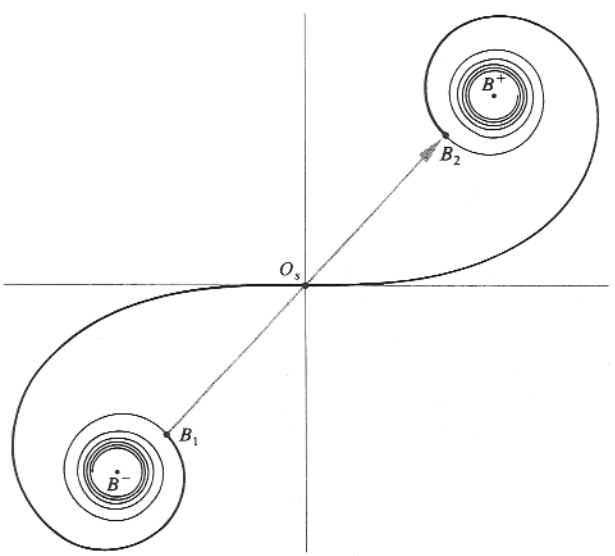


FIGURA 10.69 Mínimo de irradiancia en la distribución de la rendija.

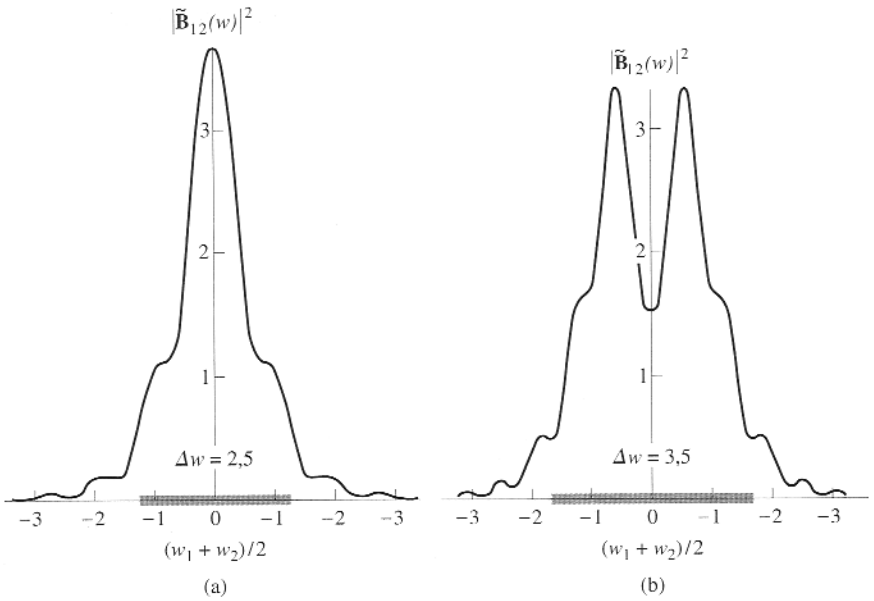


FIGURA 10.70 $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|^2$ frente a $(w_1 + w_2)/2$ para (*a*) $\Delta w = 2{,}5$ y (*b*) $\Delta w = 3{,}5$.

y como Δz es el ancho de la rendija que corresponde a Δv, cada curva en la figura 10.70 es *proporcional a la distribución de la irradiancia* para una determinada rendija. Por ejemplo, la figura 10.70*a* puede leerse como $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(v)|^2$ frente $(v_1 + v_2)/2$ para $\Delta v = 2{,}5$. La abscisa se relaciona con $(z_1 + z_2)/2$, es decir, el desplazamiento desde el centro de la rendija del punto de observación. En la figura 10.70*b*, $\Delta w = 3{,}5$, lo cual significa que una rendija que tiene $\Delta v = 3{,}5$ claramente tiene unas franjas que aparecen dentro de la imagen geométrica como estaba previsto (problema 10.45). Las curvas podrían, por supuesto, representarse explícitamente en términos de valores de Δz o Δy, pero esto las limitaría inútilmente a una serie de parámetros de configuración: ρ_0, r_0, y λ.

Conforme la rendija vaya abriéndose más, Δv se acerca a 10 para luego rebasarlo. Un número de franjas cada vez mayor aparece dentro de la imagen geométrica mientras que la distribución ya no se extiende perceptiblemente más allá de esa imagen.

El mismo tipo de razonamiento se aplica igualmente al análisis de la abertura rectangular donde también pueden utilizarse las curvas de la figura 10.70.

A fin de observar la difracción de Fresnel de rendija, formemos un espacio alargado y estrecho entre dos dedos sujetados a la distancia de un brazo. Hagamos una rendija paralela y similar cerca del ojo, usando la otra mano y con una fuente *luminosa,* como el cielo diurno o una lámpara grande, iluminando la rendija lejana, obsérvela a través de la abertura cercana. Después de insertar la rendija cercana, la lejana parecerá ensancharse, quedando patentes las hileras de franjas.

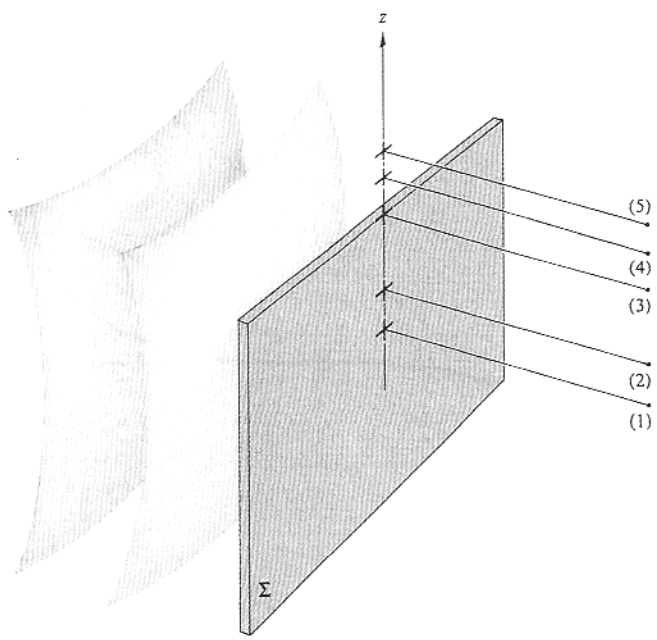
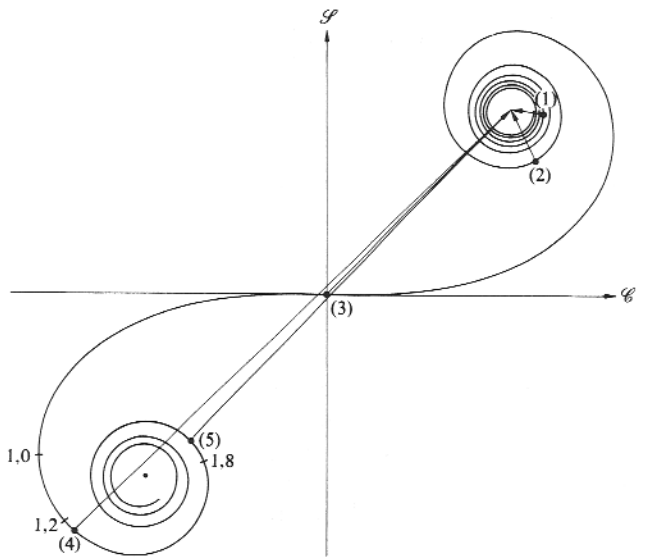
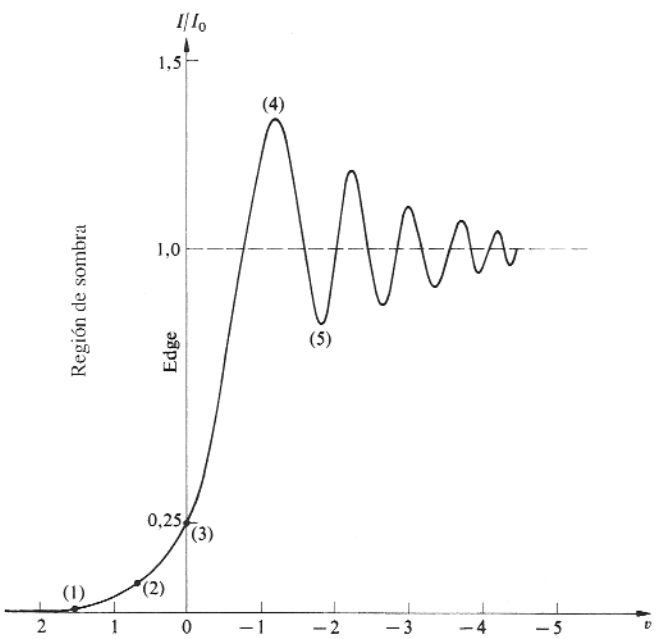


FIGURA 10.71 Pantalla opaca semiinfinita.



(a)



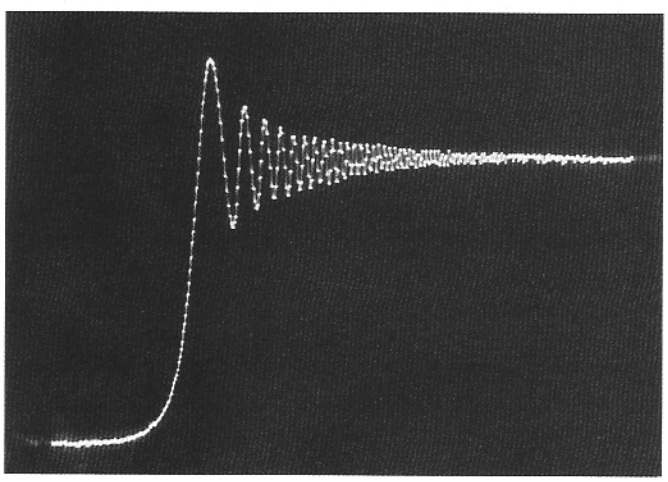
(b)

10.3.9 La pantalla opaca semiinfinita

Ahora formemos una pantalla plana opaca semiinfinita eliminando la parte superior de Σ en la figura 10.67 muy sencillamente, haciendo que $z_2 = y_1 = y_2 = \infty$. Recordando las aproximaciones originales, limitamos la geometría de tal manera que el punto de observación esté cerca del borde de la pantalla. Ya que $v_2 = u_2 = \infty$ y $u_1 = -\infty$, la ecuación (10.104) o la ecuación (10.108) llevan a

$$I_p = \frac{I_0}{2}\{[\tfrac{1}{2} - \mathscr{C}(v_1)]^2 + [\tfrac{1}{2} - \mathscr{S}(v_1)]^2\} \qquad (10.109)$$

Cuando el punto P está justo frente al borde, $v_1 = 0$, $\mathscr{C}(0) = \mathscr{S}(0) = 0$, y $I_p = I_0/4$. Este resultado debía preverse ya que la mitad del frente de onda está obstruido, la amplitud de la perturbación se reduce a la mitad y la irradiancia disminuye hasta un cuarto. Esto ocurre en el punto (3) de las figuras 10.71 y 10.72. Moviéndose dentro de la región de la sombra geométrica hacia el punto (2) y sucesivamente hacia (1) y aún más lejos, las cuerdas de arco sucesivas decrecen de manera monótona (problema 10.46). No existen oscilaciones de la irradiancia dentro de esa región ya que la irradiancia cae rápidamente. En cualquier punto por encima de (3), el borde de la pantalla se situará por debajo de ella, es decir, $z_1 < 0$ y $v_1 < 0$. Alrededor de $v_1 = -1.2$ la cuerda de arco alcanza un máximo y la irradiancia es un máximo. De allí en adelante, I_p oscila alrededor



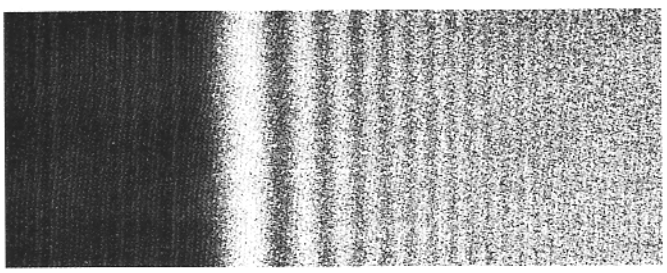
(c)

FIGURA 10.72 *(a)* La espiral de Cornu para una pantalla semiinfinita. *(b)* Distribución de la irradiancia calculada correspondiente. *(c)* La misma distribución de irradiancia con iluminación con un láser de He-Ne medida con un fotodiodo.
(Foto cedida por W. Klein, I. Physikalisches Institut, Alemania).

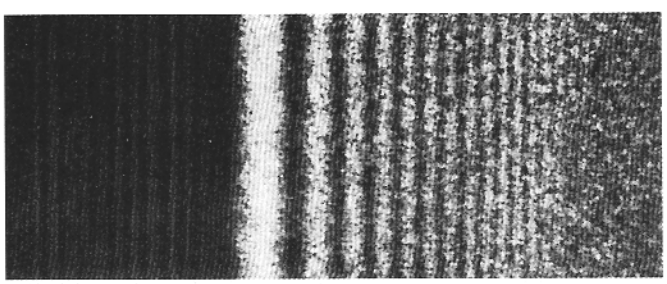
de I_0, disminuyendo gradualmente en magnitud. Mediante técnicas electrónicas sensibles, pueden observarse cientos de estas franjas [20].

Es evidente que la figura de difracción de la figura 10.73 aparecería en la cercanía de los bordes de una rendija *ancha* (Δv mayor que más o menos 10) como un caso límite. La distribución de la irradiancia sugerida por la óptica geométrica se obtiene sólo cuando λ alcanza el valor cero. En efecto, conforme λ vaya disminuyendo, las franjas se mueven más cerca del borde, haciéndose cada vez más finas en extensión.

La figura de borde recto puede observarse utilizando cualquier tipo de rendija, sostenida frente a una lámpara ancha a la distancia de un brazo, como fuente. Introduzcamos una obstrucción opaca (por ejemplo, un portaobjetos de microscopio ennegrecido o una hoja de afeitar) muy cerca del ojo. Conforme el borde de la obstrucción vaya pasando frente a la rendija fuente paralela a ella, aparecerá una serie de franjas.



(a)



(b)

FIGURA 10.73 *(a)* Distribución de franjas para una media pantalla con luz. (Francis Weston Sears, Optics, © 1949, Addison-Wesley, Inc., Reading, MA. Reimpresión autorizada por Addison-Wesley Longman, Inc.) *(b)* Difracción electrónica de Fresnel en un medio plano (cristal de MgO) – los electrones se comportan como fotones. (Foto extraída de *Handbuch der Physik*, publicado por S. Flügge, Springer-Verlag, Heidelberg.)

[20] J. D. Barnett y F. S. Harris, Jr., J. *Opt. Soc. Amer.* **52**.637 (1962).

10.3.10 Difracción por un obstáculo estrecho

Volvamos a tomar el análisis de la rendija individual estrecha; consideremos el caso complementario donde la rendija es opaca y la pantalla transparente. Visualicemos, por ejemplo, un alambre opaco vertical. En un punto que se halla directamente enfrente del centro del alambre habrá dos regiones separadas contributivas que se extienden desde y_1 hasta $-\infty$ y desde y_2 hasta $+\infty$. En la espiral de Cornu éstas corresponden a dos longitudes de arco desde u_1 hasta B^- y desde u_2 hasta B^+. La amplitud de la perturbación en un punto P en el plano de observación es la magnitud de la suma *vectorial* de los dos fasores $\overrightarrow{B^- u_1}$ y $\overrightarrow{u_2 B^+}$ ilustrados en la figura 10.74. Al igual que con el disco opaco, la simetría es tal que siempre habrá una región iluminada a lo largo del eje central. Esto puede verse en la espiral puesto que cuando P está en dicho eje, $\overrightarrow{B^- u_1} = \overrightarrow{u_2 B^+}$ y su suma nunca puede ser cero. La longitud de arco Δu representa la región oscurecida de la espiral que aumenta al aumentar el diámetro del alambre. Para alambres gruesos, u_1, se

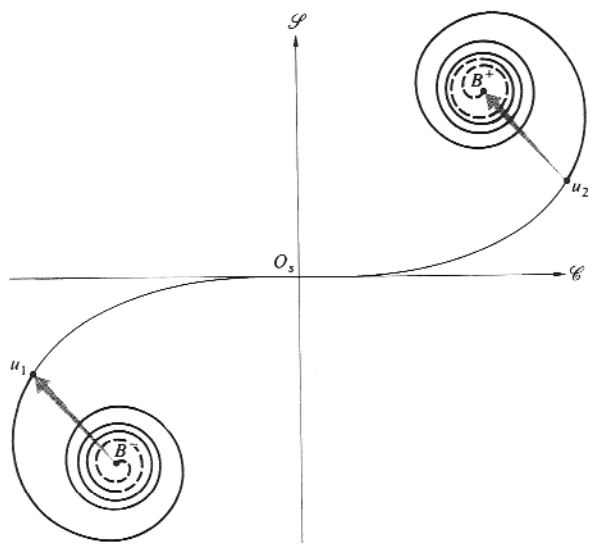
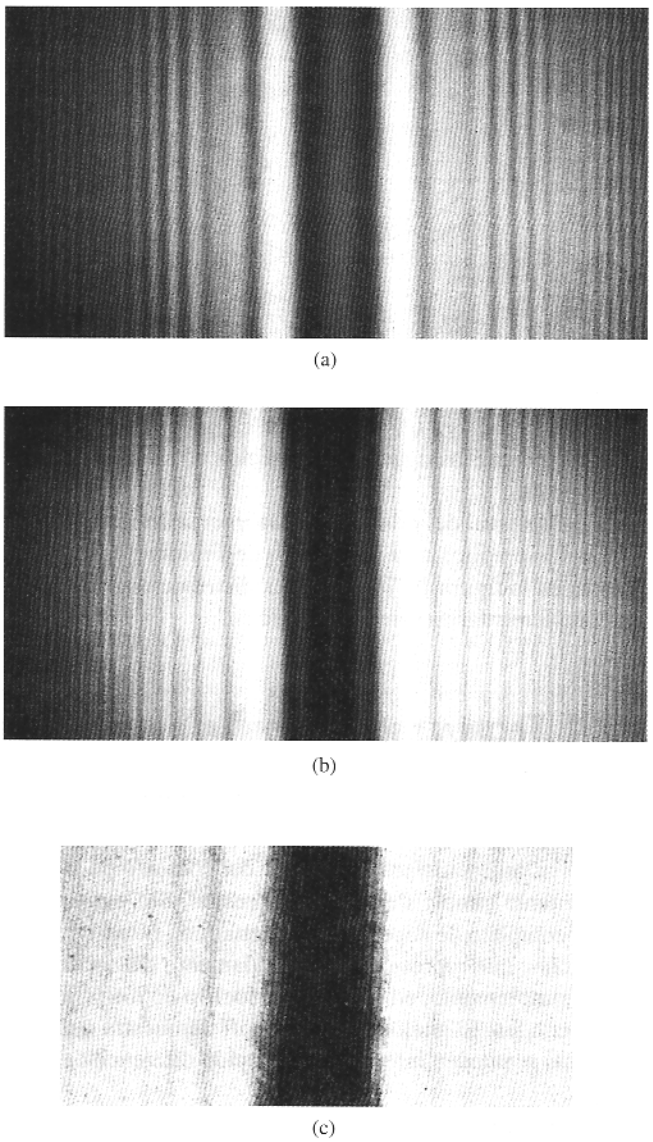


FIGURA 10.74 La espiral de Cornu aplicada a un obstáculo estrecho.

acerca a B^-, u_2 se acerca a B^+, los fasores disminuyen en longitud y la irradiancia en el eje de la sombra se reduce. Esto es evidente en la figura 10.75 que recoge distribuciones formadas por una pieza delgada de mina de un portaminas y por una varilla de $\frac{1}{8}$ de pulgada de diámetro. Imaginemos que tenemos un pequeño sensor de irradiancia en el punto P en el plano de observación (o la película fotográfica). Cuando P se mueve fuera del eje central hacia la derecha, y_1 y u_1 aumentan negativamente mientras que y_2 y u_2, que son positivos, disminuyen. La región opaca Δu, se desliza hacia abajo de la espiral. Cuando el sensor está en el borde derecho de la sombra geométrica $y_2 = 0$, $u_2 = 0$, es decir, u_2 está en O_s. Obsérvese que si el alambre es fino, es decir, si Δu es pequeño, el sensor registrará una disminución gradual en la irradiancia cuando u_2 se acerque a O_s. Por otro lado, si el alambre es grueso Δu es grande como lo son u_1 y u_2. Cuando Δu se desliza hacia abajo de la espiral, los dos fasores realizan un cierto número de rotaciones completas, saliendo y entrando en fase en el proceso. Los extremos adicionales resultantes que aparecen dentro de la sombra geométrica son evidentes en la figura 10.75*b*. En efecto, la separación entre las franjas internas varía inversamente con el ancho de la varilla como si la figura hubiera surgido de la interferencia de dos ondas (experimento de Young) reflejada en los bordes de la varilla.



(a)

(b)

(c)

FIGURA 10.75 *(a)* Distribución de sombras proyectada por la mina de un portaminas. *(b)* Patrón proyectado por una varilla de 1/8" de diámetro. (Fotos de E. H.) *(c)* Difracción de una onda de materia. Figura de difracción electrónica de Fresnel de un filamento de cuarzo metalizado de 2 μm de diámetro. (Foto de O.E. Klemperer, *Electron Physics*, Butterworths, Londres (1972), páginas 188-191.)

10.3.11 Principio de Babinet

Se dice que dos pantallas de difracción son *complementarias* cuando las regiones transparentes de una corresponden exactamente a las regiones opacas de la otra y viceversa. Cuando dos pantallas así se superponen, la combinación es obviamente totalmente opaca. Ahora bien, representemos con E_1 y E_2 las perturbaciones ópticas escalares que llegan a P cuando cualquiera de las pantallas complementarias, Σ_1 o Σ_2 respectivamente, están colocadas. La contribución total de cada abertura se determina integrando en el área acotada por esa abertura. Si ambas *aberturas* están presentes a la vez, no se dará ninguna región opaca, los límites de integración van al infinito y obtenemos la perturbación E_0 sin obstrucción, de donde

$$E_1 + E_2 = E_0 \tag{10.110}$$

que representa el **principio de Babinet**. Miremos detenidamente las figuras 10.69 y 10.74 que muestran las configuraciones de la espiral de Cornu para una rendija transparente y un obstáculo estrecho opaco. Si los dos conjuntos se hacen complementarios, la figura 10.76 ilustra el principio de Babinet muy claramente. El fasor procedente de un obstáculo estre-

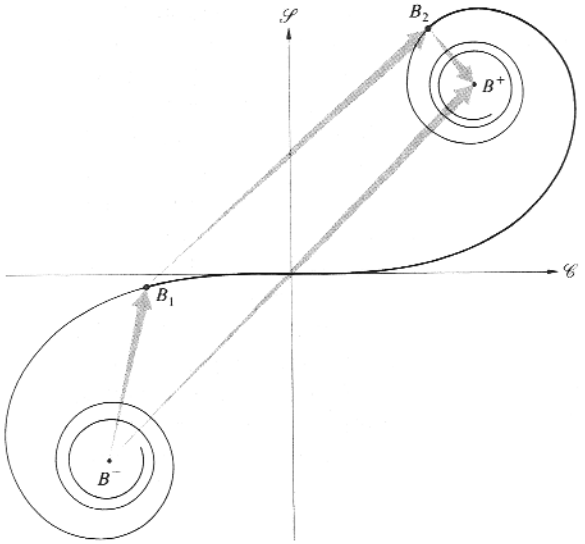


FIGURA 10.76 La espiral de Cornu ilustrando el principio de Babinet.

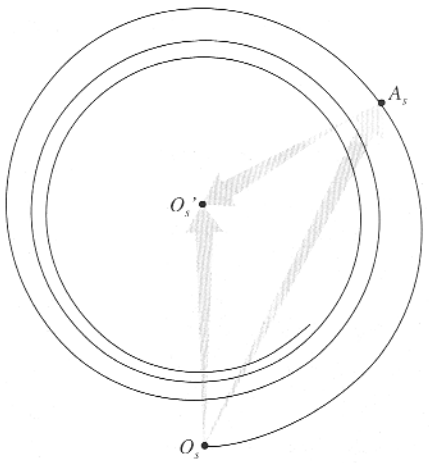


FIGURA 10.77 Curva de vibración ilustrando el principio de Babinet.

cho ($\overrightarrow{B^-B_1}+\overrightarrow{B_2B^+}$) sumado al de una rendija $\overrightarrow{B_2B_1}$ da como resultado el fasor sin obstrucción $\overrightarrow{B^-B^+}$.

El principio prevé que cuando $E_0 = 0$, $E_1 = -E_2$; dicho de otra forma, estas perturbaciones tienen exactamente la misma magnitud y están desfasadas 180°, pudiendo, por lo tanto, observarse exactamente la misma distribución de la irradiancia con Σ_1 o Σ_2 en su sitio, un resultado verdaderamente muy interesante. Es evidente, sin embargo, que el principio no puede ser rigurosamente cierto, ya que para una onda no obstruida procedente de una fuente puntual no hay puntos de amplitud cero (es decir, $E_0 \neq 0$ en todas partes). Sin embargo, si la imagen de la fuente en P_0 está formada por lentes perfectas, como en la figura 10.10 (sin que estén presente Σ_1 ni Σ_2), habrá una vasta región con amplitud esencialmente cero más allá de la proximidad inmediata de P_0 (más allá del disco de Airy) donde $E_1 + E_2 = E_0 = 0$. Por consiguiente, sólo para el caso de la difracción de Fraunhofer, las pantallas complementarias engendrarán distribuciones de irradiancia equivalente, es decir, $E_1 = -E_2$ (excluyendo el punto P_0). No obstante, la ecuación (10.110) es válida en la difracción de Fresnel aun cuando las irradiancias no obedezcan a una relación simple, como está ejemplificado por la rendija y el obstáculo estrecho de la figura 10.76. Además, para un agujero circular y un disco, remítanse a las figuras 10.52 y 10.58 y examinen sucesivamente la figura 10.77. La ecuación (10.110) es de nuevo claramente aplicable aunque las figuras de difracción no sean ciertamente equivalentes.

La belleza real del principio de Babinet se hace más patente cuando se aplica a la difracción de Fraunhofer, como se muestra en la figura 10.78 donde las distribuciones de pantallas complementarias son casi idénticos.

10.4 Teoría escalar de la difracción de Kirchhoff

Hemos ilustrado varias configuraciones de difracción de manera bastante satisfactoria, dentro del contexto de la teoría relativamente simple de Huygens-Fresnel. Sin embargo, el modelo completo de superficies cubiertas con fuentes puntuales ficticias, que representaba el fundamento del análisis, se supuso simplemente, en lugar de deducirlo de los principios fundamentales. El análisis de Kirchhoff demuestra que estos resultados se pueden inferir de la ecuación diferencial *escalar* de onda.

Puesto que el siguiente estudio es muy escrupuloso y complejo, algunas de sus partes han sido relegadas a un apéndice donde podemos permitirnos ser breves y correr el riesgo de sacrificar la legibilidad a cambio del rigor.

En el pasado, al analizar una distribución de fuentes puntuales monocromáticas, calculamos la perturbación óptica resultante en el punto P (es decir, E_p) superponiendo las ondas

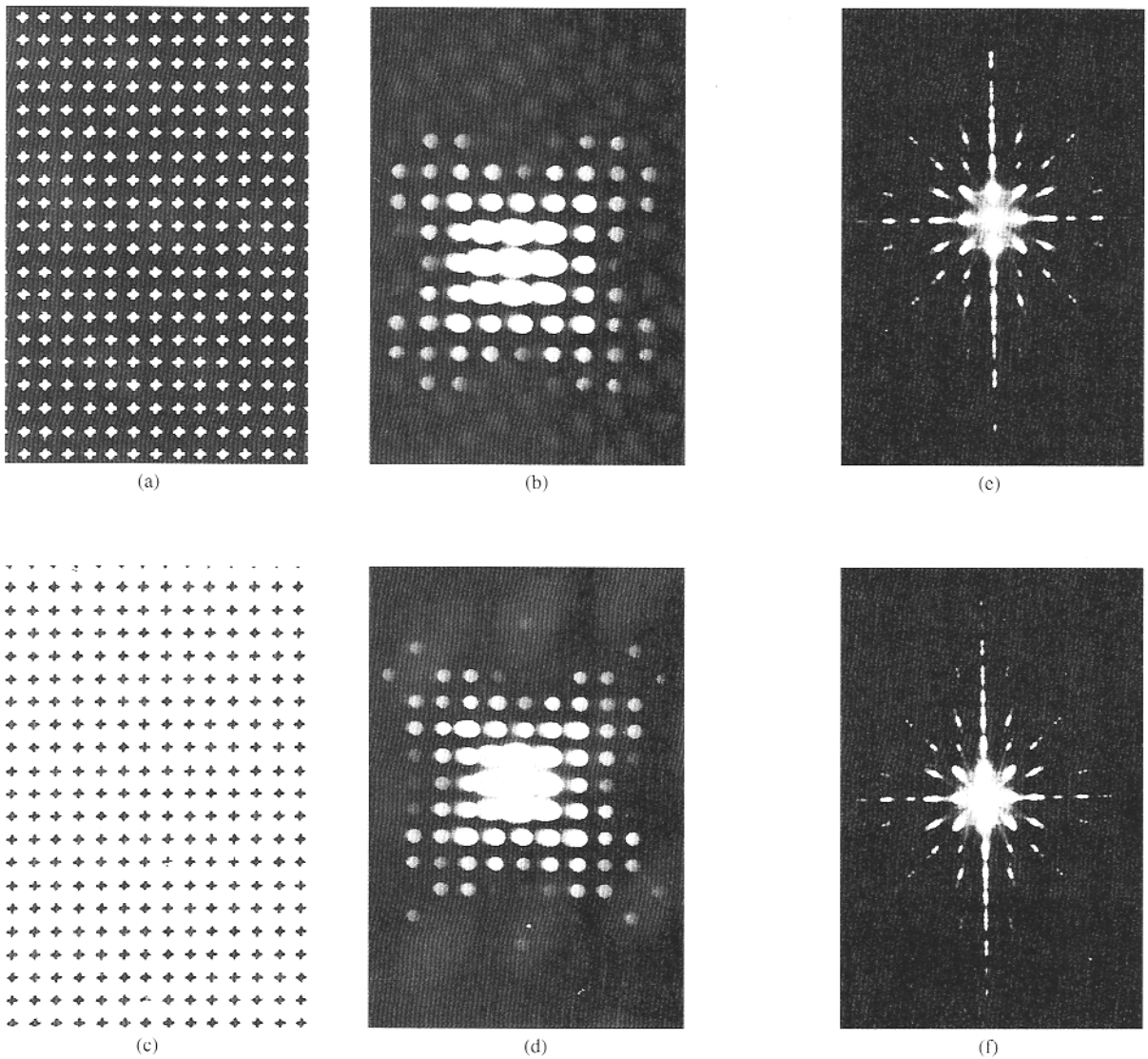


FIGURA 10.78 *(a)-(d)* Figuras de difracción de luz blanca para conjuntos regulares de aberturas y obstáculos complementarios en forma del signo más redondeado. *(e)* y *(f)* Figuras de difracción para un conjunto regular de aberturas rectangulares y obstáculos, respectivamente. (Foto cedida por The Ealing Corporation y Richard B. Hoover.)

individuales. Hay, sin embargo, otro método totalmente diferente que se fundamenta en la teoría del potencial. Aquí no nos interesamos por las fuentes en sí mismas sino, más bien, por la perturbación óptica escalar y sus derivadas en una superficie arbitraria cerrada que rodea a P. Asumimos que un análisis de Fourier puede separar las frecuencias constitutivas de tal manera que solamente necesitamos trabajar con una de dichas frecuencias a la vez. La perturbación óptica monocromática E es una solución de la ecuación diferencial de onda

$$\nabla^2 E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \tag{10.111}$$

Sin especificar la naturaleza espacial precisa de la onda, puede escribirse como

$$\tilde{E} = \tilde{\mathscr{E}} e^{-ikct} \tag{10.112}$$

Aquí $\tilde{\mathscr{E}}$ representa la parte del espacio complejo de la perturbación. Sustituyendo en la ecuación de onda se obtiene

$$\nabla^2 \tilde{\mathscr{E}} + k^2 \tilde{\mathscr{E}} = 0 \tag{10.113}$$

Se trata de la *ecuación de Helmholtz* y se resuelve ayudándose con el teorema de Green del Apéndice 2. La perturbación óptica que existe en P, expresada en términos de la perturbación óptica y su gradiente evaluados en una superficie cerrada arbitraria S que rodea a P, es

$$\tilde{\mathscr{E}}_P = \frac{1}{4\pi}\left[\oint\!\!\oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \nabla \tilde{\mathscr{E}} \cdot d\mathbf{S} - \oint\!\!\oint_S \tilde{\mathscr{E}} \nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cdot d\mathbf{S}\right] \tag{10.114}$$

Denominado *Teorema integral de Kirchhoff*, la ecuación (10.114) se refiere a la configuración geométrica ilustrada en la figura 10.79.

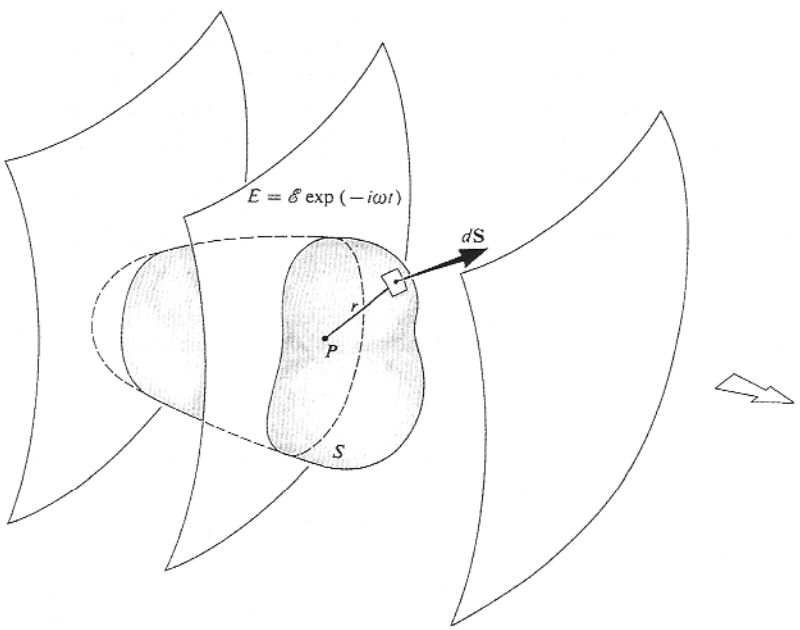


FIGURA 10.79 Una superficie cerrada arbitraria S encerrando al punto P.

Ahora aplicamos el teorema al caso específico de una onda esférica no obstruida que se origina en una fuente puntual s, como se muestra en la figura 10.80. La perturbación tiene entonces la forma

$$\tilde{E}(\rho, t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{i(k\rho - \omega t)} \tag{10.115}$$

en cuyo caso

$$\tilde{\mathscr{E}}(\rho) = \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{ik\rho} \tag{10.116}$$

Si la reemplazamos en la ecuación (10.114), tenemos

$$\tilde{\mathscr{E}}_P = \frac{1}{4\pi}\left[\oint\!\!\oint_S \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{ik\rho}\right) \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\rho}})\, dS - \oint\!\!\oint_S \frac{\mathscr{E}_0}{\rho} e^{ik\rho} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}})\, dS\right]$$

donde $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\, dS$, $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{r}}$, y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ son vectores unitarios,

$$\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$$

y

$$\nabla \mathscr{E}(\boldsymbol{\rho}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, \partial \mathscr{E} / \partial \rho$$

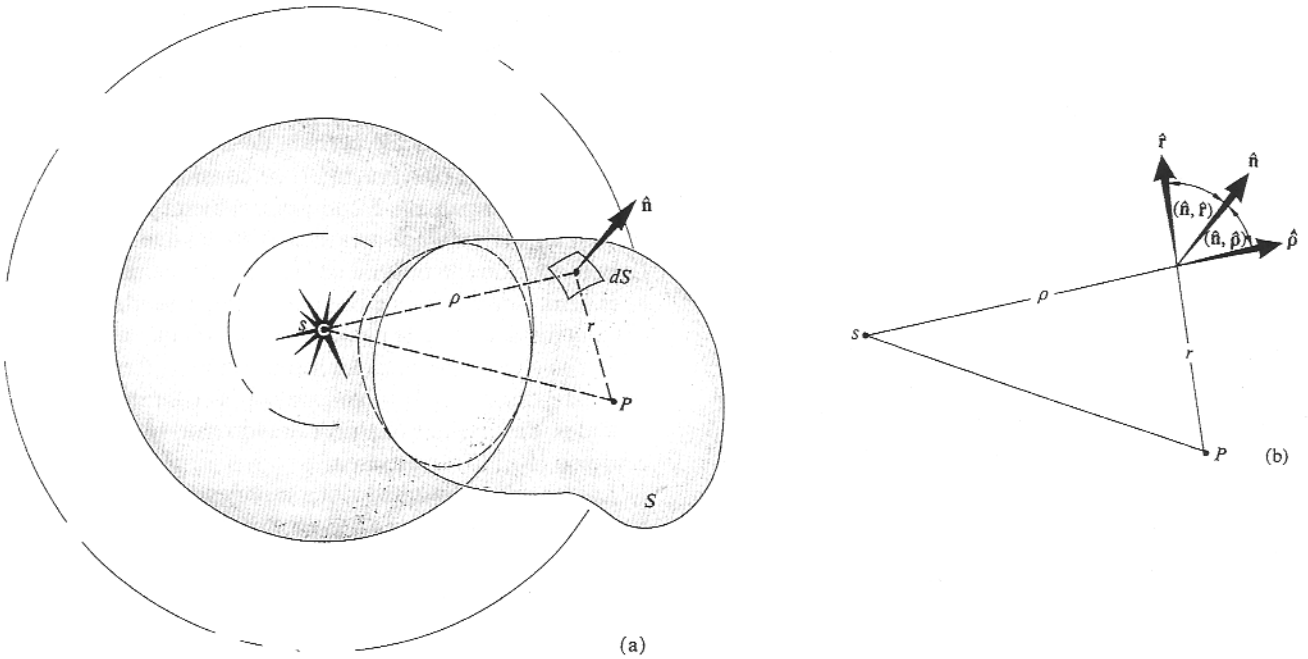


FIGURA 10.80 Onda esférica emitida desde el punto *s*.

Las diferenciaciones bajo los signos de integral son

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{e^{ik\rho}}{\rho}\right) = e^{ik\rho}\left(\frac{ik}{\rho} - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = e^{ikr}\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)$$

Cuando $\rho >> \lambda$ y $r >> \lambda$, los términos $1/\rho^2$ y $1/r^2$ pueden eliminarse. Esta aproximación es válida en el espectro óptico, pero no tiene por qué ser cierta para microondas. Procediendo, escribimos

$$\tilde{\mathscr{E}}_p = -\frac{\mathscr{E}_0 i}{\lambda}\iint_S \frac{e^{ik(\rho+r)}}{\rho r}\left[\frac{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}) - \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\rho}})}{2}\right] dS \tag{10.117}$$

Se trata de la ***fórmula de difracción de Fresnel-Kirchhoff.***

Miremos detenidamente la ecuación (10.96) que representa la perturbación en P procedente de un elemento dS de la teoría de Huygens-Fresnel, y comparémosla con la ecuación (10.117) donde la dependencia angular está contenida en el único término $\frac{1}{2}[\cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}}) - \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\rho}})]$ al que llamaremos **factor de oblicuidad** $K(\theta)$. Más adelante demostraremos que es equivalente a la ecuación (10.72). Obsérvese también que k puede reemplazarse por $-k$ en todas partes, ya que podríamos haber escogido que la fase de la ecuación (10.115) fuera$(\omega t - k\rho)$. Recordando la ecuación (10.112), multipliquemos ambos lados de la ecuación (10.117) por exp $(-i\omega t))$; el elemento diferencial es entonces

$$dE_p = \frac{K(\theta)\mathscr{E}_0}{\rho r \lambda}\cos[k(\rho + r) - \omega t - \pi/2]\, dS \tag{10.118}$$

Esta es la contribución a E_p procedente de un elemento de área superficial dS a una distancia r de P. El término $\pi/2$ en la fase deriva del hecho que $-i = \exp(-i\pi/2)$. Por consiguiente, la formulación de Kirchhoff lleva al mismo resultado total, excepto que incluye el desfase correcto $\pi/2$ que falta en el estudio de Huygens-Fresnel [ecuación (10.96)].

Tenemos aún que asegurarnos de que se pueda actuar de manera que la superficie S corresponda a la porción no obstruida del frente de onda como ocurre en la teoría de Huygens-Fresnel. Para el caso de una onda esférica que se propaga

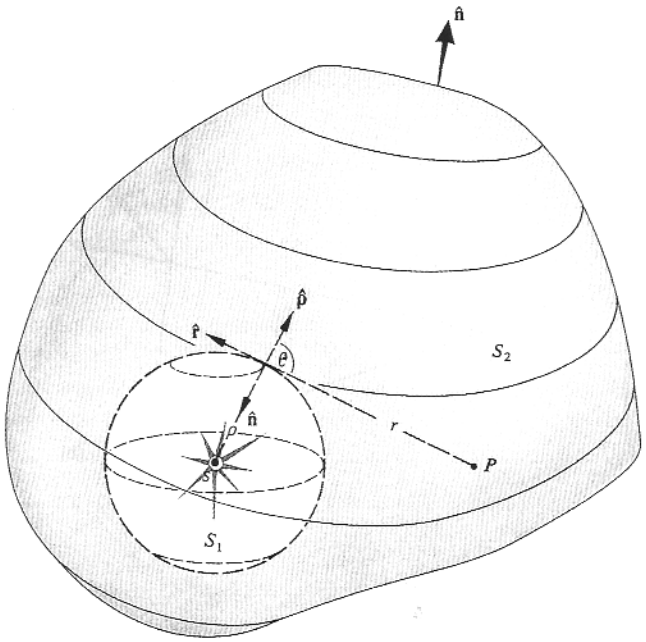


FIGURA 10.81 Región doblemente conexa que rodea al punto *s*.

libremente emanando de la fuente puntual *s*, construimos la región doblemente conexa de la figura 10.81. La superficie S_2 rodea completamente a la pequeña superficie esférica S_1. En $\rho = 0$ la perturbación $E(\rho, t)$ tiene una particularidad y, por lo tanto, se excluye acertadamente del volumen V entre S_1 y S_2. La integral debe ahora incluir ambas superficies, S_1 y S_2. Sin embargo, podemos hacer que S_2 aumente hacia afuera indefinidamente logrando que su radio vaya al infinito. En este caso, la contribución a la superficie integral desaparece. (Esto es cierto cualquiera que sea la forma de la perturbación incidente siempre que disminuya al menos tan rápidamente como una onda esférica.) La superficie restante S_1 es una esfera centrada en la fuente puntual. Puesto que, en S_1, $\hat{\mathbf{n}}$ y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ son antiparalelas, es evidente de la figura 10.80*b* que los ángulos $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{r}})$ y $(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\rho}})$ son θ y 180°, respectivamente. El factor de oblicuidad queda entonces

$$K(\theta) = \frac{\cos\theta + 1}{2}$$

que equivale a la ecuación (10.72). Claramente, ya que la superficie de integración S_1 está centrada en *s* corresponde en efecto al frente de onda esférico en algún instante. ***El principio de Huygens-Fresnel es, por consiguiente, directamente atribuible a la ecuación diferencial de ondas escalar.***

No profundizaremos más en la formulación de Kirchhoff, solamente indicaremos cómo puede aplicarse a pantallas de difracción. La superficie cerrada de integración única que rodea al punto de observación *P*, se considera generalmente como si fuera la pantalla Σ completa, cubierta por un hemisferio infinito. Hay entonces tres áreas distintas que nos interesan. La contribución a la integral de la región del hemisferio infinito es cero. Además, se supone que no hay perturbación inmediatamente detrás de la pantalla opaca, así que esta segunda región no contribuye nada. La perturbación en *P* está, por consiguiente, determinada solamente por las contribuciones procedentes de la abertura, necesitando tan sólo integrar la ecuación (10.117) en ese área.

Los magníficos resultados que se obtienen utilizando el principio de Huygens-Fresnel están ahora justificados teóricamente, siendo las principales limitaciones que $\rho >> \lambda$ y $r >> \lambda$.

10.5 Ondas de difracción en bordes

En la sección 10.1.1 afirmamos que la onda difractada podría visualizarse como si surgiera de una distribución ficticia de emisores secundarios repartidos a través de la porción no obstruida del frente de onda, es decir, el principio de Huygens-Fresnel. Hay, sin embargo, otra posibilidad muy interesante y totalmente diferente. Supongamos que una onda incidente ponga en vibración a los electrones en la parte posterior de la pantalla de difracción Σ y que ellos, a su vez, radien. Adelantamos un doble efecto. Primero, todos los osciladores que están lejos del borde de la abertura, radian hacia atrás, en dirección de la fuente, de tal manera que anulan la onda incidente en todos los puntos, excepto dentro de la proyección de la abertura misma. Dicho de otro modo, si éste fuera el único mecanismo participante, en el plano de observación aparecería una imagen geométrica perfecta de la abertura. Hay, sin embargo, una contribución adicional procedente de los osciladores situados en la proximidad del borde de la abertura. Una parte de la energía radiada por estas fuentes secundarias se propaga hacia adelante. La superposición de esta onda esparcida (denominada *onda de difracción de borde)* y la parte no obstruida de la onda primaria (denominada *onda geométrica)* da como resultado la figura de difracción. Una razón muy convincente para contemplar tal

esquema aparece al examinar la siguiente disposición. Hagamos un pequeño agujero ($\approx\frac{1}{2}$ cm de diámetro) de forma arbitraria en un pedazo de papel y, sosteniéndolo con el brazo extendido, miremos hacia una bombilla corriente situada a algunos metros de distancia. Incluso con el ojo en la región de sombra, los bordes de la abertura aparecerán brillantemente iluminados. La fotografía de un tanque de ondas de la figura 10.82 ilustra también el proceso. Obsérvese cómo cada borde de la rendija parece servir como centro de una perturbación circular que se propaga entonces más allá de la abertura. Aquí no hay osciladores de electrones, lo cual implica que estas ideas, de cierta forma, son generales, siendo aplicables también a ondas elásticas.

La formulación de la difracción en términos de la interferencia de una onda de borde esparcida y una onda geométrica es, quizás, físicamente más interesante que los emisores ficticios del principio de Huygens-Fresnel. Sin embargo, no se trata de un concepto nuevo ya que fue propuesto por primera vez por el omnipresente Thomas Young aún antes de la célebre memoria de Fresnel sobre la difracción. Pero con el tiempo, los brillantes éxitos de Fresnel desafortunadamente convencieron a Young que rechazara sus propias ideas y así lo hizo, al final, en una carta que envío a Fresnel en 1818. Reforzada por el trabajo de Kirchhoff, la concepción de Fresnel de la difracción fue generalmente aceptada y ha persistido (hasta la sección 10.4). La teoría de Young empezó a rehabilitarse en 1888 cuando Gian Antonio Maggi demostró que el análisis de Kirchhoff, para una fuente puntual al menos, era equivalente a dos términos contributivos: el primero era una onda geométrica mientras que el otro, desgraciadamente, era una integral que no permitía una interpretación física clara en aquel tiempo.

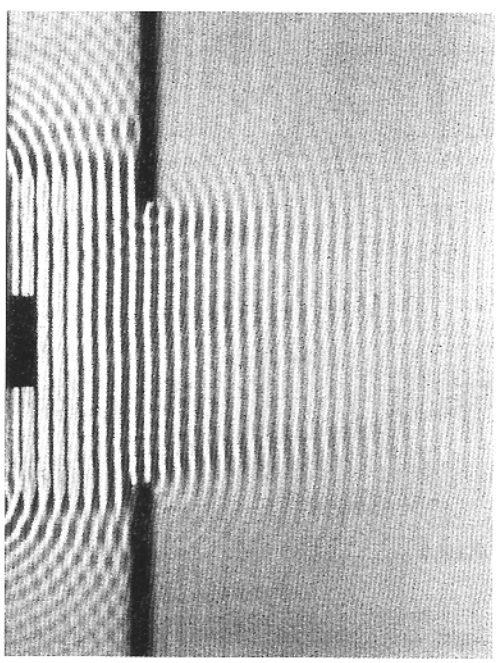


FIGURA 10.82 Ondas en un tanque atravesando una rendija. (Fotos cedidas por PSSC *Physics,* D. C. Heath, Boston. 1960.)

En su tesis doctoral (1893) Eugen Maey demostró que una onda de borde podía efectivamente extraerse de la formulación modificada de Kirchhoff para medio plano semiinfinito. La solución rigurosa de Arnold Sommerfeld del problema del medio plano (véase sección 10.1) demostró que una onda cilíndrica proviene, en realidad, del borde de la pantalla, propagándose tanto dentro de la región de sombra geométrica como en la iluminada. En ésta, la onda de difracción de borde se combina con la onda geométrica, en completo acuerdo con la teoría de Young. Adalbert (Wojciech) Rubinowicz pudo comprobar, en 1917, que la fórmula de Kirchhoff para una onda esférica plana puede descomponerse oportunamente en las dos ondas deseadas, revelando así la veracidad básica de las ideas de Young. Él también estableció más tarde que la onda de difracción de borde, como primera aproximación, era engendrada por la reflexión de la onda primaria en el borde de la abertura. En 1923, Friedrich Kottler señaló la equivalencia de las soluciones de Maggi y Rubinowicz, así que ahora se habla de la teoría de Young-Maggi-Rubinowicz. Más recientemente, Kenro Miyamoto y Emil Wolf (1962) extendieron la teoría de la difracción de borde al caso de ondas incidentes arbitrarias [21].

Un punto de vista contemporáneo muy útil del problema es el de Joseph B. Keller quien desarrolló una teoría geométrica de la difracción que está estrechamente relacionada con el modelo de onda de borde de Young. Junto con los rayos usuales de la óptica geométrica, él supone la existencia de rayos difractados. A fin de determinar los campos resultantes, se emplean las reglas que rigen estos rayos difractados, que son análogas a las leyes de la reflexión y de la refracción.

[21] Una bibliografía bastante completa puede hallarse en el artículo de A. Rubinowicz en *Progress in Optics,* Vol. 4. pág. 199.

PROBLEMAS

10.1 Una fuente puntual S está a una distancia perpendicular R del centro de un agujero circular de radio a en una pantalla opaca. Si la distancia hasta la periferia es $R + \ell$, demuestre que la difracción de Fraunhofer ocurrirá en una pantalla muy distante cuando

$$\lambda R >> a^2/2$$

¿Cuál es el valor satisfactorio más pequeño de R si el agujero tiene un radio de 1 mm, $\ell \leq \lambda/10$, y $\lambda = 500$ nm?

10.2 Usando la figura P.10.2, deduzca la ecuación de irradiancia para N osciladores coherentes, ecuación (10.5).

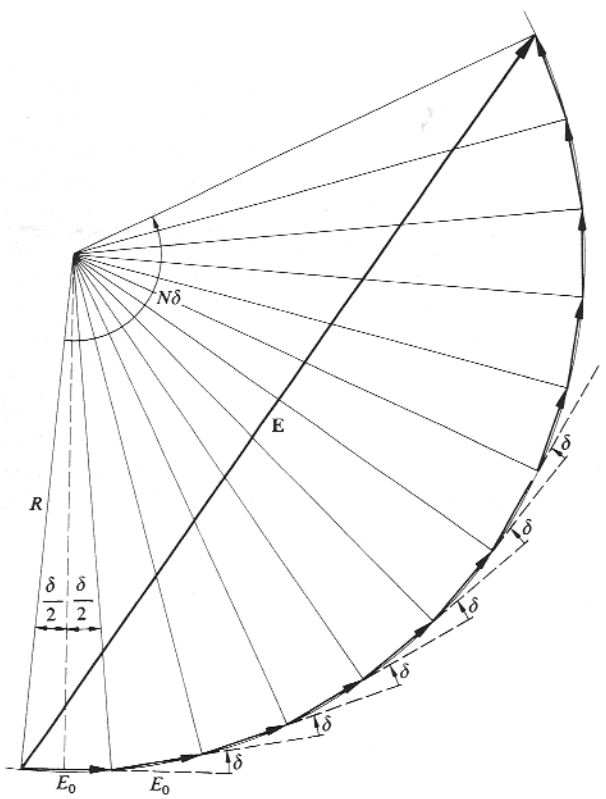


FIGURA P.10.2

10.3* En la sección 10.1.3 hablábamos de introducir un desplazamiento intrínseco de fase ε entre osciladores en un conjunto lineal. Teniendo en cuenta esto, demuestre que la ecuación (10.18) queda

$$\beta = (kb/2)(\text{sen } \theta - \text{sen } \theta_i)$$

cuando la onda plana incidente forma un ángulo θ_i con el plano de la rendija.

10.4 Refiriéndose al sistema múltiple de antenas de la figura 10.8, calcule la separación angular entre lóbulos sucesivos o máximos principales y el ancho del máximo central.

10.5 Examine la disposición de la figura 10.6 a fin de determinar qué ocurre en el espacio imagen de las lentes, es decir, localice la pupila de salida y relaciónela con el proceso de difracción. Demuestre que las configuraciones de la figura P.10.5 son equivalentes a las de la figura 10.6 y, por consiguiente, darán como resultado la difracción de Fraunhofer. Diseñe al menos otra de tales disposiciones.

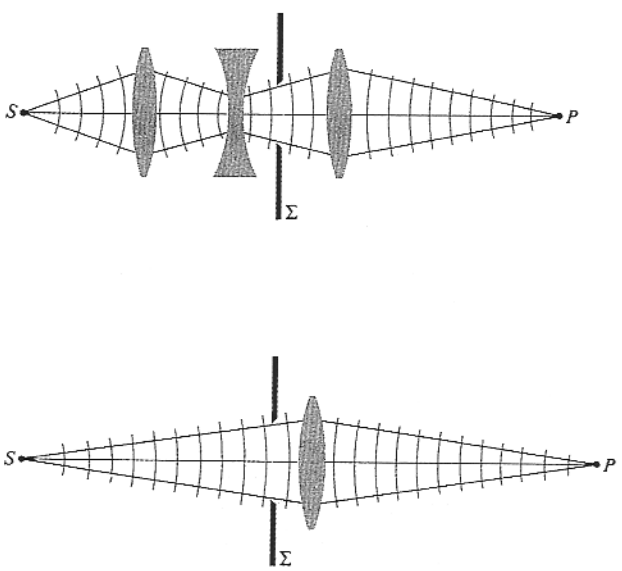


FIGURA P.10.5

10.6 La distancia angular entre el centro y el primer mínimo de un patrón de difracción de Fraunhofer de rendija única se denomina *semiancho angular* escriba una expresión para éste. Encuentre el *semiancho lineal* correspondiente (a) cuando no hay lentes de enfo-

que y la distancia de la rendija a la pantalla de observación es L, (b) cuando una lente de distancia focal f_2 está muy cercana a la abertura. Observe que el ancho lineal medio es también la distancia entre mínimos sucesivos.

10.7* Una rendija individual en una pantalla opaca de 0,10 mm de ancho está iluminada (en el aire) por ondas planas de un láser de ión de cripton ($\lambda_0 = 461{,}9$ nm). Si la pantalla de observación se halla a una distancia de 1 m, determine si la figura de difracción resultante pertenecerá a la variedad de campo lejano, calculando sucesivamente el ancho angular del máximo central.

10.8* Una rendija individual estrecha (en el aire) en una pantalla opaca está iluminada por infrarrojo de un láser de He-Ne de 1.152,2 nm y resulta que el centro de la décima franja oscura de la distribución de Fraunhofer se halla a un ángulo de 6,2° fuera del eje central. Determine el ancho de la rendija. ¿A qué ángulo aparecerá el décimo mínimo si todo el conjunto está sumergido en agua ($n_{ag} = 1{,}33$) en lugar de aire ($n_a = 1{,}00029$)?

10.9 Un haz colimado de microondas incide en una pantalla metálica que contiene una larga rendija horizontal de 20 cm de ancho. Un detector que se mueve paralelamente a la pantalla en la región de campo lejano halla el primer mínimo de irradiancia a un ángulo de 36,87° encima del eje central. Determine la longitud de onda de la radiación.

10.10 Demuestre que para una distribución de Fraunhofer de doble rendija, si $a = mb$, el número de franjas brillantes (o partes de ellas) dentro del máximo central de difracción será igual a $2m$.

10.11* Dos rendijas largas de 0,10 mm de ancho, separadas por 0,20 mm, en una pantalla opaca están iluminadas por una luz con una longitud de onda de 500 nm. Si el plano de observación se halla a 2,5 m de distancia, ¿la distribución corresponderá a la difracción de Fresnel o de Fraunhofer? ¿Cuántas franjas podrán verse dentro de la banda central luminosa?

10.12 ¿Cuál es la irradiancia relativa de los máximos subsidiarios en una figura de difracción de Fraunhofer de tres rendijas? Trace un gráfico de la distribución de la irradiancia, cuando $a = 2b$, para dos y después para tres rendijas.

10.13* Comenzando con la expresión de irradiancia para una rendija finita, reduzca la rendija a un elemento de área minúsculo y demuestre que continúa emitiendo igualmente en todas las direcciones.

10.14* Demuestre que las figuras de difracción de Fraunhofer tienen un centro de simetría [es decir, $I(Y, Z) = I(-Y, -Z)$] independientemente de la configuración de la abertura, siempre que no haya variaciones en la fase en el campo en la región del agujero. Comience con la ecuación (10.41). Veremos más tarde (Capítulo 11) que esta restricción equivale a decir que la función de la abertura es real.

10.15 Recordando los resultados del Problema 10.14, analice las simetrías que serían evidentes en la figura de difracción de Fraunhofer de una abertura simétrica alrededor de una línea (suponiendo que incidan normalmente ondas planas cuasimonocromáticas).

10.16 Basándose en consideraciones de simetría, haga un esquema aproximado de las figuras de difracción de Fraunhofer para una abertura triangular equilátera y una abertura en forma de un signo más.

10.17 La figura P.10.17 representa la distribución de irradiancia en campo lejano para una configuración de aberturas rectangulares alargadas. Describa el conjunto de agujeros que engendraría dicha figura, explicando minuciosamente sus razones.

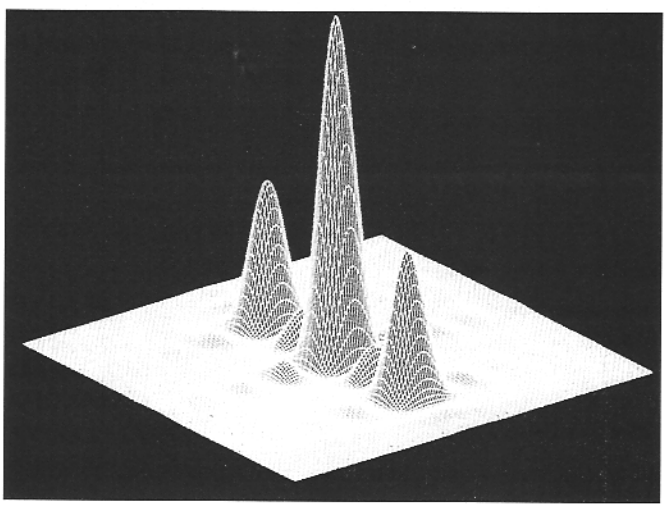


FIGURA P.10.17 Foto cedida por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.

10.18 En la figura P.10.18*a* y *b* están el campo eléctrico y las distribuciones de irradiancias, respectivamente, en campo lejano para una configuración de aberturas rectangulares alargadas. Describa el conjunto de agujeros que engendraría dichos patrones, y discuta su razonamiento.

10.19 La figura P.10.19 representa una distribución de irradiancia de Fraunhofer hecha por ordenador. Describa la abertura que engendraría dicha figura, explicando en detalle sus razones.

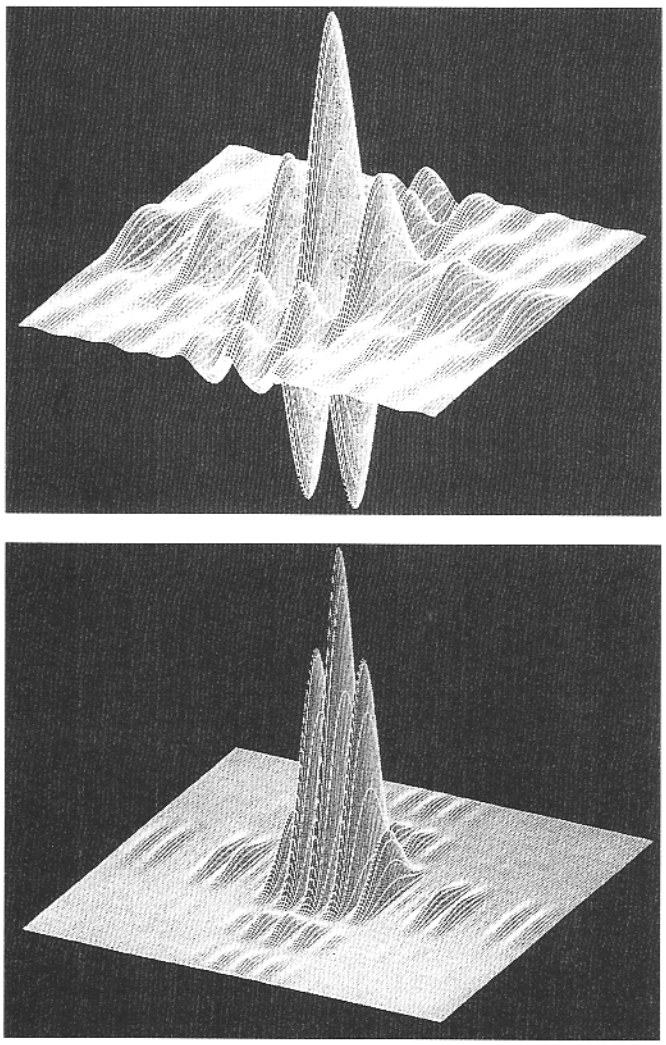


FIGURA P.10.18 Fotos cedidas por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.

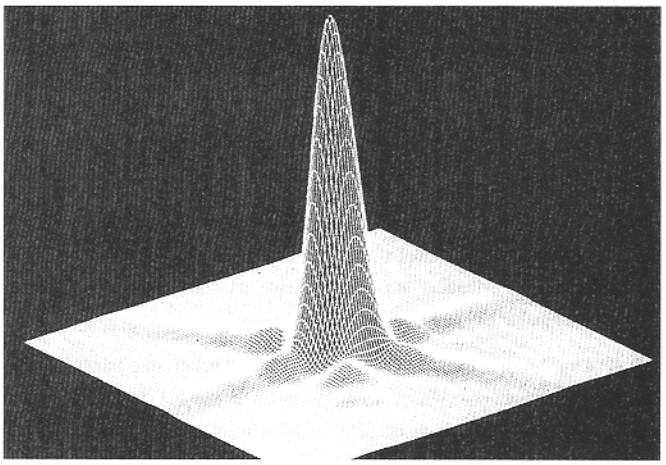


FIGURA P.10.19 Foto cedida por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.

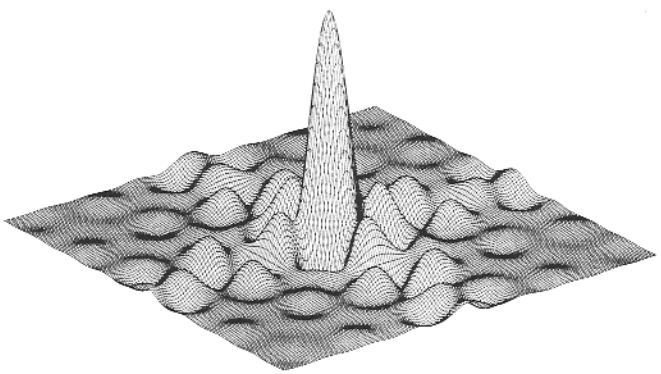


FIGURA P.10.20 Fotos cedidas por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.

10.20 La figura P.10.20 representa la distribución de campo eléctrico en campo lejano para un agujero en una pantalla opaca. Describa la abertura que generaría dicha figura, explicando en detalle sus razones.

10.21 Basándose en los cinco problemas anteriores, identifique la figura P.10.21, explicando qué es y qué clase de abertura la ha generado.

10.22* Compruebe que el pico de irradiancia I_1 del primer «anillo» en la distribución de Airy para difracción de campo lejano en una abertura circular es tal que $I_1/I(0) = 0{,}0175$. Podrá utilizar la siguiente fórmula:

$$J_1(u) = \frac{u}{2}\left[1 - \frac{1}{1!2!}\left(\tfrac{1}{2}u\right)^2 + \frac{1}{2!3!}\left(\tfrac{1}{2}u\right)^4 - \frac{1}{3!4!}\left(\tfrac{1}{2}u\right)^6 + \cdots\right]$$

10.23 Ninguna lente puede enfocar la luz hasta convertirla en un punto perfecto porque siempre habrá algo de difracción. Calcule el tamaño del punto luminoso mínimo obtenible en el enfoque de una lente. Analice la relación entre la distancia focal, el diámetro de la lente y el tamaño del punto. Suponga que el *número-f* de la lente sea aproximadamente de 0,8 ó 0,9, precisamente lo que puede esperarse de una lente rápida.

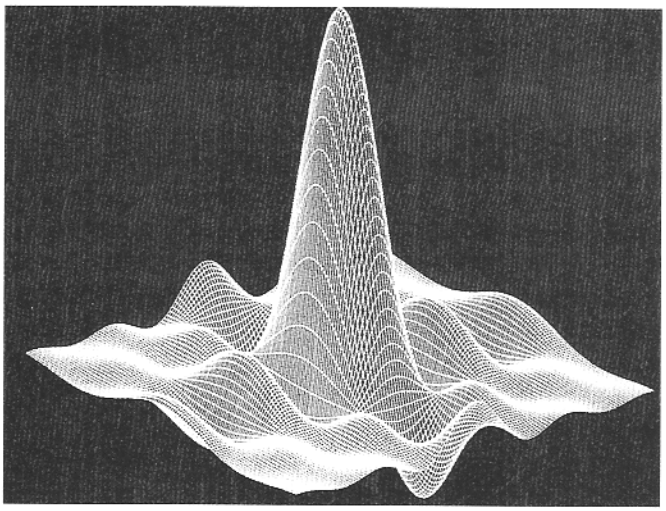


FIGURA P.10.21 Foto cedida por R.G. Wilson, Illinois Wesleyan University.

10.24 La figura P.10.24 muestra varias configuraciones de abertura. Haga un esquema aproximado de las distribuciones de Fraunhofer para cada una de ellas. Observe que las regiones circulares deben engendrar unos sistemas de anillos similares a los de Airy, centrados en el origen.

FIGURA P.10.24

10.25* Suponga que tenemos un láser que emite un haz limitado por difracción ($\lambda_0 = 632{,}84$ nm) con un diámetro de 2 mm. ¿Cuál sería el tamaño de la mancha luminosa que se produciría en la superficie de la Luna a una distancia de 376×10^3 km de dicho dispositivo? No tenga en cuenta ningún efecto de la atmósfera terrestre.

10.26* Mirando a través de un agujero de 0,75 mm a una carta ocular, probablemente detectaría una disminución en la agudeza visual. Calcule el límite angular de resolución, suponiendo que esté determinado tan sólo por la difracción; suponga que $\lambda_0 = 550$ nm. Compare sus resultados con el valor de $1{,}7 \times 10^{-4}$ rad, que corresponde a una pupila de 4,0 mm.

10.27 El pintor neoimpresionista Georges Seurat era miembro de la escuela puntillista. Sus pinturas consisten en un sinfín de puntos pequeños muy juntos ($\approx \frac{1}{10}$ pulgada) de pigmento puro. La ilusión de mezclas de color se produce solamente en el ojo del observador. ¿A qué distancia de uno de tales cuadros debería colocarse a fin de lograr la fusión de los colores deseada?

10.28* El diámetro del objetivo del telescopio del Monte Palomar es de 508 cm. Calcule su límite angular de resolución a una longitud de onda de 550 nm, en radianes, grados y segundos de arco. ¿A qué distancia deberían estar entre sí dos objetos en la superficie de la Luna para que el telescopio Palomar los pueda resolver? La distancia Tierra-Luna es de $3{,}844 \times 10^8$ m; suponga que $\lambda_0 = 550$ nm. ¿A qué distancia entre ellos deberían colocarse dos objetos en la superficie de la Luna para que el ojo los pueda distinguir? Suponga que el diámetro de la pupila sea de 4,00 mm.

10.29* Una red de transmisión cuyas líneas están separadas por $3{,}0 \times 10^{-6}$ m está iluminada por un haz estrecho de luz roja ($\lambda_0 = 694{,}3$ nm) desde un láser de rubí. En una pantalla colocada a una distancia de 2 m aparecen unos puntos de luz difractada, en ambos lados del haz no desviado. ¿A qué distancia del eje central se hallan los dos puntos más cercanos?

10.30* Una red de difracción con unas rendijas separadas por $0{,}60 \times 10^{-3}$ está iluminada por luz con una longitud de onda de 500 nm. ¿A qué ángulo aparecerá el máximo de tercer orden?

10.31* Una red de difracción produce un espectro de segundo orden de luz amarilla ($\lambda_0 = 550$ nm) a 25°. Calcule el espacio entre las líneas de la red.

10.32 La luz blanca cae perpendicularmente en una red de transmisión que contiene 1.000 líneas por centímetro. ¿A qué ángulo aparecerá la luz roja ($\lambda_0 = 650$ nm) en el espectro de primer orden?

10.33* La luz emitida por una lámpara de sodio de laboratorio tiene dos componentes amarillas fuertes a 589,5923 nm y 588,9953 nm. ¿A qué distancia entre ellas se hallarán, en el espectro de primer orden, estas dos líneas en una pantalla de 10.000 líneas por centímetro, colocada a 1 m de la red?

10.34* La luz solar incide en una red de transmisión formada por 5.000 líneas cada centímetro. ¿El espectro de tercer orden se solapará al de segundo orden? Suponga que el rojo sea 780 nm y el violeta 390 nm.

10.35 Luz con una frecuencia de $4{,}0 \times 10^{14}$ Hz incide en una red formada por 10.000 líneas cada centímetro. ¿Cuál es el espectro de orden superior que puede verse con este dispositivo? Explíquelo.

10.36* Suponga que un espectrómetro de red en vacío en la Tierra emite una luz de 500 nm a un ángulo de 20° en el espectro de primer orden. Comparando, después de llegar al planeta Mongo, la misma luz se difracta a 18°. Calcule el índice de refracción de la atmósfera de Mongo.

10.37 Demuestre que al aplicar la ecuación

$$a(\text{sen } \theta_m - \text{sen } \theta_i) = m\lambda \qquad [10.61]$$

a una red de transmisión, ésta es independiente del índice de refracción.

10.38 Una red de alta resolución de 260 mm de ancho, con 300 líneas por mm, a unos 75° en autocolimación, tiene un poder de resolución de alrededor de 10^6 para $\lambda = 500$ nm. Encuentre su rango espectral libre. ¿Cómo son los valores de $\mathcal{R}$ y $(\Delta\lambda)_{\text{fsr}}$, en comparación con los de un etalón de Fabry-Perot que tiene un espacio de aire de 1 cm y una fineza de 25?

10.39 ¿Cuál es el número total de líneas que una red debe tener a fin de separar solamente el doblete del sodio ($\lambda_1 = 5895{,}9$ Å, $\lambda_2 = 5890{,}0$ Å) en el tercer orden?

10.40* Imagine una pantalla opaca que contenga treinta agujeros circulares colocados al azar. La fuente de luz es tal que cada abertura está iluminada coherentemente por su propia onda plana. A su vez, cada una de ellas es totalmente incoherente con respecto a todas las demás. Describa la distribución de difracción de campo lejano resultante.

10.41 Imagine que está mirando una fuente puntual ($\lambda_0 = 600$ nm) a 20 metros de distancia, a través de un trozo de tela cuadrado. Si usted ve un conjunto cuadrangular de puntos brillantes colocados alrededor de la fuente puntual (figura P.10.41), cada uno a una distancia de 12 cm de su vecino aparente más cercano, ¿cómo están de cerca los hilos de la tela?

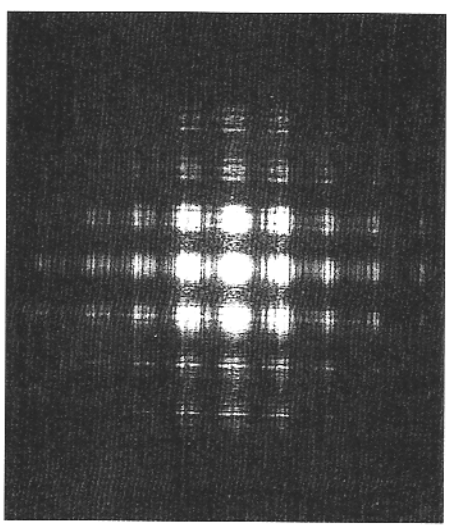


FIGURA P.10.41 Foto de E.H.

10.42* Realice las operaciones matemáticas necesarias para llegar a la ecuación (10.76).

10.43 Con referencia a la figura 10.48, integre la expresión $dS = 2\pi\rho^2 \text{ sen } \varphi \, d\varphi$ en la zona l para obtener el área de esa zona,

$$A_l = \frac{\lambda\pi\rho}{\rho + r_0}\left[r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4}\right]$$

Demuestre que la distancia media hasta la zona l-ésima es

$$r_l = r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4}$$

de tal manera que el coeficiente A_l/r_l sea constante.

10.44* Deduzca la ecuación (10.84).

10.45 Utilice la espiral de Cornu para realizar un esquema aproximado de $|\tilde{\mathbf{B}}_{12}(w)|^2$ frente a $(w_1 + w_2)/2$ para $\Delta w = 5{,}5$. Compare sus resultados con los de la figura 10.70.

10.46 Las integrales de Fresnel tienen las formas asintóticas (que corresponden a valores elevados de w) proporcionadas por

$$\mathscr{C}(w) \approx \tfrac{1}{2} + \left(\frac{1}{\pi w}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi w^2}{2}\right)$$

$$\mathscr{S}(w) \approx \tfrac{1}{2} - \left(\frac{1}{\pi w}\right)\cos\left(\frac{\pi w^2}{2}\right)$$

Usando este hecho, demuestre que la irradiancia en la sombra de una pantalla opaca semiinfinita disminuye en proporción al inverso del cuadrado de la distancia hasta el borde, cuando z_1 y, por lo tanto, v_1 adquieren valores elevados.

10.47 ¿Qué esperaría ver en el plano de observación si el medio plano Σ de la figura 10.71 fuera semitransparente?

10.48 Las ondas planas de un haz colimado de láser de He-Ne ($\lambda_0 = 632{,}8$ nm) inciden en una varilla de acero de 2,5 mm de diámetro. Trace una representación *gráfica* aproximada de la figura de difracción que sería visible en una pantalla a 3,16 m de la varilla.

10.49 Trace un esquema aproximado de la función de irradiancia para una distribución de difracción de Fresnel procedente de una doble rendija. ¿Cómo se vería la espiral de Cornu en el punto P_0?

10.50* Trace un esquema aproximado de una posible figura de difracción de Fresnel procedente de cada una de las aberturas indicadas (figura P.10.50).

10.51* Suponga que la rendija de la figura 10.67 se hace muy ancha. ¿Cómo se verá la figura de difracción de Fresnel?

FIGURA P.10.50

10.52* La luz colimada de un láser de iones de kripton a 568,19 nm, incide normalmente en una abertura circular. Al mirarlo axialmente desde una distancia de 1 m, el agujero revela el primer semiperíodo de la zona de Fresnel. Calcule su diámetro.

10.53* Unas ondas planas inciden perpendicularmente en una pantalla en donde se halla un agujero circular. Al mirarlo desde un punto axial P, el agujero revela $\frac{1}{2}$ de la zona del primer semiperíodo. ¿Cuál es la irradiancia en P en términos de la irradiancia ahí al quitar la pantalla?

10.54* Un haz colimado de un láser rubí (694,3 nm) con una irradiancia de 10 W/m^2 incide perpendicularmente en una pantalla opaca que contiene un agujero cuadrado de 5 mm en un lado. Calcule la irradiancia en un punto colocado en el eje central a 250 cm de la abertura.

10.55* Una rendija estrecha y alargada de 0,10 mm de ancho está iluminada por una luz con una longitud de onda de 500 nm, procedente de una fuente puntual colocada a una distancia de 0,90 m. Calcule la irradiancia en un punto a 2 m más allá de la pantalla cuando la rendija esté centrada en, y sea perpendicular, a la línea desde la fuente hasta el punto de observación. Escriba su respuesta en términos de la irradiancia no obstruida.

11 Óptica de Fourier

11.1 Introducción

En las páginas siguientes vamos a ampliar el análisis de los métodos de Fourier ilustrados en el capítulo 7 proporcionando, y ésta es nuestra intención, una sólida introducción básica a este campo, más que un tratamiento completo. Además de su potencia matemática real, el análisis de Fourier proporciona una forma excelente de tratar los procesos ópticos en términos de frecuencias espaciales [1]. Siempre es apasionante descubrir una bolsa nueva de juguetes analíticos, pero es, tal vez, aún más valioso exponer otra forma de pensamiento acerca de una amplia gama de problemas físicos. Nosotros llevaremos a cabo ambas tareas [2].

La principal motivación aquí es desarrollar la comprensión del modo en que los sistemas ópticos procesan la luz para formar imágenes. Al final queremos saber todo sobre las amplitudes y las fases de las ondas luminosas que alcanzan el plano imagen. Los métodos de Fourier son especialmente adecuados para esta labor, así que primero ampliamos el tratamiento de las series de Fourier empezado anteriormente. Varias transformadas son particularmente útiles en el análisis y éstas serán las primeras que consideremos. Entre ellas se encuentra la función delta, que en lo que sigue será utilizada para representar una fuente puntual de luz. Cómo responde un sistema óptico a un objeto que está compuesto de un gran número de fuentes puntuales que son funciones delta será considerado en la sección 11.3.1. La relación entre el análisis de Fourier y la difracción de Fourier se investiga a lo largo de la discusión, pero se le presta especial atención en la sección 11.3.3. El capítulo termina con una vuelta al problema de la evaluación de la imagen, esta vez desde una perspectiva diferente, aunque relacionada: el objeto se trata no como una colección de fuentes puntuales, sino como un difusor de ondas planas.

[1] Véase capítulo 3.2 para un estudio no matemático.

[2] Como referencias generales para este capítulo, véanse R. C. Jennison, *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalists;* N. F. Barber, *Experimental Correlograms and Fourier Transforms;* A. Papoulis, *Systems and Transforms with Applications in Optics;* J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics;* J. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics;* R. G. Wilson, *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics;* y la excelente serie de opúsculos *Images and Information,* por B. W. Jones *et al.*

11.2 Transformadas de Fourier

11.2.1 Las transformadas unidimensionales

En la sección 7.4, se vio que una función de una dimensión de alguna variable del espacio $f(x)$ podía expresarse como una combinación lineal de un número infinito de contribuciones armónicas:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty A(k)\cos kx\,dk + \int_0^\infty B(k)\,\text{sen}\,kx\,dk\right] \quad [7.56]$$

Los factores de peso que determinan la importancia de las diversas contribuciones de frecuencia espacial angular (k), es decir $A(k)$ y $B(k)$, son las *transformadas de Fourier del coseno y del seno* dadas por:

$$A(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos kx'\,dx'$$

y

$$B(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\text{sen}\,kx'\,dx' \quad [7.57]$$

respectivamente. Aquí la cantidad x' es una variable muda sobre la cual se lleva a cabo la integración, de manera que ni $A(k)$ ni $B(k)$ son funciones explícitas de x' y la selección del símbolo usado para indicarla no es importante. Las transfor-

madas del seno y del coseno pueden consolidarse dentro de una sola expresión exponencial compleja como sigue: substituyendo la [ecuación 7.57] en la [ecuación 7.56] obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos kx'\, dx'\, dk + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \operatorname{sen} kx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \operatorname{sen} kx'\, dx'\, dk$$

Pero como $\cos k(x' - x) = \cos kx \cos kx' + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kx'$, esto puede reescribirse como:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos k(x' - x)\, dx' \right] dk \quad (11.1)$$

La cantidad entre paréntesis cuadrados es una función par de k por lo tanto, al cambiar los límites sobre la integral externa, tendremos

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \cos k(x' - x)\, dx' \right] dk \quad (11.2)$$

Ya que estamos buscando una representación exponencial, nos viene a la memoria el teorema de Euler. Por consiguiente, obsérvese que

$$\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \operatorname{sen} k(x' - x)\, dx' \right] dk = 0$$

porque el factor entre paréntesis es una función impar de k. Al sumar estas dos últimas expresiones, se obtiene la forma compleja [3] de la integral de Fourier.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ikx'}\, dx' \right] e^{-ikx}\, dk \quad (11.3)$$

Por lo tanto podemos escribir

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx}\, dk \quad (11.4)$$

siempre que

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx}\, dx \quad (11.5)$$

habiendo puesto $x' = x$ en la ecuación (11.5). La función $F(k)$ es la **transformada de Fourier** *de* $f(x)$, la cual se indica simbólicamente por

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} \quad (11.6)$$

En realidad, en la literatura existen varias maneras equivalentes, ligeramente diferentes de definir la transformada. Por ejemplo, los signos en las exponenciales pueden intercambiarse o el factor de $1/2\pi$ podría dividirse simétricamente entre $f(x)$ y $F(k)$, es decir, cada uno tendría un coeficiente de $1/\sqrt{2\pi}$. Obsérvese que $A(k)$ es la parte real de $F(k)$ mientras que $B(k)$ es la imaginaria, es decir

$$F(k) = A(k) + iB(k) \quad (11.7a)$$

Como vimos en la sección 2.4, una cantidad compleja como ésta puede escribirse también en términos de amplitud de valor real, $|F(k)|$, el *espectro de amplitud*, y una fase de valor real, $\phi(k)$, el *espectro de fase*:

$$F(k) = |F(k)|e^{i\phi(k)} \quad (11.7b)$$

Precisamente como $F(k)$ es la transformada de $f(x)$, $f(x)$ es la **transformada inversa de Fourier** de $F(k)$, *o* simbólicamente

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} \quad (11.8)$$

y $f(x)$ y $F(k)$ se denominan frecuentemente par de transformadas de Fourier. Es posible construir la transformada y su inversa de una forma aún más simétrica, en términos de la frecuencia espacial $\kappa = 1/\lambda = k/2\pi$. Sin embargo, independientemente de cómo se exprese, la transformada no será exactamente igual a la inversa por el signo negativo de la función exponencial. Por consiguiente (problema 11.10), en la expresión presente,

$$\mathcal{F}\{F(k)\} = 2\pi f(-x) \quad \text{mientras que} \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(x)$$

En la mayoría de los casos, esto no tiene ninguna trascendencia, especialmente para funciones pares donde $f(x) = f(-x)$, por lo tanto deberíamos esperar un alto nivel de paridad entre las funciones y sus transformadas.

Obviamente, si f fuera una función del tiempo en vez del espacio, únicamente tendríamos que reemplazar x por t y entonces k, la frecuencia espacial angular, por ω, la frecuencia

[3] A fin de que la notación tenga forma estándar, y donde no haya pérdida de claridad, se omitirá la tilde porque indicaría una cantidad compleja.

temporal angular, para obtener el par de transformadas oportuno en el dominio temporal, es decir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}d\omega \tag{11.9}$$

y

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \tag{11.10}$$

Cabe mencionar que si escribimos $f(x)$ como una suma de funciones, su transformada [ecuación (11.5)] será evidentemente la suma de las transformadas de las componentes individuales de las funciones. A veces, esta forma de establecer las transformadas de funciones complicadas que pueden construirse a partir de componentes conocidas, puede resultar conveniente. La figura 11.1 muestra claramente este procedimiento.

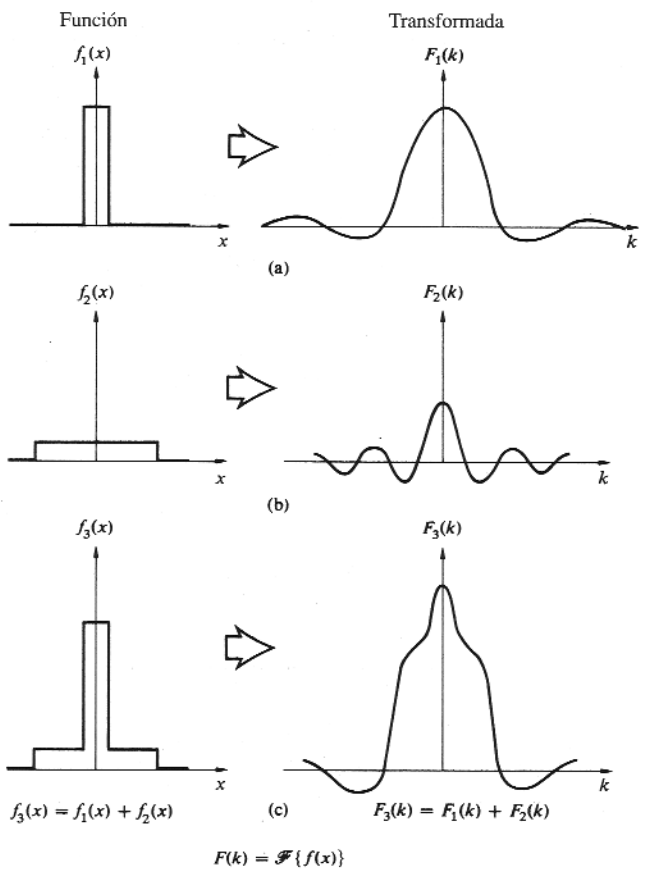


FIGURA 11.1 Una función compuesta y su transformada de Fourier.

Transformada de la función gaussiana

A fin de poner un ejemplo del método, examinemos la función de probabilidad gaussiana

$$f(x) = Ce^{-ax^2} \tag{11.11}$$

donde $C = \sqrt{a/\pi}$ y a es una constante. Si queremos, podemos suponer que esto sea el perfil de un pulso para $t = 0$. La familiar curva con forma de campana (figura 11.2*a*) se encuentra con mucha frecuencia en óptica y estará relacionada con varias consideraciones tales como la representación de paquetes de onda de fotones individuales, la distribución de la irradiancia transversal de un haz de láser en el modo TEM_{00} y el tratamiento estadístico de luz térmica en la teoría de la coherencia. Su transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f(x)\}$ se obtiene evaluando

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (Ce^{-ax^2})e^{ikx}dx$$

Al completar el cuadrado, el exponente, $-ax^2 + ikx$, pasa a ser $-(x\sqrt{a} - ik/2\sqrt{a})^2 - k^2/4a$ y haciendo que $x\sqrt{a} - ik/2\sqrt{a} = \beta$ da

$$F(k) = \frac{C}{\sqrt{a}}e^{-k^2/4a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2}d\beta$$

La integral definida puede encontrarse en las tablas y es igual a $\sqrt{\pi}$, por lo tanto

$$F(k) = e^{-k^2/4a} \tag{11.12}$$

la cual es nuevamente una función gaussiana (figura 11.2b), esta vez con k como variable. La desviación estándar está definida como el rango de la variable (x o k) en la cual la función

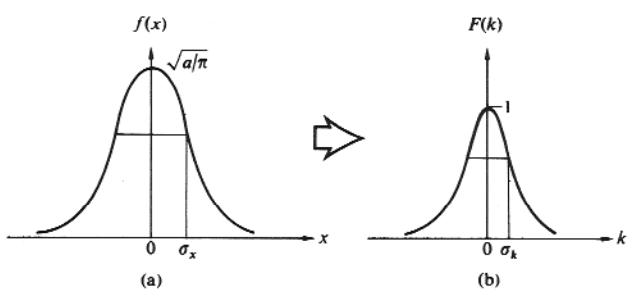


FIGURA 11.2 Una gaussiana y su transformada de Fourier.

disminuye en un factor de $e^{-1/2} = 0{,}607$ de su valor máximo. Por lo tanto, las desviaciones estándares para las dos curvas son $\sigma_x = 1/\sqrt{2a}$ y $\sigma_k = \sqrt{2a}$ y $\sigma_x\sigma_k = 1$. Según a vaya aumentando, $f(x)$ se va estrechando mientras que, por el contrario, $F(k)$ se ensancha. Dicho de otra forma, cuanto más corta sea la longitud del pulso, más amplio será el ancho de banda de la frecuencia espacial.

11.2.2 Las transformadas bidimensionales

Hasta ahora el estudio se ha limitado a las funciones unidimensionales, pero la óptica abarca, por lo general, señales bidimensionales: por ejemplo, el campo a lo largo de una abertura o la distribución de la densidad de flujo en un plano de imagen. El par de transformadas de Fourier puede generalizarse fácilmente a dos dimensiones donde

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int F(k_x,k_y)e^{-i(k_x x + k_y y)}\,dk_x\,dk_y \qquad (11.13)$$

y

$$F(k_x,k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)e^{i(k_x x + k_y y)}\,dx\,dy \qquad (11.14)$$

Las cantidades k_x y k_y son las frecuencias espaciales angulares a lo largo de los dos ejes. Supongamos que estamos mirando la imagen de un piso revestido con baldosas blancas y negras colocadas alternativamente y cuyos bordes son paralelos a las direcciones x e y. Si la extensión del piso fuera infinita, la distribución matemática de la luz reflejada podría considerarse en términos de una serie de transformadas bidimensionales de Fourier. Si cada losa tiene una longitud ℓ, el período espacial a lo largo de cada eje sería de 2ℓ y las frecuencias espaciales fundamentales asociadas equivaldrían a π/ℓ. Indudablemente, éstas y sus armónicas son necesarias para construir una función que describe la escena. Si la extensión de la distribución fuera finita, la función ya no sería verdaderamente periódica, teniendo la integral de Fourier que reemplazar a la serie. De hecho, según la ecuación (11.13), $f(x, y)$ puede construirse a través de una combinación lineal de funciones elementales cuya forma sea $\exp[-i(k_x x + k_y y)]$, cuyas amplitud y fase han sido oportunamente ponderadas por un factor complejo $F(k_x, k_y)$. La transformada simplemente dice cuánta y con qué fase debe sumarse cada componente elemental a la receta. En tres dimensiones, las funciones elementales aparecen como $\exp[-i(k_x x + k_y y + k_z z)]$ o $\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ que corresponde a superficies planas. Además, si f es una función de onda, es decir, algún tipo de onda tridimensional $f(\mathbf{r},t)$, estas contribuciones elementales se convierten en ondas planas que toman la forma $\exp[-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$. Dicho de otra forma, *la perturbación puede sintetizarse por medio de una combinación lineal de ondas planas que tienen varios números de propagación y que se mueven en varias direcciones*. De manera parecida, en dos dimensiones las funciones elementales están «orientadas» hacia direcciones también distintas. Es decir, para una serie determinada de valores de k_x y k_y el exponente o la fase de las funciones elementales será una constante a lo largo de las líneas

$$k_x x + k_y y = \text{constante} = A$$

o

$$y = -\frac{k_x}{k_y}x + \frac{A}{k_y} \qquad (11.15)$$

La situación es análoga a aquélla donde una serie de planos normales al plano xy y que lo intersectan lo hace a lo largo de las líneas dadas por la ecuación (11.15) para valores diferentes de A. Un vector perpendicular a la serie de líneas, llamémoslo $\mathbf{k}_\alpha$, tendría las componentes k_x y k_y. La figura 11.3 muestra varias líneas de esta clase (para un valor k_x y k_y determinado) donde $A = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$..., etc. Las pendientes son todas iguales a $-k_x/k_y$ o $-\lambda_y/\lambda_x$ mientras que las intersecciones en y son iguales a $A/k_y = A\lambda_y/2\pi$. La orientación de las líneas de fase constante es

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{k_y}{k_x} = \tan^{-1}\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \qquad (11.16)$$

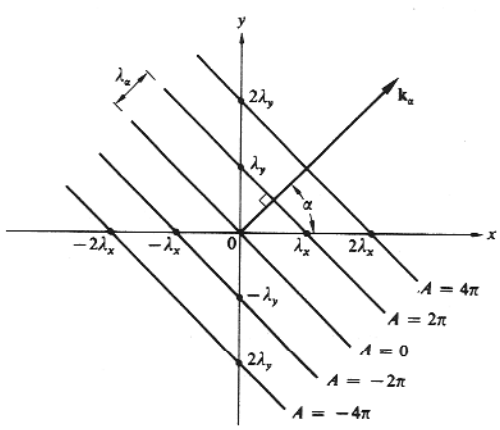


FIGURA 11.3 Geometría de la ecuación (11.15).

La longitud de onda o período espacial λ_α, medida a lo largo de $\mathbf{k}_\alpha$, se obtiene de los triángulos semejantes en el diagrama, donde $\lambda_\alpha/\lambda_y = \lambda_x/\sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2}$ y

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^{-2} + \lambda_y^{-2}}} \tag{11.17}$$

La frecuencia espacial angular k_α, siendo $2\pi/\lambda_\alpha$ será por lo tanto

$$k_\alpha = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{11.18}$$

como se esperaba. Todo esto quiere decir que para poder construir una función bidimensional, generalmente se tendrán que incluir también términos armónicos además de aquellos de frecuencia espacial k_x y k_y estando éstos orientados hacia direcciones distintas a lo largo de los ejes x e y.

Volvamos por un momento a la figura 10.11 donde se muestra una abertura cuya onda difractada saliente está representada según conceptos distintos. Una de las maneras de imaginar el complejo frente de onda saliente es como una superposición de ondas planas que salen en una amplia gama de direcciones. Se trata de las componentes de la transformada de Fourier, que emergen según direcciones específicas con unos valores específicos de la frecuencia espacial angular —el término de frecuencia espacial cero corresponde a la onda axial no desviada—, los términos de frecuencia espacial más elevados que salen según ángulos cada vez más grandes desde el eje central. Estas componentes de Fourier constituyen el campo difractado al salir de la abertura.

La transformada de una función cilíndrica

La función cilíndrica

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > a \end{cases} \tag{11.19}$$

(figura 11.4*a*) facilita un ejemplo práctico importante de la aplicación de los métodos bidimensionales de Fourier. Las matemáticas no serán particularmente simples pero la importancia de los cálculos para la teoría de la difracción mediante aberturas circulares y lentes justifica ampliamente tal esfuerzo. La evidente simetría circular sugiere coordenadas polares y por lo tanto

$$\begin{aligned} k_x &= k_\alpha \cos\alpha \\ k_y &= k_\alpha \operatorname{sen}\alpha \end{aligned} \tag{11.20}$$

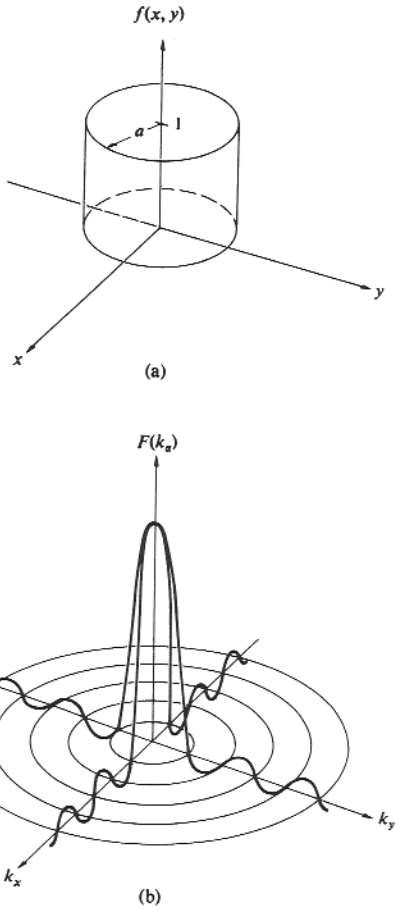


FIGURA 11.4 Función cilíndrica o sombrero de copa y su transformada.

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

en cuyo caso $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$. La transformada, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, entonces será

$$F(k_\alpha,\alpha) = \int_{r=0}^{a}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi} e^{ik_\alpha r\cos(\theta-\alpha)}\,d\theta\right] r\,dr \tag{11.21}$$

Dado que $f(x,y)$ es simétrica circularmente, su transformada también deberá ser simétrica. Esto implica que $F(k_\alpha, \alpha)$ es

independiente de α. Por lo tanto, la integral puede simplificarse permitiendo que α sea igual a algún valor constante, en este caso cero, de donde

$$F(k_\alpha) = \int_0^a \left[\int_0^{2\pi} e^{ik_\alpha r\cos\theta}\, d\theta \right] r\, dr \qquad (11.22)$$

De la ecuación (10.47) se deduce que

$$F(k_\alpha) = 2\pi \int_0^a J_0(k_\alpha r) r\, dr \qquad (11.23)$$

$J_0(k_\alpha r)$ es una función de Bessel de orden cero. Introduciendo un cambio de variable, es decir $k_\alpha r = w$, tendremos $dr = k_\alpha^{-1}\, dw$ y la integral será

$$\frac{1}{k_\alpha^2} \int_{w=0}^{k_\alpha a} J_0(w) w\, dw \qquad (11.24)$$

Usando la ecuación (10.50), la transformada toma la forma de una función Bessel de primer orden (véase figura 10.27), es decir

$$F(k_\alpha) = \frac{2\pi}{k_\alpha^2} k_\alpha a J_1(k_\alpha a)$$

o

$$F(k_\alpha) = 2\pi a^2 \left[\frac{J_1(k_\alpha a)}{k_\alpha a} \right] \qquad (11.25)$$

La semejanza entre esta expresión (figura 11.4*b*) y la fórmula para el campo eléctrico de la figura de difracción de Fraunhofer de una abertura circular [ecuación (10.51)] no es, naturalmente, accidental.

La lente como transformadora de Fourier

En la figura 11.5 se muestra una transparencia posicionada en el plano focal frontal de una lente convergente que está siendo iluminada por luz paralela. A su vez, este objeto difunde las ondas planas que son recogidas por la lente mientras que los haces paralelos luminosos se hacen converger como su plano focal posterior. Si se colocara una pantalla en ese punto, en Σ_t, el denominado **plano de la transformada**, veríamos las figuras de difracción de campo lejano del objeto extenderse en él [se trata esencialmente de la configuración de la figura 10.11*e*]. Dicho de otra forma, la distribución de campo eléctrico en el marco del objeto que se denomina **función de abertura**, se transforma por medio de la lente en figuras de difracción de campo lejano. Si bien esta afirmación es válida para la mayoría de los casos, no es totalmente cierta. Después de todo, la lente no forma verdaderamente su imagen en un plano.

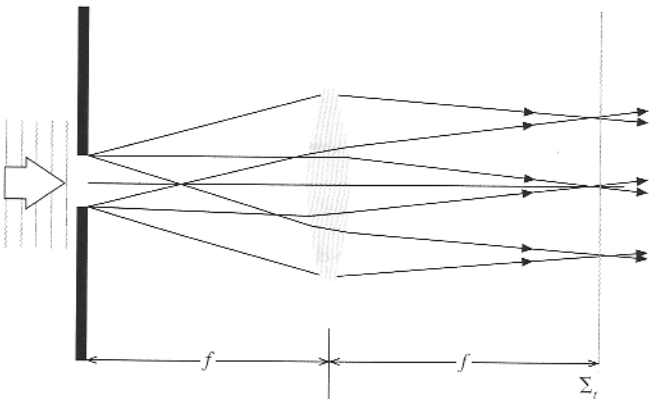


FIGURA 11.5 La luz difractada por una transparencia en el punto focal frontal (u objeto) de una lente converge para formar una figura de difracción de campo lejano en el punto focal posterior (o imagen) de la lente.

Es extraordinario que aquella figura de campo **E** de Fraunhofer corresponda exactamente a la transformada de Fourier de la función de abertura —un hecho que confirmaremos con más fuerza en la sección 11.3.3—. Aquí el objeto se halla en el plano focal frontal y todas las diversas ondas difractadas mantienen sus relaciones de fase viajando longitudes de camino óptico esencialmente iguales al plano de la transformada. Esto no ocurre cuando el objeto se desplaza del plano focal frontal. Entonces, se producirá una desviación de la fase que, realmente, tiene poca importancia, puesto que estamos generalmente interesados en la irradiancia donde la información de la fase está promediada no pudiendo detectar la distorsión de la fase.

Por lo tanto, si la máscara de un objeto de lo contrario opaco contiene un agujero circular único, el campo **E** que lo atraviesa se asemejará al sombrero de copa de la figura 11.4*a* y el campo difractado, la transformada de Fourier, se distribuirá en el espacio como función de Bessel, siendo muy parecida a la figura 11.4*b*. De manera parecida, si la transparencia del objeto cambia de densidad tan sólo a lo largo de un eje, de manera que el perfil de transmisión es triangular (Fig. 11.6*a*), entonces la amplitud de campo eléctrico se corresponderá con la figura 11.6*b* —la transformada de Fourier de la función de triángulo será la función sinc al cuadrado.

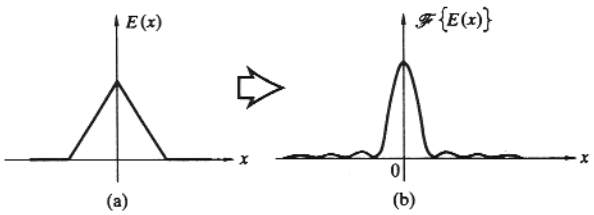


FIGURA 11.6 La transformada de la función del triángulo es la función sinc^2.

11.2.3 La función delta de Dirac

Puesto que muchos fenómenos físicos acontecen en períodos de tiempo muy breves y con gran intensidad, a menudo lo que interesa es la respuesta consecuente de algún sistema a este tipo de estímulos. Por ejemplo: ¿Cómo responderá un dispositivo mecánico, por ejemplo una bola de billar, al ser golpeado por un martillo? o ¿cuál será el comportamiento de un circuito si la corriente de entrada es una descarga corta? De la misma forma, puede imaginarse que algún estímulo sea un pulso repentino en el dominio del espacio, en lugar de en el dominio del tiempo. Una fuente pequeña brillante de luz sumergida en un fondo negro es, esencialmente, un pulso espacial bidimensional y altamente localizado —un pico de irradiancia. Una representación matemática oportunamente idealizada de este tipo de estímulo claramente puntiagudo es la **función delta de Dirac** $\delta(x)$. Se trata de una cantidad cuyo valor es cero en todas partes excepto en el origen donde tiende al infinito de manera que abarca un *área unidad*, es decir

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \tag{11.26}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1 \tag{11.27}$$

Ésta no es realmente una función en el sentido matemático tradicional. De hecho, como su naturaleza es tan singular, estuvo en el centro de una gran controversia después de que P.A.M. Dirac volviera a presentarla y destacara su importancia en 1930. Sin embargo, los físicos, que a veces dan prueba de gran pragmatismo, pensaron que era tan sumamente útil que pronto se admitió como herramienta a pesar de la supuesta falta de justificación rigurosa. La teoría matemática precisa de la función delta se desarrolló unos veinte años después, en los primeros años cincuenta, principalmente gracias a Laurent Schwartz.

Tal vez la operación más básica de aplicación de la $\delta(x)$ sea la evaluación de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\, dx$$

Aquí la expresión $f(x)$ corresponde a cualquier función continua. En un intervalo diminuto que va de $x = -\gamma$ a $+\gamma$ centrado alrededor del origen, $f(x) \approx f(0) \approx$ constante puesto que la función es continua en $x = 0$. De $x = -\infty$ a $x = -\gamma$ y de $x = +\gamma$ a $x = +\infty$, la integral es cero sencillamente porque allí la función δ es cero. Por lo tanto la integral equivale a

$$f(0) \int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x)\, dx$$

Como $\delta(x) = 0$ para toda x distinta de 0, el intervalo puede ser cada vez más pequeño, es decir, $\gamma \to 0$, y todavía

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \delta(x)\, dx = 1$$

de la ecuación (11.27). Por lo tanto, el resultado exacto es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0) \tag{11.28}$$

A menudo, esto se denomina **propiedad de localización** de la función δ porque sólo puede extraer el valor de $f(x)$ tomado en $x = 0$ de entre todos sus posibles valores. De manera parecida, desplazando el origen de una cantidad x_0

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \tag{11.29}$$

quedando el pico en $x = x_0$ en lugar de $x = 0$, como se muestra en la figura 11.7. La propiedad de localización correspondiente puede apreciarse dejando $x - x_0 = x'$, entonces con $f(x' + x_0) = g(x')$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x') g(x')\, dx' = g(0)$$

y puesto que $g(0) = f(x_0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, dx = f(x_0). \tag{11.30}$$

Formalmente, más que preocuparse por una definición precisa de $\delta(x)$ para cada valor de x, sería más productivo continuar a lo largo de las líneas definiendo el efecto de $\delta(x)$ en alguna otra función $f(x)$. Por consiguiente, la ecuación (11.28) es realmen-

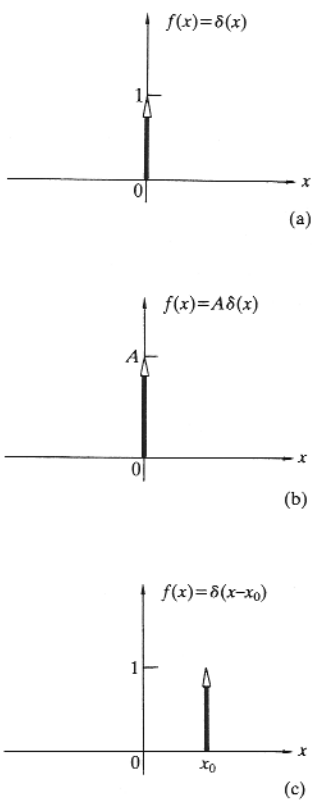


FIGURA 11.7 La altura de la flecha que representa a la función delta corresponde al área bajo la función.

te la definición de una operación completa la cual asigna un número $f(0)$ a la función $f(x)$. Por cierto, una operación que realice este servicio se denomina *un funcional.*

Es posible construir varias secuencias de pulsos cada miembro de los cuales tenga un ancho que sea cada vez menor y la altura cada vez mayor, de manera que cualquier pulso abarque un área unidad. Una secuencia de pulsos cuadrados de altura a/L y ancho L/a para los cuales i = 1, 2, 3,... satisfaría el objetivo al igual que una secuencia gaussiana [ecuación (11.11)],

$$\delta_a(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi}}\, e^{-ax^2} \tag{11.31}$$

como en la figura 11.8 o una secuencia de funciones sinc

$$\delta_a(x) = \frac{a}{\pi}\,\text{sinc}\,(ax) \tag{11.32}$$

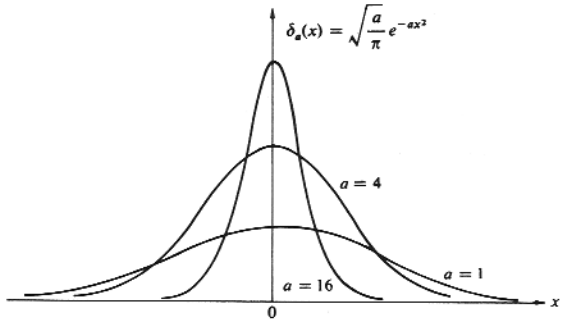


FIGURA 11.8 Una sucesión de gaussianas.

Tales funciones que son muy agudas y que se aproximan a la propiedad de localización, es decir, para las cuales

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) f(x)\, dx = f(0) \tag{11.33}$$

se denominan *secuencias delta.* Frecuentemente es útil, aunque en realidad no sea rigurosamente correcto, imaginar $\delta(x)$ como límite de convergencia de tales secuencias cuando $a \to \infty$. La extensión de estas ideas a dos dimensiones está proporcionada por la definición

$$\delta(x,y) = \begin{cases} \infty & x = y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11.34}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int \delta(x,y)\, dx\, dy = 1 \tag{11.35}$$

y la propiedad de localización llega a ser

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int f(x,y)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\, dx\, dy = f(x_0,y_0) \tag{11.36}$$

De la ecuación (11.3) se deduce otra representación de la función δ, la integral de Fourier que puede reescribirse como

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')} dk \right] f(x')\, dx'$$

y por lo tanto

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') f(x')\, dx' \tag{11.37}$$

con tal que

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x')}dk \qquad (11.38)$$

La ecuación (11.37) es idéntica a la ecuación (11.30) porque según la definición de la ecuación (11.29) $\delta(x - x') = \delta(x' - x)$. El valor de la integral (divergente) de la ecuación (11.38) es cero en todas partes excepto para $x = x'$. Evidentemente, con $x' = 0$, $\delta(x) = \delta(-x)$ y

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk \qquad (11.39)$$

Esto quiere decir que, a través de la ecuación (11.4), la función delta puede considerarse como la transformada de Fourier inversa de la unidad, es decir, $\delta(x) = \mathcal{F}^{-1}\{1\}$ y por lo tanto $\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$. Podemos imaginar un pulso cuadrado estrechándose y alargándose cada vez más mientras que su transformada, a su vez, se va ensanchando hasta que, finalmente, el ancho del pulso sea infinitesimal y la extensión de su transformada infinita, es decir, una constante.

Desplazamientos y corrimientos de fase

Si el pico δ es desplazado fuera de $x = 0$ hasta, digamos, $x = x_0$, su transformada cambiará de fase pero no de amplitud que permanecerá igual a uno. Para ver lo anterior, evaluemos

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)e^{ikx}\,dx$$

De la propiedad de localización (11.30) la expresión se convierte en

$$\mathcal{F}\{\delta(x - x_0)\} = e^{ikx_0} \qquad (11.40)$$

Resulta que solo la fase se ve afectada mientras que el valor de la amplitud es uno como cuando $x_0 = 0$. Todo este proceso puede apreciarse un poco más intuitivamente si pasamos al dominio del tiempo y pensamos en un pulso infinitesimalmente estrecho (como una chispa) que ocurra en $t = 0$. Esto conduce a la generación de un rango infinito de componentes de frecuencia que están todas inicialmente en fase en el momento de su creación ($t = 0$). Por otra parte, supongamos que el pulso tenga lugar en el tiempo t_0; veremos nuevamente que si bien cada frecuencia es producida, en esta situación todas las componentes armónicas están en fase en $t = t_0$. Por consiguiente, si extrapolamos hacia atrás, la fase de cada componente en $t = 0$ tendrá ahora que ser diferente dependiendo de la frecuencia particular. Además, sabemos que todas estas componentes se superponen para dar como resultado cero en todas partes excepto en t_0, de tal manera que un corrimiento de fase dependiente de la frecuencia es totalmente razonable. Dicho corrimiento de fase es evidente en la ecuación (11.40) para el dominio del espacio. Obsérvese que varía con la frecuencia espacial angular k.

La aplicabilidad de todo esto es bastante general y observamos que ***la transformada de Fourier de una función que es desplazada en el espacio (o en el tiempo) es la transformada de la función no desplazada multiplicada por una función exponencial con fase lineal*** (problema 11.14). Esta propiedad de la transformada será de interés dentro de poco, cuando se analice la imagen de varias fuentes puntuales que están separadas pero que por lo demás son fuentes idénticas. Este proceso puede apreciarse de manera gráfica gracias a las figuras 11.9 y 7.19. Para desplazar la onda cuadrada en $\pi/4$ hacia la derecha, la fundamental deberá desplazarse de una longitud de onda de $\frac{1}{8}$ (o 1,0 mm), teniendo que desplazar, por consiguiente, sus componentes una distancia igual (es decir, 1,0 mm). Por lo tanto, la fase de cada componente tendrá que desplazarse en una cantidad específica que produzca un desplazamiento de 1,0 mm. Aquí, cada cual se desplaza, a su vez, por una fase de $m\,\pi/4$.

Senos y cosenos

Vimos antes (figura 11.1) que si la función empleada puede escribirse como suma de funciones individuales, su transformada es simplemente la suma de las transformadas de las funciones componentes. Supongamos que tenemos una cadena de funciones delta esparcidas de manera uniforme como los dientes de un peine,

$$f(x) = \sum_j \delta(x - x_j) \qquad (11.41)$$

Cuando el número de términos es infinito, la función periódica se denomina a menudo *peine(x)*. De cualquier manera, la transformada será simplemente la suma de los términos como los de la ecuación (11.40):

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sum_j e^{ikx_j} \qquad (11.42)$$

En particular, si hay dos funciones δ, una en $x_0 = d/2$ y otra en $x_0 = -d/2$

$$f(x) = \delta[x - (+d/2)] + \delta[x - (-d/2)]$$

y

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} + e^{-ikd/2}$$

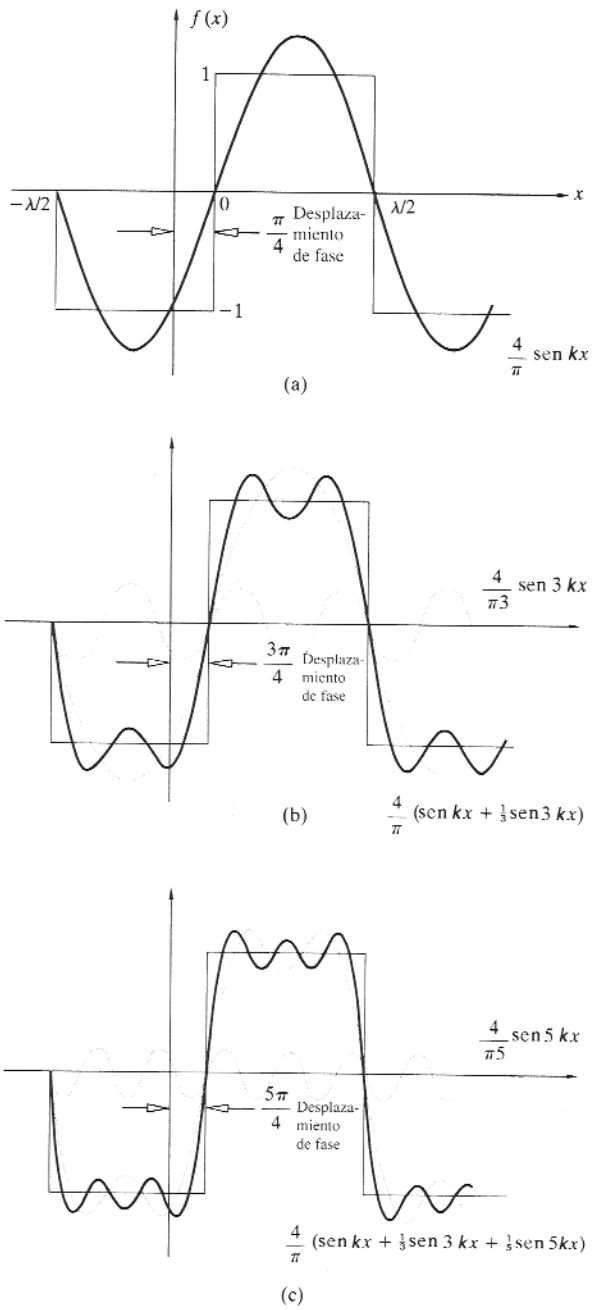


FIGURA 11.9 Una onda cuadrada desplazada mostrando el correspondiente desplazamiento de fase de cada onda.

lo cual es exactamente

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = 2\cos(kd/2) \tag{11.43}$$

como en la figura 11.10. Por lo tanto, la transformada de la suma de estas dos funciones delta simétricas es una función coseno y viceversa. La función compuesta es una función real par como lo será $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$. Esto debería traernos a la memoria el experimento de Young con rendijas infinitesimales estrechas – volveremos a ello más tarde. Si la fase de una de las funciones δ es desplazada, como en la figura 11.11, la función compuesta es asimétrica, impar

$$f(x) = \delta[x - (+d/2)] - \delta[x - (-d/2)]$$

y

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = e^{ikd/2} - e^{ikd/2} = 2i\,\text{sen}\,(kd/2) \tag{11.44}$$

La transformada real sinusoidal [ecuación (11.7)] es entonces

$$B(k) = 2\,\text{sen}\,(kd/2) \tag{11.45}$$

que también es una función impar.

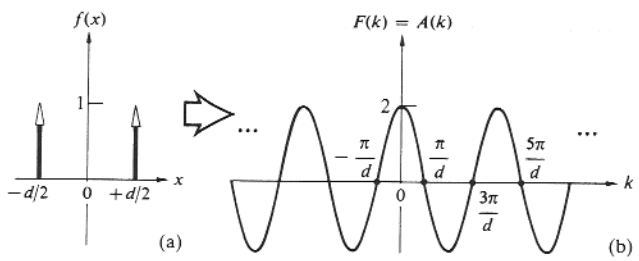


FIGURA 11.10 Dos funciones delta y su transformada función coseno.

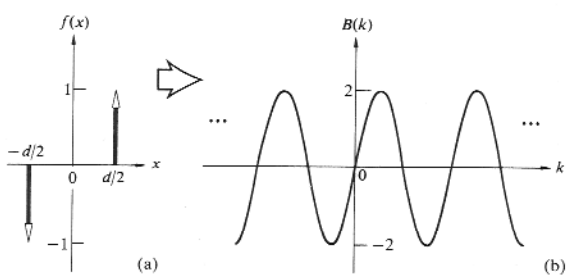


FIGURA 11.11 Dos funciones delta y su transformada función seno.

Esto saca a relucir un punto interesante. Recordemos que hay dos maneras alternativas de considerar la transformada compleja: bien sea como la suma de una parte real e imaginaria, ecuación (11.7a) bien sea como el producto de una amplitud y término de fase, ecuación (11.7b). Lo que ocurre es que el coseno y el seno son funciones bastante especiales; la primera está asociada con una aportación puramente real y la segunda con una aportación puramente imaginaria. La mayoría de las funciones, incluso las armónicas, serán normalmente una mezcla de partes reales e imaginarias. Por ejemplo, una vez que se desplace un poco un coseno, la nueva función, que no será ni par ni impar, tendrá tanto una parte imaginaria como otra real. Asimismo, podrá expresarse como espectro de amplitud cosenoidal cuya fase será oportunamente desplazada (figura 11.12). Obsérvese que cuando se desplaza el coseno de $\frac{1}{4}\lambda$ a un seno, la diferencia de fase relativa entre las dos funciones delta de las componentes será de nuevo π rad.

En la figura 11.13 se muestra, de manera sucinta, un número de transformadas, la mayoría de las cuales son de funciones armónicas. Obsérvese cómo las funciones y las transformadas en (*a*) y (*b*) se combinan para dar lugar a la función y su transformada en (*d*). Por regla general, cada miembro del par de pulsos δ en el espectro de frecuencia de una función armónica se halla a lo largo del eje k a una distancia del origen que es igual a la frecuencia espacial angular fundamental de $f(x)$. Puesto que cualquier función periódica bien conformada puede expresarse con una serie de Fourier, también podrá representarse como una serie de pares de funciones delta, cada cual oportunamente ponderada y cada cual con distancia desde el origen k equivalente a la frecuencia espacial angular de la contribución armónica particular – *el espectro de frecuencia de cualquier función periódica será discreto*. Una de las funciones periódicas más extraordinaria es *peine(x)*: como se muestra en la figura 11.14, su transformada es también una función de peine.

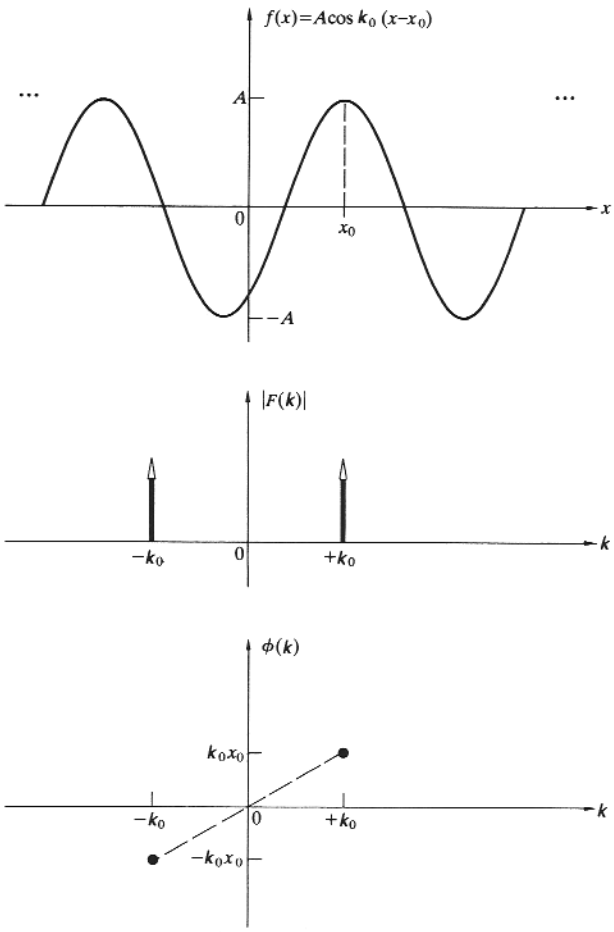


FIGURA 11.12 Los espectros de una función cosenoidal desplazada.

11.3 Aplicaciones ópticas

11.3.1 Sistemas lineales

Las técnicas de Fourier ofrecen un marco de trabajo particularmente atractivo a partir del cual puede desarrollarse una descripción de la formación de imágenes. En la mayoría de los casos, esta será la dirección hacia la cual nos moveremos si bien no se podrán evitar algunas digresiones con el fin de desarrollar las operaciones matemáticas necesarias.

Un punto clave del análisis es el concepto de **sistema lineal** el cual, a su vez, se define en términos de sus relaciones de entrada-salida. Supongamos entonces que una señal de entrada $f(y, z)$, que pasa a través de algún sistema óptico, dé como resultado una salida $g(Y, Z)$. El sistema es lineal si:

1. multiplicando $f(y, z)$ por una constante a produce una salida $ag(Y, Z)$;
2. cuando la entrada es una suma ponderada de dos (o más) funciones, $af_1(y,z) + bf_2(y, z)$, la salida tendrá similarmente

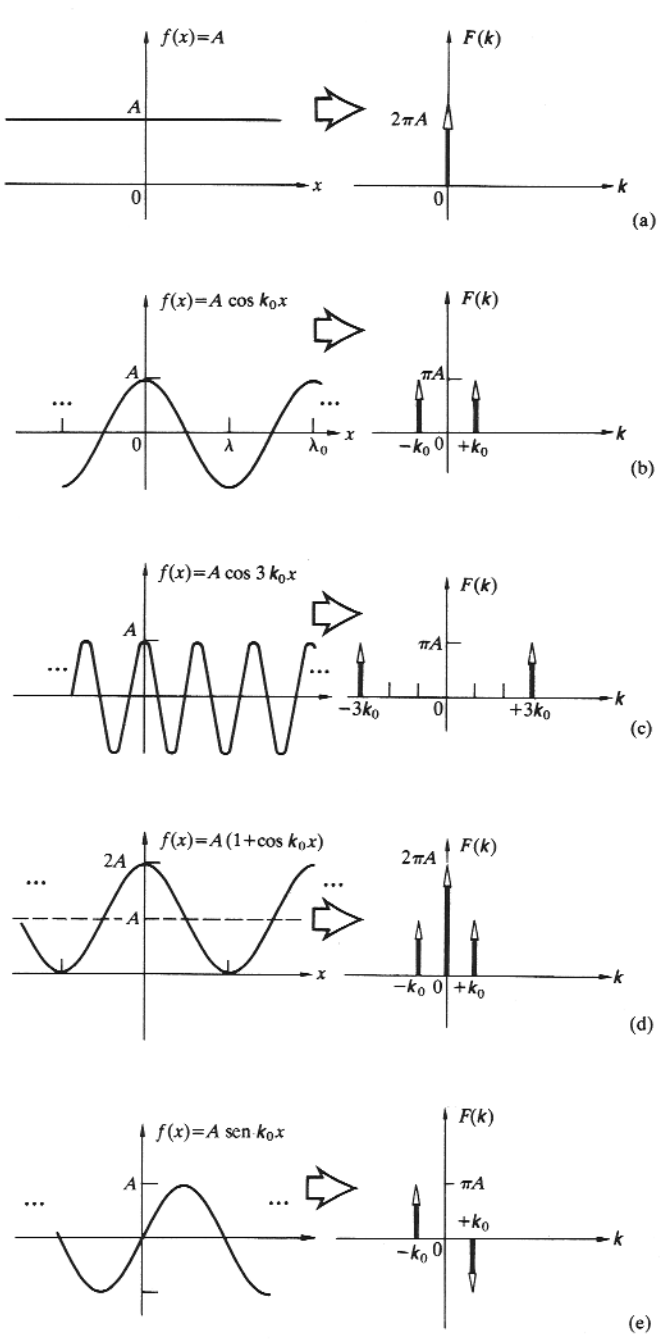


FIGURA 11.13 Algunas funciones y sus transformadas.

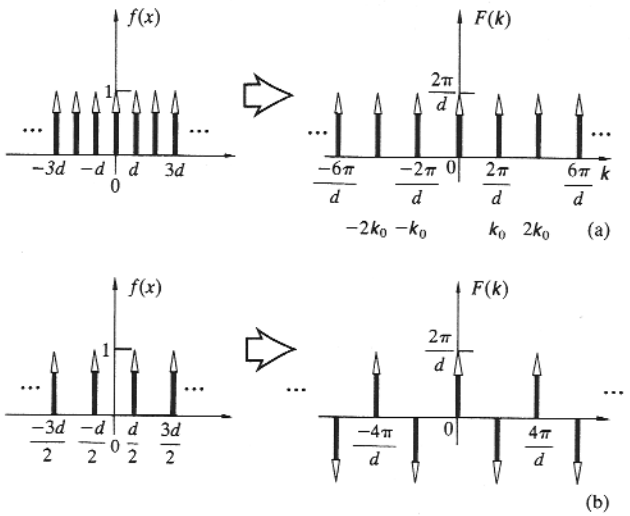


FIGURA 11.14 *(a)* Función peine y su transformada. *(b)* Función de peine desplazada y su transformada.

la forma $ag_1(Y, Z) + bg_2(Y, Z)$, donde $f_1(y,z)$ y $f_2(y, z)$ generan $g_1(Y, Z)$ y $g_2(Y, Z)$, respectivamente.

Es más, un sistema lineal será *invariante en el espacio* si posee la propiedad de ser *estacionario,* es decir, en efecto, al cambiar la posición de entrada únicamente cambia la posición de salida sin alterar su forma funcional. La idea que respalda esto es que la salida producida por un sistema óptico puede tratarse como superposición lineal de las salidas que surgen de cada uno de los puntos individuales en el objeto. De hecho, si representamos simbólicamente la operación de un sistema lineal como $\mathcal{L}\{\ \}$, la entrada y la salida pueden escribirse como

$$g(Y,Z) = \mathcal{L}\{f(y,z)\} \tag{11.46}$$

Usando la propiedad de localización de la función δ [ecuación (11.36)], tenemos

$$g(Y, Z) = \mathcal{L}\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(y', z')\delta(y' - y)\delta(z' - z)\, dy'\, dz' \right\}$$

La integral expresa $f(y, z)$ como una combinación lineal de funciones delta elementales, cada una con un peso proporcionado por un número $f(y', z')$. De la segunda condición de la linealidad, se deduce que el sistema operador puede actuar de mane-

ra equivalente en cada una de las funciones elementales; por lo tanto

$$g(Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int f(y', z')\mathcal{L}\{\delta(y' - y)\delta(z' - z)\}\, dy'\, dz' \tag{11.47}$$

La cantidad $\mathcal{L}\{\delta(y' - y)\delta(z' - z)\}$ es la respuesta del sistema [ecuación (11.46)] a una función delta localizada en el punto (y', z') en el espacio de entrada - se denomina **respuesta de impulso**. Aparentemente, si se conoce la respuesta de impulso de un sistema, la salida puede determinarse directamente de la entrada por medio de la ecuación (11.47). Si las fuentes elementales son coherentes, las señales de entrada y salida tendrán que ser unos campos eléctricos; si son incoherentes, serán densidades de flujo.

Consideremos la fuente autoluminosa y, por lo tanto, incoherente descrita en la figura 11.15. Podemos imaginar que cada punto sobre el plano de objeto, Σ_0, emite luz que es procesada por el sistema óptico. Sale para formar una mancha en el plano focal o imagen, Σ_i. Además, *supongamos que el aumento entre los planos objeto e imagen sea uno*. La imagen será de tamaño natural y derecha, lo cual facilita un poco su estudio de momento. Obsérvese que si el aumento (M_T) fuera mayor de uno, la imagen sería más grande que el objeto. Por consiguiente, todos sus detalles estructurales serían más grandes y más anchos, por lo tanto, las frecuencias espaciales de las contribuciones armónicas que se utilizan para sintetizar la imagen serían menores que las del objeto. Por ejemplo, un objeto que es la transparencia de una distribución lineal que varía sinusoidalmente del blanco al negro (un retículo de amplitud sinusoidal) se representaría por una imagen que tiene un espacio más grande entre los valores máximos y, por consiguiente, una frecuencia espacial menor. Además, la irradiancia de la imagen se disminuiría en M_T^2 porque el área de la imagen se aumentaría en un factor M_T^2.

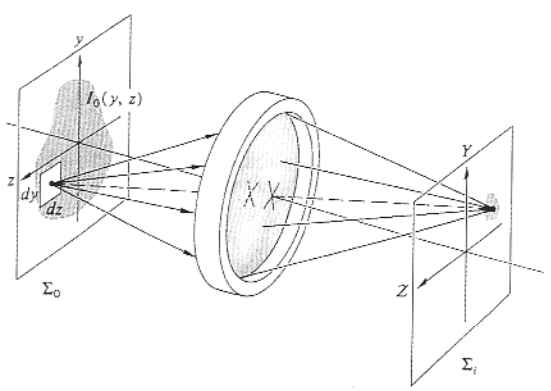


FIGURA 11.15 Sistema de lentes formando una imagen.

Si $I_0(y, z)$ es la distribución de irradiancia sobre el plano objeto, un elemento $dy\, dz$ localizado en (y, z) emitirá un flujo radiante igual a $I_0(y,z)\, dy\, dz$. Por la difracción (y la posible presencia de aberraciones), esta luz se difunde en una especie de punto borroso en un área finita del plano imagen más que ser enfocada en un punto. La difusión del flujo radiante se describe matemáticamente por una función $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ tal que la densidad de flujo que llega al punto de imagen desde $dy\, dz$ es

$$dI_i(Y, Z) = \mathcal{S}(y, z; Y, Z)I_0(y, z)\, dy\, dz \tag{11.48}$$

Esta es la mancha de luz en el plano de imagen en (Y, Z); $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ se denomina **función de ensanchamiento de punto**. En otras palabras, cuando la irradiancia $I_0(y, z)$ sobre el elemento fuente $dy\, dz$ es 1 W/m^2, $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)\, dy\, dz$ es el perfil de la distribución de irradiancia resultante en el plano de imagen. Debido a la incoherencia de la fuente, las contribuciones a la densidad de flujo de cada uno de sus elementos son aditivas y entonces

$$I_i(Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int I_0(y, z)\mathcal{S}(y, z; Y, Z)\, dy\, dz \tag{11.49}$$

En un sistema óptico «perfecto», limitado por la difracción y sin aberraciones, $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ se correspondería en la forma con la figura de difracción de una fuente puntual en (y, z). Evidentemente, si ponemos la entrada igual a un pulso δ centrado en (y_0, z_0), entonces $I_0(y, z) = A\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Aquí la constante A de magnitud uno lleva las unidades necesarias (es decir, irradiancia por área). Por lo tanto,

$$I_i(Y, Z) = A\int_{-\infty}^{+\infty}\int \delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\mathcal{S}(y, z; Y, Z)\, dy\, dz$$

y de la propiedad de localización

$$I_i(Y, Z) = A\mathcal{S}(y_0, z_0; Y, Z)$$

La forma funcional de la función de ensanchamiento de punto es idéntica a la de la imagen generada por un pulso δ de entrada. Es la respuesta de impulso del sistema a un pulso [comparar las ecuaciones (11.47) y (11.49)], sea ópticamente perfecto

o no. En un sistema bien corregido $\mathcal{S}$, aparte de una constante multiplicativa, es la función de distribución de irradiancia de Airy centrada sobre el punto imagen gaussiano.

Si el sistema es invariante en el espacio, una fuente puntual de entrada puede moverse alrededor encima del plano de objeto sin producir ningún efecto que no sea el cambio de la ubicación de la imagen. De modo equivalente, puede afirmarse que la función de ensanchamiento es la misma para cualquier punto (y, z). En la práctica, sin embargo, la función de ensanchamiento varía, pero aún así, el plano de imagen puede dividirse en pequeñas regiones en cada una de la cuales $\mathcal{S}$ no cambia sensiblemente. Por lo tanto, si el objeto y, por consiguiente, su imagen, son lo suficientemente pequeños, el sistema puede considerarse como invariante en el espacio. Podemos imaginar una función de ensanchamiento establecida en cada punto imagen gaussiano en Σ_i, cada uno multiplicado por un diferente factor de peso $I_0(y, z)$ pero todos con la misma forma general independiente de (y, z). Puesto que el aumento se igualó a uno, las coordenadas de cualquier objeto y puntos de imagen conjugados tendrán la misma magnitud.

Si estuviéramos analizando luz coherente, tendríamos que tomar en consideración la actuación de un sistema sobre una entrada que fuera nuevamente un pulso δ que representara, esta vez, la amplitud de campo.

La imagen resultante se describiría nuevamente por una función de ensanchamiento, si bien sería una función de ensanchamiento de *amplitud*. Para una abertura circular limitada por la difracción, la función de extensión de amplitud se parecería a la figura 10.28*b*. Y, finalmente, tendríamos que ocuparnos de la interferencia que se produciría en el plano de la imagen al interaccionar los campos coherentes. Por el contrario, con puntos de objeto incoherentes el proceso que ocurre en el plano imagen es sencillamente la suma de irradiancias solapadas, como se ilustra en una dimensión en la figura 11.17. Cada punto de fuente, con su intensidad propia, equivale a un pulso δ oportunamente escalado y en el plano de imagen cada uno se difunde a través de la función de ensanchamiento. La suma de todas las contribuciones solapadas es la irradiancia de la imagen.

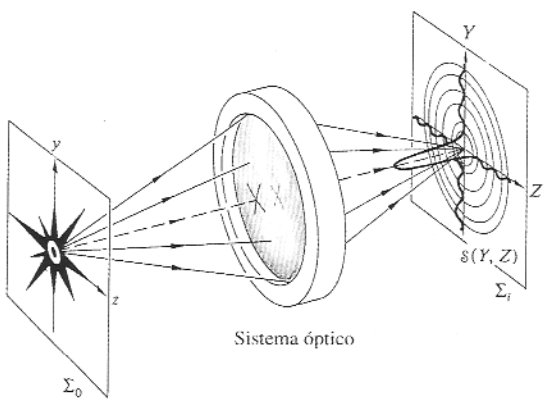


FIGURA 11.16 Función de ensanchamiento de punto: irradiancia producida por el sistema óptico con una fuente puntual de entrada.

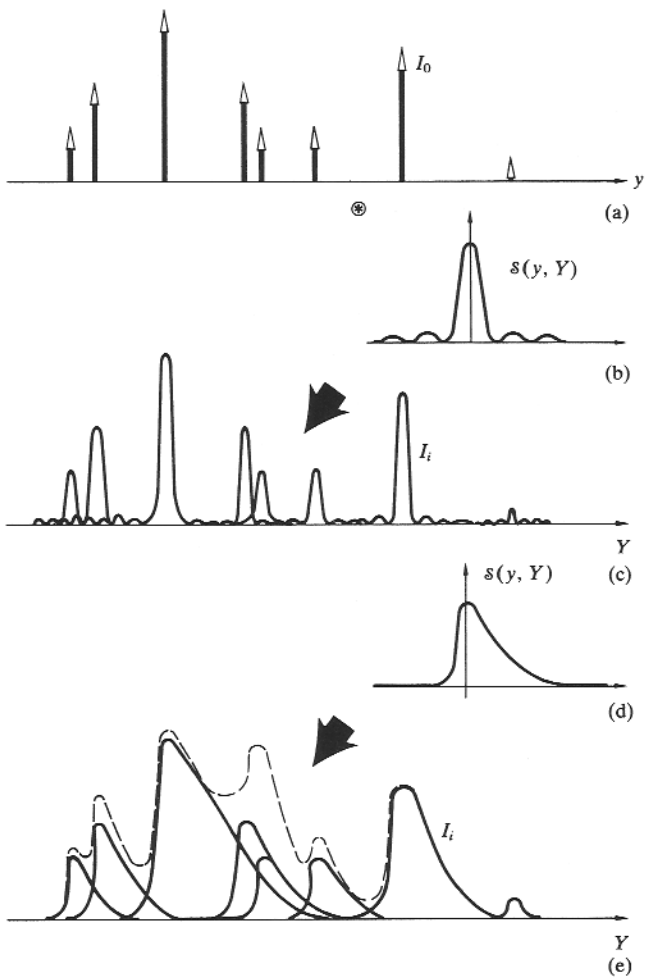


FIGURA 11.17 Aquí *(a)* se produce convolución primero con *(b)* para dar *(c)* y sucesivamente con *(d)* para dar *(e)*. La distribución resultante es la suma de todas las contribuciones extendidas como indica la curva de rayas en *(e)*.

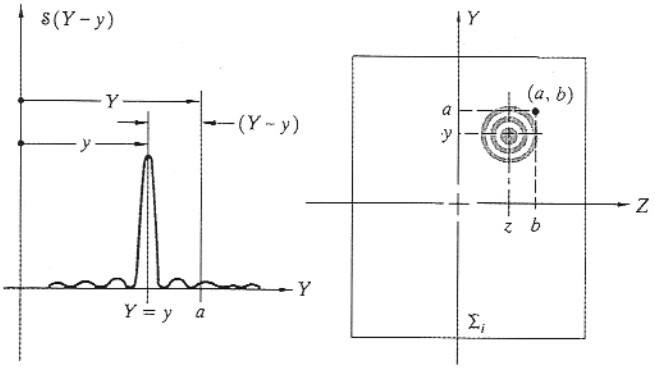


FIGURA 11.18 La función de ensanchamiento.

¿Cuál será la dependencia de $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ de las variables de espacio del objeto y de la imagen? La función de ensanchamiento puede depender únicamente de (y, z) en cuanto a la localización de su centro. Por lo tanto, el valor de $\mathcal{S}(y, z; Y, Z)$ en cualquier punto en Σ_i depende únicamente del desplazamiento en esa localización del punto de imagen gaussiano particular $(Y = y, Z = z)$ en el que $\mathcal{S}$ está centrado. En otras palabras,

$$\mathcal{S}(y, z; Y, Z) = \mathcal{S}(Y - y, Z - z) \tag{11.50}$$

Cuando el punto objeto se halla en el eje central $(y = 0; z = 0)$, también lo estará el punto imagen gaussiano y la función de ensanchamiento será entonces sencillamente $\mathcal{S}(Y, Z)$, como se describe en la figura 11.16. Bajo las circunstancias de incoherencia e invariancia en el espacio

$$I_i(Y, Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int I_0(y, z)\mathcal{S}(Y - y, Z - z)\, dy\, dz \tag{11.51}$$

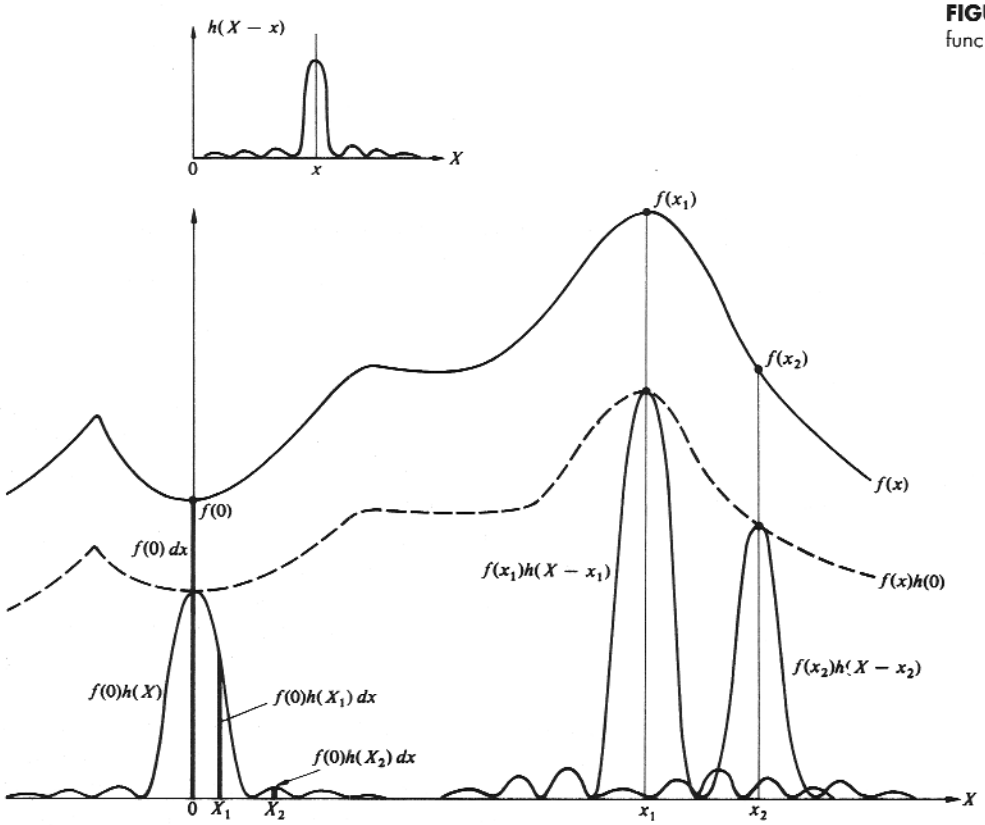


FIGURA 11.19 Superposición de dos funciones ponderadas de ensanchamiento.

11.3.2 La integral de convolución

En la figura 11.17 se recoge una representación unidimensional de la distribución de las funciones δ de fuente puntual que constituyen el objeto. La imagen correspondiente se extrae «repartiendo» una función de ensanchamiento de punto oportunamente ponderada en la ubicación de cada punto de imagen en Σ_i y sumando sucesivamente todas las contribuciones de cada punto en Y. El proceso de distribución de una función en cada punto de (y ponderada por) otra función se denomina **convolución** y se dice que una función $I_0(y)$ está convolucionada con otra, $\mathcal{S}(y, Y)$, o viceversa.

Este procedimiento puede llevarse a cabo también en dos dimensiones, siendo precisamente lo que realiza la ecuación (11.51), la denominada *integral de convolución*. La expresión unidimensional correspondiente que describe la convolución de dos funciones $f(x)$ y $h(x)$,

$$g(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(X - x)\,dx \qquad (11.52)$$

es más simple de comprender. En la figura 11.17, una de las dos funciones era un grupo de pulsos δ, siendo la operación de convolución especialmente fácil de visualizar. Sin embargo, podemos imaginar que cada función consta de un continuo «compacto» de pulsos δ pudiendo así tratarla de la misma manera. Analicemos ahora detalladamente cómo la integral de la ecuación (11.52) consigue, matemáticamente hablando, realizar la convolución. Los aspectos esenciales de este proceso se ilustran en la figura 11.19. La señal resultante $g(X_1)$ en un punto X_1 en el espacio de salida, es una superposición lineal de todas las contribuciones individuales solapadas existentes en X_1. En otras palabras, cada elemento dx de la fuente emite una señal con una intensidad particular $f(x)\,dx$ la cual es entonces esparcida por el sistema en una región centrada alrededor del punto de imagen gaussiano ($X = x$). La salida en X_1 es entonces $dg(X_1) = f(x)h(X_1 - x)dx$. La integral suma todas estas contribuciones de cada uno de los elementos de la fuente. Por supuesto los elementos más lejanos de un punto determinado en Σ_i; contribuyen en menor medida porque la función extendida generalmente disminuye con el desplazamiento. Por lo tanto, podemos imaginar que $f(x)$ es una distribución de irradiancia unidimensional, como la serie de bandas verticales de la figura 11.20. Si la **función de ensanchamiento de línea** unidimensional, $h\,(X - x)$, es la de la figura 11.20*d*, la imagen resultante será simplemente una versión borrosa de la de entrada (figura 11.20*e*).

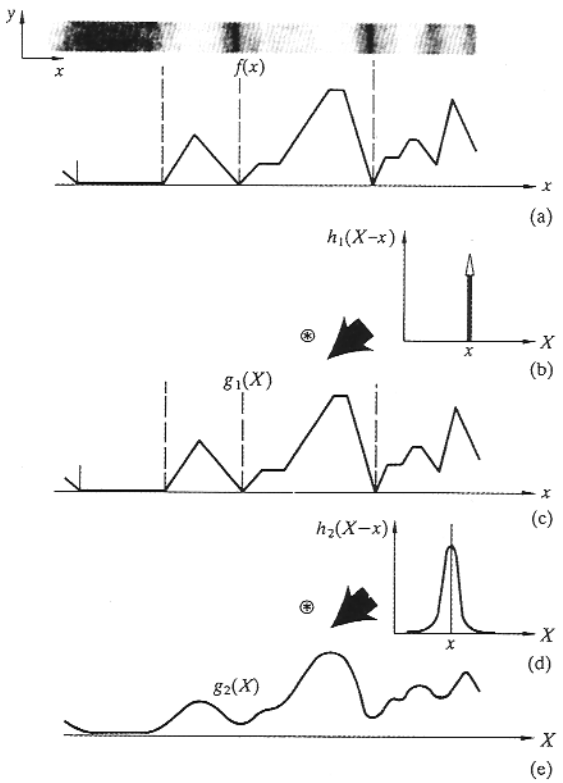


FIGURA 11.20 La distribución de la irradiancia se convierte en una función $f(x)$ como se muestra en *(a)*. Aquí hay convolución con una función δ *(b)* para crear una copia de $f(x)$. Por el contrario, si hubiera convolución entre $f(x)$ con la función extendida h_2 en *(d)* el resultado sería una curva suavizada representada por $g_2(x)$ en *(e)*.

Examinemos ahora la convolución un poco más como entidad matemática. En realidad, es algo bastante sutil que lleva a cabo un proceso que no es precisamente obvio a primera vista; por lo tanto, enfoquémoslo desde un punto de vista ligeramente diferente. Por consiguiente, demostraremos que las dos maneras de pensar de las que dispondremos referentes a la integral de convolución son equivalentes.

Supóngase que $h(x)$ se parezca a la función asimétrica de la figura 11.21*a*. Entonces $h(-x)$ aparece en la figura 11.12*b* y su forma desplazada $h(X - x)$ se muestra en (*c*). La convolución de $f(x)$ [descrita en (*d*)] y $h(x)$ es $g(X)$, como resulta de la ecuación (11.52). Esta se describe a menudo de manera más concisa como $f(x) \circledast h(x)$. La integral simplemente dice que el área bajo la función producto $f(x)h(X - x)$ para toda x es $g(X)$.

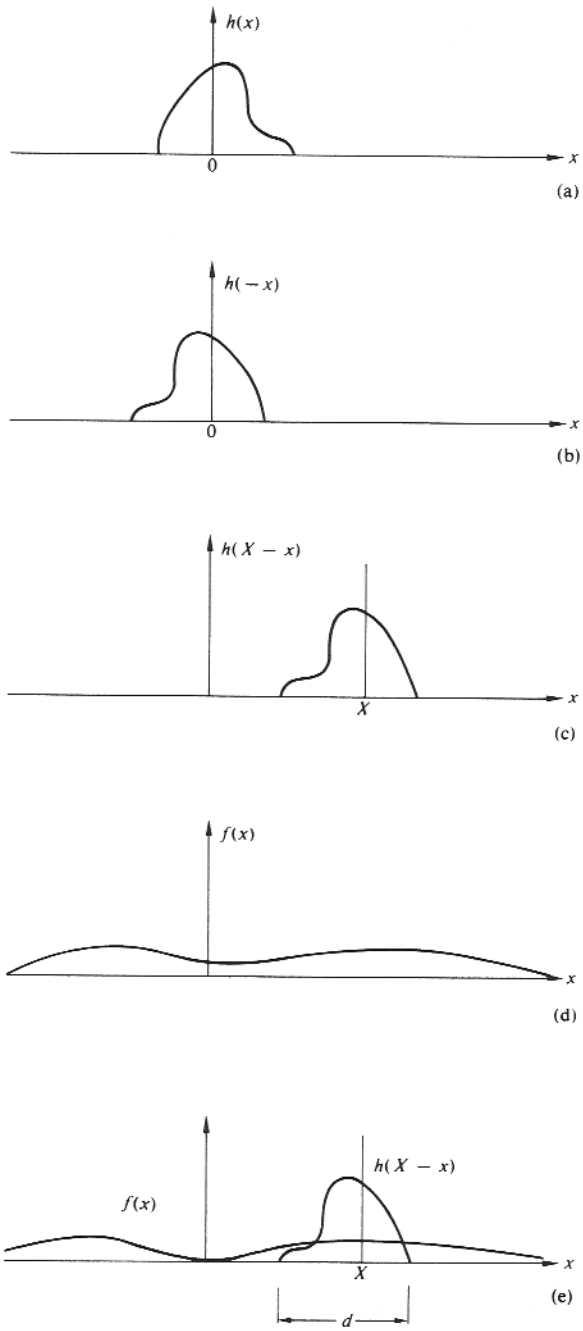


FIGURA 11.21 Geometría del proceso de convolución en las coordenadas del objeto.

Evidentemente, el producto es no nulo únicamente sobre el rango d donde $h(X-x)$ es no nulo, es decir, donde las dos curvas se superponen (figura 11.21*e*). En un punto particular X_1 en el espacio de salida, el área bajo el producto $f(x)h(X_1 - x)$ es $g(X_1)$. Esta interpretación bastante directa puede relacionarse con la visión anterior físicamente más agradable de la integral en términos de las contribuciones de los puntos solapados, como se describió previamente en la figura 11.19. Recordemos que allí dijimos que cada elemento de la fuente era dispersado en una mancha borrosa sobre el plano imagen que tenía la forma de la función de ensanchamiento. Ahora, supongamos que vamos a escoger la aproximación directa y que deseamos calcular el área producto de la figura 11.21*e* en X_1, es decir, $g(X_1)$. Un elemento diferencial dx centrado en cualquier punto de la región de superposición (figura 11.22*a*), digamos x_1, contribuirá con una cantidad $f(x_1)h(X_1 - x_1)dx$ al área. Este mismo elemento diferencial proporcionará la misma contribución cuando aparezca en el esquema de superposición de la función de ensanchamiento. Para ver esto, examinaremos (*b*) y (*c*) de la figura 11.22 que están ahora *dibujadas en el espacio de salida.* La segunda muestra la función de ensanchamiento «centrada» en $X = x_1$. Un elemento dx de la fuente, que en este caso casi se encuentra sobre el objeto en x_1, generará una señal difundida proporcional a $f(x_1)h(X - x_1)$ como en (*d*), donde $f(x_1)$ es tan sólo un número. El fragmento de esta señal existente en X_1 es $f(x_1)h(X_1 - x_1)\,dx$, que es realmente idéntica a la contribución de dx en x_1 en (*a*). De manera parecida, cada elemento diferencial del área de producto (para cualquier $x = x'$) de la figura 11.22*a* tiene su semejante en una curva como la de (*d*) pero «centrada» en un punto nuevo ($X = x'$). Los puntos situados más allá de $x = x_2$ no proporcionan ninguna contribución porque no se hallan en la región de superposición de (*a*) y, de modo equivalente, porque están demasiado lejos de X_1 para que la mancha los pueda alcanzar como se muestra en (*e*).

Si las funciones que son objeto de convolución son bastante sencillas, $g(X)$ puede determinarse aproximadamente sin ningún cálculo. La convolución de dos pulsos cuadrados idénticos se ilustra, en base a los dos puntos de vista analizados anteriormente, en las figuras 11.23 y 11.24. En la figura 11.23 cada pulso que constituye $f(x)$ se difunde en un pulso cuadrado, siendo sumado. En la figura 11.24 el área solapada, según varía h, se dibuja frente a X. En ambos casos, el resultado es un pulso triangular. Por cierto, obsérvese que $(f \circledast h) = (h \circledast f)$ como se puede ver por un cambio de variable ($x' = X - x$) en la ecuación (11.52), debiendo tener cuidado con los límites (véase problema 11.15).

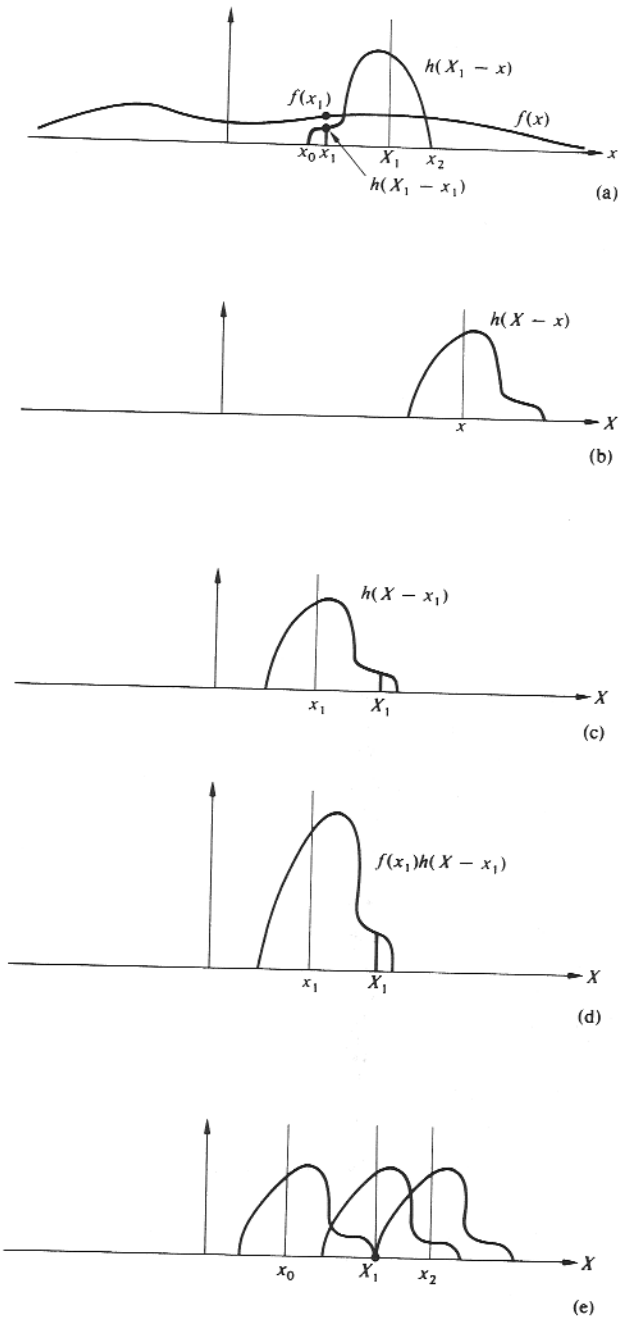


FIGURA 11.22 Geometría del proceso de convolución en las coordenadas de la imagen.

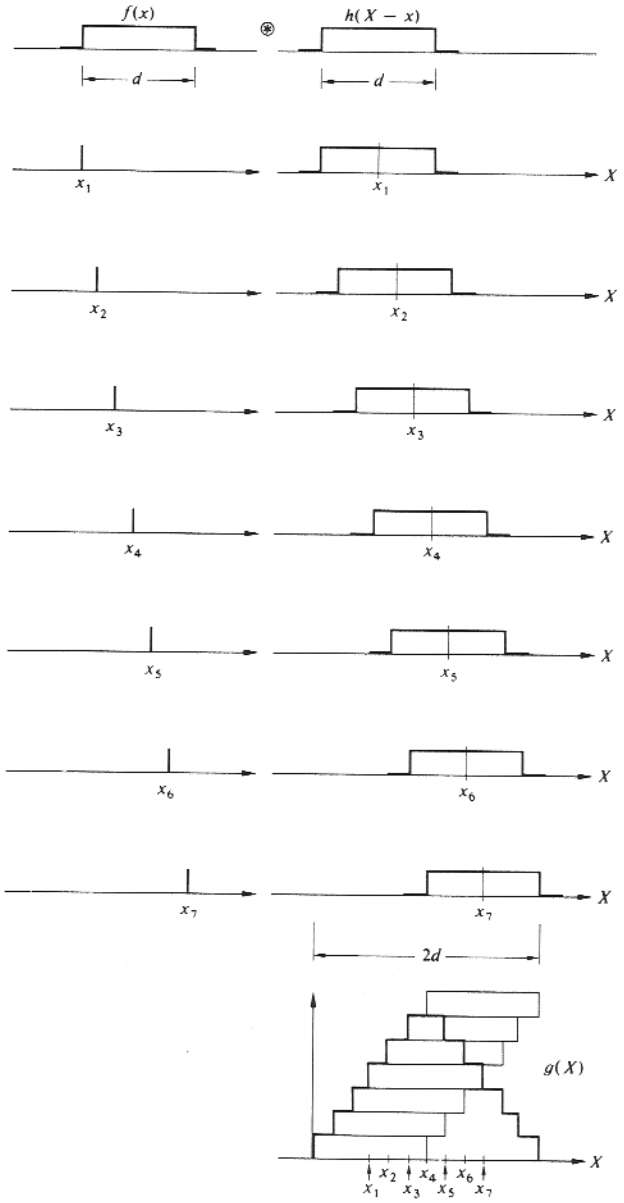


FIGURA 11.23 Convolución de dos pulsos cuadrados. La representación de *f(x)* con un número finito de funciones delta (en concreto, 7) explica los escalones en *g(X)*.

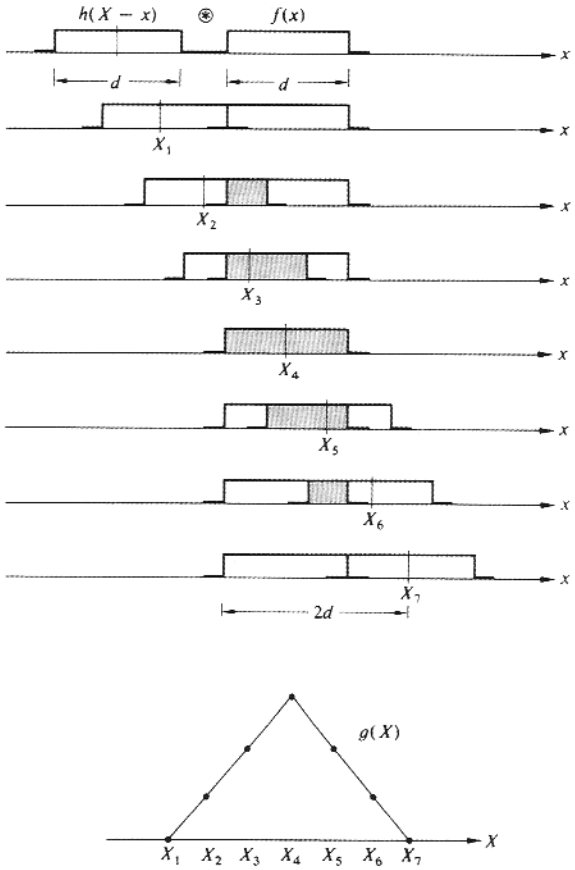


FIGURA 11.24 Convolución de dos pulsos cuadrados.

La figura 11.25 ilustra la convolución de dos funciones $I_0(y, z)$ y $\delta(y, z)$ en dos dimensiones, según la ecuación (11.51). Aquí el volumen bajo la curva de producto $I_0(y, z)\delta(Y - y, Z - z)$, es decir, la región de superposición, es igual a $I_i(Y, Z)$ en (Y, Z); véase el problema 11.16.

El teorema de convolución

Supongamos que tenemos dos funciones $f(x)$ y $h(x)$ con unas transformadas de Fourier $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ y $\mathcal{F}\{h(x)\} = H(k)$ respectivamente. El **teorema de convolución** establece que si $g = f \circledast h$

$$\mathcal{F}\{g\} = \mathcal{F}\{f \circledast h\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\} \tag{11.53}$$

o

$$G(k) = F(k)H(k) \tag{11.54}$$

donde $\mathcal{F}\{g\} = G(k)$. La demostración es bastante clara:

$$\mathcal{F}\{f \circledast h\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(X)e^{ikX}\,dX$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikX}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(X - x)\,dx\right]dX$$

Por lo tanto

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(X - x)e^{ikX}dX\right]f(x)\,dx$$

Si ponemos $w = X - x$ en la integral interna, entonces $dX = dw$ y

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ikx}dx \int_{-\infty}^{+\infty} h(w)e^{ikw}\,dw$$

De donde

$$G(k) = F(k)H(k)$$

con lo cual el teorema queda comprobado. Para ver un ejemplo de su aplicación, remítase a la figura 11.26. Puesto que la convolución de dos pulsos cuadrados idénticos $(f \circledast h)$ es un pulso triangular (g), el producto de sus transformadas (figura 7.17) deberá ser la transformada de g, es decir

$$\mathcal{F}\{g\} = [d \operatorname{sinc}(kd/2)]^2 \tag{11.55}$$

Como ejemplo adicional, convolucionemos un pulso cuadrado con las dos funciones δ de la figura 11.11. La transformada del doble pulso resultante (figura 11.27) es nuevamente el producto de las transformadas individuales.

La semejante del espacio k de la ecuación (11.53) es decir, el *teorema de convolución en frecuencia*, es proporcionada por

$$\mathcal{F}\{f \cdot h\} = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{f\} \circledast \mathcal{F}\{h\} \tag{11.56}$$

o sea, la transformada del producto es la convolución de las transformadas.

En la figura 11.28 se establece claramente este punto. Aquí, un coseno de extensión infinita, $f(x)$, se multiplica por un pulso rectangular, $h(x)$, que lo trunca en un tren corto y oscilante de ondas, $g(x)$. La transformada de $f(x)$ es un par de funciones delta, la transformada del pulso rectangular es una función sinc y la convolución de ambos es la transformada de $g(x)$. Compare este resultado con el de la ecuación (7.60).

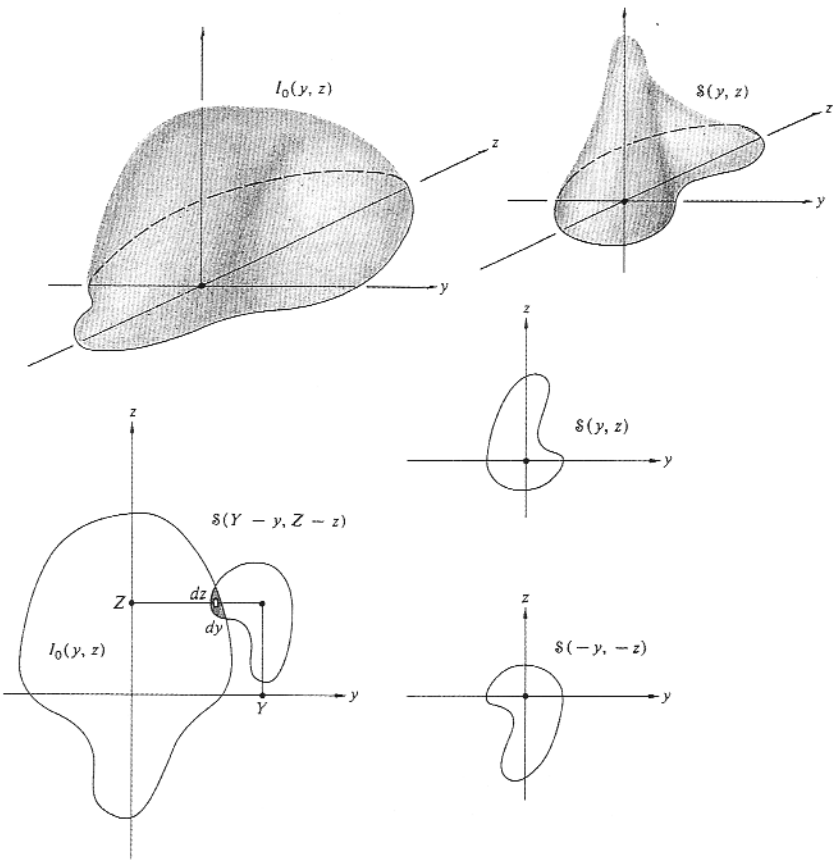


FIGURA 11.25 Convolución en dos dimensiones.

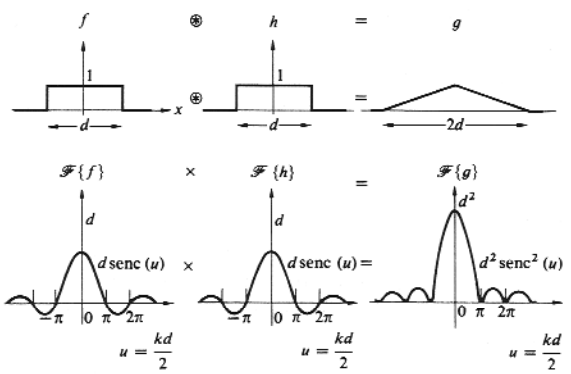


FIGURA 11.26 Ilustración del teorema de convolución.

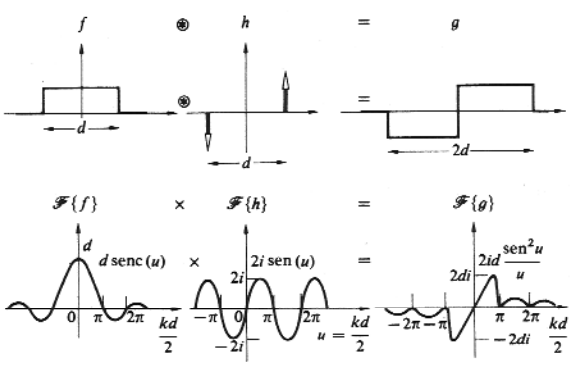


FIGURA 11.27 Ilustración del teorema de convolución.

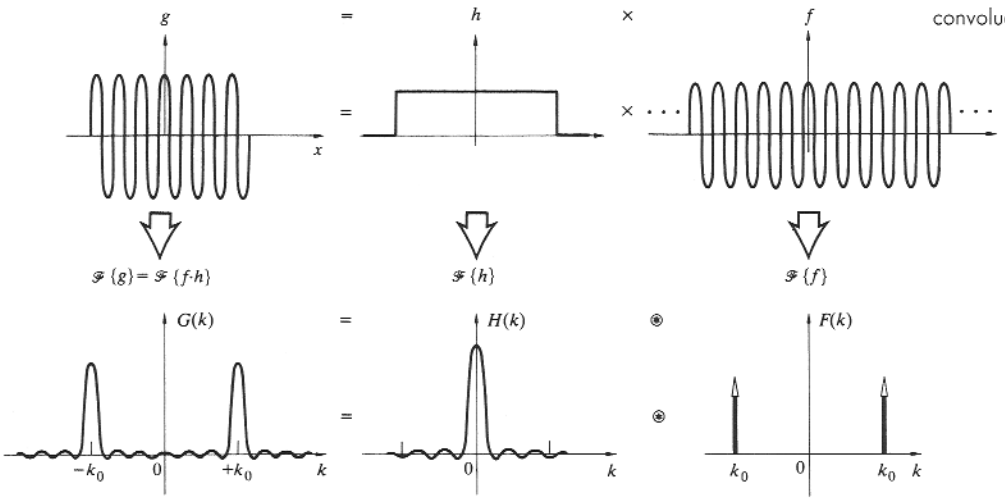


FIGURA 11.28 Ejemplo del teorema de convolución en frecuencia.

La transformada de un paquete de ondas gaussiano

Como ejemplo adicional de la utilidad del teorema de la convolución, analicemos la transformada de Fourier de un pulso de luz en la configuración del paquete de ondas de la figura 11.29. Aplicando un enfoque bastante general, obsérvese que puesto que una onda armónica unidimensional tiene la forma

$$\tilde{E}(x, t) = E_0 e^{-i(k_0 x - \omega t)}$$

sólo hace falta modular la amplitud para obtener un pulso con la estructura deseada. Suponiendo que el perfil de la onda sea independiente del tiempo, podrá escribirse como

$$\tilde{E}(x, 0) = f(x)e^{-ik_0 x}$$

Ahora, para determinar $\mathcal{F}\{f(x)e^{-ik_0 x}\}$ calcularemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ik_0 x}e^{ikx}dx \qquad (11.57)$$

Permitiendo que $k' = k - k_0$, obtenemos

$$F(k') = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ik'x}dx = F(k - k_0) \qquad (11.58)$$

Dicho de otra forma, si $F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, entonces $F(k - k_0) = \mathcal{F}\{f(x)e^{-ik_0 x}\}$. Para el caso específico de una envolvente gaussiana [ecuación (11.11)], como en la figura, $f(x) = \sqrt{a/\pi}\, e^{-ax^2}$ es decir

$$\tilde{E}(x, 0) = \sqrt{a/\pi}\, e^{-ax^2}e^{-ik_0 x} \qquad (11.59)$$

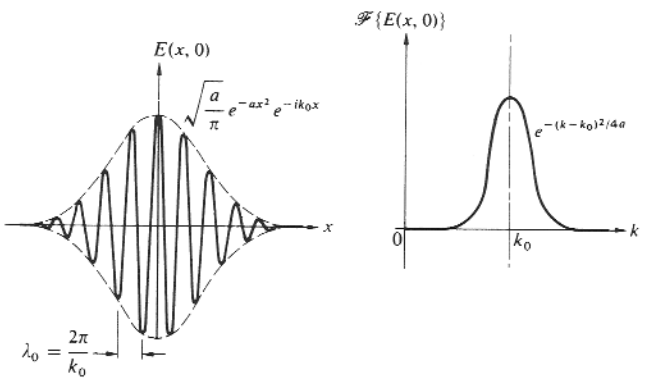


FIGURA 11.29 Un paquete de ondas gaussiano y su transformada.

Del análisis anterior y de la ecuación (11.12) se deduce que

$$\mathcal{F}\{\tilde{E}(x, 0)\} = e^{-(k-k_0)^2/4a} \qquad (11.60)$$

De manera bastante distinta, la transformada puede determinarse de la ecuación (11.56). La expresión $\tilde{E}(x, 0)$ se ve ahora como el producto de dos funciones $f(x) = \sqrt{a/\pi}\exp(-ax^2)$ y $h(x) = \exp(-ik_0 x)$. Una manera para evaluar $\mathcal{F}\{h\}$ es poner $f(x) = 1$ en la ecuación (11.57). Esto da como resultado la transformada de uno donde k es reemplazada por $k - k_0$. Puesto que $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(k)$ (véase problema 11.4), tenemos $\mathcal{F}\{e^{-ik_0 x}\} = 2\pi\delta(k - k_0)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}\{\tilde{E}(x, 0)\}$ is $1/2\pi$ es

$1/2\pi$ veces la convolución de $2\pi\delta(k - k_0)$ con la gaussiana $e^{-k^2/4a}$ centrada en cero. El resultado [4] es una vez más una gaussiana centrada en k_0, es decir, $e^{-(k-k_0)^2/4a}$.

11.3.3 Los métodos de Fourier en la teoría de la difracción

La difracción de Fraunhofer

La teoría de la transformada de Fourier aporta una percepción particularmente hermosa del mecanismo de difracción de Fraunhofer. Regresemos entonces a la ecuación (10.41), reescrita como

$$E(Y,Z) = \frac{\mathcal{E}_A e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{Abertura}} e^{ik(Yy+Zz)/R}\, dy\, dz \qquad (11.61)$$

Esta fórmula se refiere a la figura 10.22 que describe una abertura difractante arbitraria en el plano yz en el cual incide una onda plana monocromática. La cantidad R es la distancia del centro de la abertura al punto de salida donde el campo es $E(Y, Z)$. La eficacia de la fuente por unidad de área de la abertura se indica con $\mathcal{E}_A$. Estamos hablando de campos eléctricos que naturalmente son variables con el tiempo; el término exp $i(\omega t - kR)$ relaciona precisamente la fase de la perturbación neta en el punto (Y, Z) con la del centro de la abertura. El factor $1/R$ corresponde a la disminución de la amplitud del campo con la distancia a la abertura. El término de fase que se halla en frente de la integral es de poca importancia por ahora, puesto que lo que nos interesa es la distribución relativa de la amplitud del campo, siendo de poca trascendencia la fase resultante en un punto cualquiera de la salida. Por lo tanto, si nos limitamos a una pequeña región en el espacio de salida en la cual R es esencialmente constante, todo lo que está enfrente de la integral, salvo $\mathcal{E}_A$, puede concentrarse en una sola constante.

Hasta ahora, se ha considerado que $\mathcal{E}_A$ es invariante en la abertura, pero esto no es necesariamente así. De hecho, si la abertura se llenara con un trozo de vidrio sucio e irregular, el campo que emanaría cada área elemental $dy\, dz$ diferiría tanto en la fase como en la amplitud. Se produciría una absorción irregular así como una longitud del camino óptico dependiente de la posición a través del vidrio que afectaría seguramente a la distribución del campo difractado. Las variaciones en $\mathcal{E}_A$ así como la constante multiplicativa pueden combinarse en una sola cantidad compleja

$$\mathcal{A}(y,z) = \mathcal{A}_0(y,z)e^{i\phi(y,z)} \qquad (11.62)$$

denominada **función de abertura**. La amplitud del campo en la abertura está descrita por $\mathcal{A}_0(y, z)$, mientras que la variación de fase de punto a punto está representada por exp exp $[i\phi(y, z)]$. Por consiguiente, $\mathcal{A}(y, z)\, dy\, dz$ es proporcional al campo difractado que emana del elemento diferencial de la fuente $dy\, dz$. Consolidando todo esto, la ecuación (11.61) puede reformularse más generalmente como

$$E(Y,Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{A}(y,z)e^{ik(Yy+Zz)/R}\, dy\, dz \qquad (11.63)$$

Los límites sobre la integral pueden extenderse hasta $\pm\infty$, porque la función de abertura es no nula únicamente en la región de la abertura.

Puede ser útil imaginar $dE(Y, Z)$ en un punto dado P como si fuera una onda plana que se propaga en la dirección de **k** como en la figura 11.30, y cuya amplitud está determinada por $\mathcal{A}(y, z)\, dy\, dz$. Para subrayar la semejanza entre la ecuación (11.63) y la ecuación (11.14) definiremos las *frecuencias espaciales* k_Y y k_Z como

$$k_Y \equiv kY/R = k \operatorname{sen}\phi = k\cos\beta \qquad (11.64)$$

y

$$k_Z \equiv kZ/R = k \operatorname{sen}\theta = k\cos\gamma \qquad (11.65)$$

Para cada punto en el plano de imagen, existe una frecuencia espacial correspondiente. El campo difractado puede ahora escribirse como

$$E(k_Y, k_Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{A}(y,z)e^{i(k_y y + k_z z)}\, dy\, dz \qquad (11.66)$$

[4] Para empezar, deberíamos haber usado la parte real de la exp $(-ik_0x)$ en esta deducción puesto que la transformada de la exponencial compleja es diferente de la transformada de cos k_0x y resulta insuficiente tomar la parte real posteriormente. Se trata de la misma dificultad que siempre se encuentra al formar productos de exponenciales complejas. La respuesta final [ecuación (11.60)] debería, de hecho, contener un término adicional exp $[-(k + k_0)^2/4a]$ así como una constante multiplicativa de $1/2$. Sin embargo, este segundo término es usualmente despreciable. Aún así, si hubiéramos utilizado exp $(+ik_0x)$ para empezar con la [ecuación (11.59)], ¡se habría obtenido tan sólo el término despreciable! Es *rigurosamente incorrecto* utilizar la exponencial compleja para representar al seno o al coseno de esta forma, aunque sea una práctica común. Podría permitirse su uso como atajo, ¡pero con la máxima precaución!

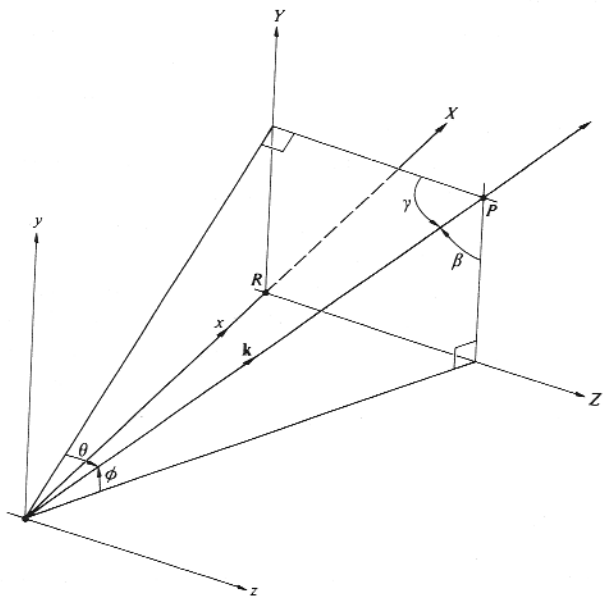


FIGURA 11.30 Algo de geometría.

y hemos llegado así al punto clave: ***la distribución del campo en la figura de difracción de Fraunhofer es la transformada de Fourier de la distribución de campo sobre la abertura (es decir, la función de abertura)***. Simbólicamente se escribe como

$$E(k_Y, k_Z) = \mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\} \tag{11.67}$$

La distribución del campo en el plano imagen es el espectro de frecuencia espacial de la función de abertura. La transformada inversa es entonces

$$\mathcal{A}(y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int E(k_Y, k_Z) e^{-i(k_Y y + k_Z z)} dk_Y \, dk_Z \tag{11.68}$$

es decir

$$\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{E(k_Y, k_Z)\} \tag{11.69}$$

Como hemos visto una y otra vez, cuanto más localizada esté la señal, más difundida será su transformada - lo mismo es cierto en dos dimensiones. Cuanto más pequeña sea la abertura difractante, más grande será la difusión angular del haz difractado o, de modo equivalente, más grande será el ancho de la banda de la frecuencia espacial.

Hay una pequeña cuestión que deberíamos mencionar aquí. Si intentamos observar una distribución de Fraunhofer en una pantalla lejana (sin lentes), lo que obtendríamos sería tan sólo una aproximación; la verdadera distribución de Fraunhofer consta de luz paralela que no converge a cualquier distancia finita. Por lo general, esto no produce ningún problema puesto que lo que vemos es la irradiancia y esto es imperceptible desde la distribución real a grandes distancias. Sin embargo, en un punto distante cualquiera pero finito, la fase de la distribución del campo eléctrico difractado diferirá muy ligeramente de la transformada de Fourier de la función de apertura. Puesto que no podemos siquiera medir el campo eléctrico, el problema no va a ser de carácter práctico, por lo tanto, en lo sucesivo, lo pasaremos por alto.

La rendija única

A fin de ilustrar este método, consideremos una rendija larga en la dirección y de la figura 10.11, iluminada por una onda plana. Suponiendo que no haya variaciones de fase o amplitud en la abertura, $\mathcal{A}(y, z)$ tiene la forma de un pulso cuadrado (figura 7.23):

$$\mathcal{A}(y, z) = \begin{cases} \mathcal{A}_0 & \text{cuando } |z| \leq b/2 \\ 0 & \text{cuando } |z| > b/2 \end{cases}$$

donde $\mathcal{A}_0$ ya no es una función de y y z. Considerando esto como un problema unidimensional

$$E(k_Z) = \mathcal{F}\{\mathcal{A}(z)\} = \mathcal{A}_0 \int_{z=-b/2}^{+b/2} e^{ik_Z z} \, dz$$

$$E(k_Z) = \mathcal{A}_0 b \text{ sinc } k_Z b/2$$

Con $k_Z = k$ sen θ, , ésta es precisamente la forma a la que se llegó en la sección 10.2.1. La figura de difracción de campo lejano producido de una abertura rectangular (sección 10.2.4) es la contrapartida de dos dimensiones de la rendija. Con $\mathcal{A}(y, z)$ nuevamente igual a $\mathcal{A}_0$ sobre la abertura (figura 10.23)

$$E(k_Y, k_Z) = \mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\}$$

$$= \int_{y=-b/2}^{+b/2} \int_{z=-a/2}^{+a/2} \mathcal{A}_0 e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy \, dz$$

por lo tanto,

$$E(k_Y, k_Z) = \mathcal{A}_0 ba \text{ sinc } \frac{bkY}{2R} \text{ sinc } \frac{akZ}{2R}$$

precisamente como en la ecuación (10.42) donde ba es el área del orificio.

El experimento de Young: la doble rendija

Durante nuestro primer análisis del experimento de Young (sección 9.3), imaginamos que las rendijas eran infinitesimalmente anchas. La función de abertura era entonces dos pulsos δ y la amplitud de campo idealizado correspondiente en el patrón de difracción era la transformada de Fourier, es decir, una función de coseno. Elevada al cuadrado, ésta da como resultado la conocida distribución de la irradiancia de coseno cuadrado de la figura 9.9. De manera más realista, cada abertura tiene efectivamente una forma finita, por lo tanto la figura de difracción real no será nunca tan sencillo. En la figura 11.31 se recoge el caso en el que los orificios son verdaderas rendijas. La función de abertura, $g(x)$, se obtiene convolucionando los picos de la función δ, $h(x)$, que posiciona cada rendija con el pulso rectangular, $f(x)$, que corresponde a la abertura concreta. Del teorema de convolución, el producto de la transformada es la función de amplitud de coseno modulado que representa el campo difractado según aparece en el plano imagen. Elevándolo al cuadrado se conseguiría la distribución de irradiancia de doble rendija de la figura 10.18. Las curvas de la transformada unidimensional se dibujan frente a k, lo cual equivale a un diseño frente a las variables de espacio-imagen a través de la ecuación (11.64). (El mismo razonamiento aplicado a aberturas circulares da como resultado la figura de franjas de la figura 12.2).

Tres rendijas

Al analizar la figura 11.13*d* debería quedar claro que la transformada de la serie de las tres funciones δ del diagrama generará un coseno que es elevado a una potencia en una cantidad proporcional al término de frecuencia cero, es decir, la función δ en el origen. Cuando la amplitud de dicha función delta sea el doble de las dos otras, el coseno será completamente positivo. Ahora, supongamos que tenemos tres rendijas estrechas idealmente paralelas y uniformemente iluminadas. La función de abertura corresponde a la figura 11.32*a*, donde la función δ central es la mitad de su tamaño anterior. Por consiguiente, la transformada de coseno bajará en una cuarta parte como se indica en la figura 11.32*b*. Esto corresponde a la amplitud difractada de campo eléctrico y su cuadrado, figura 11.32*c*, es el patrón de irradiancia de tres rendijas.

Apodización

El término **apodización** procede del griego α, eliminar, y de $\pi o \delta o \sigma$ que significa pie. Se refiere al proceso de eliminación de los máximos secundarios (lóbulos laterales) o pies de una figura de difracción. En el caso de una abertura circular (sección 10.2.5), la figura de difracción es un punto central rodeado por anillos con-

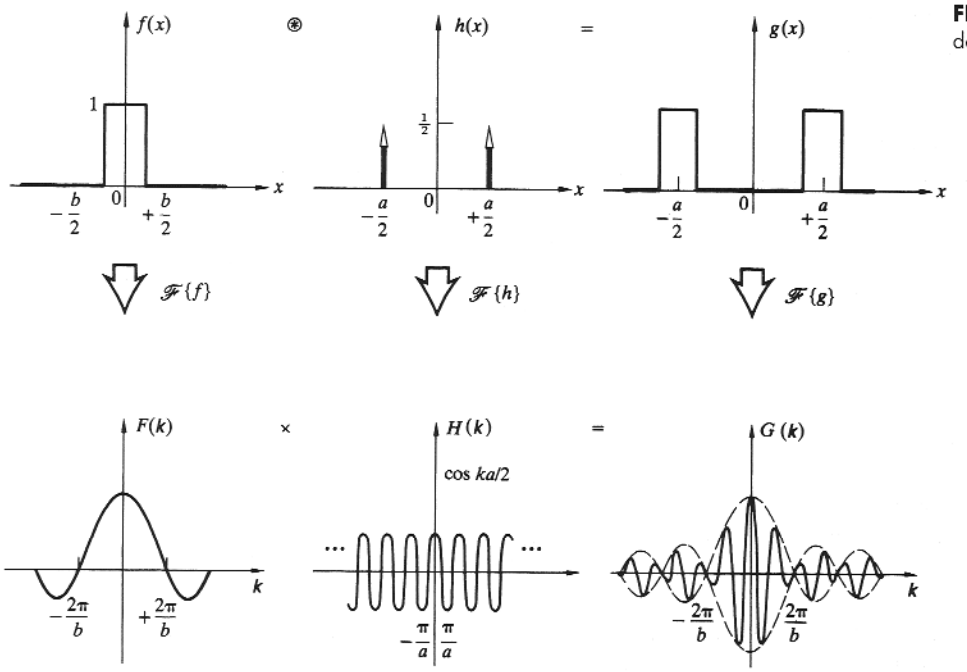


FIGURA 11.31 Ilustración del teorema de convolución.

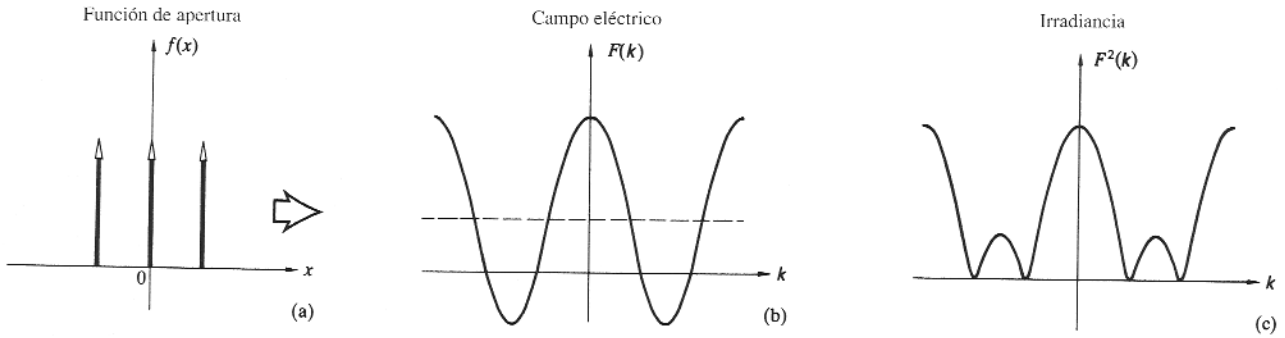


FIGURA 11.32 La transformada de Fourier de las tres funciones δ iguales que representan a tres rendijas.

céntricos. El primer anillo tiene una densidad de flujo de 1,75% del pico central; no es mucho pero puede ser problemático. Aproximadamente el 16% de la luz incidente sobre el plano de imagen está repartido en el sistema de anillos. La presencia de estos lóbulos laterales puede disminuir la resolución de un sistema óptico hasta el punto donde se hace necesaria la apodización, como a menudo acontece en astronomía y espectroscopia. Por ejemplo, la estrella Sirio, la estrella más brillante del cielo (está en la constelación *Canis Major;* el can mayor) es en realidad una estrella de sistema binario. Está acompañada por una estrella enana blanca y débil y ambas giran alrededor de su centro de masa mutuo. A causa de la diferencia tan tremenda en brillo (10^4 a 1), la imagen de la compañera débil, al observarla con un telescopio, está total y generalmente obscurecida por los lóbulos laterales del patrón de difracción de la estrella principal.

La apodización puede lograrse de varias formas, por ejemplo, alterando la forma de la abertura o sus características de transmisión [5]. Sabemos de la ecuación (11.66) que la distribución del campo difractado es la transformada de $\mathcal{A}(y, z)$. Por lo tanto, podemos realizar un cambio en los lóbulos laterales alterando $\mathcal{A}_0(y, z)$ or $\phi(y, z)$. Tal vez el medio más simple es aquel donde se altera únicamente $\mathcal{A}_0(y, z)$. Esto se puede lograr físicamente cubriendo la abertura con una lámina plana de vidrio oportunamente recubierta (o recubriendo la lente objetivo misma). Supongamos que el recubrimiento sea cada vez más opaco al salir radialmente del centro (en el plano yz) hacia los bordes de una pupila circular. El campo transmitido correspondiente decrecerá fuera del eje hasta que su valor llegue a ser despreciable en la periferia de la abertura. En concreto, imaginemos que esta caída en amplitud sigue una curva gaussiana. Entonces $\mathcal{A}_0(y, z)$ es una función gaussiana como lo es su transformada $E(Y, Z)$ y, por consiguiente, el sistema de anillos desaparece. Si bien el pico central está ensanchado, los lóbulos laterales se suprimen de verdad (figura 11.33).

Otro camino bastante heurístico pero sugestivo para comprender este proceso es darse cuenta que las contribuciones de las frecuencias espaciales más altas sirven para definir mejor los detalles de la función que está siendo sintetizada. Como vimos antes en una dimensión (figura 7.19), las frecuencias altas sirven para llenar las esquinas del pulso cuadrado. De la misma manera, puesto que $\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{E(k_Y, k_Z)\}$, los bordes bien definidos sobre la abertura necesitan la presencia de contribuciones notables de frecuencias espaciales altas en el campo difractado. Se deduce que la disminución gradual de $\mathcal{A}_0(y, z)$ lleva a una reducción de las altas frecuencias lo cual, a su vez, se manifiesta en una supresión de los lóbulos laterales.

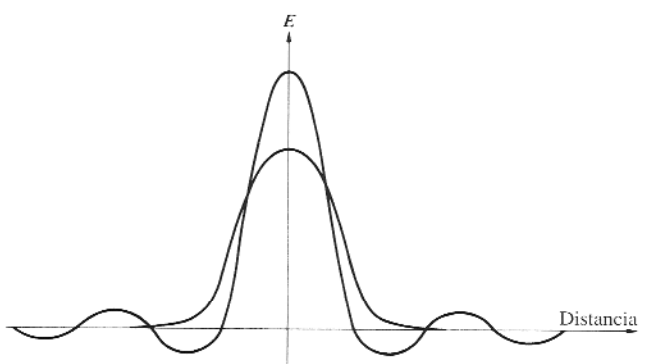


FIGURA 11.33 Comparación de una distribución de Airy con una gaussiana.

[5] Para un estudio exhaustivo de este tema, véase P. Jacquinot y B. RoizenDossier, «Apodization», en el Vol. III de *Progress in Optics*.

La apodización es uno de los aspectos de la más amplia técnica de *filtrado espacial*, que se analizará detalladamente pero no desde un punto de vista matemático en el capítulo 14.

El Teorema de la red

A fin de generalizar algunos de los conceptos anteriores a dos dimensiones, imaginemos que tenemos una pantalla que contiene N agujeros idénticos, como en la figura 11.34. En cada abertura, en la misma posición relativa, localizamos un punto $O_1, O_2, \ldots O_N$ en (y_1, z_1) $(y_2, z_2), \ldots (y_N, z_N)$, respectivamente. A su vez, cada uno de ellos fija el origen de un sistema de coordenadas (y', z') local. Por lo tanto, un punto (y', z') en la referencia local de la j-ésima abertura tendrá unas coordenadas $(y_j + y', z_j + z')$ en el sistema (y, z). Bajo iluminación monocromática coherente, el campo de difracción de Fraunhofer resultante $E(Y, Z)$ en algún punto P sobre el plano imagen será una superposición de los campos individuales en P que emergen de cada abertura separada, es decir,

$$E(Y,Z) = \sum_{j=1}^{N} \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{A}_I(y',z')e^{ik[Y(y_j+y')+Z(z_j+z')]/R}dy'\,dz' \tag{11.70}$$

o

$$E(Y,Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{A}_I(y',z')e^{ik(Yy'+Zz')/R}dy'\,dz' \times \sum_{j=1}^{N} e^{ik(Yy_j+Zz_j)/R} \tag{11.71}$$

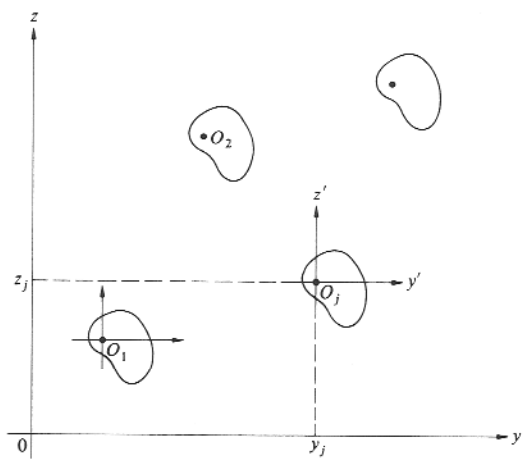


FIGURA 11.34 Red de aperturas múltiples.

donde $\mathcal{A}_I(y', z')$ es la función de abertura individual aplicable a cada orificio. Esto puede calcularse de nuevo, usando las ecuaciones (11.64) y (11.65) como

$$E(k_Y, k_Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathcal{A}_I(y',z')e^{i(k_Yy'+k_Zz')}dy'\,dz' \times \sum_{j=1}^{N} e^{i(k_Yy_j)}e^{i(k_Zz_j)} \tag{11.72}$$

Obsérvese que la integral es la transformada de Fourier de la función de abertura individual, mientras que la suma es la transformada [ecuación (11.42)] de una serie de funciones delta

$$A_\delta = \sum_j \delta(y - y_j)\delta(z - z_j) \tag{11.73}$$

Dado que la misma $E(k_Y, k_Z)$ es la transformada $\mathcal{F}\{\mathcal{A}(y, z)\}$ de la función de abertura completa para la totalidad de la disposición, obtenemos

$$\mathcal{F}\{\mathcal{A}(y,z)\} = \mathcal{F}\{\mathcal{A}_I(y',z')\}\cdot\mathcal{F}\{A_\delta\} \tag{11.74}$$

Esta ecuación es un enunciado del **teorema de la disposición** que establece que ***la distribución de campo en la figura de difracción de Fraunhofer de una serie de aberturas idénticas de orientación similar es igual a la transformada de Fourier de una función de abertura individual (es decir, su distribución de campo difractado) multiplicada por la distribución que resultaría de una serie de fuentes puntuales dispuestas en la misma configuración (que es la transformada de A_δ)***.

Esto puede considerarse desde un punto de vista ligeramente diferente. La función de abertura total puede formarse por la convolución de la función de abertura individual con una disposición apropiada de funciones delta, cada cual situada en uno de los orígenes de las coordenadas (y_1, z_1), (y_2, z_2), etc. Por lo tanto

$$\mathcal{A}(y,z) = \mathcal{A}_I(y',z') \circledast A_\delta \tag{11.75}$$

de donde, el teorema de la red se deduce inmediatamente del teorema de la convolución [ecuación (11.53)].

Para poner un ejemplo simple, imaginemos que tenemos otra vez el experimento de Young con dos rendijas a lo largo de la dirección y, de ancho b y separación a. La función de abertura individual para cada rendija es una función escalonada,

$$\mathcal{A}_I(z') = \begin{cases} \mathcal{A}_{I0} & \text{cuando } |z'| \le b/2 \\ 0 & \text{cuando } |z'| > b/2 \end{cases}$$

y entonces

$$\mathcal{F}\{\mathcal{A}_I(z')\} = \mathcal{A}_{I0} b \text{ sinc } k_Z b/2$$

Con las rendijas localizadas en $z = \pm a/2$,

$$A_\delta = \delta(z - a/2) + \delta(z + a/2)$$

y de la ecuación (11.43)

$$\mathcal{F}\{A_\delta\} = 2\cos k_Z a/2$$

Por consiguiente

$$E(k_Z) = 2\mathcal{A}_{I0} b \text{ sinc}\left(\frac{k_Z b}{2}\right)\cos\left(\frac{k_Z a}{2}\right)$$

que es la misma conclusión a la que se llegó anteriormente (figura 11.31). La distribución de irradiancia es una serie de franjas de interferencia de *coseno al cuadrado* modulado por una envolvente de difracción *sinc al cuadrado.*

11.3.4 Espectros y correlación

La fórmula de Parseval

Supongamos que $f(x)$ sea un pulso de extensión finita y $F(k)$ su transformada de Fourier [ecuación (11.5)]. Volviendo a la sección 7.8, reconocemos la función $F(k)$ como amplitud del espectro de frecuencias espaciales $f(x)$ y $F(k)\,dk$ entonces representa la amplitud de las contribuciones comprendidas en el pulso dentro del rango de frecuencias desde k hasta $k + dk$. Por lo tanto, parece que $|F(k)|$ sirve como densidad de amplitud espectral y su cuadrado, $|F(k)|^2$ sería proporcional a la energía por unidad de intervalo de frecuencia espacial. De manera parecida, en el dominio del tiempo, si $f(t)$ es un campo eléctrico radiado, $|f(t)|^2$ es proporcional al flujo radiante o potencia, siendo la energía total emitida proporcional a $\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt$. Con $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, supuestamente $|F(\omega)|^2$ tiene que ser una medida de la energía radiada por unidad de intervalo de frecuencia temporal. Para ser un poco más precisos, evaluemos $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt$ en términos de las transformadas de Fourier apropiadas. Puesto que $|f(t)|^2 = f(t)f^*(t) = f(t)\cdot[\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}(\omega)\}]^*$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{+i\omega t}\,d\omega\right]dt$$

Intercambiando el orden de integración, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt\right]d\omega$$

y de aquí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \qquad (11.76)$$

donde $|F(\omega)|^2 = F^*(\omega)F(\omega)$. Esta es la *fórmula de Parseval.* Como se esperaba, la energía total es proporcional al área bajo la curva $|F(\omega)|^2$ y, por consiguiente, $|F(\omega)|^2$ se denomina a veces **espectro energético** *o distribución de* **energía espectral.** La fórmula correspondiente para el dominio espacial es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2\,dk \qquad (11.77)$$

El perfil Lorentziano

Para proporcionar una indicación de la forma según la cual estas ideas se llevan a la práctica, consideremos una onda armónica amortiguada $f(t)$ en $x = 0$ y descrita en la figura 11.35. Aquí

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{desde } t = -\infty \text{ a } t = 0 \\ f_0 e^{-t/2\tau}\cos\omega_0 t & \text{desde } t = 0 \text{ a } t = +\infty \end{cases}$$

La dependencia negativa de la exponencial surge, por lo general, siempre que la velocidad de cambio de una cantidad

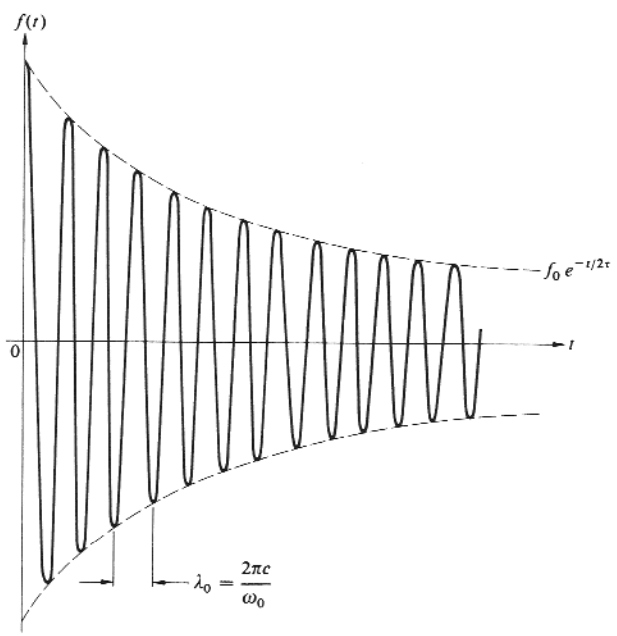


FIGURA 11.35 Onda armónica amortiguada.

depende de su valor instantáneo. En este caso, debemos suponer que la potencia radiada por un átomo varía como $(e^{-t/\tau})^{1/2}$. De cualquier forma, τ es la constante de tiempo de la oscilación y $\tau^{-1} = \gamma$ es la constante de amortiguamiento. La transformada de $f(t)$ es

$$F(\omega) = \int_0^\infty (f_0 e^{-t/2\tau} \cos \omega_0 t) e^{i\omega t}\, dt \qquad (11.78)$$

El cálculo de esta integral se examina en los problemas. Al desarrollar el cálculo, encontramos que

$$F(\omega) = \frac{f_0}{2}\left[\frac{1}{2\tau} - i(\omega + \omega_0)\right]^{-1} + \frac{f_0}{2}\left[\frac{1}{2\tau} - i(\omega - \omega_0)\right]^{-1}$$

Si $f(t)$ es el campo radiado por un átomo, τ indica *el tiempo de vida* de un estado excitado (desde unos 1,0 ns hasta 10 ns). Ahora, si formamos el espectro energético $F(\omega)F^*(\omega)$, este constará de dos picos centrados en $\pm\,\omega_0$ estando por lo tanto separados por $2\omega_0$. Para frecuencias ópticas donde $\omega_0 >> \gamma$, ambos serán estrechos y espaciados sin prácticamente superposición. La forma de estos picos está definida por la transformada de la envolvente de modulación de la figura 11.35, es decir, una exponencial negativa. La ubicación de los picos es fijada por la frecuencia de la onda coseno modulada, y el hecho de que haya dos picos de esta clase es un reflejo del espectro del coseno en esta representación de frecuencia asimétrica (sección 7.8). Para definir el espectro observable de $F(\omega)F^*(\omega)$, sólo es necesario considerar el término de frecuencia positiva, es decir

$$|F(\omega)|^2 = \frac{f_0^2}{\gamma^2}\,\frac{\gamma^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2/4} \qquad (11.79)$$

Este tiene un valor máximo de f_0^2/γ^2 en $\omega = \omega_0$ como se muestra en la figura 11.36. En los puntos de mitad de la potencia $(\omega - \omega_0) = \pm\gamma/2$, $|F(\omega)|^2 = f_0^2/2\gamma^2$ que es la mitad de su valor máximo. El ancho de la línea espectral entre estos puntos es igual a γ.

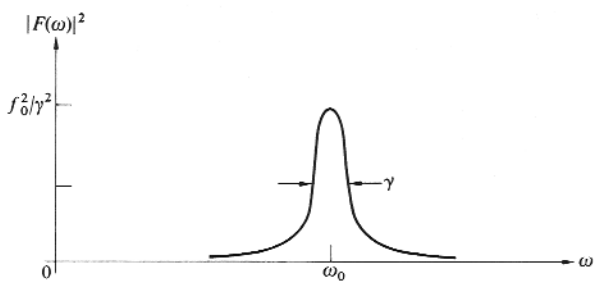


FIGURA 11.36 Resonancia o perfil de Lorentz.

La curva proporcionada por la ecuación (11.79) se denomina *resonancia o perfil lorentziano.* El ancho de la banda de frecuencia producida por la duración finita de los estados excitados se llama *ancho natural de línea.*

Si el átomo que radia sufre una colisión, puede perder energía acortando, por lo tanto, aún más la duración de emisión. El ancho de la banda de frecuencia aumenta en el proceso denominándose *ensanchamiento Lorentz.* Aquí nuevamente se encuentra que el espectro posee un perfil de Lorentz. Es más, debido al movimiento térmico al azar de los átomos en un gas, el ancho de banda de la frecuencia se verá aumentado por el efecto Doppler. El *ensanchamiento Doppler,* como es llamado, da como resultado un espectro gaussiano (sección 7.10). La gaussiana disminuye más lentamente en las inmediaciones de ω_0 y luego más rápidamente lejos de ella con respecto al perfil de Lorentz. Estos efectos pueden combinarse matemáticamente para otorgar un solo espectro por medio de la convolución de las funciones gaussiana y lorentziana. En una descarga gaseosa de baja presión, el perfil gaussiano es con mucho el más ancho y, por lo general, predomina.

Autocorrelación y correlación cruzada

Regresemos ahora a la deducción de la fórmula de Parseval y volvamos a seguirla pero esta vez con una ligera modificación. Deseamos calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)f^*(t)\,dt$ utilizando el mismo enfoque al que se recurrió anteriormente. Por lo tanto, si $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)f^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau) \times \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)e^{+i\omega t}\,d\omega\right] dt \qquad (11.80)$$

Cambiando el orden de integración, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\tau)e^{i\omega t}\,dt\right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)\mathcal{F}\{f(t+\tau)\}\,d\omega$$

A fin de calcular la transformada dentro de la última integral, observamos que

$$f(t + \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega(t+\tau)}\, d\omega$$

por un cambio de variable en la ecuación (11.9). Por consiguiente,

$$f(t + \tau) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)e^{-i\omega\tau}\}$$

de manera que, como se vio anteriormente, $\mathcal{F}\{f(t + \tau)\} = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$, la ecuación (11.80) se transforma en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(\omega)F(\omega)e^{-i\omega\tau}\, d\omega \tag{11.81}$$

siendo ambos lados funciones del parámetro τ. El lado izquierdo de esta fórmula se denomina ***autocorrelación*** de $f(t)$ indicándose por

$$c_{ff}(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau)f^*(t)\, dt \tag{11.82}$$

que a menudo se escribe simbólicamente como $f(t) \odot f^*(t)$. Si tomamos la transformada de ambos lados, la ecuación (11.81) es entonces

$$\mathcal{F}\{c_{ff}(\tau)\} = |F(\omega)|^2 \tag{11.83}$$

Se trata de una forma del *teorema de Wiener-Khintchine* que permite definir el espectro por medio de la autocorrelación de la función generadora. La definición de $c_{ff}(\tau)$ se aplica cuando la función tiene energía finita. Cuando no la tiene, las cosas tendrán que cambiarse ligeramente. La integral puede entonces ser restablecida como

$$c_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t - \tau)\, dt \tag{11.84}$$

por un simple cambio de variable ($t + \tau$ a t). De manera parecida, la **correlación cruzada** de las funciones $f(t)$ y $h(t)$ está definidas como

$$c_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)h(t + \tau)\, dt \tag{11.85}$$

El análisis de la correlación es un instrumento esencial para comparar dos señales a fin de determinar el nivel de similitud entre ellas. En la autocorrelación, la función original se desplaza en el tiempo en una cantidad τ, se forma el producto de las versiones desplazadas y no desplazadas, calculándose el área debajo de este producto (que corresponde al nivel de superposición) por medio de la integral. La función de autocorrelación, $c_{ff}(\tau)$, proporciona el resultado que se obtendrá en este proceso para todos los valores de τ. Una de las razones por las que se lleva a cabo dicha operación es, por ejemplo, la extracción de una señal del ruido de fondo al azar.

Para ver como esto ocurre paso a paso, tomemos la autocorrelación de una función simple, como A sen $(\omega t + \varepsilon)$, que se muestra en la figura 11.37. En cada parte del diagrama, la función se desplaza en una cantidad τ, se forma el producto $f(t) \cdot f(t + \tau)$, calculándose sucesivamente el área debajo de aquella función de producto, dibujándose en la parte *(e)*. Obsérvese que el proceso no toma en consideración el valor de ε. El resultado final es $c_{ff}(\tau) = \frac{1}{2}A^2 \cos \omega\tau$, donde esta función se desarrolla a través de un ciclo mientras que τ pasa a través de 2π de manera que tenga la misma frecuencia que $f(t)$. Por consiguiente, si dispusiéramos de un proceso para generar la autocorrelación, reconstruiríamos tanto la amplitud original A como la frecuencia angular ω.

Suponiendo que las funciones fueran reales, podemos volver a escribir $c_{fh}(\tau)$ como

$$c_{fh}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t + \tau)\, dt \tag{11.86}$$

la cual es obviamente similar a la expresión para la convolución de $f(t)$ y $h(t)$. La ecuación (11.86) se escribe de forma simbólica como $c_{fh}(\tau) = f(t) \odot h(t)$. Efectivamente, si $f(t)$ o $h(t)$ es par, entonces $f(t) \circledast h(t) = f(t) \odot h(t)$ como se verá dentro de poco con un ejemplo. Recordemos que la convolución da la vuelta a una de las funciones, sumando sucesivamente el área superpuesta (figura 11.21), es decir, el área bajo la curva de producto. Por el contrario, la correlación suma la superposición sin voltear la función, por lo tanto si la función es par, $f(t) = f(-t)$, no se cambia volteándola (o reflejándola en el eje de simetría) y los dos integrandos son idénticos. Para ello, una de las dos funciones debe ser par, puesto que $f(t) \circledast h(t) = h(t) \circledast f(t)$. La autocorrelación de un pulso cuadrado es, por lo tanto, igual a la convolución del pulso consigo mismo, lo cual da como resultado una señal triangular como en la figura 11.24. A esta misma conclusión se llega de la ecuación (11.83) y de

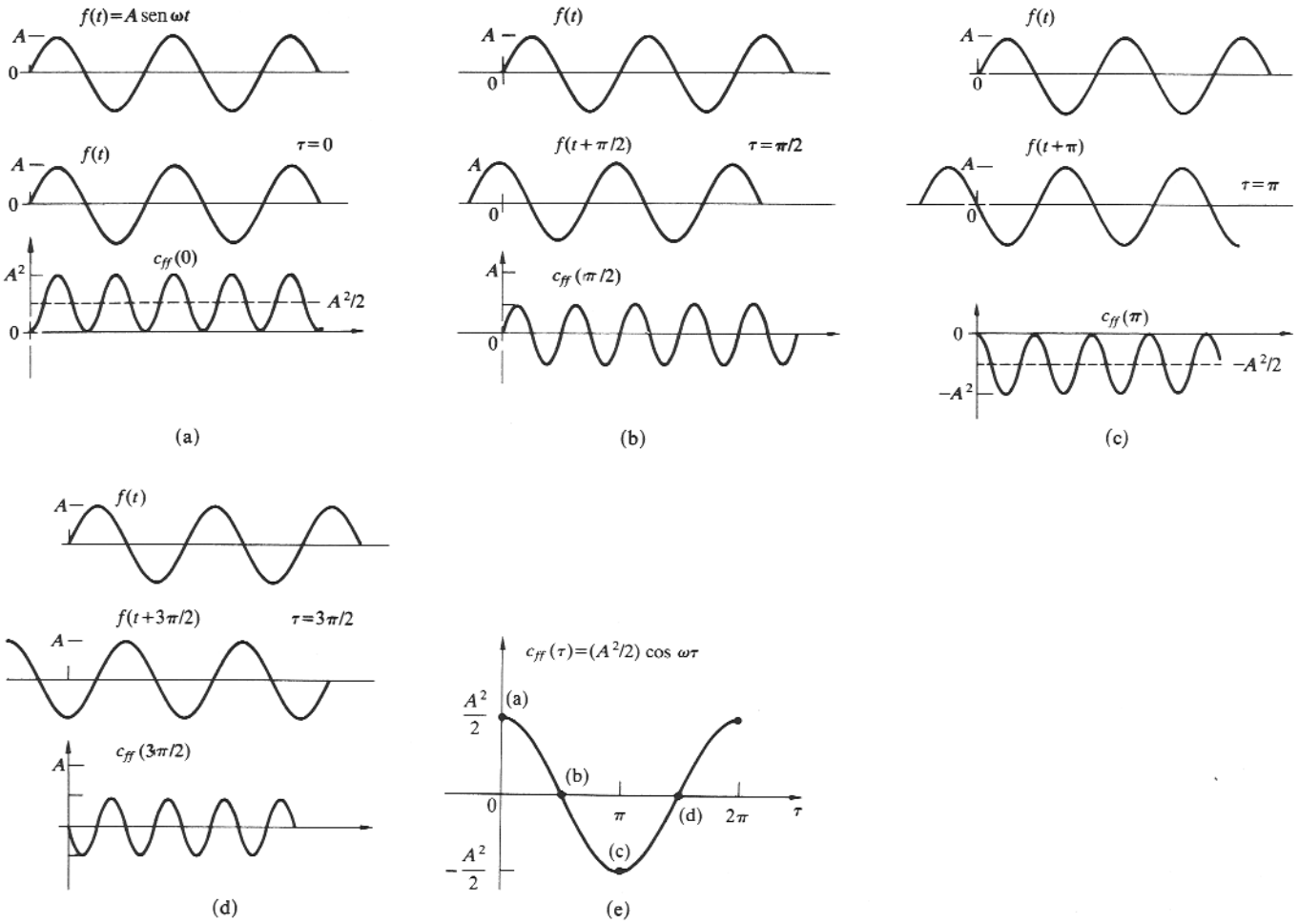


FIGURA 11.37 Autocorrelación de una función sinusoidal.

la figura 11.26. La transformada de un pulso cuadrado es una función sinc tal que el espectro energético varía como $\text{sinc}^2 u$. La transformada inversa de $|F(\omega)|^2$ es decir, $\mathcal{F}^{-1}\{\text{sinc}^2 u\}$, es $c_{ff}(\tau)$ que, como hemos visto, es de nuevo un pulso triangular (figura 11.38).

Es posible que una función tenga energía infinita [ecuación (11.76)] en una integración que oscila entre $-\infty$ y $+\infty$ y, a pesar de ello, sigue teniendo una *potencia promedio* finita

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 \, dt$$

Por consiguiente, definiremos una correlación que está dividida por el intervalo de integración:

$$C_{fh}(\tau) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)h(t+\tau)\, dt \qquad (11.87)$$

Por ejemplo, si $f(t) = A$ (es decir, una constante), su autocorrelación

$$C_{ff}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} (A)(A)\, dt = A^2$$

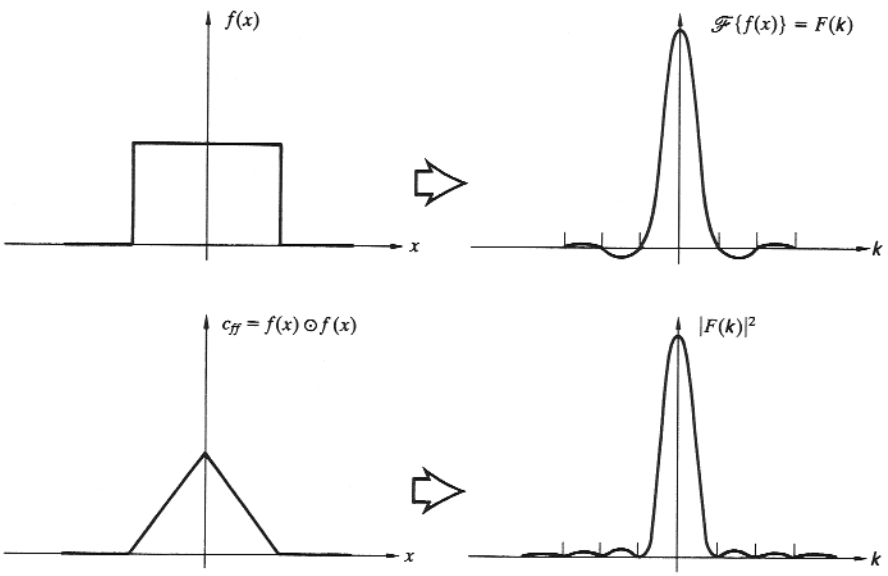


FIGURA 11.38 El cuadrado de la transformada de Fourier del pulso rectangular $f(x)$ (es decir, $|F(k)|^2$) equivale a la transformada de Fourier de la autocorrelación de $f(x)$.

y el espectro energético, que es la transformada de la autocorrelación, será igual a

$$\mathcal{F}\{C_{ff}(\tau)\} = A^2 2\pi\delta(\omega)$$

un impulso en el origen ($\omega = 0$) que a veces se denomina término *cc*. Obsérvese que $C_{fh}(\tau)$ puede considerarse como el promedio temporal de dos funciones, una de las cuales se desplaza en un intervalo τ. En el capítulo siguiente, las expresiones de la forma $\langle f^*(t)h(t + \tau)\rangle$ surgen como funciones de coherencia relacionando campos eléctricos. También son muy útiles en el análisis de problemas de ruido, por ejemplo, el ruido del grano de una película.

Podemos obviamente reconstruir una función a partir de su transformada pero, una vez que la transformada se ha elevado al cuadrado, como en la ecuación (11.83), perdemos información sobre el signo de las contribuciones de frecuencia, es decir, sus fases relativas. De la misma manera, la autocorrelación de una función no contiene información de la fase y no es única. Para que esto se pueda ver más claramente, imaginemos que tenemos un número de funciones armónicas de diferente amplitud y frecuencia. Si sus fases relativas son alteradas, la función resultante cambia, como lo hace su transformada, pero en todos los casos la cantidad de energía disponible para cualquier frecuencia debe ser constante. Por lo tanto, cualquiera que sea la forma del perfil resultante, su autocorrelación no se altera. Queda por demostrarse analíticamente, a modo de problema, que cuando $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varepsilon)$, $C_{ff}(\tau) = (A^2/2)\cos\omega\tau$, que confirma la pérdida de información sobre la fase.

En la figura 11.39 se muestra un medio para correlacionar ópticamente dos funciones espaciales de dos dimensiones. Cada una de estas señales está representada como una variación de punto a punto en la propiedad de transmisión de la irradiancia de una transparencia fotográfica (T_1 y T_2). Para señales relativamente simples, podrían utilizarse pantallas opacas con aberturas oportunas en lugar de las transparencias (por ejemplo, para pulsos cuadrados) [6]. La irradiancia en cualquier punto P sobre la imagen se debe al haz de rayos paralelos enfocados que ha atravesado ambas transparencias. Las coordenadas de P, $(\theta f, \varphi f)$, se fijan por la orientación del haz de rayos, es decir, los ángulos θ y φ. Si las transparencias son idénticas, un rayo que atraviesa cualquier punto (x, y) en la primera película con una transmitancia $g(x, y)$ pasará a través de un punto correspondiente $(x + X, y + Y)$ en la segunda película cuya transmitancia es $g(x + X, y + Y)$. Los desplazamientos de las coordenadas son proporcionados por $X = \ell\theta$ y $Y = \ell\varphi$ donde ℓ representa la separación entre las transparencias. La

[6] Véase L. S. G. Kovasznay y A. Arman, *Rev. Sci. Instr.* **28**, 793 (1958) y D. McLachlan, Ir., *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 454 (1962).

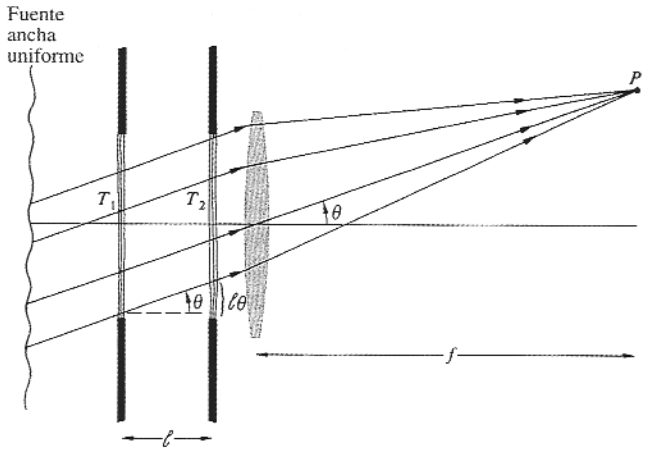


FIGURA 11.39 Correlación óptica de dos funciones.

irradiancia en P es por lo tanto proporcional a la autocorrelación de $g(x, y)$, es decir

$$c_{ff}(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int g(x,y)g(x + X, y + Z)\, dx\, dy \tag{11.88}$$

y la distribución de densidad de flujo total del patrón de denomina *correlograma*. Si las transparencias son diferentes, la imagen es por supuesto representativa de la correlación cruzada de las funciones. De manera parecida, si una de las transparencias se gira en unos 180° con respecto a la otra, puede obtenerse la convolución (véase figura 11.25).

Antes de continuar, asegurémonos que realmente tenemos un buen sentido físico de la operación llevada a cabo por las funciones de correlación. Por consiguiente, supongamos que tenemos una señal de ruido al azar (por ejemplo, una irradiancia fluctuante en un punto del espacio, un voltaje o campo eléctrico que varía con el tiempo) como en la figura 11.40*a*. En efecto, la autocorrelación de $f(t)$ lleva a cabo una comparación entre la función y su valor en otro tiempo, $f(t + \tau)$. Por ejemplo, con $\tau = 0$ la integral se extiende a lo largo de la señal en tiempo sumando y promediando el producto de $f(t)$ y $f(t + \tau)$; en este caso es simplemente $f^2(t)$. Puesto que para cada valor de t, $f^2(t)$ es positivo, $C_{ff}(0)$ será un número relativamente grande. Por otra parte, cuando el ruido se compara con sí mismo, desplazado en una cantidad $+\tau_1$, $C_{ff}(\tau_1)$ se reducirá un poco. Habrá puntos en el tiempo donde $f(t)f(t + \tau_1)$ es positivo y otros puntos donde será negativo, de tal forma que el valor de la integral disminuirá [figura 11.40*b*]. Dicho de otra forma, desplazando la señal con respecto a sí misma, hemos reducido la semejanza de punto a punto que antes ($\tau = 0$) se producía en cualquier instante. Al aumentar dicho desplazamiento τ, la pequeña correlación eventualmente existente desaparece rápidamente, como se describe en la figura 11.40*c*. Podemos suponer del hecho que la autocorrelación y el espectro energético constituyen un par de transformadas de Fourier [ecuación (11.83)] que cuanto más amplio sea el ancho de la banda de frecuencia del ruido, más estrecha será la autocorrelación. Por lo tanto, para un ruido con ancho de banda grande, incluso un ligero desplazamiento reducirá notablemente cualquier semejanza entre $f(t)$ y $f(t + \tau)$. Además, si la señal consta de una distribución al azar de pulsos rectangulares, podemos ver intuitivamente que la semejanza, a la que hacíamos referencia anteriormente, per-

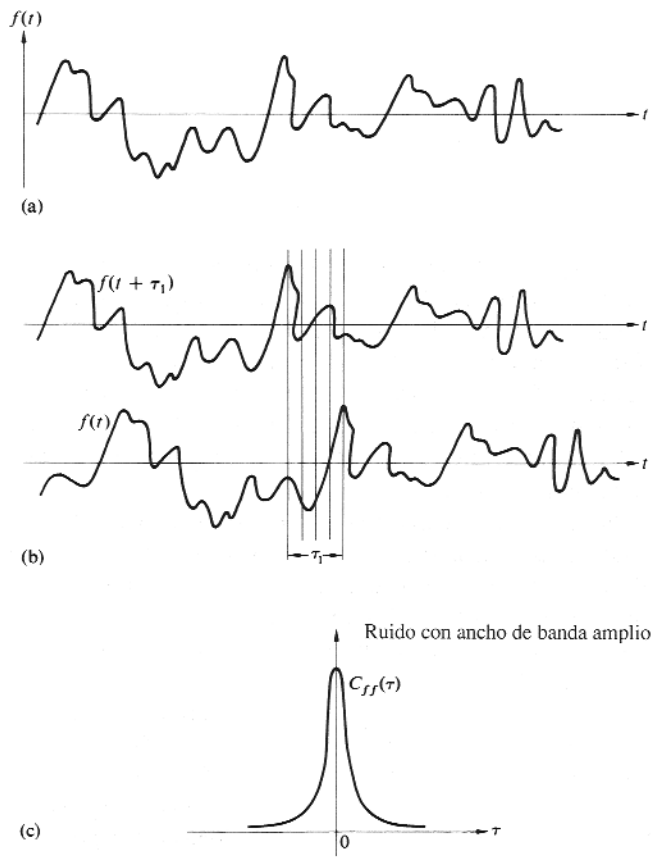


FIGURA 11.40 Señal $f(t)$ y su autocorrelación.

siste por un tiempo relacionado con el ancho de los pulsos. Cuanto más anchos (en el tiempo) sean los pulsos, más lentamente disminuirá la correlación según aumenta τ. Pero esto equivale a decir que al reducir el ancho de banda de la señal, $C_{ff}(\tau)$ se ensancha. Todo esto concuerda con nuestra observación anterior según la cual la autocorrelación desecha cualquier información sobre la fase, que en este caso correspondería a la localización en el tiempo de los pulsos al azar. Claramente, $C_{ff}(\tau)$ no debe verse afectada por la posición de los pulsos a lo largo de t.

De una forma muy parecida, la correlación cruzada es una medición de la semejanza entre dos formas de onda diferentes, $f(t)$ y $h(t)$, como función del desplazamiento temporal relativo τ. A diferencia de la autocorrelación, $\tau = 0$ no tiene nada especial ahora. Una vez más, para cada valor de τ promediamos el producto $f(t)h(t + \tau)$ para obtener $C_{fh}(\tau)$ por medio de la ecuación (11.87). Para las funciones que se recogen en la figura 11.41, $C_{fh}(\tau)$ tendría un máximo positivo en $\tau = \tau_1$.

Desde los años sesenta, se ha venido haciendo un gran esfuerzo para desarrollar procesadores ópticos capaces de

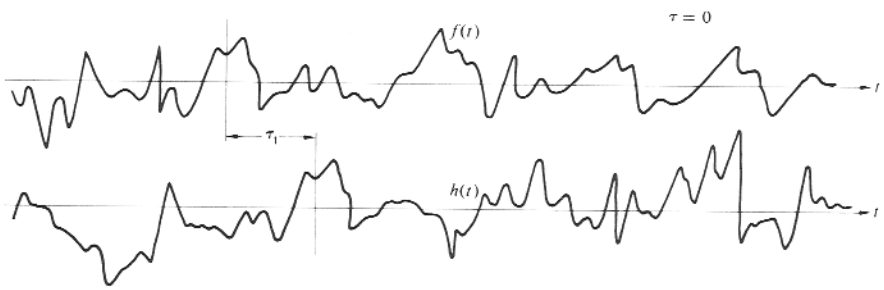
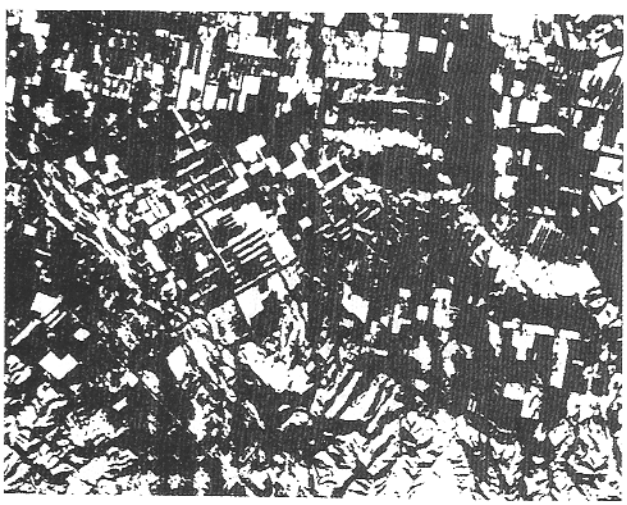
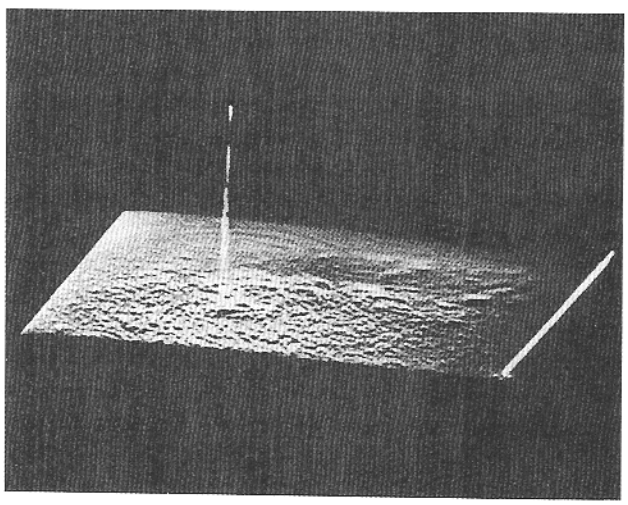


FIGURA 11.41 La correlación cruzada de $f(t)$ y $h(t)$.



(a)

(b)



(c)

FIGURA 11.42 Ejemplo de reconocimiento de distribución óptica. *(a)* Señal de entrada, *(b)* datos de referencia, *(c)* figura de correlación. (Reimpresión autorizada de la edición de noviembre de 1980 de *Electro-Optical Systems Design*. David Casasent.)

analizar rápidamente datos pictóricos, cuyos usos potenciales van desde el análisis comparativo de huellas dactilares hasta el barrido de documentos para palabras o frases; desde seleccionar fotografías para reconocimiento aéreo hasta la creación de sistemas de guía topográficos para misiles. En la figura 11.42 se recoge un ejemplo de esta clase de *reconocimiento por patrón óptico*, que se realiza gracias a técnicas de correlación. La señal de entrada $f(x, y)$ ilustrada en la fotografía *(a)* es una vista amplia de algunas regiones en las que hay que buscar un grupo específico de estructuras [fotografía *(b)*] aisladas como señal de referencia $h(x, y)$. Naturalmente, el pequeño fotograma se puede analizar directamente con los ojos, entonces para que el proceso sea más real, imaginemos que los datos de entrada sean unos metros de película de reconocimiento. El resultado de la correlación óptica de estas dos señales se muestra en la fotografía *(c)* donde se puede ver inmediatamente del máximo de correlación (es decir, el pico de luz) que el grupo de estructuras que se buscaba está efectivamente ahí en la fotografía de entrada, indicándose su localización por el pico.

11.3.5 Funciones de transferencia

Presentación de los conceptos

Hasta hace poco, el método tradicional para determinar la calidad de un elemento óptico o de un sistema de elementos era calcular su límite de resolución. Se suponía que cuanto mayor fuera la resolución mejor sería el sistema. En el espíritu de este método, uno puede probar un sistema óptico en un blanco de resolución consistente, por ejemplo, en una serie de barras rectangulares paralelas blancas y negras alternadas. Ya hemos visto que un punto objeto se representa con una mancha de luz descrita por la función de ensanchamiento de punto $s(Y, Z)$ como en la figura 11.18. Bajo iluminación incoherente, estas distribuciones elementales de densidad de flujo se superponen y se suman linealmente para crear la imagen final. La réplica unidimensional es la *función de extensión de línea* $s(Z)$ que corresponde a la distribución de la densidad de flujo a lo largo de la imagen de una fuente lineal geométrica cuyo ancho es infinitesimal (figura 11.43). Puesto que incluso un sistema idealmente perfecto está limitado por efectos de la difracción, la imagen de una carta de resolución (figura 11.44) será algo borrosa (véase figura 11.20). Por lo tanto, según se vaya

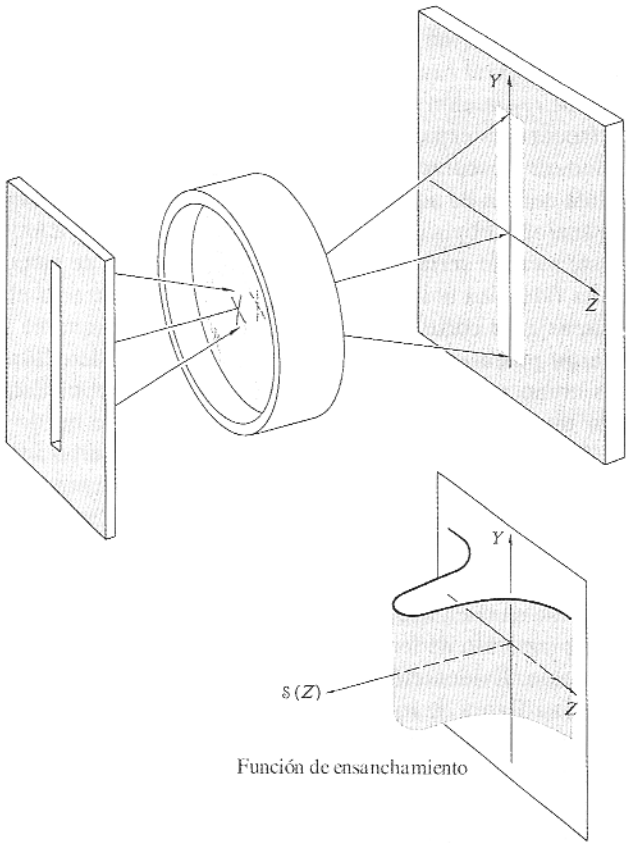


FIGURA 11.43 Función de ensanchamiento de línea.

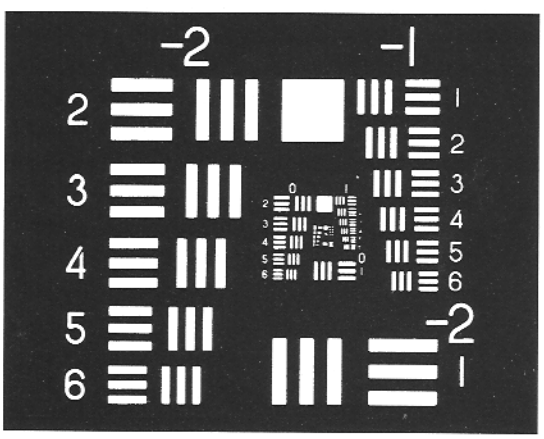


FIGURA 11.44 Carta de resolución de un blanco de barras.

reduciendo el ancho de las barras en la carta, se alcanzará un límite donde no se distinguirá la estructura de líneas finas (análogo al *rayado de Ronchi*), siendo entonces éste el límite de resolución del sistema. Podemos imaginarlo como una frecuencia espacial de corte donde cada par de barras luminosas y oscuras constituyen un ciclo en el objeto (una medida común de aquélla son los *pares de líneas por mm).* Una analogía obvia que pone de manifiesto las limitaciones de este método sería la evaluación de un sistema de sonido de alta fidelidad únicamente sobre las bases de su más alta frecuencia de corte. Las limitaciones de este esquema se hicieron patentes a raíz de la introducción de detectores tales como plumbicon, o el orthicon y el vidicon. Estos tubos tienen un barrido de rastreo relativamente burdo el cual fija el límite de resolución del sistema lente-tubo a frecuencias espaciales bastante bajas. Por consiguiente, sería razonable diseñar la óptica precediendo al detector de tal modo que ofreciera el mayor contraste sobre esta gama de frecuencias limitadas. Sería claramente innecesario y tal vez, como se verá, iría en su detrimento, escoger un sistema de acoplamiento de lentes únicamente por su alto límite de resolución. Evidentemente sería de más ayuda el disponer de alguna figura de mérito aplicable al rango completo de frecuencia de operación.

Ya hemos representado al objeto como una colección de fuentes puntuales, cada una de las cuales tiene como imagen la función de ensanchamiento de punto dada por el sistema óptico, siendo luego esa mancha de luz convolucionada a la imagen. Ahora, vamos a abordar el problema del análisis de la imagen desde una perspectiva diferente si bien relacionada. Consideremos que el objeto sea la fuente de una onda luminosa de entrada que consta, ella misma, de ondas planas viajando en direcciones específicas que, a través de las ecuaciones (11.64) y (11.65), se corresponden con los valores específicos de la frecuencia espacial. ¿Cómo puede el sistema modificar la amplitud y la fase de cada onda plana mientras la transfiere del objeto a la imagen?

Un parámetro bastante útil para evaluar el comportamiento de un sistema es el **contraste** o la **modulación**, definido por

$$\text{Modulación} \equiv \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}} \tag{11.89}$$

Para poner un ejemplo simple, supongamos que el dato de entrada sea la distribución de irradiancia cosenoidal que

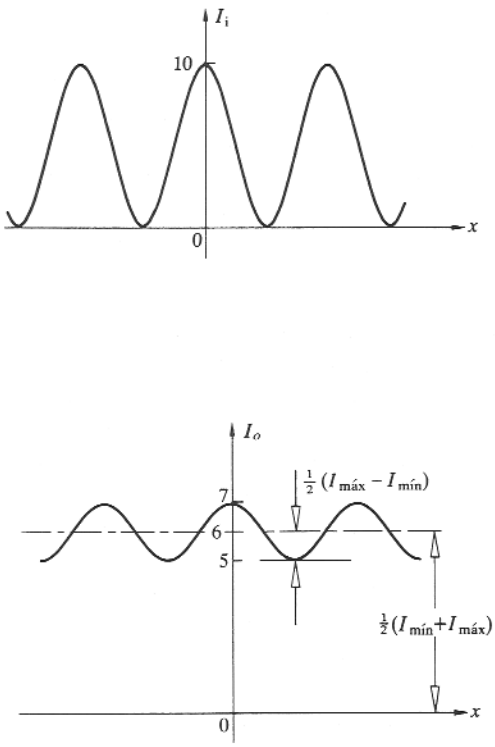


FIGURA 11.45 Irradiancia de entrada y de salida de un sistema.

emerge de una transparencia iluminada de manera incoherente (figura 11.45). Aquí también el resultado de salida es un coseno si bien algo modificado. La modulación que equivale a la cantidad en la que varía la función alrededor del valor medio dividida por ese valor medio, indica la visibilidad de las oscilaciones contra el fondo cc. El valor máximo de la modulación de entrada es de 1,0 mientras que la de salida es sólo de 0,17. Esta no es nada más que la respuesta de nuestro sistema hipotético a una entrada de frecuencia espacial – sería interesante saber lo que hacen estas frecuencias. Además, aquí la modulación de entrada era 1,0, por lo tanto la comparación con la salida fue bastante sencilla. Por lo general, no será de 1,0 por lo tanto definimos *el cociente de modulación imagen con la modulación objeto en todas las frecuencias espaciales como la* **función de transferencia de la modulación**, o FTM.

La figura 11.46 es una gráfica de FTM para dos lentes hipotéticas. El valor de inicio de la frecuencia cero (cc) es 1,0 para ambas, cruzando ambas el eje cero en algún punto donde ya no

pueden resolver los datos a esa *frecuencia de corte*. Si ambas hubieran sido lentes limitadas por difracción, ese corte habría dependido tan sólo de la difracción y, por lo tanto, del tamaño de la abertura. En cualquier caso, supongamos que uno de ellos deba acoplarse a un detector cuya frecuencia de corte se indica en el diagrama. A pesar de que el límite de resolución de la lente 1 es mayor, la lente 2 ciertamente ofrecería un mejor resultado al acoplarse a ese detector particular.

Debe aclararse que una carta de barras cuadradas proporciona una señal de entrada que es una serie de pulsos cuadrados, siendo el contraste de la imagen realmente una superposición de variaciones de contraste debidas a las componentes constitutivas de Fourier. Realmente, uno de los puntos clave en lo sucesivo es que los *elementos ópticos que funcionan como operadores lineales transforman una entrada sinusoidal en una salida sinusoidal no distorsionada.* A pesar de esto, las distribuciones de irradiancia en la entrada y la salida no serán, por lo general, idénticas. Por ejemplo, el aumento del sistema afecta a la frecuencia espacial de la salida (de aquí en adelante, el aumento se tomará igual a uno). La difracción y las aberraciones reducen la amplitud (contraste) de la sinusoide. Finalmente, las aberraciones asimétricas (por ejemplo, coma) y un mal centrado de los elementos producirán un desplazamiento en la posición de la sinusoide de salida correspondiente a la introducción de un desplazamiento de fase. Este último punto, que se analizó en la figura 11.12, puede apreciarse mejor usando un diagrama semejante al de la figura 11.47.

Si la función de ensanchamiento es simétrica, la irradiancia de la imagen será una sinusoide sin desplazamiento, mientras que una función de ensanchamiento asimétrica

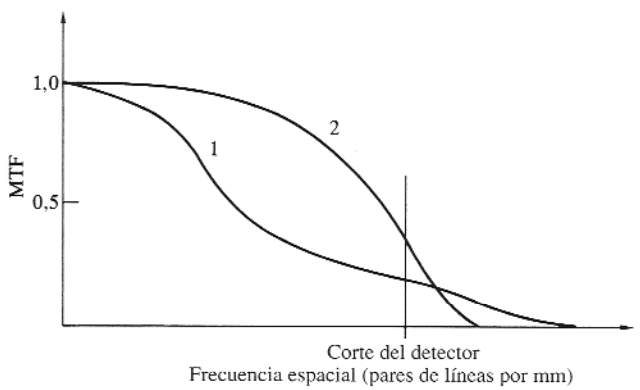


FIGURA 11.46 Modulación frente a frecuencia espacial de dos lentes.

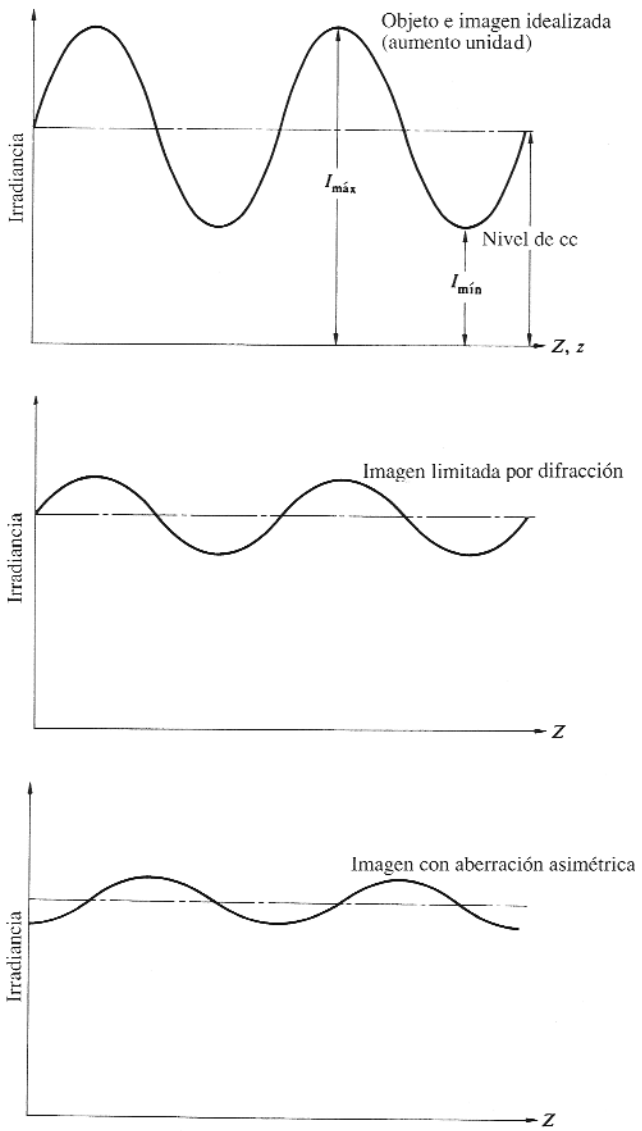


FIGURA 11.47 Entrada armónica y salida resultante.

empujara aparentemente la salida un poco como en la figura 11.48. En cualquier caso, *independientemente de la forma que tenga la función de ensanchamiento, la imagen es armónica si el objeto es armónico.* Por consiguiente, considerando un objeto como si estuviera integrado por componentes de Fourier, la forma en la cual estas componentes armónicas son transformadas por el sistema óptico en las

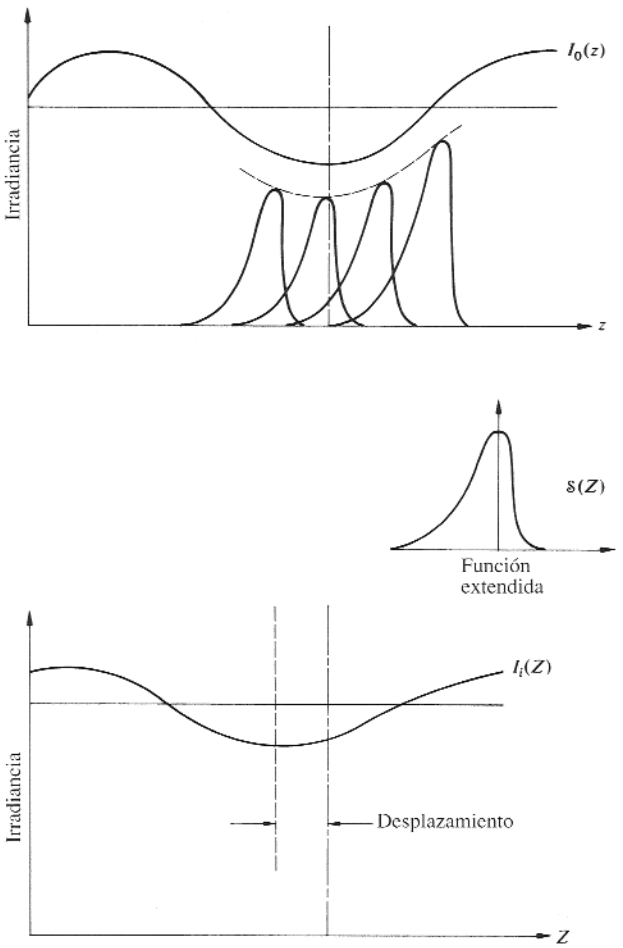


FIGURA 11.48 Entrada armónica y salida con una función asimétrica extendida.

correspondientes componentes armónicas de la imagen representa la esencia del proceso. La función que realiza este servicio se denomina **función de transferencia óptica** o FTO. Se trata de una cantidad compleja dependiente de la frecuencia espacial cuyo módulo es la *función de transferencia de modulación* (FTM) y cuya fase es, naturalmente, la **función de transferencia de fase** (FTF). La primera es una medida de la reducción en contraste del objeto a la imagen en el espectro. La última representa el desplazamiento de fase relativo proporcionado. Los desfases en los sistemas ópticos centrados ocurren únicamente fuera del eje y, a menudo, la FTF es menos interesante que la FTM. A pesar de ello, cada aplicación de la función de transferencia debe estudiarse cuidadosamente; existen situaciones en donde la FTF juega un papel decisivo. En realidad, la FTM se ha convertido en un medio muy usado para especificar el rendimiento de toda clase de elementos, y sistemas que van desde lentes, cintas magnéticas y películas hasta telescopios, la atmósfera y el ojo, entre otros. Sobre todo, tiene la ventaja de que si se conocen las FTM de las componentes independientes individuales de un sistema, la FTM total es simplemente el producto de ellas. Esto no es aplicable a una cascada de lentes, puesto que las aberraciones en una lente pueden ser compensadas con las de otra lente unida a ella no siendo, por lo tanto, independientes. De este modo, si fotografiamos un objeto cuya modulación es 0,3 a 30 ciclos por mm usando una cámara cuya lente, oportunamente ajustada, tiene una FTM de 0,5 a 30 c/mm y una película [7] como Tri-X con una FTM de 0,4 a 30 c/mm, la modulación de la imagen será de $0{,}3 \times 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}06$.

Un análisis más formal

Vimos en la ecuación (11.51) que la imagen (bajo condiciones de invariancia en el espacio e incoherencia) puede expresarse como convolución de la irradiancia del objeto y la función de ensanchamiento de punto, es decir,

$$I_i(Y,Z) = I_0(y,z) \circledast s(y,z) \tag{11.90}$$

El enunciado correspondiente en el dominio de la frecuencia espacial se obtiene por medio de la transformada de Fourier, es decir,

$$\mathcal{F}\{I_i(Y,Z)\} = \mathcal{F}\{I_0(y,z)\} \cdot \mathcal{F}\{s(y,z)\} \tag{11.91}$$

donde se ha utilizado el teorema de la convolución [ecuación (11.53)] que establece que *el espectro de frecuencia de la distribución de irradiancia de la imagen es igual al producto del espectro de frecuencia de la distribución de irradiancia del objeto y la transformada de la función de ensanchamiento* (figu-

[7] Por cierto, toda la idea de tratar una película como si fuera un sistema lineal libre de ruido es algo dudosa. Para más lecturas, véanse J. B. De Velis y G. B. Parrent, Jr., «Transfer Function for Cascaded Optical Systems», *J. Opt. Soc. Am.* **57**, 1486 (1967).

ra 11.49). Por lo tanto, es la multiplicación por $\mathcal{F}\{\mathcal{S}(y,z)\}$ lo que produce la alteración en el espectro de frecuencia del objeto, convirtiéndolo en el espectro de la imagen. Dicho de otra forma, es $\mathcal{F}\{\mathcal{S}(y,z)\}$ la que transfiere, en efecto, el espectro del objeto al espectro de la imagen. Este es precisamente el servicio realizado por la FTO; definiremos por lo tanto la **FTO no normalizada** como

$$\mathcal{T}(k_Y, k_Z) \equiv \mathcal{F}\{\mathcal{S}(y,z)\} \tag{11.92}$$

El módulo de $\mathcal{T}(k_Y, k_Z)$ llevará a cabo un cambio en las amplitudes de las varias componentes de la frecuencia del espectro del objeto mientras que su fase alterará natural y oportunamente la fase de estas componentes para dar como resultado $\mathcal{F}\{I_i(Y,Z)\}$. Téngase en cuenta que en el lado derecho de la ecuación (11.90), la única cantidad dependiente del sistema óptico real es $\mathcal{S}(y,z)$, por lo tanto no es sorprendente que la función de ensanchamiento sea la réplica espacial de la FTO.

Verifiquemos ahora el enunciado hecho anteriormente, según el cual una entrada armónica se transforma en una salida armónica un tanto alterada. Con este fin, supongamos que

$$I_0(z) = 1 + a\cos(k_Z z + \varepsilon) \tag{11.93}$$

donde únicamente por simplicidad, usaremos una distribución unidimensional. El 1 es un fondo de cc que asegura que la irradiancia no adquiere ningún valor negativo no físico. Dado que $f \circledast h = h \circledast f$ aquí sería más conveniente utilizar

$$I_i(Z) = \mathcal{S}(Z) \circledast I_0(z)$$

y por lo tanto

$$I_i(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{1 + a\cos[k_Z(Z - z) + \varepsilon]\}\mathcal{S}(z)\,dz$$

Desarrollando el coseno obtenemos

$$I_i(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)dz + a\cos(k_Z Z + \varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} \cos k_Z z\mathcal{S}(z)\,dz$$

$$+ a\,\text{sen}\,(k_Z Z + \varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen}\,k_Z z\mathcal{S}(z)\,dz$$

Refiriéndonos a la ecuación (7.57), reconocemos a la segunda y tercera integral como las transformadas de Fourier del cose-

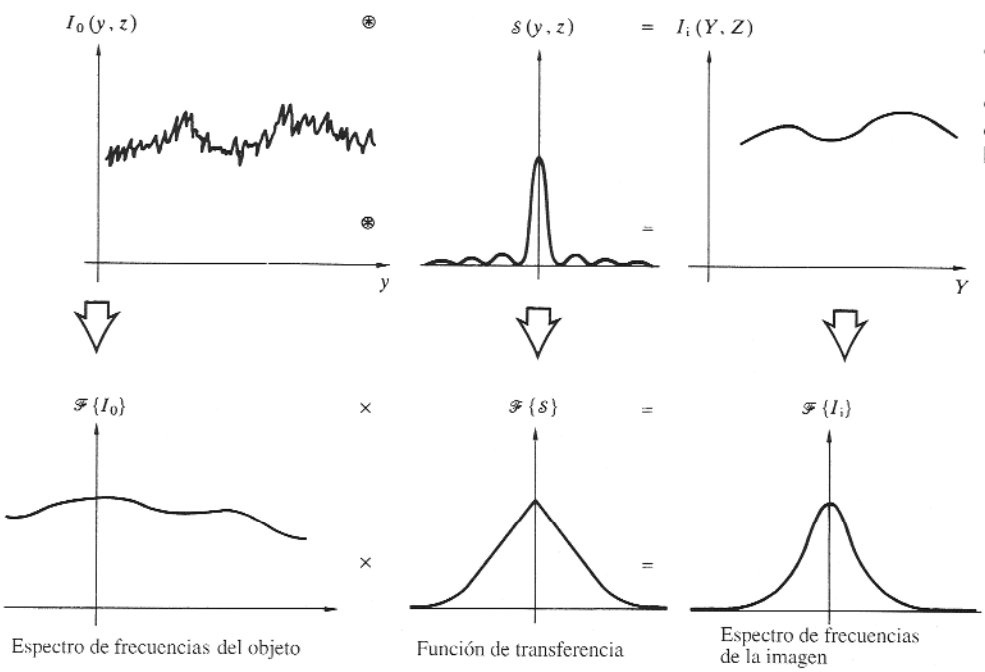


FIGURA 11.49 La relación entre los espectros objeto e imagen a través de FTO y las irradiancias del objeto y de ensanchamiento de la imagen a través de la función de ensanchamiento – todo bajo iluminación incoherente.

no y seno de $\mathcal{S}(z)$, respectivamente, es decir, $\mathcal{F}_c\{\mathcal{S}(z)\}$ y $\mathcal{F}_s\{\mathcal{S}(z)\}$. Por consiguiente,

$$I_i(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)dz + \mathcal{F}_c\{\mathcal{S}(z)\}a\cos(k_Z Z + \varepsilon) + \mathcal{F}_s\{\mathcal{S}(z)\}a \operatorname{sen}(k_Z Z + \varepsilon) \tag{11.94}$$

Recordemos que la transformada compleja con la que ya nos hemos acostumbrado tanto a trabajar, se definió de tal forma que

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = \mathcal{F}_c\{f(z)\} + i\mathcal{F}_s\{f(z)\} \tag{11.95}$$

o
$$F(k_Z) = A(k_Z) + iB(k_Z) \tag{11.7}$$

Además,

$$\mathcal{F}\{f(z)\} = |F(k_Z)|e^{i\varphi(k_Z)} = |F(k_Z)|[\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi]$$

donde
$$|F(k_Z)| = [A^2(k_Z) + B^2(k_Z)]^{1/2} \tag{11.96}$$

y
$$\varphi(k) = \tan^{-1}\frac{B(k_Z)}{A(k_Z)} \tag{11.97}$$

Exactamente de la misma forma, la aplicamos a FTO, escribiéndola como

$$\mathcal{F}\{\mathcal{S}(z)\} \equiv \mathcal{T}(k_Z) = \mathcal{M}(k_Z)e^{i\Phi(k_Z)} \tag{11.98}$$

donde $\mathcal{M}(k_Z)$ y $\Phi(k_Z)$ son las FTM y FTF no normalizadas, respectivamente. Se planteará como problema demostrar que la ecuación (11.94) puede reescribirse como

$$I_i(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)\,dz + a\mathcal{M}(k_Z)\cos[k_Z Z + \varepsilon - \Phi(k_Z)] \tag{11.99}$$

Obsérvese que se trata de una función con la misma forma que la señal de entrada [ecuación (11.93)], $I_0(z)$, que es precisamente lo que decidimos determinar. Si la función de ensanchamiento de línea es simétrica (es decir, par), $\mathcal{F}_s\{\mathcal{S}(z)\} = 0$, $\mathcal{M}(k_Z) = \mathcal{F}_c\{\mathcal{S}(z)\}$, y $\Phi(k_Z) = 0$; no hay desplazamiento de fase como se señaló en la sección anterior. Para una función de ensanchamiento asimétrica (impar) $\mathcal{F}_s\{\mathcal{S}(z)\}$ es no nulo como lo es la FTF.

Ahora es práctica común definir una serie de *funciones de transferencia normalizadas* dividiendo $\mathcal{T}(k_Z)$ por su valor de frecuencia espacial igual a cero, es decir $\mathcal{T}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)\,dz$. La función de ensanchamiento normalizada se convierte en

$$\mathcal{S}_n(z) = \frac{\mathcal{S}(z)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)\,dz} \tag{11.100}$$

mientras que la **FTO normalizada** es

$$T(k_Z) \equiv \frac{\mathcal{F}\{\mathcal{S}(z)\}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}(z)\,dz} = \mathcal{F}\{\mathcal{S}_n(z)\} \tag{11.101}$$

o en dos dimensiones

$$T(k_Y, k_Z) = M(k_Y, k_Z)e^{i\Phi(k_Y, k_Z)} \tag{11.102}$$

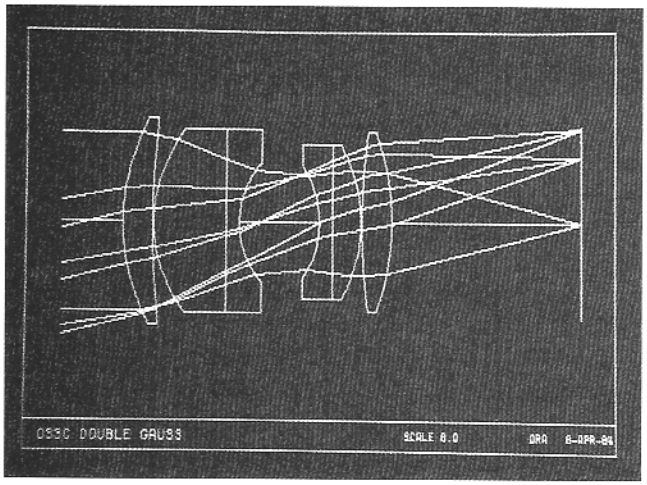
donde $M(k_Y, k_Z) \equiv \mathcal{M}(k_Y, k_Z)/\mathcal{T}(0, 0)$. Por lo tanto, $I_i(Z)$ en la ecuación (11.99) sería entonces proporcional a

$$1 + aM(k_Z)\cos[k_Z Z + \varepsilon - \Phi(k_Z)]$$

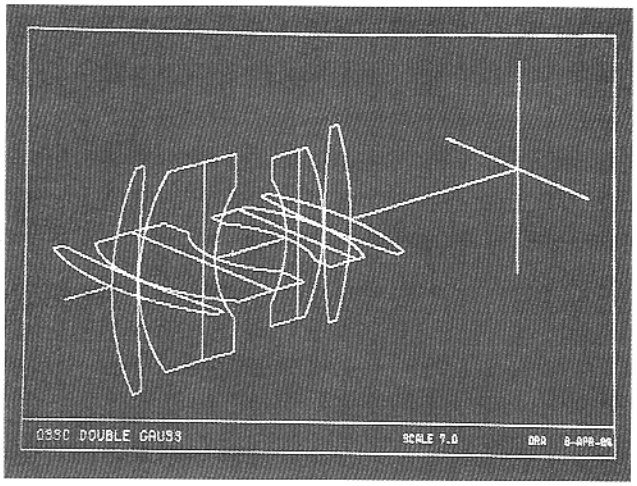
La modulación imagen [ecuación (11.89)] se convierte en $aM(k_z)$, la modulación objeto [ecuación (11.93)] es a siendo el cociente, como se esperaba, la FTM = $M(k_z)$ normalizada.

Este análisis sólo sirve como introducción estando más encaminado a proporcionar una base sólida que una estructura completa. Quedan por explorar muchos otros aspectos tales como la relación entre la autocorrelación de la función de pupila y la FTO y, de allí, los medios para calcular y medir las funciones de transferencia (figura 11.50), pero, para esto, remitimos al lector a la literatura [8].

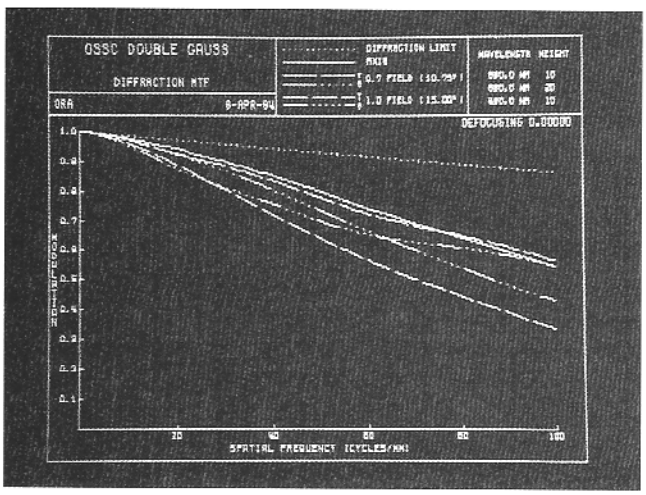
[8] Véase la serie de artículos «The Evolution of the Transfer Function», por F. Abbott a partir de marzo de 1970 en *Optical Spectra;* los artículos «Physical Optics Notebook», por G. B. Parrent, Jr., y B. J. Thompson a partir de diciembre de 1964 en el *S. P. I. E. Journal,* Vol. 3; o «Image Structure and Transfer», por K. Sayanagi, 1967, disponible en el Instituto de Óptica de la Universidad de Rochester. Merece la pena consultar varios libros para propósitos prácticos, por ejemplo, *Modern Optics* por E. Brown, *Modern Optical Engineering* por W. Smith y *Applied Optics* por L. Levi. En todos ellos, tengan cuidado con la convención de signos de las transformadas.



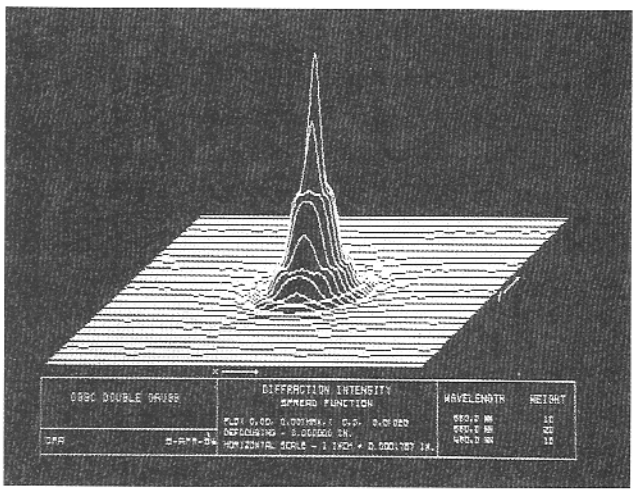
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 11.50 Ejemplo del tipo de información sobre diseño de lentes de la cual puede disponerse a través de las modernas técnicas informáticas. (Fotos cedidas por Optical Research Associates.)

PROBLEMAS

11.1 Determine las transformadas de Fourier de la función

$$E(x) = \begin{cases} E_0 \operatorname{sen} k_p x & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Haga un dibujo de $\mathcal{F}\{E(x)\}$. Analice su relación con la figura 11.11

11.2* Determine la transformada de Fourier de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^2 k_p x & |x| < L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

Haga un dibujo de ella.

11.3 Determine la transformada de Fourier de

$$f(t) = \begin{cases} \cos^2 \omega_p t & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$

Haga un dibujo de $F(\omega)$, después dibuje su forma límite cuando $T \to \pm\infty$.

11.4* Demuestre que $\mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(k)$.

11.5* Determine la transformada de Fourier de la función $f(x) = A \cos k_0 x$.

11.6 Puesto que $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$ y $\mathcal{F}\{h(x)\} = H(k)$, si a y b son constantes, determine $\mathcal{F}\{af(x) + bh(x)\}$.

11.7* En la figura P.11.7 se muestran dos funciones periódicas, $f(x)$ y $h(x)$ que deben sumarse para dar como resultado $g(x)$. Dibuje $g(x)$; luego dibuje unos diagramas de los espectros de frecuencia imaginario y real así como de los espectros de amplitud para cada una de las tres funciones.

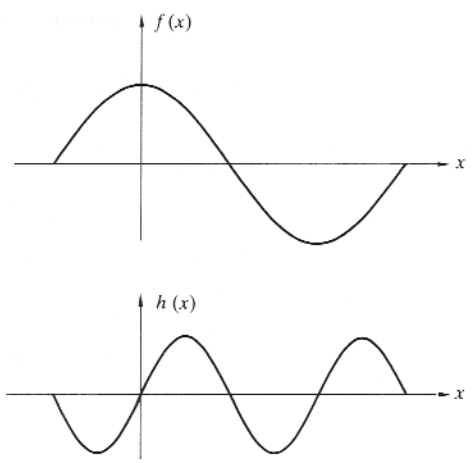


FIGURA P.11.7

11.8 Calcule la transformada de Fourier del pulso triangular que se muestra en la figura P.11.8. Haga un dibujo de su respuesta, indicando todos los valores oportunos en la curva.

11.9* Puesto que $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(k)$, introduzca un factor de escala constante $1/a$ y determine la transformada de Fourier de $f(x/a)$. Demuestre que la transformada de $f(-x)$ es $F(-k)$.

11.10* Demuestre que la transformada de Fourier de la transformada, $\mathcal{F}\{f(x)\}$, equivale a $2\pi f(-x)$ y que ésta no es la transformada inversa de la transformada, que equivale a $f(x)$. Este problema fue planteado por D. Chapman mientras estudiaba en la Universidad de Ottawa.

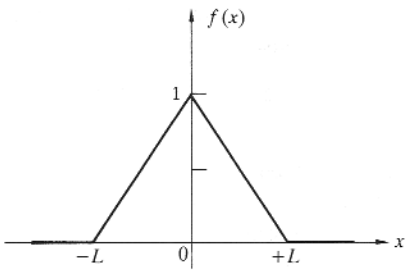


FIGURA P.11.8

11.11* A menudo, la función rectangular se define como

$$\text{rect}\left|\frac{x - x_0}{a}\right| = \begin{cases} 0, & |(x - x_0)/a| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |(x - x_0)/a| = \frac{1}{2} \\ 1, & |(x - x_0)/a| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

donde se establece igual a $\frac{1}{2}$ en las discontinuidades (figura P.11.11). Determine la transformada de Fourier de

$$f(x) = \text{rect}\left|\frac{x - x_0}{a}\right|$$

Obsérvese que se trata simplemente de un pulso rectangular, como aquel de la figura 11.1*b*, que se desplaza una distancia x_0 desde su origen.

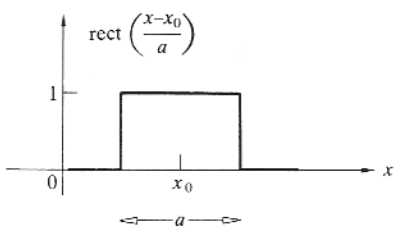


FIGURA P.11.11

11.12* Recordando los dos últimos problemas, demuestre que $\mathcal{F}\{(1/2\pi)\,\text{sinc}\,(\frac{1}{2}x)\} = \text{rect}(k)$ sabiendo que $\mathcal{F}\{\text{rect}(x)\} = \text{sinc}\,(\frac{1}{2}k)$, dicho de otra forma; la ecuación (7.58) con $L = a$ donde $a = 1$.

11.13* Utilizando la ecuación (11.38), demuestre que $\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = f(x)$.

11.14* Dada $\mathcal{F}\{f(x)\}$, demuestre que $\mathcal{F}\{f(x - x_0)\}$ difiere de ello tan sólo por un factor de fase lineal.

11.15 Demuestre que $f \circledast h = h \circledast f$ directamente. Ahora hágalo usando el teorema de convolución.

11.16* Suponga que tenemos dos funciones, $f(x, y)$ y $h(x, y)$, donde ambas tienen un valor de 1 en una región cuadrada en el plano xy siendo cero en cualquier otro lugar (figura P.11.16). Si $g(X, Y)$ es su convolución, haga un dibujo de $g(X, 0)$.

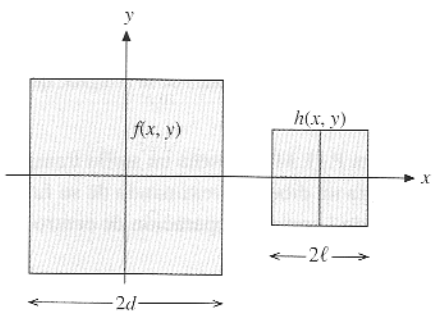


FIGURA P.11.16

11.17 Refiriéndonos al problema anterior, justifique el hecho de que la convolución es cero para $|X| \geq d + \ell$ donde ℓ se considera como una función de ensanchamiento.

11.18* Use el método ilustrado en la figura 11.23 para hacer la convolución de las dos funciones descritas en la figura P. 11.18.

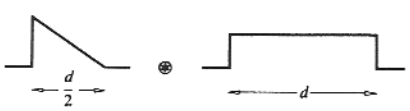


FIGURA P.11.18

11.19 Puesto que $f(x) \circledast h(x) = g(X)$, después de desplazar una de las funciones en una cantidad x_0, obtenemos $f(x - x_0) \circledast h(x) = g(X - x_0)$.

11.20* Demuestre analíticamente que la convolución de cualquier función $f(x)$ con una función delta, $\delta(x)$, produce la función original $f(X)$. Puede aprovechar el hecho de que $\delta(x)$ es par.

11.21 Demuestre que $\delta(x - x_0) \circledast f(x) = f(X - x_0)$ y analice el significado del resultado. Haga un dibujo de dos funciones oportunas, llevando a cabo una convolución de las mismas. Asegúrese de utilizar una $f(x)$ asimétrica.

11.22* Demuestre que $\mathcal{F}\{f(x) \cos k_0 x\} = [F(k - k_0) + F(k + k_0)]/2$ y que $\mathcal{F}\{f(x) \operatorname{sen} k_0 x\} = [F(k - k_0) - F(k + k_0)]/2i$.

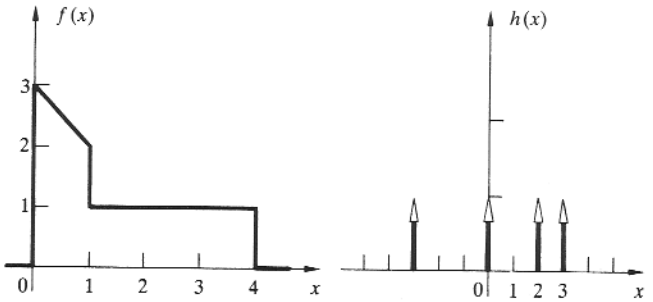


FIGURA P.11.23

11.23* La figura P.11.23 muestra dos funciones. Realice una convolución gráfica, dibujando el resultado.

11.24 Dada la función

$$f(x) = \text{rect}\left|\frac{x - a}{a}\right| + \text{rect}\left|\frac{x + a}{a}\right|$$

determine su transformada de Fourier. (Véase problema 11.11.)

11.25 Realice una convolución de la función $f(x) = \delta(x + 3) + \delta(x - 2) + \delta(x - 5)$ con la función arbitraria $h(x)$.

11.26* Haga un bosquejo de la función resultante que surge de la convolución de las dos funciones descritas en la figura P.11.26.

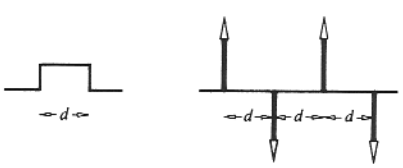


FIGURA P.11.26

11.27* En la figura P.11.27 se representa una función *rect* (según la definición anterior) y una función periódica *peine*. Realice una convolución de las dos para conseguir $g(x)$. Ahora dibuje la transformada de cada una de estas funciones frente a la frecuencia espacial $k/2\pi = 1/\lambda$. Compruebe sus resultados con el teorema de la convolución. Indique todos los puntos oportunos en los ejes horizontales en términos de d como los ceros de la transformada de $f(x)$.

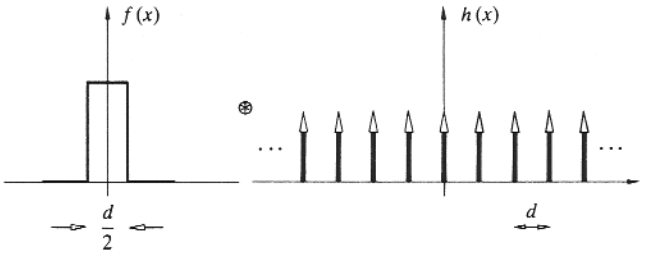


FIGURA P.11.27

11.28 La figura P.11.28 demuestra, en una dimensión, el campo eléctrico en una abertura iluminada que consta de unas barras opacas que forman un retículo. Considerando que se ha creado tomando el producto de una onda rectangular periódica $h(x)$ y una función rectangular unidad $f(x)$, dibuje el campo eléctrico resultante en la región de Fraunhofer.

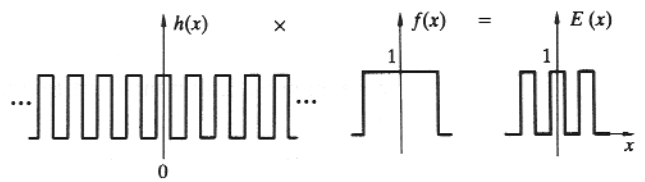


FIGURA P.11.28

11.29 Demuestre (para ondas planas normalmente incidentes) que si una abertura tiene un centro de simetría (es decir, si la función de la abertura es par), entonces el campo difractado en el caso de Fraunhofer también posee un centro de simetría.

11.30 Supóngase que una abertura dada produce una distribución de campo de Fraunhofer $E(Y, Z)$. Demuestre que si las dimensiones de las aberturas se modifican de tal forma que la función de abertura vaya desde $\mathcal{A}(y, z)$ a $\mathcal{A}(\alpha y, \beta z)$ el nuevo campo difractado estará dado por

$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} E\left(\frac{Y}{\alpha}, \frac{Z}{\beta}\right)$$

11.31 Demuestre que cuando $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varepsilon)$, $C_{ff}(\tau) = (A^2/2) \cos \omega t$, lo cual confirma la pérdida de información de fase en la autocorrelación.

11.32 Supóngase que tenemos una sola rendija a lo largo de la dirección y con un ancho b donde la función de abertura es constante a lo largo de ella y con un valor $\mathcal{A}_0$. ¿Cuál es el campo difractado si ahora se lleva a cabo una apodización de la rendija con una máscara de amplitud de función coseno? Dicho de otra forma, hacemos que la función de abertura vaya desde $\mathcal{A}_0$ en el centro hasta 0 en $\pm b/2$ por medio de una disminución cosenoidal.

11.33* Demuestre, de las definiciones de la integral, que $f(x) \odot g(x) = f(x) \circledast g(-x)$.

11.34* En la figura P.11.34 se enseña un anillo transparente en una plantilla opaca. Haga un dibujo aproximando de su función de autocorrelación, tomando l como la separación de centro a centro en la que Ud. dibuja la función.

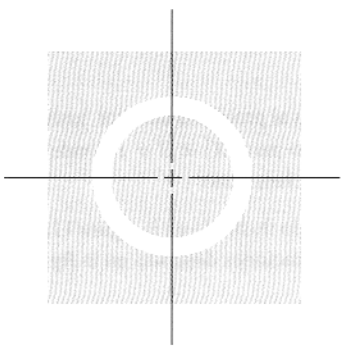


FIGURA P.11.34

11.35* Considere la función de la figura 11.35 como una portadora de coseno multiplicada por una envolvente exponencial. Utilice el teorema de convolución de la frecuencia para evaluar su transformada de Fourier.

12 Las bases de la teoría de la coherencia

Hasta ahora, hemos limitado el análisis de los fenómenos de la superposición de ondas a las perturbaciones totalmente coherentes o incoherentes, ante todo por conveniencia matemática puesto que, como acontece a menudo, las situaciones físicas extremas son las más fáciles de tratar analíticamente. De hecho, ambas condiciones limitadoras son más bien idealizaciones conceptuales que realidades físicas. Existe un terreno intermedio entre estos dos polos que es de gran interés hoy en día: el campo de la ***coherencia parcial***. Aún así, la necesidad de ampliar la estructura teórica no es nueva pues data, por lo menos, de mediados de 1860, cuando Emile Verdet demostró que una fuente primaria comúnmente considerada como incoherente, tal como el Sol, podía producir franjas visibles al iluminar los orificios cercanos ($\lesssim 0{,}05$ mm) del experimento de Young (sección 9.3). El interés teórico por el estudio de la coherencia parcial permaneció en el olvido hasta que se reavivó en la década de 1930 por P. H. van Cittert y posteriormente por Fritz Zernike. Según la tecnología iba desarrollándose, avanzando desde las fuentes luminosas tradicionales que eran esencialmente generadores de ruido de frecuencias ópticas, hasta el láser, se dio nuevo impulso práctico a este campo. Además, el reciente descubrimiento de detectores de fotones individuales ha posibilitado el estudio de los procesos afines asociados con los aspectos corpusculares del campo óptico.

En la actualidad, la teoría de la coherencia óptica es un área de investigación activa. Por lo tanto, aún cuando gran parte del entusiasmo en este campo está asociado con materiales que trascienden el ámbito de este libro, presentaremos no obstante algunas de las ideas básicas.

12.1 Introducción

Anteriormente (sección 7.10) desarrollamos el concepto, extremadamente útil, de que la luz cuasimonocromática era algo semejante a una serie de trenes de onda finitos con fase al azar (figura 7.27). Esta perturbación es casi sinusoidal aunque la frecuencia varíe lentamente (en comparación con el ritmo de oscilación de 10^{15} Hz) alrededor de un valor medio. La amplitud también fluctúa y es asimismo comparativamente lenta. El promedio del tren de onda constitutivo existe aproximadamente durante un tiempo Δt_c, que es el *tiempo de coherencia* proporcionado por el inverso del ancho de banda en frecuencia $\Delta\nu$.

A menudo es conveniente, aunque sea un tanto artificial, dividir los efectos de la coherencia en dos categorías, *temporal* y *espacial* (pág. 389). *La primera está relacionada directamente con el ancho de banda finito de la fuente, la segunda con su extensión finita en el espacio.*

Para estar seguros, si la luz fuera monocromática, $\Delta\nu$ sería cero y Δt_c infinito si bien esto es inalcanzable. Sin embargo, en un intervalo mucho más corto que Δt_c una onda real se comporta esencialmente como si fuera monocromática. En efecto, el tiempo de coherencia es *el intervalo temporal en el que podemos predecir razonablemente la fase de la onda luminosa en un punto dado del espacio.* Esto es, por lo tanto, el concepto de **coherencia temporal**, es decir, si Δt_c es grande la onda tendrá un alto grado de coherencia temporal y viceversa.

La misma característica puede considerarse de forma algo diferente. Para ello, imaginemos que tenemos dos puntos separados P_1' y P_2' que se hallan en el mismo radio trazado desde una fuente puntual cuasimonocromática (figura 9.4). Si la longitud de coherencia, $c\Delta t_c$, es mucho mayor que la distancia (r_{12}) entre P_1' y P_2', entonces un tren de onda único puede fácilmente extenderse sobre toda la separación. La perturbación en P_1' estaría altamente correlacionada con la perturbación que ocurre en P_2'. Por otra parte, si esta separación longitudinal fuera mucho mayor que la longitud de coherencia, muchos trenes de onda, cada uno con fases no relacionadas, cubrirían la distancia r_{12}. En ese caso, las perturbaciones en los dos puntos del espacio serían

independientes en cualquier momento dado. A veces, nos referimos al grado de correlación existente como a la cantidad de *coherencia longitudinal*. Ya sea que pensemos en términos del tiempo de coherencia (Δt_c) o de longitud de coherencia ($c\Delta t_c$), el efecto sigue surgiendo del ancho de banda finito de la fuente.

El concepto de **coherencia espacial** se utiliza con más frecuencia para describir efectos procedentes de la extensión espacial finita de fuentes de luz corrientes. Supongamos entonces que tenemos una fuente monocromática extensa clásica. Dos elementos radiantes puntuales separados por una distancia lateral que resulta ser grande comparada con λ, se comportarán supuestamente de modo muy independiente. Es decir, faltará la correlación que debe existir entre las fases de las dos perturbaciones emitidas. Si bien las fuentes extensas de este tipo se denominan generalmente incoherentes, dicha descripción es algo engañosa como veremos en seguida. Por lo general, lo que interesa no es aquello que sucede en la fuente misma sino lo que ocurre dentro de una región distante del campo de radiación. La pregunta que se debe contestar realmente es: ¿Cómo están relacionadas la naturaleza de la fuente y la configuración geométrica de la situación con la correlación de fase resultante entre dos puntos lateralmente espaciados en el campo luminoso?

Esto nos trae a la memoria el experimento de Young donde una fuente primaria monocromática S ilumina dos orificios en una pantalla opaca. Los orificios, a su vez, sirven como fuentes secundarias, S_1 y S_2, para generar una distribución de franjas sobre un plano distante de observación, Σ_o (figura 9.8). Ya sabemos que si S es una fuente puntual idealizada, las ondas que salen de cualquier serie de aberturas S_1 y S_2 en Σ_a mantendrán una fase relativa constante; ellas estarán precisamente correlacionadas siendo, por lo tanto, coherentes. De ello, resulta una disposición bien definida de franjas estables y el campo será espacialmente coherente. En el otro extremo, si los orificios se iluminan mediante fuentes térmicas separadas (si bien con anchos de banda estrechos), no existirá ninguna correlación, los detectores existentes no podrán observar ninguna franja mientras que los campos en S_1 y S_2 se definirán incoherentes. Es evidente, entonces, que la generación de franjas de interferencia es una medida muy conveniente de la coherencia.

Podemos adquirir algún conocimiento importante sobre el proceso volviendo a las consideraciones generales de la sección 9.1 y a la ecuación (9.7). Imaginemos dos ondas escalares $E_1(t)$ y $E_2(t)$ desplazándose hacia y superponiéndose en el punto P, como se muestra en la figura 9.2. Si la luz es monocromática y ambos haces tienen la misma frecuencia, la figura de interferencia resultante dependerá de su fase relativa en P. Si las ondas están en fase, $E_1(t)E_2(t)$ será siempre positivo para todo t al subir y bajar los campos juntos. Por tanto, $I_{12}=2\langle E_1(t)E_2(t)\rangle_T$, será un número positivo distinto de cero y la irradiancia neta I será mayor que I_1+I_2. De forma similar si las ondas están completamente desfasadas una será positiva cuando la otra sea negativa, con el resultado de que el producto $E_1(t)E_2(t)$ será siempre negativo, dando como resultado un término de interferencia negativo I_{12}, y un valor de I inferior a $I_1 + I_2$. En ambos casos, el producto de los dos campos es oscilatorio, siendo sin embargo o totalmente negativo o totalmente positivo, por lo tanto su promedio en el tiempo es distinto de cero.

Ahora, consideremos el caso más realista en el que las dos ondas luminosas son cuasimonocromáticas, asemejándose a la figura 7.27, caracterizada por una extensión de coherencia finita. Si formamos otra vez el producto $E_1(t)\ E_2(t)$, en la figura 12.1*c* vemos que varía con el tiempo, desplazándose de valores negativos a valores positivos. Por lo tanto, el término de interferencia

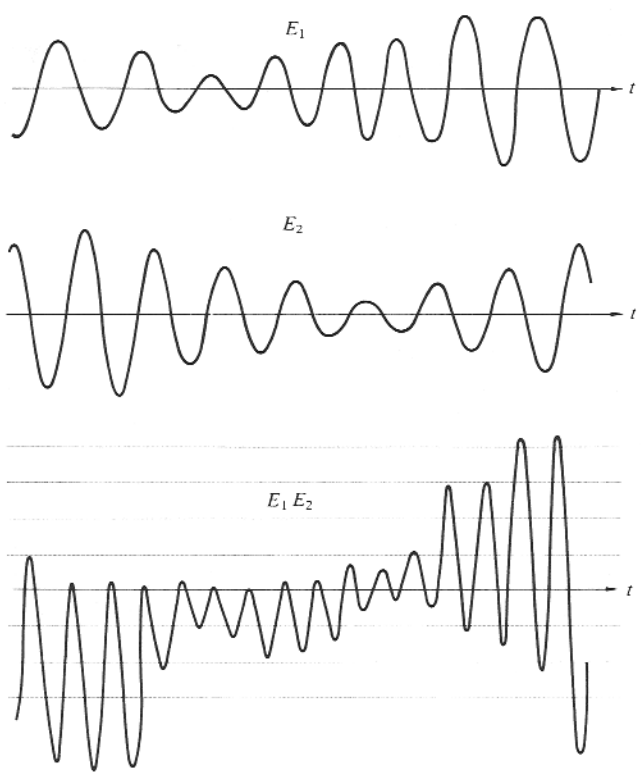


FIGURA 12.1 Dos campos E superpuestos y su producto como funciones del tiempo. Cuanto más grande sea la falta de correlación entre los campos, más se acercará el producto a cero.

$\langle E_1(t)E_2(t)\rangle_T$, del cual se calcula el promedio en un intervalo de tiempo relativamente largo comparado con los períodos de las ondas, será bastante reducido, si no cero: $I \approx I_1 + I_2$. Dicho de otra forma, puesto que la subida y el descenso de las dos ondas luminosas no están relacionados, no conservarán una relación de fase constante, no serán totalmente coherentes y no producirán la figura de interferencia ideal de elevado contraste que se analizó en el capítulo 9. Aquí, deberíamos volver a la ecuación (11.87) que expresa la correlación cruzada de las dos funciones —con $\tau = 0$. Si P se desplaza en el espacio (por ejemplo, a lo largo del plano de observación en el experimento de Young), introduciendo de esa forma un retardo relativo τ entre las dos ondas luminosas, el término de interferencia pasa a ser $\langle E_1(t)E_2(t+\tau)\rangle_T$ que es la correlación cruzada. Coherencia es correlación, como se demostrará formalmente en la sección 12.3.

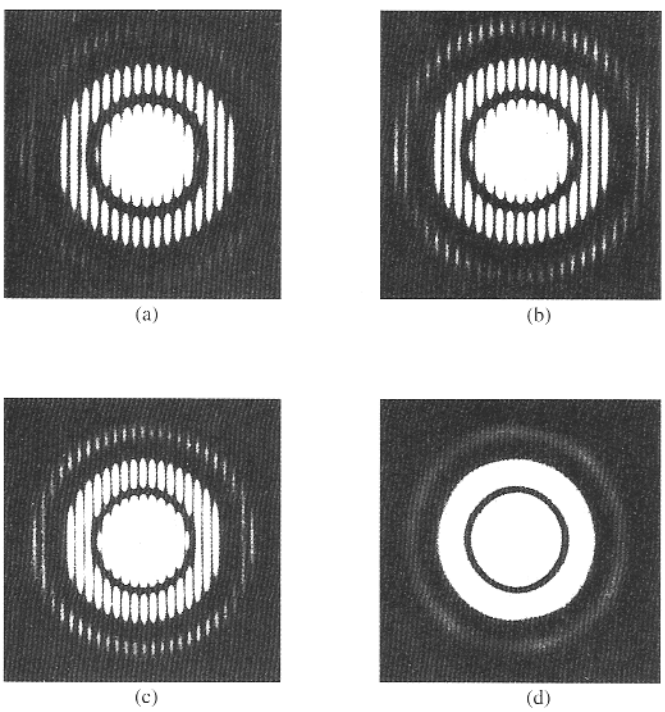


FIGURA 12.2 Interferencia de doble haz producido por un par de aberturas circulares. *(a)* Luz de láser de He-Ne iluminando los orificios. *(b)* Nuevamente la luz de láser pero ahora uno de los orificios está cubierto con una lámina de vidrio de 0,5 mm de espesor. *(c)* Franjas producidas con iluminación colimada de arco de mercurio pero sin láminas de vidrio. *(d)* Esta vez las franjas desaparecen al insertar la placa utilizando luz de mercurio. [De B. I. Thompson, J. Soc. *Photo. Inst. Engr.* **4**, 7 (1965).]

El experimento de Young puede utilizarse también para demostrar los efectos de coherencia temporal con una fuente de ancho de banda finito. La figura 12.2*a* muestra las distribuciones de franjas obtenidos con dos aberturas circulares pequeñas iluminadas con un láser de He-Ne. Antes de tomar la foto de la figura 12.2*b*, se colocó un trozo de vidrio ópticamente plano, de 0,5 mm de espesor, sobre uno de los orificios (digamos S_1). No se detecta ningún cambio evidente en la forma de la distribución (aparte de un desplazamiento de su localización) porque la longitud de coherencia de la luz del láser excede con mucho la diferencia de recorrido óptico introducida por el vidrio. Por otra parte, al repetir el mismo experimento usando la luz de un arco de mercurio colimado [*(c)* y *(d)* de la figura 12.2] las franjas desaparecen. Aquí, la longitud de coherencia es bastante corta y la diferencia de recorrido óptico adicional del vidrio es lo suficientemente grande para que trenes de onda no relacionados de las dos aberturas lleguen hasta el plano de observación. Dicho de otra forma, cualesquiera dos trenes de onda coherentes que salgan de S_1 y S_2, el de S_1 está ahora tan retrasado en el vidrio que se queda completamente detrás del otro; al llegar a Σ_o encontrará que el tren de onda procedente de S_2 es totalmente diferente.

En ambos casos de la coherencia temporal y espacial estamos realmente interesados por un fenómeno, a saber, el de la correlación entre perturbaciones ópticas. Es decir, por lo general, nos interesa determinar los efectos procedentes de fluctuaciones relativas en los campos en dos puntos en el espacio y en el tiempo. Es cierto que el término *coherencia temporal* parece implicar un efecto que es exclusivamente temporal, estando sin embargo, relacionado con la extensión finita del tren de onda ya sea en el espacio o en el tiempo; algunas personas prefieren incluso denominarlo *espacial longitudinal* más que coherencia temporal. Aún así, depende intrínsecamente de la estabilidad de la fase en el tiempo y, por consiguiente, seguiremos utilizando el término *coherencia temporal*. La coherencia espacial o, si se quiere, *coherencia espacial lateral* es tal vez más fácil de evaluar porque está más estrechamente relacionada con el concepto de frente de onda. Por lo tanto, si dos puntos desplazados lateralmente se hallan en el mismo frente de onda en un tiempo determinado, los campos en esos puntos serán coherentes espacialmente (véase sección 12.3.1).

12.2 Visibilidad

La calidad de las franjas producidas por un sistema interferométrico puede describirse cuantitativamente usando la **visibi-**

lidad $\mathscr{V}$ que, formulada inicialmente por Michelson, es proporcionada por

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}} \tag{12.1}$$

Es idéntica a la *modulación* de la ecuación (11.89). Aquí $I_{máx}$ e $I_{mín}$ son las irradiancias correspondientes al máximo y al mínimo contiguo en el sistema de franjas. Si montamos el experimento de Young, podemos variar la separación de las aberturas o el tamaño de la fuente primaria cuasimonocromática incoherente, medir $\mathscr{V}$ cuando cambia y entonces relacionar todo esto con el concepto de coherencia. Una expresión analítica puede deducirse para la distribución de densidad de flujo con la ayuda de la figura 12.3 [1]. Aquí usamos una lente L para localizar con más eficacia la distribución de franjas, es decir, para que los conos de luz difractada por los orificios finitos se superpongan de manera más completa en el plano Σ_o. Una fuente puntual S' que se halla en el eje central produciría el patrón usual proporcionado por

$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{Ya\pi}{s\lambda}\right) \tag{12.2}$$

de la sección 9.3. De manera parecida, una fuente puntual arriba o abajo de S', que se halla en una línea normal a la línea $\overline{S_1S_2}$ produciría el mismo sistema de franjas de bandas rectas ligeramente desplazadas en una dirección paralela a las franjas. Por lo tanto, al reemplazar S' por una fuente incoherente lineal (normal al plano del dibujo) efectivamente sólo aumentará la cantidad de luz disponible. Esto es algo que supuestamente ya se conocía. Por el contrario, una fuente puntual fuera de eje, digamos en S'', generará una figura centrada en P'', su punto imagen en Σ_o en la ausencia de la pantalla con aberturas. Una onda «esférica» que sale de S'' está enfocada en P''; por lo tanto todos los rayos de S'' a P'' recorren caminos ópticos iguales y la interferencia deberá ser constructiva, es decir, el máximo central aparecerá en P''. La diferencia de camino $\overline{S_1P''} - \overline{S_2P''}$ es responsable del desplazamiento $\overline{P'P''}$. Por consiguiente, S'' produce un sistema de franjas idéntico al de S' pero desplazado en una cantidad $\overline{P'P''}$ con respecto a él. Puesto que estos puntos de fuente son incoherentes, se suman sus irradiancias en Σ_o, más que sus amplitudes de campo (figura 12.3*e*).

La figura que surge de una fuente ancha con una abertura rectangular de ancho b puede determinarse calculando la irradiancia debida a una fuente lineal continua incoherente paralela a $\overline{S_1S_2}$. Obsérvese en la figura 12.3*b* que la variable Y_0 describe la localización de cualquier punto en la imagen de la fuente cuando la pantalla de aberturas está ausente. Con Σ_a en su lugar, cada elemento diferencial de la fuente lineal contribuirá con un sistema de franjas centrada en su propio punto imagen, a una distancia Y_0 desde el origen en Σ_o. Asimismo, su contribución a la distribución de densidad de flujo dI es proporcional al elemento lineal diferencial o, más oportunamente, a su imagen, dY_0, en Σ_o. Por lo tanto, utilizando la ecuación (9.31), la aportación a la irradiancia total procedente de Y_0 pasa a ser

$$dI = A\, dY_0 \cos^2\left[\frac{a\pi}{s\lambda}(Y - Y_0)\right] \tag{12.3}$$

donde A es una constante oportuna. Esto, en analogía con la ecuación (12.2), es la expresión relativa a un sistema completo de franjas de pequeña irradiancia centrado en Y_0, aportado por la diminuta pieza de la fuente cuya imagen corresponde a dY_0 en Y_0. Integrando en la extensión w de la imagen de la fuente lineal, efectivamente integramos sobre la fuente y obtenemos la distribución completa:

$$I(Y) = A\int_{-w/2}^{+w/2} \cos^2\left[\frac{a\pi}{s\lambda}(Y - Y_0)\right] dY_0 \tag{12.4}$$

Después de unos cálculos trigonométricos directos, esto se convierte en

$$I(Y) = \frac{Aw}{2} + \frac{A}{2}\frac{s\lambda}{a\pi}\,\text{sen}\left(\frac{a\pi}{s\lambda}w\right)\cos\left(2\frac{a\pi}{s\lambda}Y\right) \tag{12.5}$$

La irradiancia oscila alrededor de un valor promedio de $\bar{I} = Aw/2$, que aumenta con w la cual, a su vez, aumenta con el ancho de la rendija de la fuente. Por lo tanto,

$$\frac{I(Y)}{\bar{I}} = 1 + \left(\frac{\text{sen}\, a\pi w/s\lambda}{a\pi w/s\lambda}\right)\cos\left(2\frac{a\pi}{s\lambda}Y\right) \tag{12.6}$$

o

$$\frac{I(Y)}{\bar{I}} = 1 + \text{sinc}\left(\frac{a\pi w}{s\lambda}\right)\cos\left(2\frac{a\pi}{s\lambda}Y\right) \tag{12.7}$$

[1] Este estudio sigue en parte aquel llevado a cabo por Towne en el capítulo 11 de la obra *Wave Phenomena*. Véase Klein, *Optics*, Sección 6.3, o el problema 12.6 para versiones diferentes.

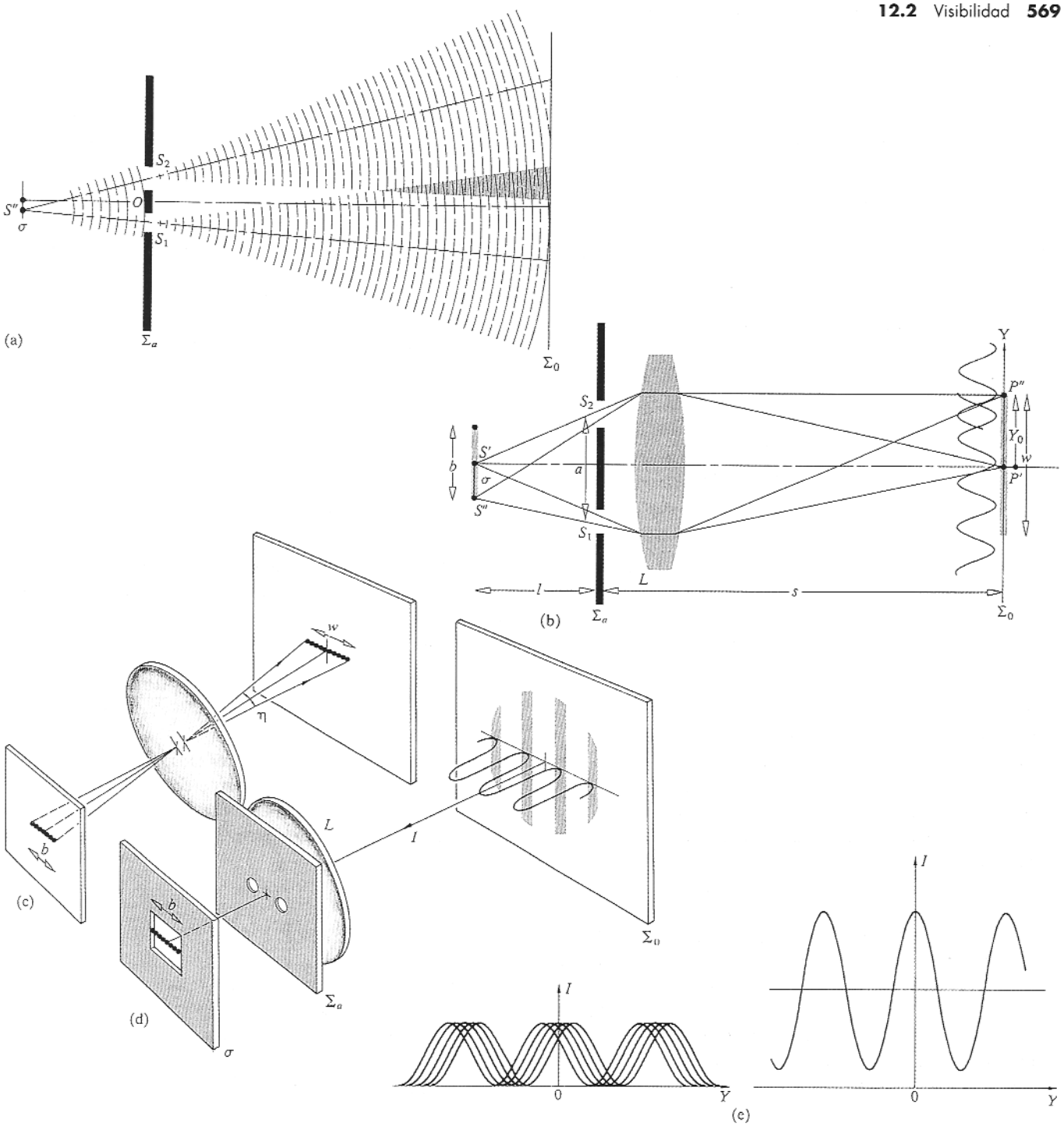


FIGURA 12.3 Experimento de Young con una fuente de rendija extensa. *(e)* Simple representación de cómo las franjas desplazadas con la misma frecuencia espacial se superponen y se combinan para formar una perturbación neta de esa misma frecuencia espacial con visibilidad reducida (Véase Figura 7.4)

Se deduce que los valores extremos de la irradiancia relativa están dados por

$$\frac{I_{\text{máx}}}{\bar{I}} = 1 + \left|\text{sinc}\left(\frac{a\pi w}{s\lambda}\right)\right| \tag{12.8}$$

y

$$\frac{I_{\text{mín}}}{\bar{I}} = 1 - \left|\text{sinc}\left(\frac{a\pi w}{s\lambda}\right)\right| \tag{12.9}$$

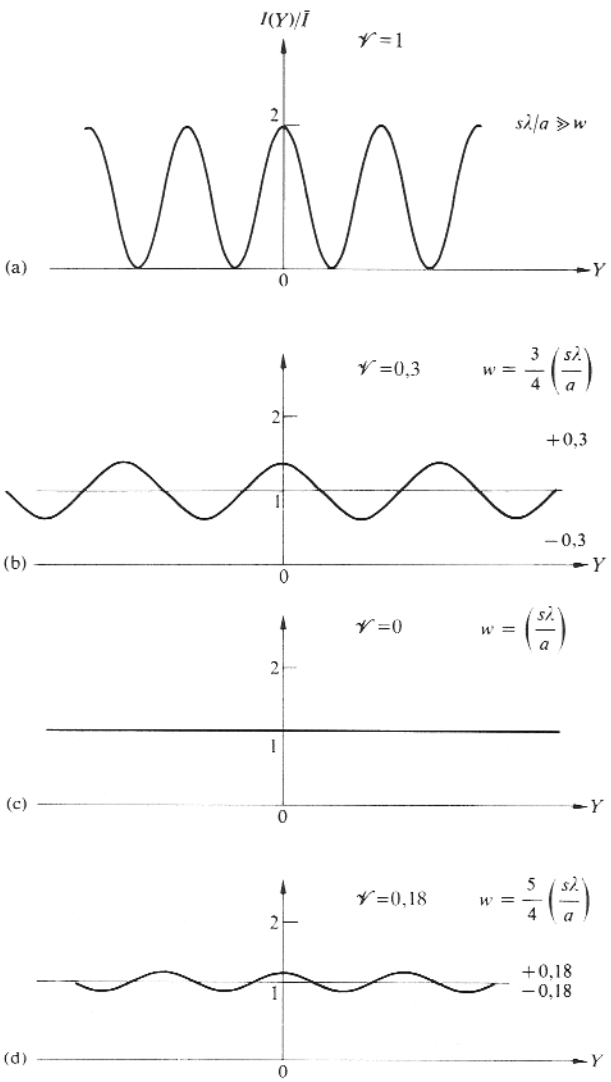


FIGURA 12.4 Franjas con la fuente rendija de tamaño variable. Aquí w es el ancho de la imagen de la rendija y $s\lambda/a$ es el ancho de pico a pico de las franjas.

Cuando w es muy pequeño en comparación con el ancho de la franja ($s\lambda/a$), la función sinc (pág. 48) se aproxima a 1 e $I_{\text{máx}}/\bar{I} = 2$ mientras que $I_{\text{mín}}/\bar{I} = 0$ (véase figura 12.4). Conforme w aumenta, $I_{\text{mín}}$ empieza a diferir de cero y las franjas pierden contraste hasta perderse completamente en $w = s\lambda/a$. Entre los argumentos de π y 2π (es decir, $w = s\lambda/a$ y $w = 2s\lambda/a$), la función sinc es negativa. Conforme la fuente rendija primaria se ensancha más allá de $w = s\lambda/a$, las franjas reaparecen si bien están desplazadas en fase; dicho de otra forma, mientras que anteriormente existía un máximo en $Y = 0$, ahora habrá un mínimo.

En realidad, la luz difractada por las aberturas está localizada (sección 10.2) de manera que el sistema de franjas no siga expandiéndose uniforme e indefinidamente conforme Y aumenta. En cambio, el patrón de la figura 12.4*a* se asemejará más a la figura 12.5.

Por lo general, la extensión de la fuente *(b)* y la separación de las rendijas *(a)* son muy pequeñas comparadas con las distancias entre las pantallas *(l)* y *(s)* y, por consiguiente, podemos llevar a cabo algunas simplificaciones. Mientras que las consideraciones anteriores se expresaban en términos de w y s, empleando el ángulo central η, de la figura 12.3*c* se deduce que $b \approx l\eta$ y $w \approx s\eta$, por lo tanto $w/s \approx b/l$. Por consiguiente, $(a\pi w/s\lambda) \approx (a\pi\eta/\lambda) \approx (a\pi b/l\lambda)$. La visibilidad de las franjas se deduce de la ecuación (12.1):

$$\mathscr{V} = \left|\text{sinc}\left(\frac{a\pi w}{s\lambda}\right)\right| = \left|\text{sinc}\left(\frac{a\pi b}{l\lambda}\right)\right| \tag{12.10}$$

la cual se muestra en la figura 12.6. Obsérvese que $\mathscr{V}$ es una función tanto del ancho de la fuente como de la separación entre aberturas a. Al mantener constante cualquiera de estos dos parámetros y variando el otro, $\mathscr{V}$ cambiará exactamente de

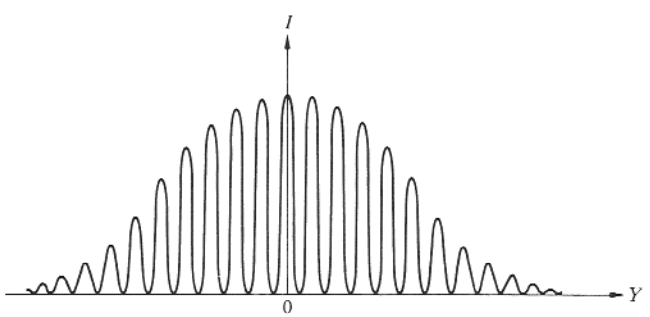


FIGURA 12.5 Franjas de interferencia de doble haz mostrando el efecto de difracción.

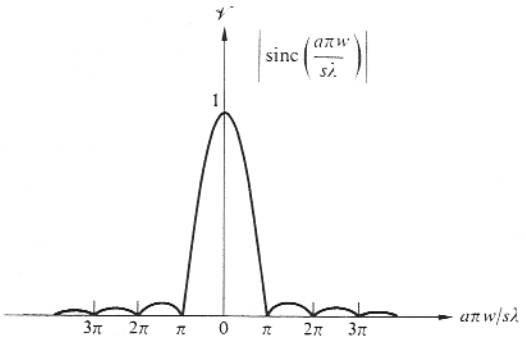


FIGURA 12.6 La visibilidad proporcionada por la ecuación (12.10).

la misma forma. Obsérvese que las visibilidades en ambas figuras 12.4*a* y 12.5 son iguales a uno porque $I_{\text{mín}} = 0$. Entonces, está claro que la visibilidad del sistema de franjas en el plano de observación está relacionado con la manera en la que la luz se distribuye en la pantalla de las aberturas. Si la fuente primaria fuera, de hecho, un punto, *b* sería cero y la visibilidad sería un 1 perfecto. Cuanto más pequeño sea $(a\pi b/l\lambda)$, mejor: es decir, mayor es $\mathscr{V}$ y más claras serán las franjas. Podemos considerar $\mathscr{V}$ como la medida del nivel de coherencia de la luz desde la fuente primaria mientras se extiende sobre la pantalla de aberturas. Cabe recordar que antes hemos encontrado la función sinc en relación con la figura de difracción resultante de una abertura rectangular.

Cuando la fuente primaria es circular, es bastante más complejo calcular la visibilidad. Resulta ser proporcional a la función de Bessel de primer orden (figura 12.7). Esto también recuerda bastante a la difracción, esta vez de una abertura circular [ecuación (10.56)]. Estas similitudes entre las expresiones de $\mathscr{V}$ y las figuras de difracción correspondientes para una abertura que tiene la misma forma no son meramente fortuitas sino que son una manifestación de algo denominado el teorema de van Cittert-Zernike, como veremos dentro de poco.

La figura 12.8 muestra una secuencia de sistemas de franjas donde el tamaño de la fuente circular primaria incoherente es constante pero la separación *a* entre S_1 y S_2 aumenta. La visibilidad decrece de *(a)* a *(d)* en la figura, luego aumenta para *(e)*, decreciendo nuevamente en *(f)*. Todos los valores asociados con $\mathscr{V}$ se muestran en la figura 12.7. Obsérvese el desplazamiento de los picos, es decir el cambio de fase en el centro del patrón para cada punto en el segundo lóbulo de la figura 12.7 (la función de Bessel es negativa en ese rango). En otras palabras, *(a)*, *(b)* y *(c)*

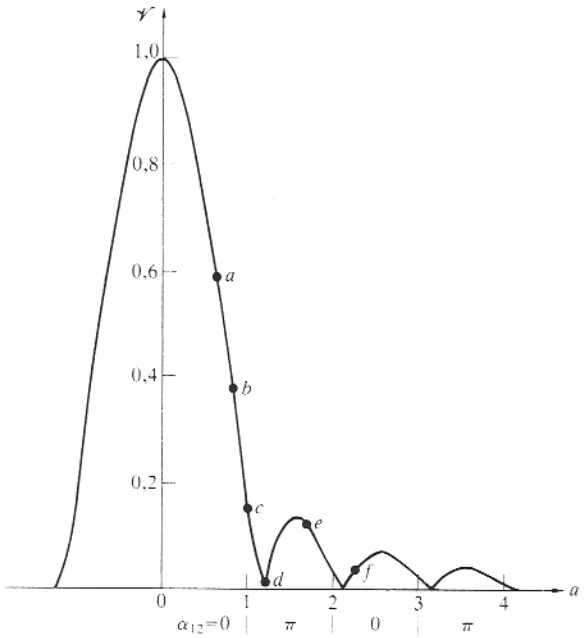


FIGURA 12.7 Visibilidad de una fuente circular.

tienen un máximo central mientras que *(d)* y *(e)* tienen un mínimo central y *(f)*, en el tercer lóbulo, es nuevamente un máximo. De la misma manera, para una fuente rendija, el campo donde sinc $(a\pi w/s\lambda)$ en la ecuación (12.7) es positivo o negativo dará como resultado un máximo o un mínimo, respectivamente, en $I(0)/\bar{I}$. Éstos, a su vez, corresponden a los lóbulos impares o pares de la curva de visibilidad de la figura 12.6. Recuérdese que podemos definir una visibilidad compleja de magnitud $\mathscr{V}$ con un argumento correspondiente al desplazamiento de fase; regresaremos a este concepto más tarde.

Ya que el ancho de las franjas es inversamente proporcional a *a*, la frecuencia espacial de las bandas brillantes y oscuras aumenta de acuerdo con esto, de *(a)* a *(f)* en la figura 12.8. La figura 12.9 se obtiene cuando la separación *a* se mantiene constante mientras que el diámetro de la fuente primaria incoherente se aumenta.

También cabe mencionar que los efectos del ancho de banda finita aparecerán en una distribución de franjas determinada como disminución gradual en el valor de $\mathscr{V}$ con *Y* como se muestra en la figura 12.10 (véase problema 12.3). Al determinar la visibilidad en estos casos, usando la región central de cada serie de distribuciones, la dependencia de $\mathscr{V}$ con la separación entre aberturas se corresponderá nuevamente con la figura 12.7.

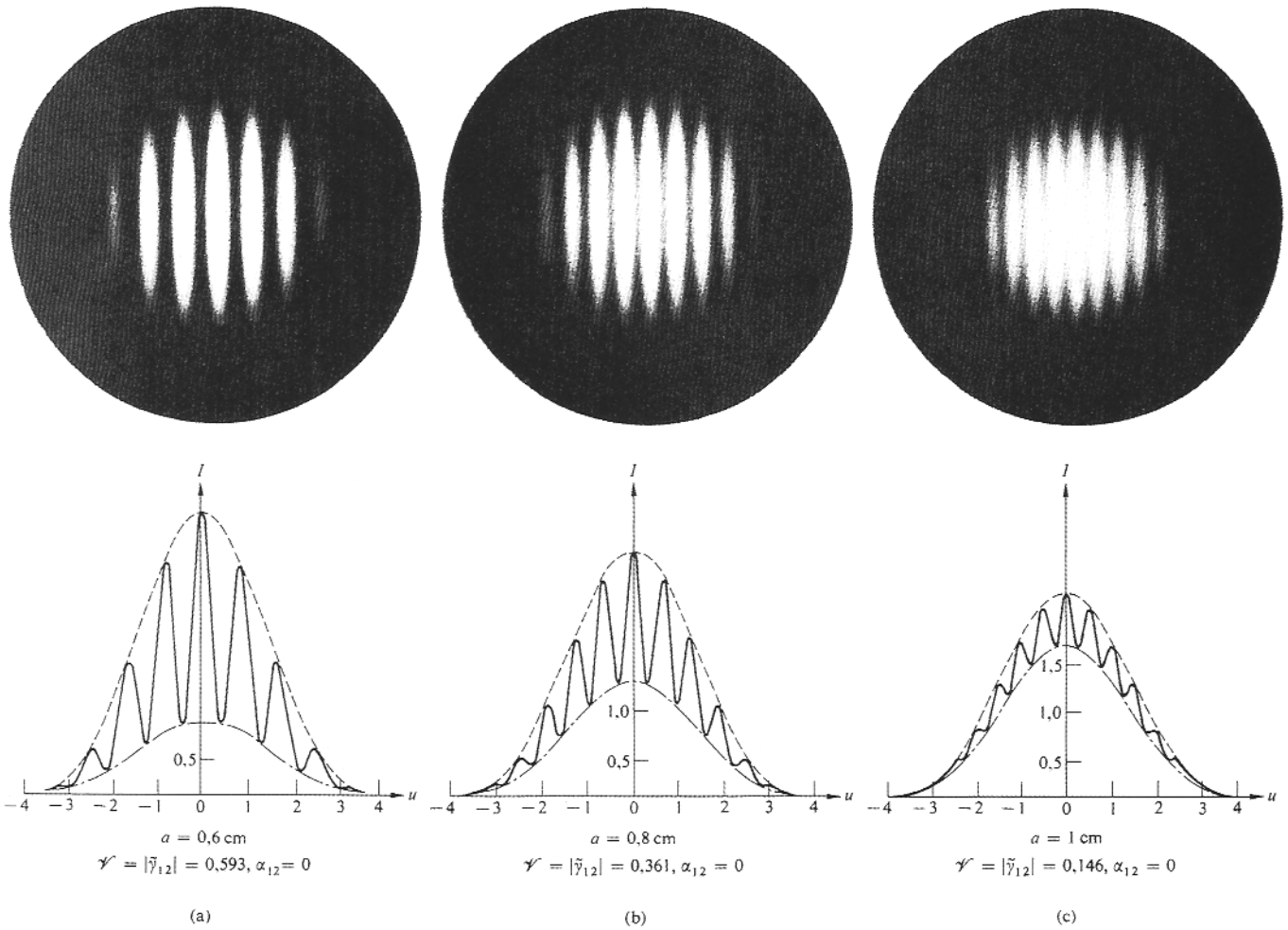
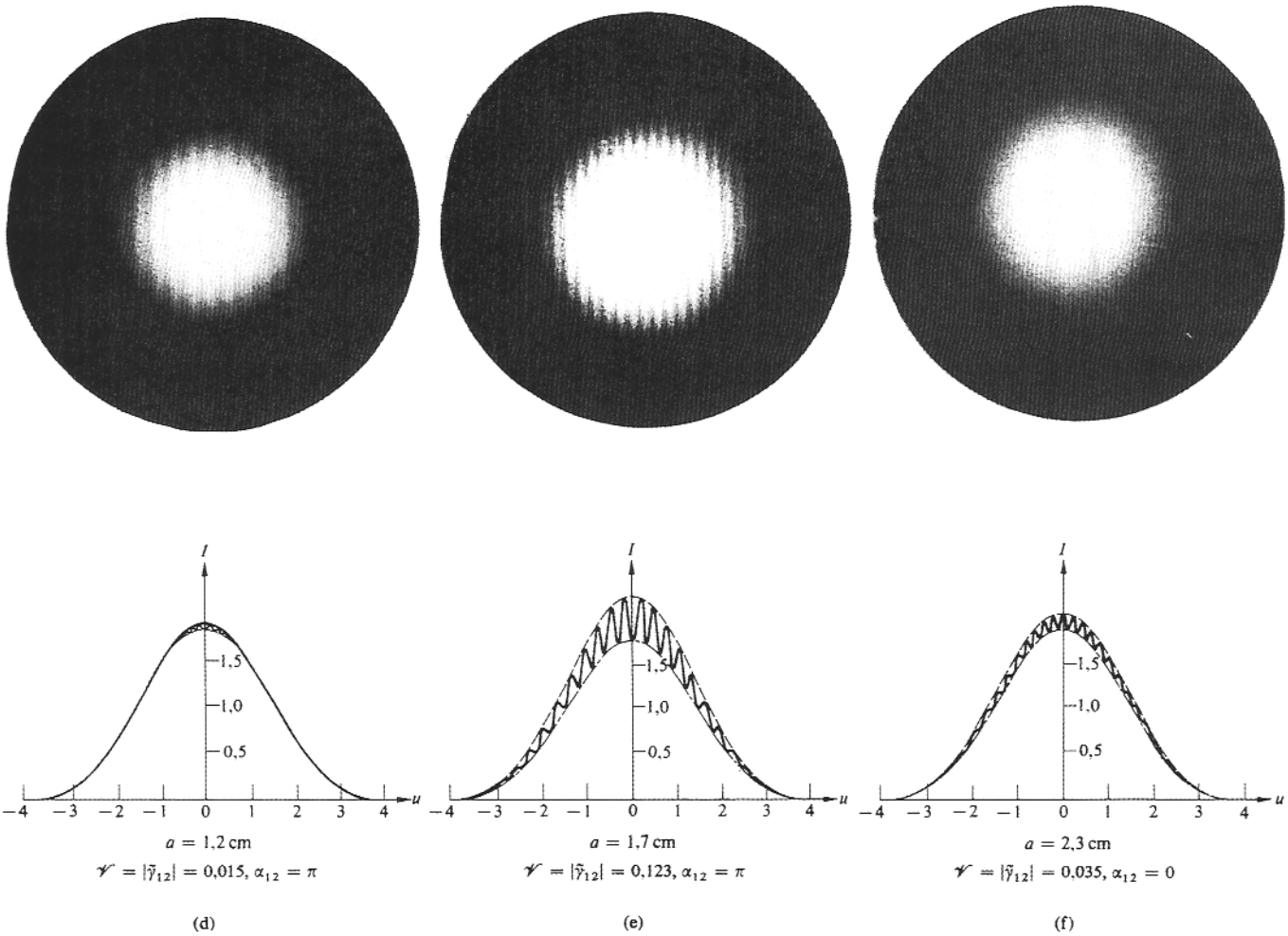


FIGURA 12.8 Figuras de interferencia de doble haz usando luz parcialmente coherente. Las fotografías corresponden a una variación en la visibilidad asociada con cambios en a, la separación entre las aberturas. En las curvas teóricas Imáx $\propto 1 + |2J_1(u)/u|$ y $I_{min} \propto 1 - |2J_1(u)/u|$. Varios de los símbolos se analizarán después. [De B. J. Thompson y E. Wolf, *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 895 (1957).]

12.3 La función de coherencia mutua y el grado de coherencia

Profundicemos un poco más en el análisis de manera más formal. Supongamos nuevamente que tenemos una fuente ancha, con ancho de banda estrecho, que genera un campo luminoso cuya representación compleja es $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$. Puesto que no tendremos en consideración los efectos de la polarización, bastará con un análisis escalar. Las perturbaciones en los puntos S_1 y S_2 en el espacio son entonces $\tilde{E}(S_1, t)$ y $\tilde{E}(S_2, t)$ o, de manera más sucinta, $\tilde{E}_1(t)$ y $\tilde{E}_2(t)$. Si estos dos puntos se aíslan usando una pantalla opaca con dos aberturas circulares (figura 12.11), volvemos al experimento de Young. Las dos aberturas sirven como fuentes de ondas secundarias que se propagan hacia un punto P en Σ_o. Allí el campo resultante es

$$\tilde{E}_P(t) = \tilde{K}_1\tilde{E}_1(t - t_1) + \tilde{K}_2\tilde{E}_2(t - t_2) \qquad (12.11)$$



donde $t_1 = r_1/c$ y $t_2 = r_2/c$. Esto quiere decir que el campo en el punto del espacio-tiempo (P, t) puede determinarse de los campos que existieron en S_1 y S_2 para t_1 y t_2, respectivamente, siendo éstos los instantes cuando la luz, que ahora está superpuesta, salió de las aberturas. Las cantidades $\tilde{K}_1$ y $\tilde{K}_2$ denominadas *propagadores*, dependen del tamaño de las aberturas y sus posiciones relativas con respecto a P. Afectan matemáticamente a las alteraciones en el campo que resultan después de haber atravesado cualquiera de las aberturas. Por ejemplo, las ondas secundarias emitidas de los orificios en esta disposición están desfasadas en $\pi/2$ radianes, con la onda primaria incidente sobre la abertura de la pantalla, Σ_a (sección 10.3.1). Claramente, alguien tendrá que decirle a $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$ que debe desplazar la fase más allá de Σ_a—que es precisamente para lo que están los factores $\tilde{K}$. Además, ellos reflejan una reducción en el campo que puede darse a partir de numerosas causas físicas: absorción, difracción, etc. Aquí, puesto que hay un desfase de $\pi/2$ en el campo, que puede introducirse multiplicando por $\exp i\pi/2$, $\tilde{K}_1$ y $\tilde{K}_2$ son números imaginarios puros.

La irradiancia resultante en P medida en algún intervalo de tiempo finito que es largo comparado con el tiempo de coherencia, es

$$I = \langle \tilde{E}_P(t)\, \tilde{E}_P^*(t) \rangle_T \tag{12.12}$$

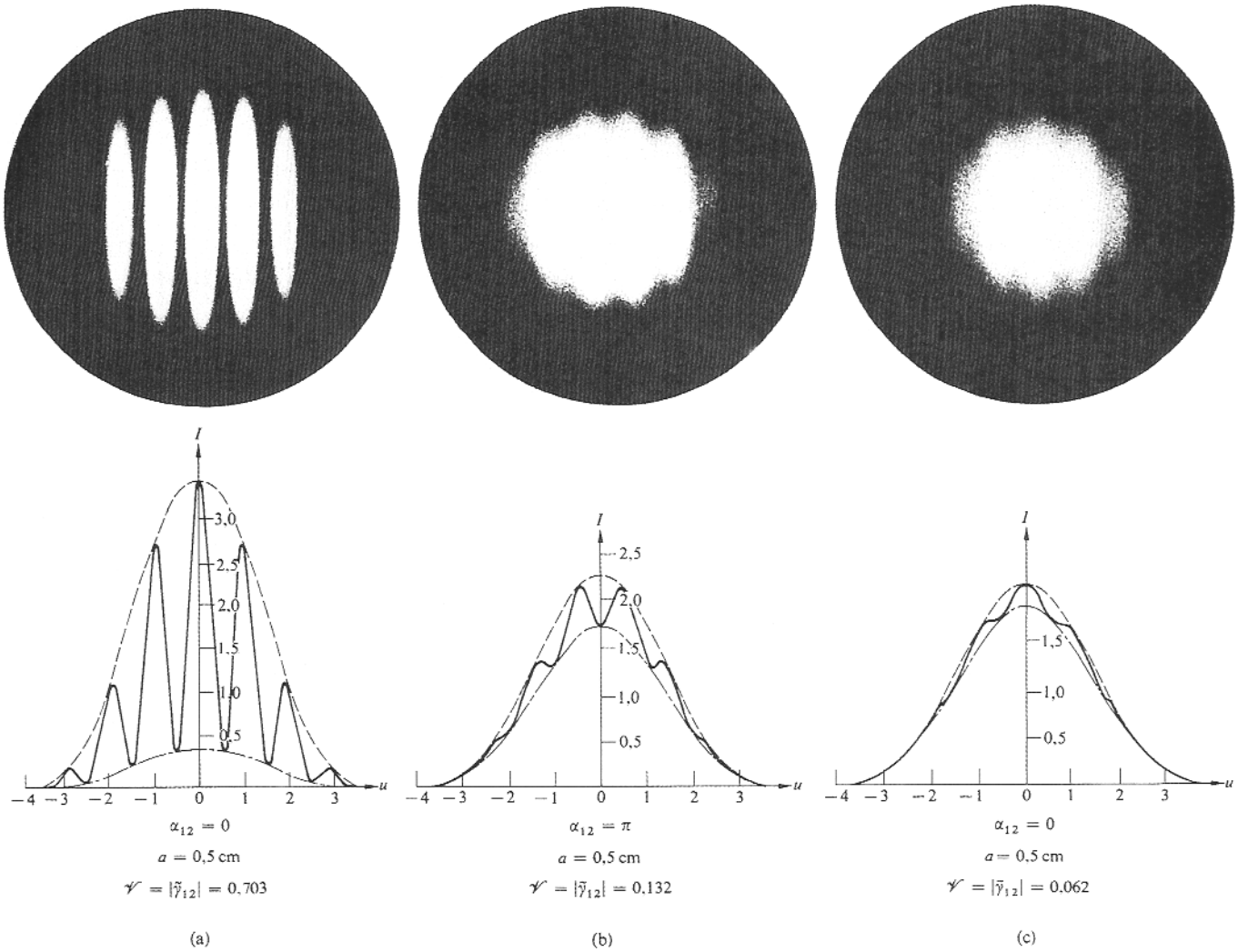


FIGURA 12.9 Figuras de interferencia de doble haz. Aquí la separación entre aberturas se mantuvo constante, por lo tanto dio un número constante de franjas por unidad de desplazamiento en cada una de las fotos. La visibilidad se alteró variando el tamaño de la fuente primaria incoherente. [De B. J. Thompson, *J. Soc. Photo. Inst. Engr.* **4**, 7 (1965).]

Cabe recordar que la ecuación (12.12) está escrita sin considerar varias constantes multiplicativas. Por lo tanto, usando la ecuación (12.11)

$$I = \tilde{K}_1\tilde{K}_1^*\langle \tilde{E}_1(t-t_1)\tilde{E}_1^*(t-t_1)\rangle_T + \tilde{K}_2\tilde{K}_2^*\langle \tilde{E}_2(t-t_2)\tilde{E}_2^*(t-t_2)\rangle_T + \tilde{K}_1\tilde{K}_2^*\langle \tilde{E}_1(t-t_1)\tilde{E}_2^*(t-t_2)\rangle_T + \tilde{K}_1^*\tilde{K}_2\langle \tilde{E}_1^*(t-t_1)\tilde{E}_2(t-t_2)\rangle_T \quad (12.13)$$

Ahora se supone que el campo de la onda es *estacionario,* como ocurre casi generalmente en la óptica clásica, es decir, no altera su naturaleza estadística con el tiempo, de manera que el promedio temporal es independiente de cualquier origen que escojamos. Por consiguiente, si bien hay fluctuaciones en las variables del campo, el origen del tiempo puede desplazar-

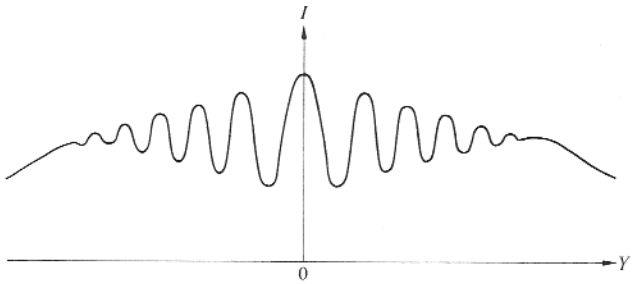


FIGURA 12.10 Un ancho de banda finito da como resultado un valor decreciente de $\mathscr{V}$ con un valor creciente de Y.

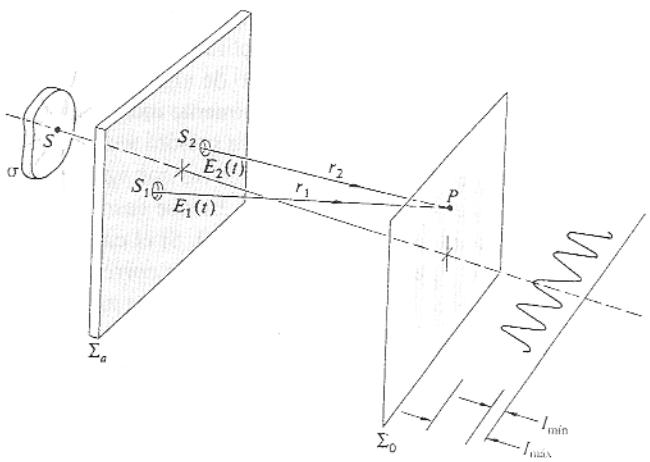


FIGURA 12.11 Experimento de Young.

se sin afectar a los promedios de la ecuación (12.13). El momento particular en el que decidamos medir I no es importante. Por lo tanto, los dos primeros promedios temporales pueden reescribirse como

$$I_{S_1} = \langle \tilde{E}_1(t)\tilde{E}_1^*(t)\rangle_T \quad \text{y} \quad I_{S_2} = \langle \tilde{E}_2(t)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T$$

donde el origen se desplazó en las cantidades t_1 y t_2, respectivamente. Aquí, los subíndices subrayan el hecho de que éstas son las irradiancias en los puntos S_1 y S_2, Además, si dejamos $\tau = t_2 - t_1$ podemos desplazar el origen del tiempo en una cantidad t_2 en los dos últimos términos de la ecuación (12.13) y escribirlos como

$$\tilde{K}_1\tilde{K}_2^*\langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T + \tilde{K}_1^*\tilde{K}_2\langle \tilde{E}_1^*(t+\tau)\,\tilde{E}_2(t)\rangle_T$$

Esto es, sin embargo, una cantidad más su complejo conjugado, siendo por lo tanto el doble de su parte real, es decir, es igual a

$$2\,\mathrm{Re}\,[\tilde{K}_1\tilde{K}_2^*\langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T]$$

Los factores $\tilde{K}$ son puramente imaginarios y así $\tilde{K}_1\tilde{K}_2^* = \tilde{K}_1^*\tilde{K}_2 = |\tilde{K}_1||\tilde{K}_2|$. La parte del promedio temporal de este término es una función de correlación cruzada [sección 11.3.4(iii)] que designamos por

$$\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \equiv \langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T \tag{12.14}$$

y a la que nos referimos como a la **función de coherencia mutua** de los campos luminosos en S_1 y S_2. Si utilizamos todo esto, la ecuación (12.13) adquiere la forma

$$I = |\tilde{K}_1|^2 I_{S_1} + |\tilde{K}_2|^2 I_{S_2} + 2|\tilde{K}_1||\tilde{K}_2|\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \tag{12.15}$$

Los términos $|\tilde{K}_1|^2 I_{S_1}$ y $|\tilde{K}_2|^2 I_{S_2}$, si dejamos de lado nuevamente las constantes multiplicativas, son las irradiancias en P originadas cuando una abertura o la otra está abierta, es decir, $\tilde{K}_2 = 0$ ó $\tilde{K}_1 = 0$, respectivamente. Indicándolas por I_1 e I_2, la ecuación (12.15) pasa a ser

$$I = I_1 + I_2 + 2|\tilde{K}_1||\tilde{K}_2|\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) \tag{12.16}$$

Obsérvese que cuando se hace coincidir S_1 y S_2, la función de coherencia mutua llega a ser

$$\tilde{\Gamma}_{11}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_1^*(t)\rangle_T$$

o

$$\tilde{\Gamma}_{22}(\tau) = \langle \tilde{E}_2(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T$$

Podemos imaginar que dos trenes de onda salen de esta fuente puntual fusionada y, de alguna manera, adquieren un retraso relativo en la fase que es proporcional a τ. En la situación presente τ es cero (puesto que la diferencia de recorrido óptico se pone a cero), reduciendo estas funciones a las irradiancias correspondientes $I_{S_1} = \langle \tilde{E}_1(t)\tilde{E}_1^*(t)\rangle_T$ y $I_{S_2} = \langle \tilde{E}_2(t)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T$ en Σ_a. Por lo tanto

$$\Gamma_{11}(0) = I_{S_1} \quad \text{y} \quad \Gamma_{22}(0) = I_{S_2}$$

denominándose *funciones de autocoherencia.* Por lo tanto

$$I_1 = |\tilde{K}_1|^2\Gamma_{11}(0) \quad \text{y} \quad I_2 = |\tilde{K}_2|^2\Gamma_{22}(0)$$

Recordando la ecuación (12.16), obsérvese que

$$|\tilde{K}_1||\tilde{K}_2| = \sqrt{I_1}\,\sqrt{I_2}\,/\,\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\,\sqrt{\Gamma_{22}(0)}$$

Por lo tanto, la forma normalizada de la función de coherencia mutua se define como

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) \equiv \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)\Gamma_{22}(0)}} = \frac{\langle \tilde{E}_1(t+\tau)\, \tilde{E}_2^*(t)\rangle_T}{\sqrt{\langle|\tilde{E}_1|^2\rangle\langle|\tilde{E}_2|^2\rangle}} \quad (12.17)$$

denominándose **grado de coherencia complejo**, por razones que vamos a aclarar dentro de poco. La ecuación (12.16) puede volverse a escribir como

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\gamma}_{12}(\tau) \quad (12.18)$$

que es la *ley general de interferencia para luz parcialmente coherente.*

Para luz cuasimonocromática, la diferencia en el ángulo de fase que corresponde a la diferencia de recorrido óptico está dada por

$$\varphi = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}(r_2 - r_1) = 2\pi\bar{\nu}\tau \quad (12.19)$$

donde $\bar{\lambda}$ y $\bar{\nu}$ son la longitud de onda y frecuencia promedio. Ahora $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ es una cantidad compleja que se puede expresar de la siguiente manera

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|e^{i\Phi_{12}(\tau)} \quad (12.20)$$

El ángulo de fase de $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ se relaciona con la ecuación (12.14) y el ángulo de fase entre los campos. Si ponemos $\Phi_{12}(\tau) = \alpha_{12}(\tau) - \varphi$, entonces

$$\mathrm{Re}\ \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|\cos[\alpha_{12}(\tau) - \varphi]$$

La ecuación (12.18) se puede expresar entonces

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|\cos[\alpha_{12}(\tau) - \varphi] \quad (12.21)$$

De la ecuación (12.17) y de la desigualdad de Schwarz se puede demostrar que $0 \leq |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \leq 1$. De hecho, al comparar las ecuaciones (12.21) y (9.14), habiendo esta última sido deducida para el caso de coherencia completa, es evidente que si $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1$, I es la misma que aquella generada por dos *ondas coherentes* desfasadas en S_1 y S_2, en una cantidad $\alpha_{12}(\tau)$. Si en el otro extremo $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$, $I = I_1 + I_2$, no hay interferencia y se dice que las dos perturbaciones son *incoherentes.* Cuando $0 < |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| < 1$ tenemos *coherencia parcial,* cuya medida es la propia $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$, que se denomina **grado de coherencia**. En resumen, se tiene

$$|\tilde{\gamma}_{12}| = 1 \quad \text{límite coherente}$$
$$|\tilde{\gamma}_{12}| = 0 \quad \text{límite incoherente}$$
$$0 < |\tilde{\gamma}_{12}| < 1 \quad \text{coherencia parcial}$$

Cabe recalcar la naturaleza estadística básica de todo el proceso. Claramente $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$ y, por lo tanto, $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ son las dos cantidades clave en las varias expresiones de la distribución de la irradiancia; ellas son la esencia de lo que llamamos anteriormente el término de interferencia (9.1). Cabe destacar que $\tilde{E}_1(t+\tau)$ y $\tilde{E}_2(t)$ son, en realidad, dos perturbaciones que ocurren en puntos diferentes tanto en el espacio como en el tiempo. Anticipamos, también, que las amplitudes y fases de estas perturbaciones fluctuarán en el tiempo de alguna manera. Si dichas fluctuaciones en S_1 y S_2 son totalmente independientes, entonces $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \langle \tilde{E}_1(t+\tau)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T$ se pondrá a cero puesto que $\tilde{E}_1$ y $\tilde{E}_2$ pueden ser positivas o negativas con igual probabilidad, y su producto promedia a cero. En ese caso no existe ninguna correlación y $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = 0$. Si el campo en S_1 en un tiempo $(t+\tau)$ estuviese perfectamente correlacionado con el campo en S_2 en un tiempo t, su fase relativa permanecería inalterada a pesar de las fluctuaciones individuales. El promedio temporal del producto de los campos ciertamente no sería cero y tampoco sería cero si los dos estuvieran ligeramente correlacionados.

Tanto $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ como $\alpha_{12}(\tau)$ son funciones de τ que varían lentamente en comparación con el cos $2\pi\bar{\nu}\tau$ y el sen $2\pi\bar{\nu}\tau$. En otras palabras, según P se mueve a lo largo del sistema de franjas resultante, las variaciones espaciales de punto a punto en I se deben principalmente a los cambios en φ al cambiar $(r_2 - r_1)$.

Los valores máximo y mínimo de I se dan cuando el término coseno de la ecuación (12.21) es $+1$ y -1, respectivamente. La visibilidad en P (problema 12.7) es entonces

$$\mathscr{V} = \frac{2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}}{I_1 + I_2}|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \quad (12.22)$$

Tal vez la disposición más común se da cuando las cosas están de tal manera que $I_1 = I_2$, de donde

$$\mathscr{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| \quad (12.23)$$

Es decir, *el módulo del grado de coherencia complejo es idéntico a la visibilidad de las franjas* (véase otra vez la figura 12.8).

Es esencial darse cuenta que las ecuaciones (12.17) y (12.18) sugieren claramente la manera según la cual las partes reales de $\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$ y $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ pueden determinarse a partir de medidas directas. Cuando las densidades de flujo de las dos perturbaciones se ajustan para ser iguales, la ecuación (12.23) facilita un medio experimental para obtener $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ de la distribución de franjas resultante. Además, el desplazamiento fuera de eje en la localización de la franja central (desde $\varphi = 0$) es una medida de $\alpha_{12}(\tau)$, el retardo relativo de la fase de las dos perturbaciones en S_1 y S_2. Por lo tanto, las medidas de la visibilidad y la posición de las franjas dan como resultado la amplitud y la fase del grado de coherencia complejo.

Por cierto que puede demostrarse [2] que $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$ será igual a 1 para todos los valores de τ y para cualquier par de puntos espaciales si y sólo si el campo óptico es estrictamente monocromático siendo, por lo tanto, tal situación inalcanzable. Además, tampoco puede existir en el espacio libre un campo de radiación no nulo para el cual $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 0$ para todos los valores de τ y para cualquier par de puntos espaciales.

12.3.1 Coherencia espacial y temporal

Relacionemos ahora las ideas de coherencia temporal y espacial con el formalismo anterior.

Si la fuente primaria S en la figura 12.11 se encoge hasta convertirse en una fuente puntual sobre el eje central que tiene un ancho de banda de frecuencia finito, los efectos de coherencia temporal predominarán. Las perturbaciones ópticas en S_1 y S_2 serán entonces idénticas. En efecto, la coherencia mutua [ecuación (12.14)] entre los dos puntos será la autocoherencia del campo. De aquí que $\tilde{\Gamma}(S_1, S_2, \tau) = \tilde{\Gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$ or $\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \tilde{\gamma}_{11}(\tau)$. Lo mismo se obtiene cuando S_1 y S_2 se fusionan y $\tilde{\gamma}_{11}(\tau)$ se denomina, a veces, **grado de coherencia temporal complejo** en ese punto para dos ejemplos de tiempo separados por un intervalo τ. Este sería el caso en un interferómetro de división de amplitud tal como el de Michelson donde τ es igual a la diferencia de recorrido dividida por c. La expresión para I, es decir, la ecuación (12.18), contendría entonces $\tilde{\gamma}_{11}(\tau)$ en lugar de $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$.

Supongamos que una onda luminosa esté dividida en dos perturbaciones idénticas de la forma

$$\tilde{E}(t) = E_0 e^{i\phi(t)} \tag{12.24}$$

por un interferómetro de división de amplitud que después las vuelve a combinar para generar una distribución de franjas. Entonces

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \frac{\langle \tilde{E}(t+\tau)\tilde{E}^*(t)\rangle_T}{|\tilde{E}|^2} \tag{12.25}$$

o

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \langle e^{i\phi(t+\tau)} e^{-i\phi(t)}\rangle_T$$

Por lo tanto

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T e^{i[\phi(t+\tau)-\phi(t)]}\,dt \tag{12.26}$$

donde $\Delta\phi = \phi(t+\tau) - \phi(t)$. Para una onda plana estrictamente monocromática de longitud de coherencia infinita, $\phi(t) = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t$, $\Delta\phi = -\omega\tau$, y

$$\tilde{\gamma}_{11}(\tau) = \cos\omega\tau - i\,\text{sen}\,\omega\tau = e^{-i\omega\tau}$$

Por lo tanto, $|\tilde{\gamma}_{11}| = 1$; el argumento de $\tilde{\gamma}_{11}$ es solo $-2\pi\nu\tau$ y tenemos coherencia completa. En el caso opuesto, para una onda cuasimonocromática donde τ es mayor que la longitud de coherencia, $\Delta\phi$ será al azar, variando entre 0 y 2π de tal manera que la integral se promedia a cero, $|\tilde{\gamma}_{11}(\tau)| = 0$, lo cual corresponde a incoherencia completa. Una diferencia de recorrido de 60 cm, producida cuando los dos brazos de un interferómetro de Michelson difieren en longitud por 30 cm, corresponderá a un retraso entre los haces recombinados de $\tau \approx 2$ ns. Se trata aproximadamente del tiempo de coherencia de una buena lámpara de descarga de isótopos bajo cuya iluminación la visibilidad de la distribución será más bien escasa. Si en su lugar se utiliza luz blanca, $\Delta\nu$ será grande, Δt_c será muy pequeña y la longitud de coherencia será menor de una longitud de onda. Para que τ sea menor de Δt_c (es decir, para tener una visibilidad buena), la diferencia de camino óptico tendrá que ser una fracción pequeña de la longitud de onda. El otro extremo está representado por luz láser donde Δt_c puede ser tan largo que un valor $c\tau$ que hiciera disminuir sensiblemente la visibilidad, necesitaría un interferómetro tan grande que sería muy poco práctico.

Vemos que $\tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$, siendo una medida de la coherencia temporal, tiene que estar relacionada estrechamente con el tiempo de coherencia y, por lo tanto, con el ancho de banda de la fuente. De hecho, ***la transformada de Fourier de la función de autocoherencia, $\tilde{\Gamma}_{11}(\tau)$, es el espectro energético que describe la distribución de la energía espectral de la luz*** (sección 11.3.4).

[2] Las demostraciones se recogen en *Theory of Partial Coherence*, Sección 4.2, por Beran y Parrent.

Si regresamos al experimento de Young (figura 12.11) con una fuente extensa de ancho de banda muy estrecho, prevalecerán los efectos de coherencia espacial. Las perturbaciones ópticas en S_1 y S_2 diferirán y el patrón de franjas dependerá de $\tilde{\Gamma}(S_1, S_2, \tau) = \tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$. Al examinar la región alrededor de la franja central donde $(r_2 - r_1) = 0$, $\tau = 0$ y $\tilde{\Gamma}_{12}(0)$ y $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ pueden determinarse Esta última cantidad es el **grado de coherencia espacial complejo** de los dos puntos en el mismo instante. $\tilde{\Gamma}_{12}(0)$ juega un papel central en la descripción del interferómetro estelar de Michelson que será descrito a continuación.

Entre el grado de coherencia complejo en una región del espacio y la distribución de la irradiancia correspondiente en la fuente extensa que da lugar a los campos luminosos, hay una relación muy conveniente a la que recurriremos, **el teorema de Cittert-Zernike**, como medio de cálculo sin analizar su derivación formal. Realmente, el análisis de la sección 12.2 sugiere ya algunos de los elementos básicos. En la figura 12.12 se presenta una fuente incoherente extensa cuasimonocromática, S, situada en el plano σ y con una irradiancia proporcionada por $I(y, z)$. También se muestra en una pantalla de observación en la que se hallan dos puntos, P_1 y P_2 a una distancia R_1 y R_2, respectivamente, desde un elemento diminuto de S. Es precisamente en este plano donde deseamos determinar $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ la cual describe la correlación de las vibraciones del campo en esos dos puntos. Obsérvese que si bien la fuente es incoherente, la luz que alcanza P_1 y P_2 estará, por lo general, correlacionada hasta cierto punto, puesto que cada elemento de la fuente contribuye al campo en ese punto.

El cálculo de $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ desde los campos en P_1 y P_2 da como resultado una integral con una estructura conocida cuya forma y cuyos resultados serán iguales a los de una integral de difracción muy conocida, con tal que cada término se vuelva a interpretar correctamente. Por ejemplo, $I(y, z)$ aparece en esa integral de coherencia donde habría una función de abertura si fuera, de hecho, una integral de difracción. Por lo tanto, supongamos que S no sea una fuente sino una abertura de tamaño y forma iguales y supongamos que $I(y, z)$ no describa la irradiancia sino que su forma funcional corresponda a la distribución del campo en la abertura. Dicho de otra forma, imaginemos que haya una transparencia en la abertura cuyas características de transmisión de amplitud correspondan, desde un punto de vista funcional, a $I(y, z)$. Asimismo, imaginemos que la abertura esté iluminada por una onda esférica que converge hacia el punto fijo P_2 (véase figura 12.12*b*) de manera que *haya una figura de difracción centrada en* P_2. Esta distribución del campo difractado, normalizado a la unidad en P_2, es igual en todas partes (es decir, en P_1) al valor de $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ en ese punto. Este es el teorema de van Cittert-Zernike.

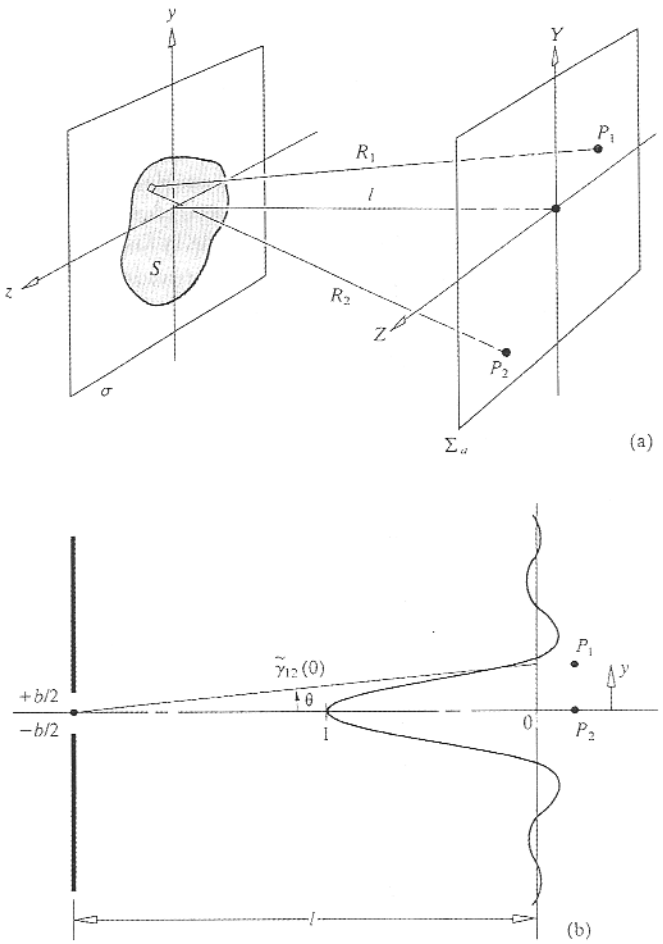


FIGURA 12.12 *(a)* Geometría del teorema de van Cittert-Zernike. *(b)* La figura de difracción normalizada corresponde al nivel de coherencia. Aquí, la figura de difracción de una fuente de rendija rectangular es sinc $(\pi by/l\lambda)$.

Cuando P_1 y P_2 están muy cerca y S es pequeña comparada con l, el grado de coherencia complejo equivale a la transformada normalizada de Fourier de la distribución de la irradiancia en la fuente. Asimismo, si la irradiancia de la fuente es uniforme, entonces $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ es sencillamente una función sinc cuando la fuente es una rendija y una función Bessel cuando es circular. Obsérvese que en la figura 12.12*b* la función sinc

corresponde a la de la figura 10.13, donde $\beta = (kb/2)$ sen θ y $\theta \approx$ sen θ. Por lo tanto, si P_1 está a una distancia y desde P_2, $\beta = kb\theta/2$ y $\theta = y/l$, por lo tanto $|\tilde{\gamma}_{12}(0)| = |\text{sinc}\ (\pi by/l\lambda)|$. Este resultado se analiza más detalladamente en la sección de problemas.

12.4 Interferometría estelar y coherencia

12.4.1 El interferómetro estelar de Michelson

En 1890 A. A. Michelson, siguiendo un consejo que le había dado anteriormente Fizeau, propuso un mecanismo interferométrico (figura 12.13) interesante aquí, tanto porque fue el precursor de algunas técnicas modernas importantes como porque se presta a una interpretación en términos de la teoría de coherencia. La función del *interferómetro estelar*, como es llamado, es medir las dimensiones angulares pequeñas de cuerpos astronómicos lejanos.

Dos espejos móviles puestos a cierta distancia entre sí, M_1 y M_2, recogen los rayos que se suponen paralelos, de una estrella muy lejana. La luz es entonces canalizada por medio de los espejos M_3 y M_4 y a través de las aberturas S_1 y S_2 de una máscara y de allí a través del objetivo del telescopio. Los caminos ópticos $M_1M_3S_1$ y $M_2M_4S_2$ se hacen iguales de manera que la diferencia relativa del ángulo de fase entre una perturbación en M_1 y M_2 es la misma que la diferencia entre S_1 y S_2. Las dos aberturas generan la distribución habitual de franjas del experimento de Young en el plano focal del objetivo. A decir verdad, la máscara y las aberturas no son realmente necesarias, pudiendo los espejos solos servir como aberturas.

Supongamos ahora que apuntamos el instrumento de manera tal que su eje óptico esté dirigido hacia una de las estrellas de una configuración de estrellas dobles muy juntas. Los rayos que llegan al interferómetro procedentes de cualquiera de las estrellas estarán bien colimados dadas las tremendas distancias implicadas. Además suponemos, al menos por un momento, que la luz tiene un ancho de línea estrecho centrado alrededor de una longitud de onda media $\bar{\lambda}_0$. Las perturbaciones que se dan en S_1 y S_2 de la estrella axial están en fase, formándose así un patrón de bandas brillantes y oscuras centrado en P_0.

De manera parecida, los rayos de la otra estrella llegan con algún ángulo θ, pero esta vez las perturbaciones en M_1 y M_2 (y, por lo tanto, en S_1 y S_2) están desfasadas en aproximadamente $\bar{k}_0 h\theta$ o, si se quiere, tienen un retardo temporal de $h\theta/c$ como se indica en la figura 12.13*b*. El sistema de franjas resultante está centrado alrededor de un punto P_1 desplazado en un ángulo θ' desde P_0 de tal manera que $h\theta/c = a\theta'/c$. Puesto que estas estrellas se comportan como si fueran fuentes puntuales incoherentes,

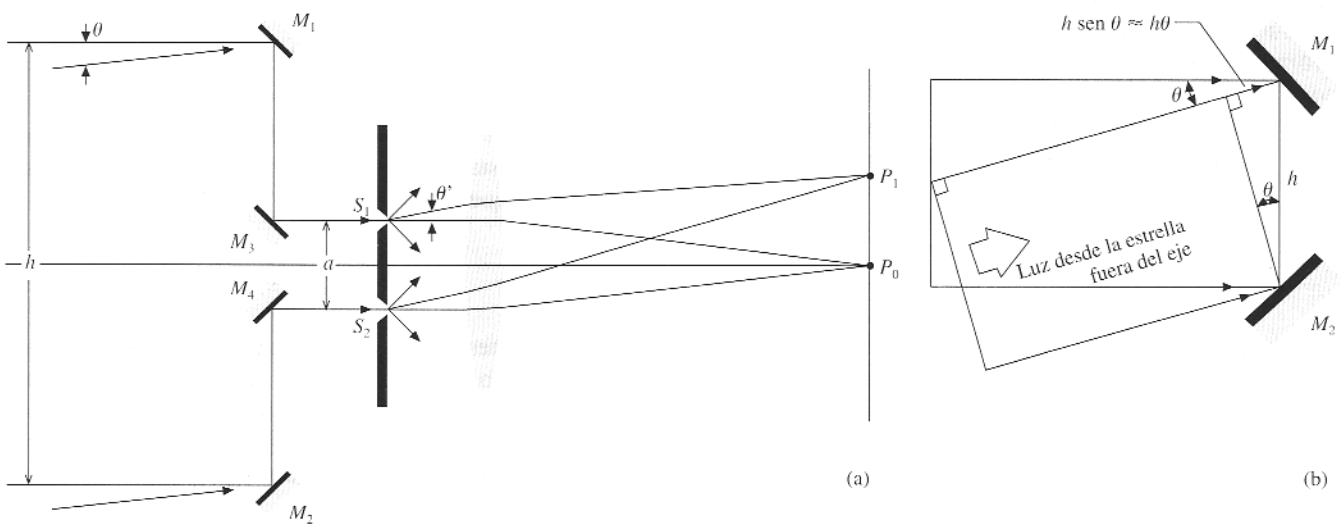


FIGURA 12.13 Interferómetro estelar de Michelson.

las distribuciones individuales de irradiancia se superpondrán simplemente. La separación entre las franjas formadas por cualquiera de las estrellas es igual y depende sólo de a. Sin embargo, la visibilidad varía con h. Por consiguiente, si h se aumenta de casi cero hasta $\bar{k}_0 h\theta = \pi$, es decir, hasta que

$$h = \frac{\bar{\lambda}_0}{2\theta} \tag{12.27}$$

los dos sistemas de franjas aumentarán su desplazamiento relativo hasta que finalmente el máximo de una estrella se superponga al mínimo de la otra, donde, si sus irradiancias son iguales, $\mathcal{V} = 0$. Por consiguiente, cuando las franjas desaparezcan, sólo será necesario medir h para determinar la separación angular, θ, entre las estrellas. Obsérvese que el valor apropiado de h varía inversamente con θ.

Obsérvese que si bien se considera que las fuentes puntuales, las dos estrellas, están completamente decorrelacionadas, los campos ópticos resultantes en dos puntos cualquiera (M_1 y M_2) no son necesariamente incoherentes. En este caso, según h se hace cada vez más pequeña, la luz de cada fuente puntual llega a M_1 y M_2 con una fase relativa esencialmente igual a cero; $\mathcal{V}$ se acerca a 1 y los campos en esos puntos son extremadamente coherentes.

El diámetro angular (θ) de ciertas estrellas individuales puede medirse de manera muy parecida a un sistema de estrellas dobles. Una vez más, la visibilidad de las franjas corresponde al grado de coherencia del campo óptico en M_1 y M_2. Si se supone que la estrella es una distribución circular de fuentes puntuales incoherentes tal que tenga un brillo uniforme, su visibilidad será equivalente a la que ya se recogió en la figura 12.7. Anteriormente, dijimos que para esta clase de fuentes, $\mathcal{V}$ era proporcionada por una función Bessel de primer orden, pudiendo de hecho expresarse como

$$\mathcal{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(0)| = 2\left|\frac{J_1(\pi h\theta/\bar{\lambda}_0)}{\pi h\theta/\bar{\lambda}_0}\right| \tag{12.28}$$

Recordemos que $J_1(u)/u = \frac{1}{2}$ en $u = 0$, siendo 1 el valor máximo de $\mathcal{V}$. El primer valor cero de $\mathcal{V}$ se da cuando $\pi h\theta/\bar{\lambda}_0 = 3{,}83$ como se ve en la figura 10.28. De modo equivalente, las franjas desaparecen cuando

$$h = 1{,}22\frac{\bar{\lambda}_0}{\theta} \tag{12.29}$$

y, como antes, se mide simplemente h para encontrar θ.

En la disposición de Michelson, los dos espejos exteriores podían moverse sobre una gran viga que estaba montada sobre el reflector de 100 pulgadas del observatorio del Monte Wilson. Betelgeuse (α Orión) fue la primera estrella cuyo diámetro angular se midió con este dispositivo. Es la estrella naranja que se ve en la parte superior izquierda de la constelación de Orión. De hecho, su nombre es una contracción de la frase árabe que significa la *axila de la del centro* (es decir, Orión). Las franjas formadas por el interferómetro, en una noche fría de diciembre de 1920, se hicieron desaparecer para $h = 121$ pulgadas y con $\bar{\lambda}_0 = 570$ nm, $\theta = 1{,}22(570 \times 10^{-9})/121(2{,}54 \times 10^{-2}) = 22{,}6 \times 10^{-8}$ rad ó 0,047 segundos de arco. Usando su distancia conocida, determinada con medidas de paralaje, el diámetro de la estrella resultó ser unos 240 millones de millas o 280 veces el diámetro del sol. De hecho, Betelgeuse es una estrella variable irregular cuyo diámetro máximo es tan grande que es mayor que la órbita de Marte alrededor del Sol. La limitación principal en el uso del interferómetro estelar se debe a la separación tan grande que debe existir entre los espejos para estudiar cualquier estrella, salvo las mayores. Esto es cierto también en radioastronomía donde se ha usado ampliamente una disposición análoga a fin de medir la extensión de las fuentes celestiales con emisiones en radiofrecuencia.

Por cierto, suponemos, como se hace a menudo, que «buena» coherencia significa una visibilidad de 0,88 o mejor. Para una fuente en forma de disco, esto se da cuando $\pi h\theta/\bar{\lambda}_0$ de la ecuación (12.28) es igual a uno, es decir cuando

$$h = 0{,}32\frac{\bar{\lambda}_0}{\theta} \tag{12.30}$$

Para una fuente de ancho de banda estrecho de diámetro D puesta a una distancia R, existe un **área de coherencia** igual a $\pi(h/2)^2$ en la que $|\tilde{\gamma}_{12}| \geq 0{,}88$. Ya que $D/R = \theta$

$$h = 0{,}32\frac{R\bar{\lambda}_0}{D} \tag{12.31}$$

Estas expresiones son muy útiles para estimar los parámetros físicos requeridos en un experimento de interferencia o difracción. Por ejemplo, si ponemos un filtro rojo sobre una fuente de una linterna en forma de disco cuyo diámetro es de 1 mm y nos colocamos a 20 m de ella, entonces

$$h = 0{,}32(20)(600 \times 10^{-9})/10^{-3} = 3{,}8 \text{ mm}$$

donde la longitud de onda media se toma igual a 600 nm. Esto significa que una serie de aberturas colocadas a una distancia h o menor, producirá unas franjas buenas. Evidentemente, el área de coherencia aumenta con R y esta es la razón por la cual podemos encontrar siempre una luz del alumbrado público, brillante y alejada que podemos utilizar como fuente conveniente.

12.4.2 Interferometría de correlación

Regresemos por un momento a la representación de una perturbación que emana de una fuente térmica, como se vio en la sección 7.4.3. Aquí, la palabra *térmica* indica un campo luminoso que surge principalmente de la superposición de ondas emitidas espontáneamente procedentes de muchas fuentes atómicas independientes. [3] Un campo óptico cuasimonocromático puede representarse por

$$E(t) = E_0(t) \cos [\varepsilon(t) - 2\pi\bar{\nu}t] \qquad [7.65]$$

La amplitud es una función que varía de forma relativamente lenta con el tiempo, como lo hace la fase. Por esto, la onda tal vez sufra algunos miles de oscilaciones antes de que la amplitud (es decir, la envolvente de las vibraciones del campo) o la fase cambien sensiblemente. Por lo tanto, así como el tiempo de coherencia es una medida del intervalo de fluctuación de la fase, también es una medida del intervalo en el que $E_0(t)$ es bastante previsible. Las grandes fluctuaciones en ε son acompañadas generalmente por grandes fluctuaciones de E_0. Es posible que el conocimiento de estas fluctuaciones de la amplitud de campo esté relacionado con las fluctuaciones de la fase y, por lo tanto, con las funciones de correlación (es decir, coherencia). Por consiguiente, en dos puntos del espacio-tiempo donde las fases del campo están correlacionadas, se podría pensar que también las amplitudes estuvieran relacionadas.

Cuando existe una distribución de franjas para el interferómetro estelar de Michelson, es porque los campos en M_1 y M_2, las aberturas, están de alguna manera correlacionados; es decir, $\tilde{\Gamma}_{12}(0) = \langle \tilde{E}_1(t)\tilde{E}_2^*(t)\rangle_T \neq 0$. Si pudiéramos medir las amplitudes de los campos en esos puntos, sus fluctuaciones demostrarían igualmente una interrelación. Ya que esto no es práctico por las altas frecuencias implicadas, en su lugar podríamos medir y comparar las fluctuaciones de la irradiancia para las posiciones de M_1 y M_2 y, a partir de ahí, deducir, de alguna forma hasta ahora desconocida, $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|$. Dicho de otra forma, si hay valores de τ para los cuales $\tilde{\gamma}_{12}(\tau)$ es distinto de cero, el campo en los dos puntos será parcialmente coherente, implicando una correlación entre las fluctuaciones de la irradiancia en esas posiciones. Esta es la idea esencial que se esconde detrás de una serie de experimentos que R. Hanbury-Brown llevó a cabo entre 1952 y 1956 en colaboración con R. Q. Twiss y otros. La culminación de su trabajo fue el denominado *interferómetro de correlación.*

Hasta ahora hemos desarrollado únicamente una justificación intuitiva relativa al fenómeno, más que un tratamiento teórico firme. Pero, puesto que dicho análisis va más allá del ámbito de este estudio, tendremos que conformarnos únicamente con mencionar sus aspectos más sobresalientes. [4] Como en la ecuación (12.14), nos interesa determinar la función de correlación cruzada, esta vez, de las irradiancias en dos puntos en un campo parcialmente coherente, $\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle_T$. Se supone que los trenes de onda contribuyentes, que se representan nuevamente por campos complejos, han sido emitidos al azar de acuerdo con una estadística gaussiana con el resultado final de que

$$\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle_T = \langle I_1\rangle_T\langle I_2\rangle_T + |\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)|^2 \qquad (12.32)$$

o

$$\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle_T = \langle I_1\rangle_T\langle I_2\rangle_T[1 + |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|^2] \qquad (12.33)$$

Las fluctuaciones instantáneas de irradiancia $\Delta I_1(t)$ y $\Delta I_2(t)$ se proporcionan a través de las variaciones de las irradiancias instantáneas $I_1(t)$ e $I_2(t)$ en sus valores medios $\langle I_1(t)\rangle_T$ e $\langle I_2(t)\rangle_T$, como en la figura 12.14. Por lo tanto, si usamos

$$\Delta I_1(t) = I_1(t) - \langle I_1\rangle_T \qquad \text{y} \qquad \Delta I_2(t) = I_2(t) - \langle I_2\rangle_T$$

y el hecho de que

$$\langle \Delta I_1(t)\rangle_T = 0 \qquad \text{y} \qquad \langle \Delta I_2(t)\rangle_T = 0$$

[3] A veces, la luz térmica se denomina luz *gaussiana* porque la amplitud del campo sigue una distribución de probabilidad gaussiana, p.13.

[4] Para un estudio completo, véase, por ejemplo, L. Mandel, «Fluctuations of Light Beams», *Progress in Optics,* Vol. II, p. 193, o Françon, *Optical Interferometry,* p. 182.

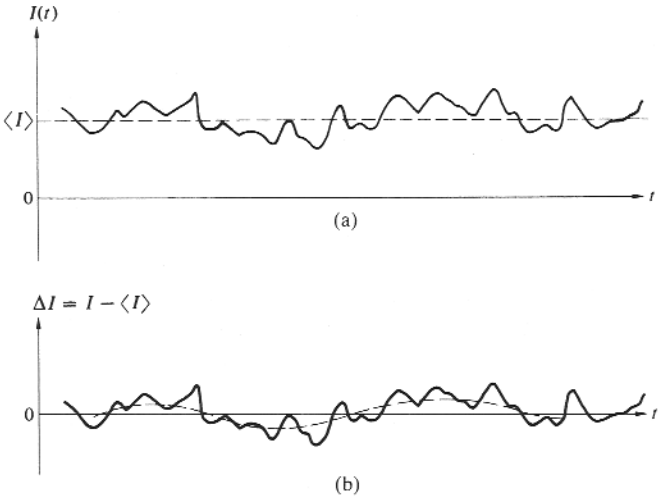


FIGURA 12.14 Variaciones de la irradiancia.

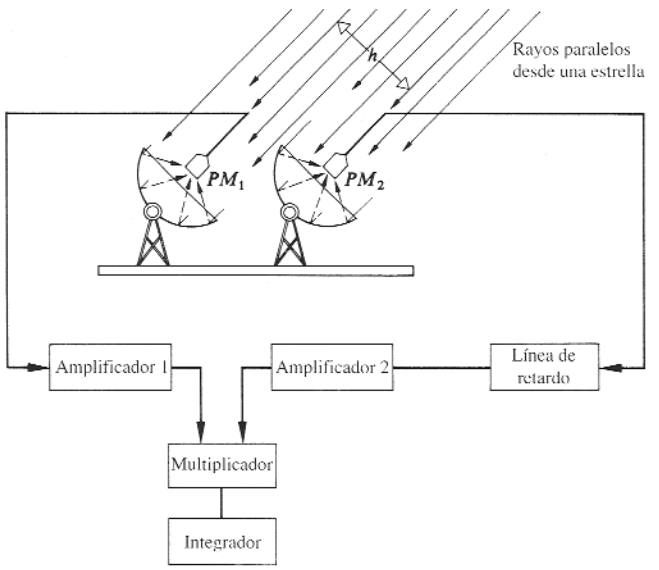


FIGURA 12.15 Interferómetro de correlación estelar.

las ecuaciones (12.32) y (12.33) se convierten en

$$\langle \Delta I_1(t+\tau)\Delta I_2(t)\rangle_T = |\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)|^2 \qquad (12.34)$$

o

$$\langle \Delta I_1(t+\tau)\Delta I_2(t)\rangle_T = \langle I_1\rangle_T\langle I_2\rangle_T|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|^2 \qquad (12.35)$$

(Problema 12.11). Estas son las correlaciones cruzadas deseadas de las fluctuaciones de la irradiancia que existirán mientras el campo sea parcialmente coherente en los dos puntos examinados, correspondiendo, por cierto, a luz linealmente polarizada. Cuando la onda no está polarizada, un factor multiplicativo de $\frac{1}{2}$ deberá introducirse en el lado derecho.

La validez del principio de la interferometría de correlación se estableció por primera vez en la región del espectro de radiofrecuencias donde la detección de la señal fue sencilla. Inmediatamente después, en 1956, Hanbury-Brown y Twiss propusieron el interferómetro óptico estelar que se ilustra en la figura 12.15. Pero los únicos detectores adecuados que pudieron utilizarse con frecuencias ópticas fueron los dispositivos fotoeléctricos cuya modalidad operativa depende de la naturaleza cuántica de un campo luminoso. Por consiguiente

> ... no era de ningún modo cierto que la correlación se conservaría totalmente durante el proceso de emisión fotoeléctrica. Por estas razones se llevó a cabo un experimento de laboratorio como se describe abajo. [5]

[5] Extraído de R. Hanbury-Brown y R. Q. Twiss, «Correlation Between Photons in Two Coherent Beams of Light», *Nature* **127**, 27 (1956).

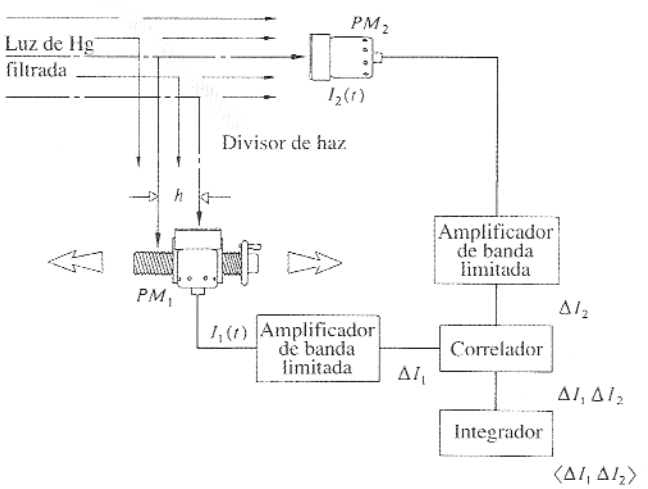


FIGURA 12.16 Experimento de Hanbury-Brown y Twiss.

Dicho experimento se muestra en la figura (12.16). La luz filtrada de un arco de Hg se hacía pasar a través de una abertura rectangular mientras que diferentes porciones del frente de onda emergente se muestreaban por medio de dos fotomultiplicadores, PM_1 y PM_2. El grado de coherencia se alteró moviendo PM_1, es decir, variando h. Las señales de los dos fotomultiplicadores eran supuestamente proporcionales a las irradiancias incidentes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ que sucesivamente se filtraron y amplificaron de manera que la componente constante, *cc*, de cada una de las señales (siendo proporcionales a $\langle I_1\rangle_T$ e $\langle I_2\rangle_T$) se eliminó, dejando únicamente las fluctuaciones, es decir, $\Delta I_1(t) = I_1(t) - \langle I_1\rangle_T$ y $\Delta I_2(t) = I_2(t) - \langle I_2\rangle_T$. Estas dos señales se multiplicaron juntas en el correlador, registrándose el promedio temporal del producto, que era proporcional a $\langle \Delta I_1(t)\Delta I_2(t)\rangle_T$. Los valores de $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2$ relativos a distintas separaciones, h, que se deducen experimentalmente de la ecuación (12.35), concordaban con aquellos calculados a partir de teoría. Para la geometría conocida, la correlación existía definitivamente, conservándose además a través de la detección fotoeléctrica.

El ancho de banda de frecuencia de las fluctuaciones de la irradiancia equivale aproximadamente al ancho de banda ($\Delta\nu$) de la luz incidente, es decir, $(\Delta t_c)^{-1}$que es del orden de 100 MHz o más, lo cual resulta ser mucho mejor que intentar seguir los cambios del campo a una frecuencia de 10^{15} Hz. A pesar de ello, se requieren circuitos rápidos con anchos de paso de banda de unos 100 MHz. De hecho, los detectores tienen un tiempo de resolución finito T tal que las corrientes de las señales $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ son realmente proporcionales a los promedios de $I_1(t)$ e $I_2(t)$ en T y no a sus valores instantáneos. Por consiguiente, las fluctuaciones medidas se suavizan como se ilustra mediante la curva punteada de la figura 12.14*b*. Para $T > \Delta t_c$, siendo éste el caso más corriente, se obtiene una reducción, en un factor $\Delta t_c/T$, en la correlación que realmente se observa:

$$\langle \Delta\mathcal{I}_1(t)\Delta\mathcal{I}_2(t)\rangle = \langle \mathcal{I}_1\rangle\langle \mathcal{I}_2\rangle \frac{\Delta t_c}{T} |\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2 \qquad (12.36)$$

Por ejemplo, en la disposición de laboratorio anterior, el tiempo de coherencia de la luz de mercurio filtrada era de aproximadamente 1 ns mientras que la electrónica tenía un paso del ancho de banda recíproco o tiempo de integración efectivo de ≈40 ns. Obsérvese que la ecuación (12.36) no es conceptualmente diferente de la ecuación (12.35) —únicamente se ha hecho un poco más realista.

Inmediatamente después de su exitoso experimento de laboratorio, Hanbury-Brown y Twiss construyeron el interferómetro estelar de la figura 12.15. Se utilizaron espejos captadores para recoger la luz de las estrellas y enfocarla sobre dos fotomultiplicadores. Un brazo contenía una línea de retardo tal que los espejos pudieron localizarse físicamente a la misma altura, pudiendo incluso compensar cualquier diferencia en el tiempo de llegada de la luz. La medición de $\langle \Delta\mathcal{I}_1(t)\Delta\mathcal{I}_2(t)\rangle_T$ para distintas separaciones de los detectores permitió deducir el cuadrado del módulo del grado de coherencia $|\tilde{\gamma}_{12}(0)|^2$ que, a su vez, proporcionó el diámetro angular de la fuente, exactamente como hizo con el interferómetro estelar de Michelson. Esta vez, sin embargo, la separación h podía ser muy grande porque ya no era preciso preocuparse por perturbar la fase de las ondas, como ocurría en el dispositivo de Michelson. Allí, cualquier desplazamiento ligero en uno de los espejos de solo una fracción de longitud de onda resultaba ser nefasto. Aquí, por el contrario, la fase se eliminó de tal manera que los espejos no tuvieron que ser de gran calidad óptica. La estrella Sirio fue la primera que se examinó y su diámetro angular resultó ser de 0,0069 segundos de arco. Más recientemente, un interferómetro de correlación con una línea de base de 618 pies se construyó en Narrabri, Australia. El diámetro angular de determinadas estrellas del orden de 0,0005 segundos de arco puede medirse con este instrumento —esto está muy por debajo del diámetro angular de Betelgeuse (0,047 segundos de arco). [6]

La electrónica que forma parte de la correlación de la irradiancia podría simplificarse enormemente si la luz incidente fuera casi monocromática y con una densidad de flujo mucho más elevada. La luz láser no es térmica y no muestra el mismo tipo de fluctuaciones estadísticas, pudiendo, sin embargo, utilizarse para generar luz *pseudotérmica*. [7] Una fuente pseudotérmica consta de una fuente brillante corriente (un láser es muy conveniente) y un medio en movimiento con espesor óptico no *uniforme*, tal como un disco de vidrio esmerilado giratorio. Si el haz esparcido que sale de un trozo de cristal esmerilado inmóvil se examina con un *detector lo suficiente-*

[6] Para un análisis de los aspectos fotónicos de la correlación de la irradiancia véase Garbuny, *Optical Physics*, Sección 6.2.5.2 o Klein, *Optics*, Sección 6.4.

[7] Véanse W. Martienssen y E. Spiller, «Coherence and Fluctuations in Light Beams», *Amer. J. Phys.* **32,** 919 (1964) y A. B. Haner y N. R. Isenor, «Intensity Correlations from Pseudothermal Light Sources», *Amer. J. Phys.* **38**, 748 (1970). Merece la pena estudiar ambos artículos.

mente lento, las fluctuaciones de irradiancia inherente se suavizarán completamente. Poniendo el vidrio esmerilado en movimiento, aparecen fluctuaciones de irradiancia con un tiempo de coherencia simulado, proporcionado a la velocidad del disco. En realidad, se dispone de una fuente térmica extremadamente brillante de Δt_c variable (digamos, de 1 s a 10^{-5} s) que puede utilizarse para examinar toda una gama de efectos de coherencia. Por ejemplo, la figura 12.17 muestra la función de correlación que es proporcional a $[2J_1(u)/(u)]^2$, para una fuente de abertura circular pseudotérmica que se determina de las fluctuaciones de irradiancia. El esquema experimental se asemeja al de la figura 12.16 aunque la electrónica sea notablemente más simple. [8]

[8] Una válida referencia general para este capítulo es el artículo de revisión de L. Mandel y E. Wolf, «Coherence Properties of Optical Fields», *Revs. Modern Phys.* **37**, 231 (1965) cuya lectura es bastante pesada. Véase también K. I. Kellermann, «Intercontinental Radio Astronomy», *Sci. Amer.* **226**, 72 (febrero de 1972).

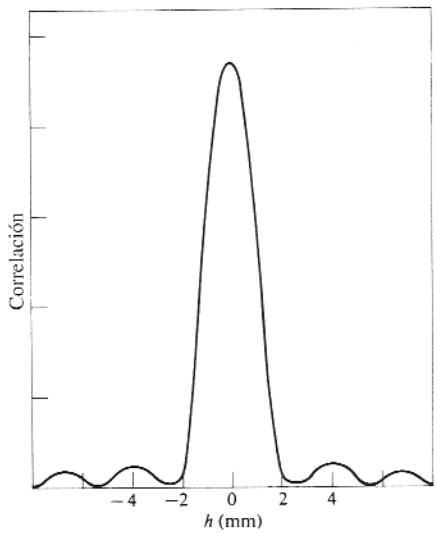


FIGURA 12.17 Función de correlación para una fuente pseudotérmica. [De A. B. Haner y N. R. Isenor, *Amer. J. Phys.*, **38**, 748 (1970)].

PROBLEMAS

12.1 Suponga que formamos una distribución de franjas con el interferómetro de Michelson, utilizando como fuente una lámpara de vapor de mercurio. Encienda la lámpara en su imaginación y analice lo que les pasará a las franjas según la presión del vapor de mercurio vaya aumentando hasta lograr su valor de estado estacionario.

12.2* Deseamos examinar la irradiancia producida en el plano de observación en el experimento de Young cuando las rendijas están iluminadas simultáneamente por dos ondas planas monocromáticas con frecuencia algo diferente, E_1 y E_2. Represéntelo gráficamente con respecto al tiempo, tomando $\lambda_1 = 0{,}8\lambda_2$. Ahora represente gráficamente el producto E_1E_2 (en un punto P) con respecto al tiempo. ¿Qué puede decir de su promedio en un intervalo relativamente largo? ¿Cómo es $(E_1 + E_2)^2$? Compárelo con $E_1^2 + E_2^2$. En un tiempo que resulte ser largo respecto a los períodos de las ondas, aproxime $\langle (E_1 + E_2)^2 \rangle_T$.

12.3* Recordando el problema anterior, imagine ahora que las cosas se extienden en el espacio en un momento determinado. Cada onda daría como resultado una distribución de irradiancia I_1 e I_2. Represente ambas ondas en el mismo eje del espacio y dibuje su suma $I_1 + I_2$. Analice sus resultados y compárelos con la figura 7.13. ¿Qué le ocurre a la irradiancia neta al añadir más ondas de frecuencia diferente? Explíquelo en términos de longitud de coherencia. Hipotéticamente, ¿qué le ocurre a la distribución según el ancho de banda de la frecuencia se va aproximando al infinito?

12.4 Recordando el problema anterior, vuelva a la autocorrelación de una función senoidal, la de la figura 11.37. Ahora, supongamos que tenemos una señal que consta de un número muy elevado de componentes sinusoidales. Imagine que toma la autocorrelación de esta compleja señal y represente gráficamente su resultado (empiece con tres o cuatro componentes), como en la parte *(e)* de la figura 11.37. ¿Cómo será la función de autocorrelación cuando el número de ondas sea extremadamente elevado y la señal se asemeje al ruido aleatorio? ¿Cuál es el sentido de $\tau = 0$? ¿Cómo se relaciona con el problema anterior?

12.5* Imagine que tenemos la disposición que se describe en la figura 12.3. Si la separación entre franjas (máx. a máx.) es 1 mm y si el ancho proyectado de la rendija fuente en la pantalla es 0,5 mm, calcule la visibilidad.

12.6 Refiriéndonos a la rendija fuente y a la disposición de la pantalla con orificios de la figura 12.16, demuestre mediante integración en la fuente que

$$I(Y) \propto b + \frac{\operatorname{sen}\,(\pi a/\lambda l)b}{\pi a/\lambda l} \cos\,(2\pi aY/\lambda s)$$

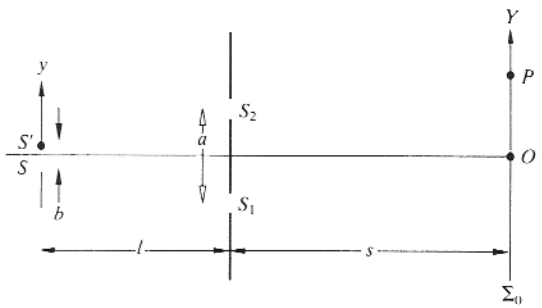


FIGURA P.12.6

12.7 Elabore los detalles que nos llevan a la expresión de la visibilidad proporcionada por la ecuación (12.22).

12.8 ¿Bajo qué circunstancias la irradiancia en Σ_o de la figura P.12.18 será igual a $4I_0$, donde I_0 es la irradiancia debida a cada una de las fuentes puntuales incoherentes?

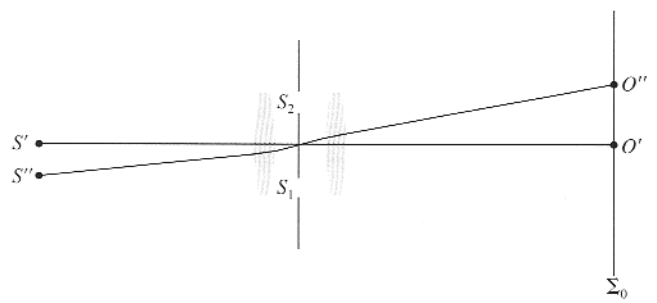


FIGURA P.12.8

12.9* Supongamos que llevamos a cabo el experimento de Young con un agujero circular pequeño con un diámetro de 0,1 mm enfrente de una lámpara de sodio ($\bar{\lambda}_0 = 589{,}3$ nm) que actúa como fuente. Si la distancia desde la fuente hasta las rendijas es de 1 m, ¿a qué distancia entre sí se hallarán las rendijas cuando el patrón de franjas desaparezca?

12.10 Considerando que el diámetro angular del Sol visto desde la Tierra es de aproximadamente $1/2°$, calcule el diámetro del área de coherencia correspondiente, excluyendo cualquier variación en brillo sobre la superficie.

12.11 Demuestre que las ecuaciones (12.34) y (12.35) se deducen de las ecuaciones (12.32) y (12.33).

12.12* Volvamos a la ecuación (12.21) y separémosla en dos términos que representen una contribución coherente y otra incoherente; la primera emerge de la superposición de dos ondas coherentes cuya irradiancia es de $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|I_1$ y $|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|\,I_2$ y con una fase relativa de $\alpha_{12}(\tau) - \varphi$; la segunda emerge de la superposición de ondas incoherentes cuya irradiancia es $[1 - |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|]I_1$ y $[1 - |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|]I_2$. Ahora, deduzca las expresiones para $I_{\text{coh}}/I_{\text{incoh}}$ y para $I_{\text{incoh}}/I_{\text{coh}}$. Analice el significado físico de esta formulación alternativa y cómo se podría considerar la visibilidad de las franjas en sus términos.

12.13 Imaginemos que disponemos del experimento de Young, donde uno de los dos orificios está cubierto por un filtro de densidad neutra que reduce la irradiancia en un factor 10, estando el otro cubierto por una lámina de cristal transparente de manera que no introduzca ningún desfase. Calcule la visibilidad en el caso hipotético de iluminación totalmente coherente.

12.14* Suponga que el dispositivo de doble rendija de Young esté iluminado por luz solar con una longitud de onda media de 550 nm. Calcule la separación entre las rendijas a la que las franjas desaparecerían.

12.15 Deseamos llevar a cabo una disposición de doble orificio iluminada por una fuente rendija incoherente, uniforme y cuasimonocromática cuya longitud de onda media es de 500 nm y ancho b, a una distancia de 1,5 m de la pantalla de aberturas. Si los orificios están colocados a una distancia entre sí de 0,50 mm, ¿cuán ancha puede ser la fuente si la visibilidad de las franjas en el plano de observación no puede ser inferior al 85%?

12.16* Supongamos que tenemos una fuente de rendija uniforme, cuasimonocromática e incoherente, como una lámpara de descarga con una máscara y un filtro delante de ella. Deseamos iluminar una región en una pantalla con aberturas distantes 10 m, de manera que el módulo del grado de coherencia complejo en cualquier punto en un área de 1,0 mm de ancho sea igual o superior al 90% cuando la longitud de onda es de 500 nm. ¿Cuán ancha puede ser la rendija?

12.17* En la figura P.12.17 se recogen dos fuentes puntuales cuasimonocromáticas incoherentes que iluminan dos orificios en la más-

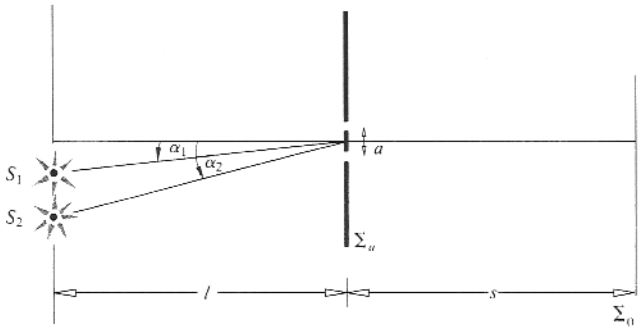


FIGURA P.12.17

cara. Demuestre que las franjas que se forman en el plano de observación tienen visibilidad mínima cuando

$$a(\alpha_2 - \alpha_1) = \tfrac{1}{2}m$$

donde $m = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \ldots$.

12.18 Imaginemos que tenemos una fuente cuasimonocromática ($\lambda = 500$ nm) ancha que consta de una serie de fuentes lineales verticales, incoherentes e infinitesimalmente estrechas, cada cual separada por 500 μm que se utiliza para iluminar un par de rendijas verticales excesivamente estrechas en una pantalla de aberturas distante 2,0 m. ¿A qué distancia deberían colocarse las aberturas a fin de crear un sistema de franjas con visibilidad máxima?

13 Óptica moderna: láseres y otros temas

13.1 Láseres y luz láser

Durante los primeros años de la década de los cincuenta, se desarrolló un dispositivo extraordinario denominado *máser*, gracias a los esfuerzos de numerosos hombres de ciencia entre los cuales destacaban Charles Hard Townes de Estados Unidos y Alexander Mikhailovich Prokhorov y Nikolai Gennadievich Basov de la ex Unión Soviética, quienes compartieron el Premio Nobel de Física de 1964 por sus trabajos. El máser, abreviatura de «Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation» —Amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación— es, como se deduce del nombre mismo, un amplificador de microondas de muy bajo ruido. [1] Funcionaba de manera poco convencional para entonces, empleando directamente la interacción mecánico-cuántica de la materia con la energía radiante. Poco después de su comienzo, hubo especulaciones acerca de la posibilidad de aplicar la misma técnica a la región óptica del espectro. En 1958, Townes y Arthur L. Schawlow establecieron proféticamente las condiciones físicas generales necesarias para conseguir la amplificación de la luz a través de la emisión estimulada de la radiación. Posteriormente, en julio de 1960, Theodore H. Maiman dio a conocer la primera operación exitosa llevada a cabo con máser óptico o **láser** —sin duda alguna, uno de los grandes hitos de la historia de la óptica y de toda la ciencia—.

El láser es un dispositivo mecánico-cuántico que consigue producir su «maravillosa luz» aprovechando las maneras sutiles con que los átomos interaccionan con la radiación electromagnética. Para tener una idea clara, aunque sólo básica, sobre cómo funciona el láser y de lo que hace sus emisiones tan especiales, empezaremos por presentar las teorías básicas de las fuentes térmicas comunes como, por ejemplo, las de las bombillas y de las estrellas. Para ello, necesitaremos una introducción a la radiación electromagnética de cuerpo negro, conceptos también fundamentales para cualquier tratamiento de la interacción entre la radiación electromagnética y la materia. A eso, se añadirá un estudio sobre la distribución de Boltzmann (pág. 592) aplicado a los niveles de energía atómica.

Con esta base, podremos valorar el concepto central de la emisión estimulada a través de los coeficientes A y B de Einstein (pág. 592); lo demás seguirá sin problemas.

[1] Véase James P. Gorden, «The Maser,» *Sci. Am.* **199**, 42 (diciembre de 1958).

13.1.1 Energía radiante y materia en equilibrio

No debe sorprender que si hubiera que reiniciar la física desde el principio, se empezaría por preguntarse qué es la luz, es decir la energía radiante. La teoría cuántica realizó sus primeros pasos en 1859, con el estudio de un fenómeno al parecer obscuro, denominado **radiación de cuerpo negro.** En ese año, Charles Darwin publicó *El origen de las especies* y Gustav Robert Kirchhoff brindó un desafío intelectual que llevaría a una revolución en la física.

Kirchhoff estaba estudiando el comportamiento de los cuerpos en equilibrio térmico durante el proceso de intercambio de energía radiante. Esta *radiación térmica* es la energía electromagnética emitida por todos los objetos, cuya fuente es el movimiento al azar de los átomos que la constituyen. Kirchhoff definió las habilidades que tiene un cuerpo para emitir y absorber energía electromagnética con un *coeficiente de emisión* ε_λ y un *coeficiente de absorción* α_λ. Epsilon es la energía por unidad de área y unidad de tiempo, emitida en un pequeño rango de longitud de onda en torno a λ (expresada en unidades de $W/m^2/m$): la radiación térmica cubre un amplio rango de frecuencias y necesariamente un dispositivo medidor de ener-

gía admite una banda de longitudes de onda. *Alfa es la fracción de la energía radiante incidente absorbida por unidad de área y unidad de tiempo dentro de ese rango de longitudes de onda;* no tiene unidades. Los coeficientes de emisión y de absorción dependen tanto de la naturaleza de la superficie del cuerpo (color, textura, etc.) como de la longitud de onda —un cuerpo que emite o absorbe bien a una longitud de onda puede emitir o absorber mal a otra.

Consideremos una cámara aislada de algún tipo, en equilibrio térmico, a una temperatura T fija. Supuestamente, se llenará de energía radiante en un sinfín de diferentes longitudes de onda (como por ejemplo en el caso de un horno incandescente). Kirchhoff supuso que existía una fórmula, o *función de distribución* $I_\lambda(\lambda)$, que depende de T y que proporciona los valores de la ***energía por unidad de área y unidad de tiempo a cada longitud de onda***; es decir la ***densidad de flujo espectral*** en el interior de la cavidad (o bien la ***exitancia espectral*** cuando sale de ella). Concluyó que, en todas las longitudes de onda, la cantidad *total* de energía absorbida por las paredes debía ser la misma que la cantidad emitida por ellas, porque, de otra manera, T cambiaría, y no lo hace. Asimismo, sostuvo que si las paredes estuvieran hechas de materiales diferentes (que reaccionarían de manera distinta con T), se aplicaría el mismo equilibrio individualmente a *cada* rango de longitudes de onda. La energía absorbida en λ, es decir $\alpha_\lambda I_\lambda$, tiene que igualar a la energía radiada, ε_λ, *siendo esto cierto para todos los materiales, independientemente de lo diferentes que sean.* Entonces **la ley de radiación de Kirchhoff** es:

$$\frac{\varepsilon_\lambda}{\alpha_\lambda} = I_\lambda \qquad (13.1)$$

donde la distribución I_λ, en unidades de $J/m^3{\cdot}s$ or W/m^3, es una función universal, la misma para cada tipo de pared de cavidad, independientemente del material, color, dimensión y forma y que depende sólo de T y de λ. ¡Esto es bastante extraordinario! Sin embargo, el ceramista inglés Thomas Wedgwood ya había observado mucho antes, en 1792, que los objetos puestos en un horno caliente se volvían todos rutilantes junto a las paredes del horno, independientemente de sus dimensiones, formas o materiales constituyentes.

Aunque Kirchhoff no consiguió definir la función general de la distribución de energía, pudo observar que un cuerpo perfectamente absorbente, cuyo $\alpha_\lambda = 1$, aparecerá negro y, en ese caso concreto, $I_\lambda = \varepsilon_\lambda$. Además, la función de distribución para un objeto perfectamente negro es la misma que para una cavidad aislada a la misma temperatura (visualicen ese cuerpo negro en equilibrio dentro de un horno caliente). La distribución de energía radiante en equilibrio en el interior de una cavidad aislada es, bajo todo aspecto, la misma «como si proviniera de un cuerpo completamente negro a la misma temperatura.» Por consiguiente, ***la energía que saliera de un pequeño agujero en la cámara debería ser idéntica a la radiación proveniente de un objeto perfectamente negro a la misma temperatura.***

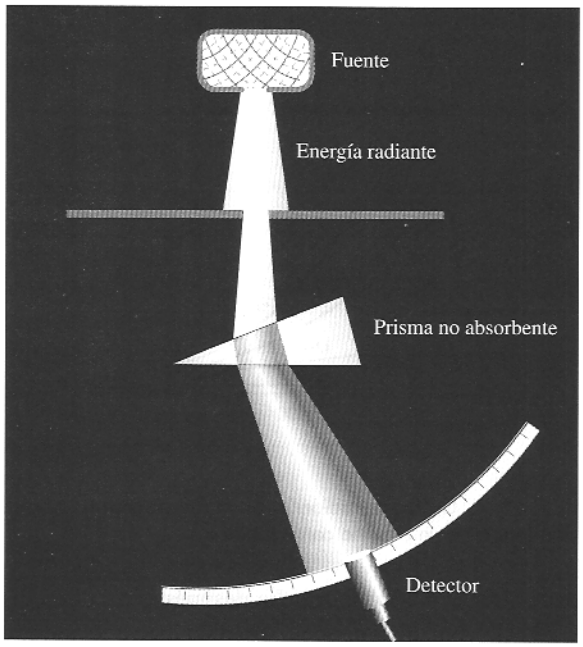
La comunidad científica aceptó el desafío de determinar experimentalmente I_λ; sin embargo, las grandes dificultades con las que se enfrentó ralentizaron enormemente los progresos. El esquema básico (figura 13.1*a*) era bastante simple, si bien la búsqueda de una fuente fiable resultó muy problemática y larga. Había que extraer los datos, independientemente de la construcción del detector específico, y para ello lo mejor era representar gráficamente la energía radiante por unidad de tiempo, que entraba en el detector por unidad de área (de la ventana de entrada) por unidad de intervalo de longitud de onda (admitida por el detector). Las clases de curvas que al final se indicaron, pueden verse en figura 13.1*b*; cada una de ellas es el diagrama de I_λ a una temperatura específica.

La ley de Stefan-Boltzmann

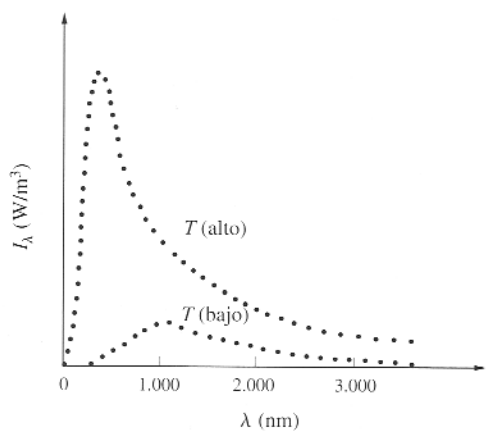
En 1865, John Tyndall publicó unos resultados experimentales en los que estableció que la energía total emitida por un filamento de platino caliente era 11,7 veces más grande operando a 1.200° C (1.473 K) que operando a 525° C (798 K). Sorprendentemente, Josef Stefan (1879) observó que la proporción entre $(1473\ K)^4$ y $(798\ K)^4$ era de 11,6, casi 11,7 y dedujo que la velocidad a la cual se radia la energía es proporcional a T^4. En este caso, Stefan tenía razón (y había tenido bastante suerte). Los resultados de Tyndall, de hecho, quedaban bastante lejos de los de un cuerpo negro y, sin embargo, L. Boltzmann (1884) dio a esta conclusión un fundamento teórico. El suyo era un estudio tradicional sobre la presión de radiación ejercida sobre un pistón en un cilindro, aplicando las leyes de la termodinámica y la ley de Kirchhoff. El análisis se desarrolló de manera muy similar a como se trataría un gas en un cilindro, pero, en vez de los átomos, el agente activo eran las ondas electromagnéticas. La ley resultante de Stefan-Boltzmann para cuerpos negros (a pesar de ser correcta, hoy en día se derivaría de otro modo):

$$P = \sigma A T^4 \qquad (13.2)$$

donde P es la energía radiante total a todas las longitudes de onda, A es el área de la superficie radiante, T es la temperatura



(a)



(b)

FIGURA 13.1 (*a*) Distribución experimental básica para medir la radiación de cuerpo negro. (*b*) Valores de I_λ con longitudes de onda sucesivas medidas por un detector. Cada una de las curvas corresponde a una fuente de temperatura específica.

absoluta en kelvin y σ es una constante universal ahora expresada como

$$\sigma = 5{,}670\,33 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$$

El área total bajo cualquiera de las curva de radiación del cuerpo negro de la figura 13.1*b* para una T específica representa la energía por unidad de área y de la ecuación (13.2) resultará $P/A = \sigma T^4$.

Los objetos reales no son cuerpos negros perfectos; el negro de humo tiene un poder absorbente de casi uno, pero sólo a ciertas frecuencias (incluyendo la visible, por supuesto) siendo mucho más bajo en el infrarrojo lejano. Sin embargo, la mayoría de los objetos se asemejan a cuerpos negros (por lo menos a ciertas temperaturas y longitudes de onda) —las personas, por ejemplo, son casi cuerpos negros para el infrarrojo. Por esta razón, resulta útil escribir una expresión parecida para los objetos comunes introduciendo un factor de multiplicación, llamado poder emisivo (ε), que relaciona la potencia radiada con la de un cuerpo negro cuyo $\varepsilon = 1$, a la misma temperatura. Por consiguiente,

$$P = \varepsilon \sigma A T^4$$

En la tabla 13.1 se recogen unos valores de ε (a temperatura ambiente) donde $0 < \varepsilon < 1$. Nótese que el poder emisivo no tiene unidades.

Si se coloca un objeto, cuyo *poder absorbente total* es α, en un hueco como una cavidad o una cámara, cuyo poder emisivo es ε_e a una temperatura T_e, el cuerpo irradiará a una velocidad de $\varepsilon \sigma A T^4$ absorbiendo energía en el interior del hueco a una velocidad de $\alpha(\varepsilon_e \sigma A T_e^4)$. Sin embargo, a cualquier temperatura a la que el cuerpo y el hueco están en equilibrio (es decir $T = T_e$), estas velocidades deben ser iguales; por tanto $\alpha \varepsilon_e = \varepsilon$ y esto tiene que ser verdadero para todas las temperaturas. La energía neta radiada (cuan-

TABLA 13.1 Algunos valores representativos de la emisividad total*

Material	ε
Papel de aluminio	0,02
Cobre, pulido	0,03
Cobre, oxidado	0,5
Carbón	0,8
Pintura blanca, plana	0,87
Ladrillo rojo	0,9
Cemento	0,94
Pintura negra, plana	0,94
Hollín	0,95

*T = 300 K, temperatura ambiente.

do $T > T_e$) o absorbida (cuando $T < T_e$) por el cuerpo es entonces

$$P = \varepsilon\sigma A(T^4 - T_e^4)$$

Todos los cuerpos que no están a cero kelvin radian y el hecho de que T se eleve a la cuarta potencia, hace que la radiación sea muy sensible a las variaciones de temperatura. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo de 0° C (273 K) a 100° C (373 K), su potencia de radiación aumentará en 3,5 veces. Conforme se aumenta la temperatura, la energía radiada aumenta también; y por eso aumentar la temperatura de un objeto se hace más y más difícil (inténtese calentar una cuchara de acero a 1.300° C). Al aumentar la temperatura de un objeto también cambia la distribución de la energía emitida entre las varias longitudes de onda presentes. De hecho, cuando el filamento de una bombilla «se funde», la resistencia, la corriente y la temperatura aumentan; su color pasa de un normal blanco-rojizo a un fuerte brillo blanco-azulado.

La ley de desplazamiento de Wien

Quizás, el último éxito trascendental en la aplicación de la teoría clásica al problema de la radiación de cuerpo negro, se produjo en 1893 por mano del físico alemán y ganador del premio Nobel, Wilhelm Otto Fritz Franz Wien (1864-1928), conocido por sus amigos como Willy, quien formuló lo que hoy en día recibe el nombre de **ley de desplazamiento.** Cada curva de un cuerpo negro alcanza su altitud máxima a un valor de longitud de onda ($\lambda_{máx}$) que es típico suyo y, por lo tanto, de la temperatura absoluta T. A esa longitud de onda, el cuerpo negro radia la máxima energía. Wien consiguió demostrar que

$$\lambda_{máx}T = \text{constante} \qquad (13.3)$$

donde la constante fue experimentalmente calculada en 0,002898 m·K. La longitud de onda máxima es inversamente proporcional a la temperatura. *Al aumentar la temperatura, el bloque radiación se desplazará hacia longitudes de onda más cortas y frecuencias más elevadas* (véase la curva punteada de la figura 13.2). A medida que un trozo de carbón incandescente o una estrella ardiente se vuelven más calientes, se pasa del calor moderado de infrarrojo a rojo muy caliente y finalmente al blanco azulado. Una persona o un trozo de madera, ambos cuerpos negros aproximados solamente, radian en la mayoría del infrarrojo, empezando a brillar débilmente en el visible

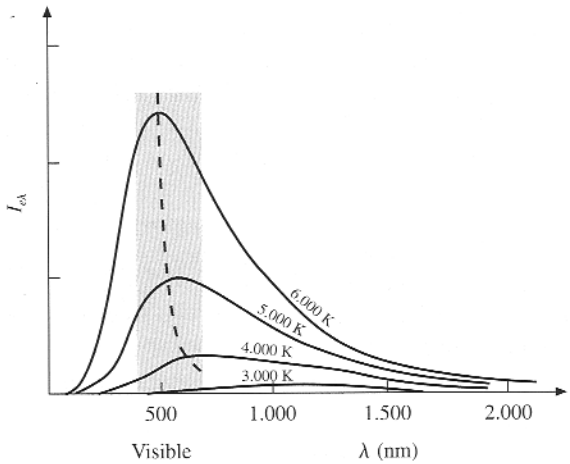


FIGURA 13.2 Curvas de radiación de un cuerpo negro. La hipérbola que atraviesa el punto máximo corresponde a la Ley de Wien.

cerca de 600° C ó 700° C, mucho después de su descomposición. El rojo cereza vivo, de un trozo de hierro incandescente aparece alrededor de los 1.300° C.

En 1899, los investigadores adelantaron mucho en la experimentación empleando, como fuente de radiación de cuerpo negro, un agujero pequeño dentro de una cavidad caliente (figura 13.3). La energía que entra al agujero se refleja en la cavidad hueca hasta que se haya absorbido (la pupila del ojo aparece negra por la misma razón). Un absorbente casi perfecto es emisor casi perfecto, y la región de un pequeño agujero en una pared de un horno es una fuente maravillosa de *radiación de cuerpo negro.*

A esa altura, la teoría clásica comenzó a vacilar. Todos los intentos por ajustar la curva de radiación completa (figu-

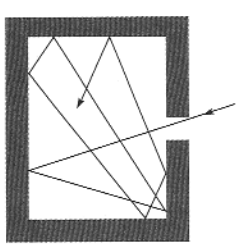


FIGURA 13.3 La energía radiante penetrando en un orificio diminuto en una cámara se moverá en su interior con pocas probabilidades de salir a través de la apertura que, por lo tanto, el agujero parece negro. Por el contrario, la apertura de una cámara recalentada se presenta como una fuente de cuerpo negro.

ra 13.2) con alguna expresión teórica basada en el electromagnetismo consiguieron éxitos muy limitados. Wien produjo una fórmula que estuvo acorde con los datos observados en la región de longitud de onda corta desviándose, sin embargo, de ellos notablemente para valores elevados de λ. Lord Rayleigh y, más tarde, Sir James Jeans (1877-1946), desarrollaron una descripción en términos de los modos de ondas estacionarias del campo dentro de la cavidad. Sin embargo, la *fórmula de Rayleigh-Jeans* resultante sólo se ajustaba a las curvas experimentales en la región de longitudes de onda muy largas. El fracaso de la teoría clásica fue totalmente inexplicable; se había alcanzado un punto de inflexión en la historia de la física.

La ley de radiación de Planck

Max Karl Ernst Ludwig Planck, a los 42 años, se convirtió, quizás sin quererlo, en el padre de la teoría cuántica. Si bien, como muchos otros investigadores de finales de siglo, él también estaba trabajando sobre la radiación de cuerpo negro, Planck consiguió no sólo formular la función de distribución de Kirchhoff, sino también revolucionar la física entera, durante el proceso. No podemos entretenernos aquí en los detalles de su derivación puesto que, además, la versión original era incorrecta, siendo rectificada algunos años después por Bose y Einstein. Sin embargo, ésta provocó un impacto tan fuerte que merece la pena detenerse sobre los aspectos acertados.

Planck sabía que al inyectar una distribución arbitraria de moléculas energéticas en una cámara a temperatura constante, ésta se convertiría en la distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, ya que alcanzaría inevitablemente el equilibrio. Supuestamente, al inyectar una distribución arbitraria de energía radiante dentro de una cavidad a temperatura constante, ésta también se convertirá en la distribución de energías de Kirchhoff, dado que llegará inevitablemente al equilibrio.

En octubre de 1900, Planck presentó una fórmula de la distribución que se basaba en los resultados experimentales más recientes. Este recurso matemático al que Planck llegó por «meras conjeturas», concordaba perfectamente con los datos disponibles. Contenía dos constantes fundamentales, una de las cuales (h) se conocería más tarde como **la constante de Planck** que de por sí constituía un éxito notable, aunque no explicaba nada. A pesar de que Planck no se percatara de ello en ese entonces, estaba a punto de dar un paso que inadvertidamente revolucionaría nuestra percepción del universo físico.

Lógicamente, él se propuso encontrar una justificación teórica que condujera a la ecuación que ya había formulado. Supuso así que la radiación dentro de una cámara interaccionaba con unos simples osciladores de tipo no especificado que vibraban en la superficie de las paredes de la cavidad, absorbiendo y emitiendo energía radiante independientemente del material empleado. (De hecho, los átomos de las paredes se comportan de la misma manera. A causa de su configuración muy densa en el interior de las paredes sólidas, los átomos interaccionan con numerosos vecinos, lo cual perturba completamente sus características vibraciones de resonancia agudas y les permite oscilar en un amplio rango de frecuencias, emitiendo un espectro continuo). A pesar de sus esfuerzos, Planck no consiguió realizar su modelo. En ese período, él era fiel seguidor de E. Mach, quien no tomaba en mucha consideración la realidad de los átomos. Sin embargo, la persistente insolubilidad del problema, llevó a Planck a «una acción desesperada» ya que recurrió, indecisamente, al «desagradable» método estadístico de Boltzmann que había sido creado para estudiar las nubes de átomos que constituyen un gas.

A pesar de que Boltzmann, el gran defensor del átomo, y Planck fueran enemigos intelectuales durante un tiempo, éste ahora se vio obligado a recurrir al análisis estadístico de su rival que, irónicamente, llegaría a aplicar incluso erróneamente. Efectivamente, si el esquema de Boltzmann para el cálculo de los átomos iba a aplicarse a algo continuo, como la energía, sería preciso ajustar un poco el procedimiento. Así que, según Planck, había que considerar, por lo menos momentáneamente, la energía total de los osciladores como repartida en «elementos energéticos», para poder contarlos y a los que se les asignó un valor proporcional a la frecuencia ν de los resonadores. No hay que olvidar que ya tenía en su poder la fórmula que buscaba y que en ésa aparecía el término $h\nu$. La constante de Planck,

$$6{,}626\,075\,5 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s} \quad \text{o} \quad 4.135\,669\,2 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$$

es un número diminuto y por eso $h\nu$, que posee las unidades de energía, es también una cantidad muy pequeña. Por consiguiente, Planck fijó el valor del elemento energético igual a ésa: $\varepsilon = h\nu$.

Se trataba de un análisis estadístico donde contar era muy importante; aún más, al aplicar el método como Boltzmann lo había hecho, tuvo naturalmente que dar continuidad a la energía, como es usual. No nos detendremos aquí en los detalles, pero lo más significativo fue que él se acababa de tropezar con uno de los misterios de la naturaleza: **la energía está cuantizada** —llega en pequeños chorros, aunque Planck no era consciente de ello.

Él dedujo la siguiente formula para la excitancia espectral (o irradiancia espectral), que ya había determinado ajustando las curvas a los datos, y que representa su respuesta al desafío de Kirchhoff:

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\left[\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\right] \qquad (13.4)$$

donde k_B, es la constante de Boltzmann. Se trata de la **Ley de radiación de Planck** que, por supuesto, se aplicaba perfectamente a los datos de los cuerpos negros (figura 13.4). Obsérvese que la expresión incluye la velocidad de la luz, la constante de Boltzmann y la constante de Planck (h) y hace el enlace de la teoría electromagnética con el campo atómico.

Aunque la ecuación (13.4) representaba una novedad importante con respecto a las ideas precedentes, Planck no pretendía abandonar la teoría clásica. Para él, habría sido impensable incluso suponer que la energía radiante no fuese algo continuo. «Que, al principio, la energía fuera obligada a permanecer agrupada en ciertos cuantos...», comentó más tarde, «era una suposición puramente formal en la que no me entretuve mucho». Fue tan sólo hacia 1905, gracias a un pensador mucho más atrevido, Albert Einstein, que aprendimos que los osciladores atómicos eran algo real y que sus energías estaban cuantizadas. Cada oscilador podía existir sólo con una energía que fuese un número entero múltiplo de $h\nu$ (similar a la energía potencial *gravitacional* de una persona subiendo un tramo de escalera). Más aún, **la misma energía radiante está cuantizada**, ya que existe en descargas localizadas cuya cantidad es $\mathscr{E} = h\nu$.

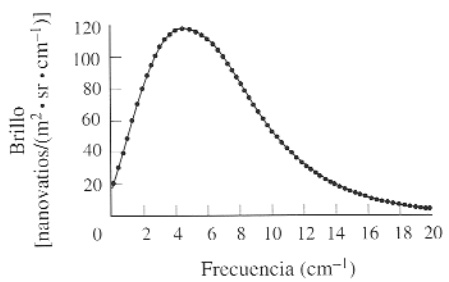


FIGURA 13.4 Radiación de fondo cósmica del Universo. Desde su creación a través del Big Bang, el Universo ha ido expandiéndose y enfriándose. Los puntos de referencia (medidos en el espectro de microonda) fueron detectados por el satélite Explorador de Fondo Cósmico (COBE). La línea continua es la curva de cuerpo negro de Planck para una temperatura de 2,735 ± 0,06 K.

13.1.2 La emisión estimulada

El láser logra «amplificar la luz» empleando átomos energéticos en un medio para reforzar el campo luminoso. Analicemos, ahora, el modo en que se distribuyen normalmente los estados de energía de un sistema de átomos a una temperatura arbitraria. Se trata de un problema que pertenece a la más amplia disciplina de la mecánica estadística y hay que abordarlo específicamente en términos de la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Población de niveles de energía

Imagínese una cámara repleta de gas en equilibrio a una temperatura T. Si T es bastante baja, como, por ejemplo, en una habitación normal, la mayoría de los átomos se encontrará en su estado fundamental, sin embargo, unos cuantos adquirirán momentáneamente suficiente energía para «subir» a un estado excitado. La distribución clásica de Maxwell-Boltzmann establece que, por término medio, un número de átomos por unidad de volumen, N_i, alcanzará cualquier estado excitado de energía $\mathscr{E}_i$ así que

$$N_i = N_0 e^{-\mathscr{E}_i/k_B T}$$

donde N_0 es una constante a una temperatura determinada. *Cuanto mayor sea el estado de energía, es decir, cuanto mayor sea el valor de $\mathscr{E}$, menor será la exponencial y menos átomos se hallarán en ese estado.*

Ya que nos ocuparemos de la transición atómica entre estados arbitrarios, consideremos el nivel energético j-ésimo donde $\mathscr{E}_j > \mathscr{E}_i$. Luego para éste $N_j = N_0 e^{-\mathscr{E}_j/k_B T}$, y la proporción de las poblaciones que ocupan estos dos estados será

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{e^{-\mathscr{E}_j/k_B T}}{e^{-\mathscr{E}_i/k_B T}} \qquad (13.5)$$

Ésta es la *población relativa* de la que se deduce que

$$N_j = N_i e^{-(\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i)/k_B T} = N_i e^{-h\nu_{ji}/k_B T} \qquad (13.6)$$

donde se aprovecha el hecho que la transición del estado j-ésimo al estado i-ésimo corresponde a un cambio de energía de $(\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i)$ y dado que estas transiciones van acompañadas por la emisión de un fotón con frecuencia ν_{ji}, podemos reemplazar $(\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i) = h\nu_{ji}$.

Los coeficientes *A* y *B* de Einstein

En 1916, Einstein ideó un interesante sistema teórico, bastante simple, del equilibrio dinámico de un medio material sumergido en radiaciones electromagnéticas, que absorbe y emite. Si bien dicho análisis se empleó para afirmar la Ley de radiación de Planck, resultó también muy importante para el establecimiento de los fundamentos teóricos del láser. El lector debería estar ya familiarizado con el mecanismo básico de la *absorción* (véase la figura 3.33 pág. 65). Supongamos que el átomo se encuentra en su estado fundamental, es decir el nivel energético más bajo. Un fotón dotado de una cantidad adecuada de energía interacciona con el átomo, al que le cede esa energía de manera que la nube electrónica asume una nueva configuración. El átomo pasa a un estado excitado de energía más elevado (figura 13.5). En un medio denso, el átomo probablemente interaccione con sus vecinos fluctuantes, transmitiéndoles su carga de energía mediante colisión.

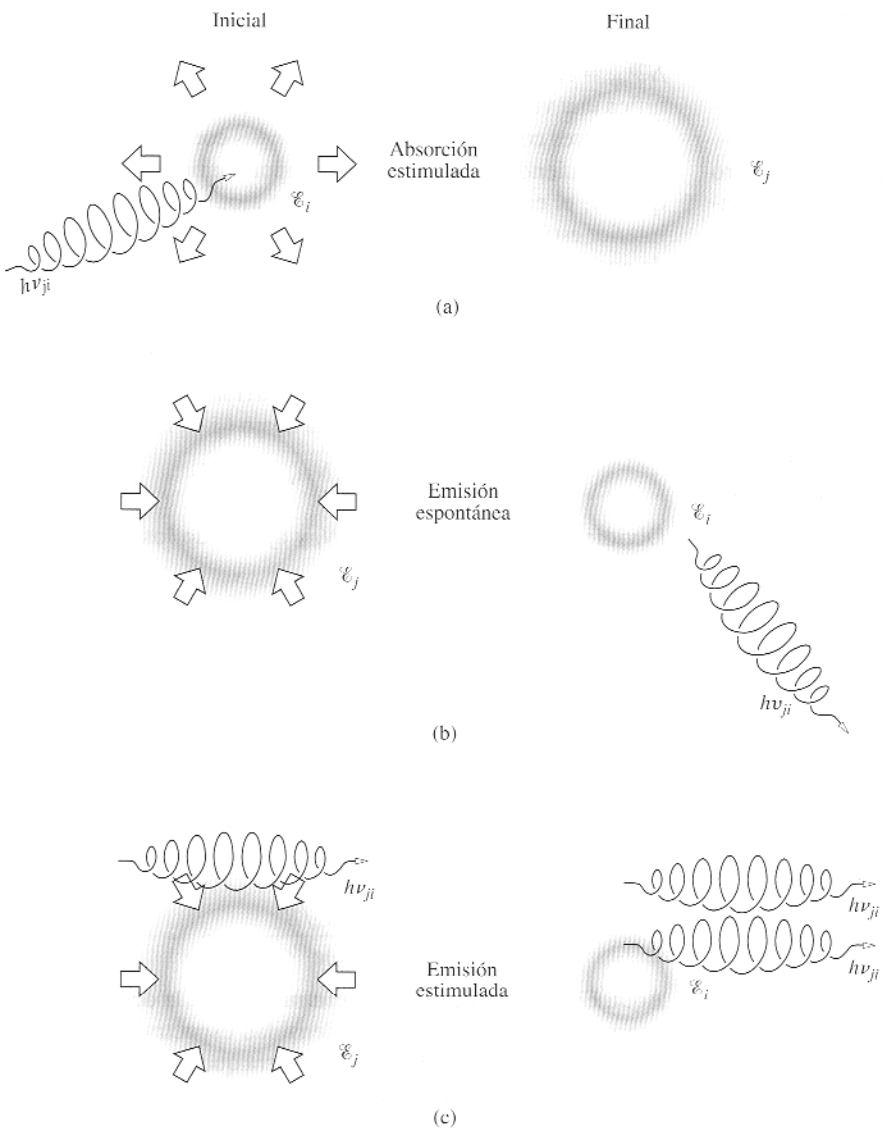


FIGURA 13.5 Representación esquemática de (*a*) la absorción estimulada, (*b*) emisión espontánea y (*c*) emisión estimulada.

Una configuración con un exceso energético parecido tiene, normalmente, aunque no siempre, una vida muy breve y, en unos 10 ns o así, sin la intervención de ninguna influencia externa, el átomo emitirá su exceso de energía como fotón, volviendo a la vez a un estado estable con un proceso llamado *emisión espontánea* (figura 13.5*b*).

Lo sorprendente es que hay también un tercer proceso alternativo, que Einstein observó primero y que es decisivo para la operación del láser, que se inventaría tan sólo casi medio siglo después. En un medio inundado por radiaciones electromagnéticas, un fotón puede interaccionar con un átomo excitado mientras que éste se halla aún en su configuración de energía superior. Luego el átomo puede soltar la energía en exceso conforme al fotón entrante, en un proceso que ahora se denomina **emisión estimulada** (figura 13.5).

En el caso de la absorción, la velocidad de cambio del número de átomos que pasan de un estado inicial a otro superior, dependerá de la fuerza del campo de fotones que inunda esos átomos. Dicho de otro modo, dependerá de la densidad de energía u, dada por la ecuación (3.34) y, más concretamente, de la densidad de energía en el rango de frecuencias que produce la transición, es decir, la densidad de energía espectral u_ν, cuya unidad son joules por metros cuadrados por 1/segundo ($J \cdot s/m^2$). (Cabe observar que si consideramos el campo de radiación como un gas de fotones, la densidad de energía espectral podrá considerarse como la densidad de fotones por unidad de intervalo de frecuencias). La velocidad de cambio del número de átomos, la **velocidad de transición**, también será proporcional a la población, es decir, la densidad del número de átomos en ese estado (N_i); cuanto más átomos haya, más podrán abandonar, mediante absorción, por segundo. Puesto que es el campo de fotones el que dirige este proceso, lo llamaremos **absorción estimulada**, donde la velocidad de transición será

[absorción estimulada]
$$\left(\frac{dN_i}{dt}\right)_{\text{ab}} = -B_{ij}N_i u_\nu \tag{13.7}$$

Aquí B_{ij} es una constante de proporcionalidad. El signo negativo se debe a que N_i decrece. Análogamente, para la emisión estimulada

[emisión estimulada]
$$\left(\frac{dN_j}{dt}\right)_{\text{st}} = -B_{ji}N_j u_\nu \tag{13.8}$$

En el caso de la emisión espontánea, el proceso es independiente del medio del campo y

[emisión espontánea]
$$\left(\frac{dN_j}{dt}\right)_{\text{sp}} = -A_{ji}N_j \tag{13.9}$$

Cabe recordar que la velocidad de transición, es decir, el número de átomos que realizan las transiciones por segundo, dividida por el número de átomos, representa la probabilidad de transición por segundo, $\mathcal{P}$. Consecuentemente, la probabilidad por segundo de emisión espontánea es $\mathcal{P}_{\text{sp}} = A_{ji}$.

Para cada átomo excitado que lleva a cabo una transición espontánea hacia un estado inferior, la probabilidad de transición inversa por segundo es la **vida media o tiempo de vida** del estado excitado τ. Así (bajo condiciones que excluyan todo mecanismo aparte de la emisión espontánea), si N átomos se hallan en estado excitado, la velocidad de transición total, es decir, el número de fotones emitidos por segundo, será $N\mathcal{P}_{\text{sp}} = NA_{ji} = N/\tau$. Una probabilidad de transición baja significa una vida media larga.

Las tres constantes A_{ji}, B_{ji} y B_{ij} son los coeficientes de Einstein. Siguiendo su razonamiento, supondremos (1) que a cualquier T, el campo de radiación y los átomos presentes en su interior están en equilibrio termodinámico; (2) que la densidad de energía posee las características de un cuerpo negro a T; y (3) que las densidades de número de los dos estados concuerdan con la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Dando por sentado que el sistema está en equilibrio, la velocidad de las transiciones hacia arriba ($i \rightarrow j$) deberá ser igual a la de las transiciones hacia abajo ($j \rightarrow i$):

$$B_{ij}N_i u_\nu = B_{ji}N_j u_\nu + A_{ji}N_j$$

Dividiendo ambas partes por N_i y ajustando los términos se obtendrá:

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{B_{ij}u_\nu}{A_{ji} + B_{ji}u_\nu}$$

Utilizando la ecuación (13.6), es decir lo que obtuvimos de la aplicación de la distribución de Maxwell-Boltzmann, se obtendrá:

$$e^{-h\nu_{ji}/k_{\text{B}}T} = \frac{B_{ij}u_\nu}{A_{ji} + B_{ji}u_\nu}$$

y resolviendo u_ν, tendremos

$$u_\nu = \frac{A_{ji}/B_{ji}}{(B_{ij}/B_{ji})e^{h\nu_{ji}/k_{\text{B}}T} - 1} \tag{13.10}$$

Aquí, Einstein observó que conforme $T \rightarrow \infty$, la densidad de la energía espectral, es decir, la densidad espectral de fotones, tiende a infinito. La figura 13.3 muestra que I_λ aumenta con T, y esto implica que u_ν se comportará de manera parecida. En realidad, $I_\nu = \frac{c}{4}u_\nu$ como veremos dentro de poco. En cualquier

caso, dado que $e^0 = 1$, el único modo para que u_ν sea grande será si

$$B_{ij} = B_{ji} = B$$

para valores elevados de T, pero ya que estas constantes son independientes de la temperatura, tienen que ser iguales a todas las T. Las probabilidades de emisión y absorción estimuladas son respectivamente $\mathcal{P}_{st} = B_{ji}u_\nu$ y $\mathcal{P}_{ab} = B_{ij}u_\nu$. Entonces **la probabilidad de emisión estimulada es idéntica a la probabilidad de absorción estimulada**; un átomo en un estado inferior tiene la misma probabilidad de llevar a cabo una transición estimada hacia arriba que un átomo excitado de realizar una estimulada hacia abajo.

Simplificando la notación (sea $A = A_{ji}$), la ecuación (13.10) se convertirá en

$$u_\nu = \frac{A}{B}\left[\frac{1}{e^{h\nu_{ji}/k_B T} - 1}\right] \tag{13.11}$$

Se puede expresar la proporción A/B mediante cantidades básicas comparando esta ecuación con

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\left[\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\right] \tag{13.4}$$

Pero primero hay que transformar I_λ en I_ν donde éstas son expresiones de la exitancia (que es la irradiancia dirigida hacia afuera) para intervalos $d\lambda$ y $d\nu$, respectivamente. Aplicando el hecho de que $\lambda = c/\nu$, la diferenciación nos dará $d\lambda = -cd\nu/\nu^2$. Como $I_\lambda\, d\lambda = I_\nu d\nu$, y quitando el signo (ya que nos dice sólo que al aumentar un diferencial el otro disminuye), obtendremos $I_\lambda c/\nu^2 = I_\nu$; y entonces

$$I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\right] \tag{13.12}$$

Ahora bien, como último paso, sólo habrá que comparar la densidad espectral de energía u_ν dentro de la cámara con la exitancia espectral

$$I_\nu = \frac{c}{4}u_\nu \tag{13.13}$$

que emerge de ella. En vez de cansar al lector con una derivación completa de esta relación, la analizaremos lo suficiente como para justificarla. Cabe recordar que I_ν corresponde a un flujo de energía que atraviesa un área normal unitaria, entrando por un lado y saliendo por el otro —un rayo que sale de la cámara. En la sección 3.3.1, vimos que el flujo instantáneo de potencia por área normal unitaria, el vector de Poynting, era proporcionado por $S = cu$ y, entonces en promedio, $I = cu$ para un rayo. En una cámara, sin embargo, con la luz que viaja en todas direcciones, no todos los fotones que contribuyen a u contribuirán a la exitancia en una dirección particular. En principio, en esa cámara, un área unidad colocada horizontalmente tendría tanta energía subiendo a través de ella como bajando. Además, únicamente las componentes perpendiculares al área contribuyen a S, así que se puede suponer un factor de $1/4$.

De las ecuaciones (13.11), (13.12) y (13.14) resulta que

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \tag{13.14}$$

La probabilidad de emisión espontánea es proporcional a la probabilidad de emisión estimulada y un átomo sensible a un mecanismo, será proporcionalmente sensible al otro también. Los láseres funcionan mediante emisión estimulada y cualquier fenómeno que produzca una emisión espontánea (es decir, A) perjudicando a una emisión estimulada (es decir, B), seguramente funcionará en detrimento del proceso. Dado que la proporción A/B varía según ν^3, parece que los láseres de rayos X son muy difíciles de construir y efectivamente lo son.

Imaginemos ahora un sistema de átomos en equilibrio térmico que tiene sólo dos estados posibles. Asimismo, supongamos que los átomos poseen una vida media larga así que podemos pasar por alto la emisión espontánea. Cuando los fotones inundan el sistema con la energía adecuada, la absorción estimulada despuebla el nivel inferior i, mientras que la emisión estimulada despuebla el nivel superior j. El número de fotones que desaparecen del sistema por segundo mediante la absorción estimulada es proporcional a $\mathcal{P}_{ab}N_i$, mientras que el número de los que entran en el sistema mediante la emisión estimulada es proporcional a $\mathcal{P}_{st}N_j$. Sin embargo, como los coeficientes B son iguales, de eso se deriva que $\mathcal{P}_{st} = \mathcal{P}_{ab}$ y, por consiguiente, $\mathcal{P}_{ab}N_j = \mathcal{P}_{st}N_j$. No obstante, si el sistema está en equilibrio térmico, $N_i > N_j$, lo cual significa que el número de fotones que desaparecen por segundo es mayor que el número de los entrantes; hay una absorción neta de fotones por el estado inferior porque hay más átomos en el estado inferior a cualquier temperatura. Lo contrario sería cierto si fuera posible crear una situación —*una inversión de población*— en la que $N_i < N_j$; entonces la emisión estimulada dominaría sobre la absorción estimulada.

13.1.3 El láser

Consideremos ahora un medio común en que haya unos átomos en algún estado excitado, que llamaremos $|j\rangle$ para que concuerde con la notación mecánico-cuántica. Para que un fotón en un rayo incidente pueda inducir uno de estos átomos excitados hacia la emisión estimulada, tendrá que tener la frecuencia ν_{ji}, como se ve en figura 13.5*c*. Una característica notable de este proceso es que ***el fotón emitido está en fase con, tiene la polarización de y se propaga en la misma dirección que la radiación estimulante***. Entonces se dice que el fotón se halla en el mismo modo de radiación que la onda incidente y tiende a sumarse a ella, aumentando su densidad de flujo. Sin embargo, ya que la mayoría de los átomos se encuentra normalmente en el estado fundamental, la absorción generalmente es bastante más probable que la emisión estimulada.

Pero esto plantea un punto muy interesante: ¿Qué pasaría si un porcentaje importante de los átomos se pudiera excitar de alguna manera hacia un estado superior, dejando el estado inferior vacío? Por razones obvias, este fenómeno se denomina **inversión de población**. Un fotón incidente de frecuencia apropiada podría entonces poner en movimiento un sinfín de fotones estimulados —*todos en fase*—. La onda inicial continuaría creciendo siempre que no hubiera procesos competitivos dominantes (tales como esparcimiento) y siempre que se pudiera mantener la inversión de población. En realidad, se bombearía energía (eléctrica, química, óptica, etc.) para sostener la inversión y se extraería un haz luminoso después de recorrer el *medio activo*.

El primer láser de rubí pulsado

Para ver cómo se logra esto en la práctica, observemos el dispositivo original de Maiman (figura 13.6). El medio activo del primer láser operativo era un pequeño rubí rosa pálido, cilíndrico y sintético, es decir, un cristal de Al_2O_3 con un 0,05% (en peso) de Cr_2O_3. El rubí, que sigue siendo uno de los medios cristalinos más comunes para láser, había sido utilizado anteriormente en aplicaciones para máser y fue Schawlow quien aconsejó su uso en el láser. Las caras de los extremos de la barra se pulieron hasta quedar planas, paralelas y normales al eje. A continuación, se platearon ambas (una sólo parcialmente) para formar una **cavidad resonante**.

La barra estaba rodeada por un tubo helicoidal de descarga gaseosa de destello que suministraba el **bombeo óptico** de banda ancha. El rubí aparece rojo porque las bandas de absorción de los átomos de cromo se hallan en las regiones azul y verde del espectro (figura 13.7*a*). Al dar corriente, en el tubo de destello se genera una ráfaga intensa de luz que dura unos

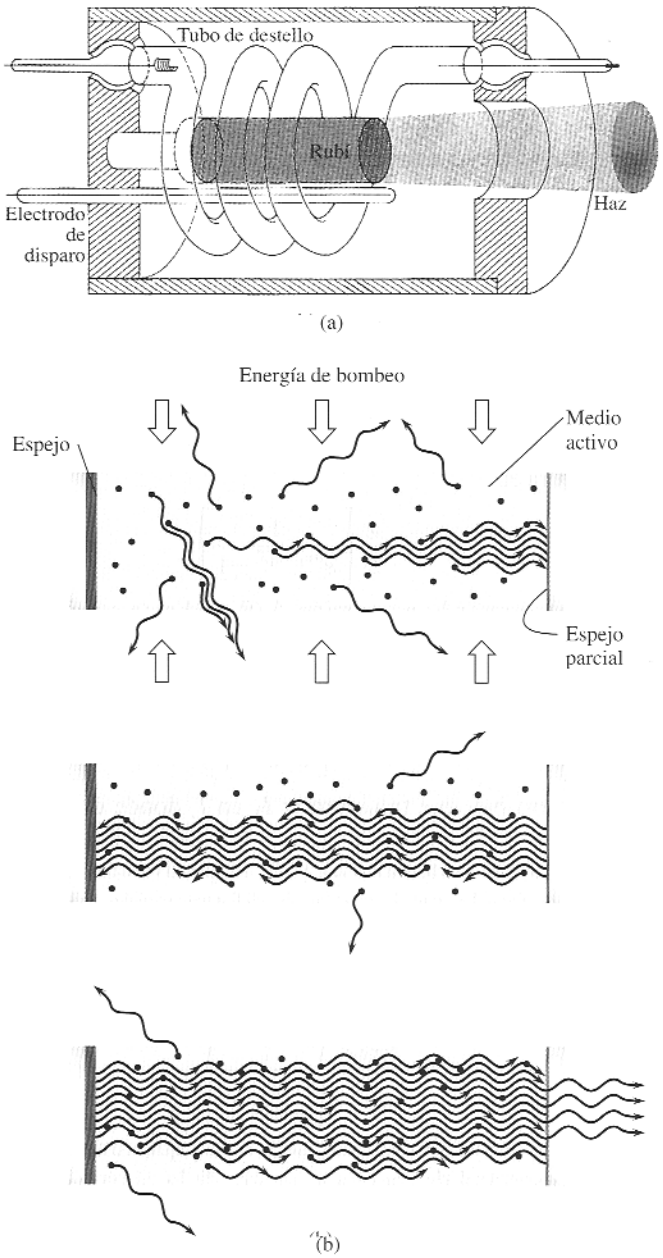


FIGURA 13.6 La primera configuración de láser de rubí, casi de tamaño real.

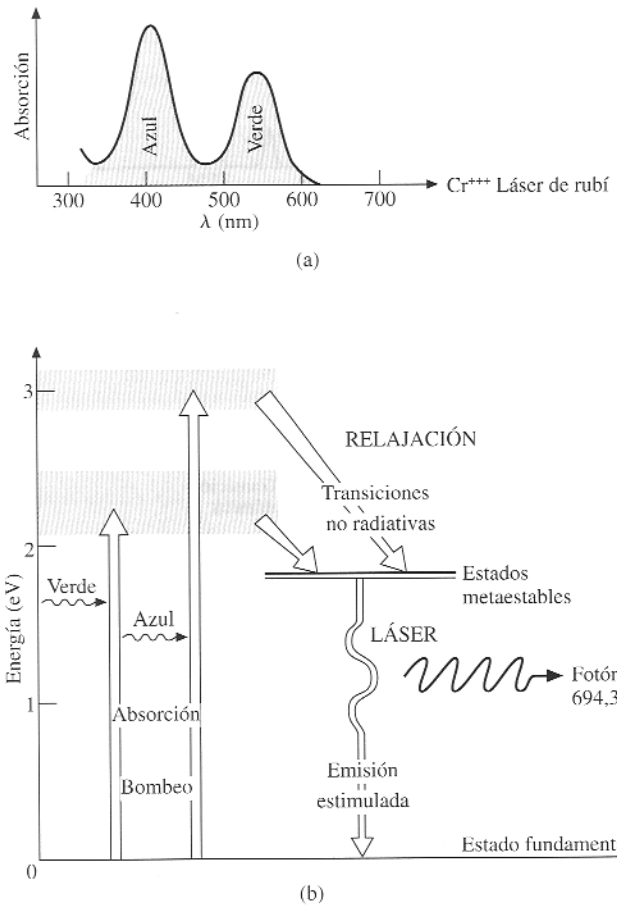


FIGURA 13.7 Niveles energéticos del láser de rubí.

pocos milisegundos. Mucha de esta energía se pierde en calor pero muchos de los iones de Cr^{3+} se excitan en las bandas de absorción. Un diagrama simplificado de los niveles de energía aparece en la figura 13.7*b*. Los iones excitados se relajan rápidamente (en unos 100 ns), cediendo la energía a la red del cristal y dando lugar a transiciones no radiativas. Prefieren «bajar» a un par de estados provisionales, muy cercanos, de vida particularmente larga, permaneciendo en estos **estados metaestables** por varios milisegundos (≈3 ms a temperatura ambiente) antes de bajar al azar y en muchos casos, espontáneamente, al estado fundamental. Este paso se acompaña de la emisión de la radiación roja fluorescente característica del rubí. La transición de nivel inferior predomina mientras que la emisión resultante ocurre en un rango espectral relativamente ancho centrado alrededor de 694,3 nm; emerge en todas direcciones y es incoherente.

Al aumentar ligeramente la velocidad de bombeo, se produce inversión de población y así los primeros escasos fotones emitidos espontáneamente estimulan una reacción en cadena. Un cuanto excita la emisión rápida en fase de otro, pasando energía de los átomos metaestables a la onda luminosa en desarrollo (figura 13.6*b*). La onda continúa creciendo a medida que recorre el medio activo hacia delante y hacia atrás (suponiendo que haya suficiente energía disponible para superar las pérdidas en los extremos espejados). Como una de esas superficies reflectantes estaba plateada parcialmente, un intenso pulso de luz láser roja (de la duración de unos 0,5 ms y con un ancho de línea alrededor de 0,01 nm) emerge del extremo de la barra de rubí.

Obsérvese cómo todo funciona sobre ruedas. Las anchas bandas de absorción facilitan bastante la excitación, mientras que la larga vida media del estado metaestable simplifica la inversión de población. El sistema atómico consiste en efecto en (1) las bandas de absorción, (2) el estado metaestable y (3) el estado fundamental. Por consiguiente, se habla de un láser de *tres niveles*.

El láser de rubí de hoy en día es generalmente una fuente de gran potencia de radiación coherente pulsada, que se emplea ampliamente en trabajos de interferometría, diagnóstico de plasmas, holografía, etc. Estos dispositivos funcionan con longitudes de coherencia que oscilan entre 0,1 m y 10 m. Normalmente, las configuraciones modernas disponen de espejos externos planos, de los cuales uno refleja totalmente y el otro sólo parcialmente. Como oscilador, el láser de rubí produce pulsos de milisegundos en el rango de energía desde 50 J hasta 100 J, pudiendo, sin embargo, producir energía muy superior a los 100 J, empleando un dispositivo tándem oscilador-amplificador. El típico láser de rubí comercial funciona con una eficiencia global modesta, inferior al 1%, y produce un haz cuyo diámetro va de 1 mm a 25 mm, siendo su divergencia entre 0,25 mrad y 7 mrad aproximadamente.

Cavidades resonantes ópticas

La cavidad resonante que en este caso es, por supuesto, un etalón de Fabry-Perot, desempeña un papel muy importante en la operación del láser. En las primeras fases del proceso láser, se emiten fotones espontáneos en todas direcciones al igual que fotones estimulados. No obstante, todos ellos, con la única excepción de los que se propagan casi a lo largo del eje de la

cavidad, salen rápidamente por los lados del rubí. Por el contrario, el rayo axial continúa creciendo conforme se refleja una y otra vez a través del medio activo. Esto explica el sorprendente grado de colimación del rayo láser que sale, que es efectivamente una onda plana coherente. Aunque el medio actúa para amplificar la onda, la *alimentación óptica* proporcionada por la cavidad convierte el sistema en un oscilador y, por consiguiente, en un generador de luz, así que en realidad la abreviatura «láser» no es del todo apropiada.

Asimismo, la perturbación que se propaga dentro de la cavidad adquiere una configuración de onda estacionaria determinada por la separación *(L)* de los espejos. La cavidad resuena (es decir, existen ondas estacionarias en su interior) cuando hay un número entero *(m)* de semilongitudes de onda cubriendo la región entre los espejos. La idea es que haya simplemente un nodo en cada espejo y esto puede ocurrir sólo cuando L es igual a un número entero múltiplo de $\lambda/2$ (donde $\lambda = \lambda_0/n$). Así que

$$m = \frac{L}{\lambda/2}$$

y

$$\nu_m = \frac{mv}{2L} \tag{13.15}$$

Por consiguiente, existe un número infinito de posibles **modos de oscilación longitudinales de la cavidad,** cada uno con una frecuencia particular ν_m. Los modos consecutivos están separados por una diferencia constante,

$$\nu_{m+1} - \nu_m = \Delta\nu = \frac{v}{2L} \tag{13.16}$$

que es el rango espectral libre del etalón [ecuación (9.79)] y, además, es el inverso del tiempo de ida y vuelta. Para un láser de gas de 1m de largo, $\Delta\nu \approx 150$ MHz.

Los modos resonantes de la cavidad son considerablemente más estrechos en frecuencia que el ancho de banda de la transición atómica espontánea normal. Estos modos, ya sea que el dispositivo se construya de tal manera que haya uno o más, serán los que se sostengan en la cavidad y, por consiguiente, el rayo emergente estará restringido a una región cercana a esas frecuencias (figura 13.8*)*. Dicho de otro modo, la transición radiativa proporciona un rango relativamente ancho de frecuencias entre las cuales la cavidad seleccionará y amplificará sólo ciertas bandas estrechas y, llegado el caso, incluso una sola de tales bandas. Éste es el origen de la extremada cuasimonocromaticidad del láser. Por lo tanto,

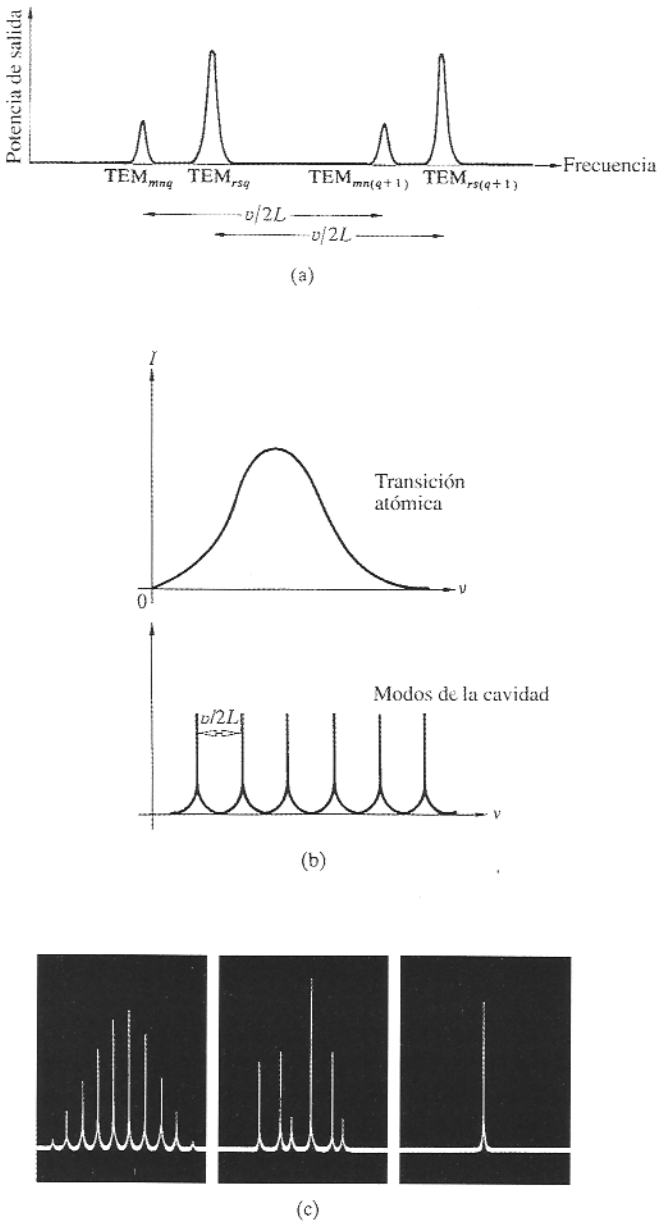


FIGURA 13.8 Modos del láser: (*a*) ilustra la nomenclatura; (*b*) compara la emisión atómica ancha con los estrechos modos de la cavidad; (c) muestra tres configuraciones de operación para un láser de gas de c-w, primero mostrando varios modos longitudinales bajo una envolvente aproximadamente gaussiana, luego varios modos longitudinales y transversales y finalmente un modo longitudinal simple.

mientras que el ancho de banda de la transición del rubí al estado fundamental es generalmente bastante ancho (0,53 nm/330 GHz) —por la interacción entre los iones de cromo y la red— el correspondiente ancho de banda de la cavidad del láser, la extensión en frecuencia de la radiación de un solo modo resonante es mucho más estrecha (0,00005 nm /30MHz). Véase la figura 13.8*b* que muestra la forma de línea de una transición típica y la serie de picos de la cavidad correspondientes; en este caso cada cual está separado por $\upsilon/2L$ y tienen 30 MHz de ancho.

Una manera posible de generar un único modo en la cavidad sería que la separación entre modos superara el ancho de banda de transición, como se ve en la ecuación (13.16). Entonces sólo había un modo en el rango de frecuencias disponibles que la transición proporciona. Con un láser de rubí (con un índice de refracción de 1,76) una cavidad de unos pocos centímetros de largo, permitiría fácilmente operar con un modo único longitudinal. La desventaja de este método particular es que limita la longitud de la región activa que aporta energía al rayo, limitando por eso la potencia de salida del láser.

Además de los modos longitudinales o axiales de oscilación, que corresponden a ondas estacionarias formadas a lo largo de la cavidad o del eje z, pueden también sostenerse **modos transversales**. Ya que los campos son casi normales a z, reciben el nombre de modos TEM_{mn}, (transversales, eléctricos y magnéticos). Los subíndices m y n son el número entero de líneas nodales transversales en las direcciones x e y a través del rayo emergente. Es decir, el rayo está segmentado en su sección transversal en una o más regiones. Cada una de tales disposiciones está asociada con un modo TEM [N.T.: del inglés: transversal electric mode] como se muestra en las figuras (13.9) y (13.10). El orden más bajo o modo transversal TEM_{00} es, quizás, el más empleado por varias razones importantes: la densidad de flujo es idealmente gaussiana sobre la sección transversal del rayo (figura 13.11); no hay desfases en el campo eléctrico a través del rayo como los hay en otros modos siendo, por lo tanto, totalmente coherente espacialmente; la divergencia angular del haz es la más pequeña, pudiendo enfocarse al punto más pequeño. Obsérvese que la amplitud en este modo no es realmente constante sobre el frente de onda, siendo en consecuencia una onda no inhomogénea.

Una especificación completa de cada modo tiene la forma TEM_{mnq}, donde q es el número de modo longitudinal. Para cada modo transversal *(m, n)* pueden existir muchos modos longitudinales (es decir, valores de q). No siempre, sin embargo, es necesario trabajar con un modo longitudinal particular, así que se elimina simplemente el subíndice q.[2]

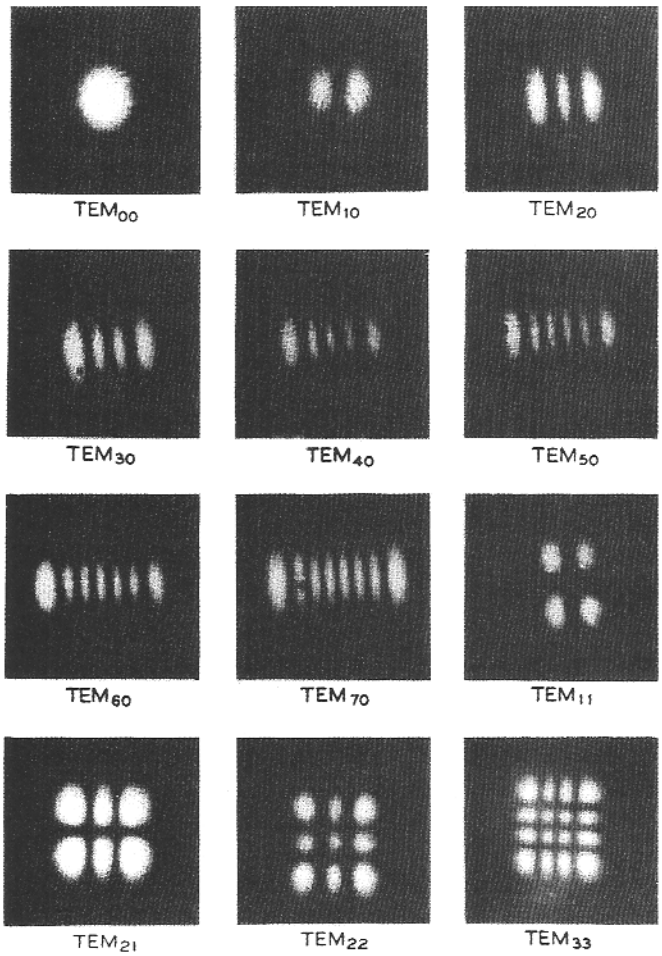


FIGURA 13.9 Distribuciones de modos (sin las débiles franjas de interferencia, así aparece el haz en una sección transversal). (Foto cedida por Bell Telephone Laboratories.)

Hay varias disposiciones adicionales de cavidades que tienen considerablemente más importancia práctica que el montaje original plano-paralelo (figura 13.12). Por ejemplo, si los espejos planos se reemplazan por espejos esféricos cóncavos idénticos, separados por una distancia casi igual a su radio de

[2] Mírense R. A. Phillips y R. D. Gehrz, «Laser Mode Structure Experiments for Undergraduate Laboratories». *Am. J. Phys.*, **38**, 429 (1970).

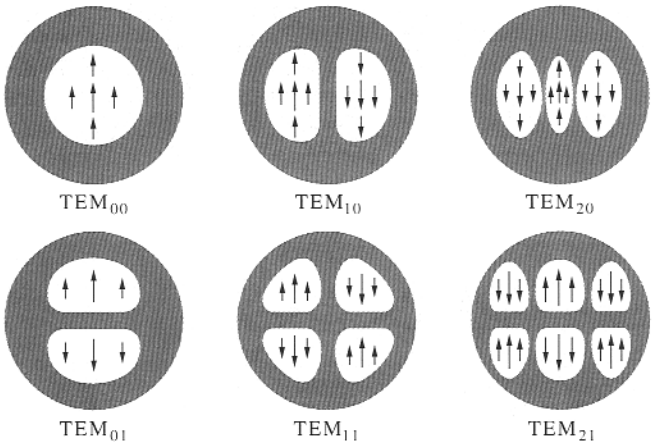


FIGURA 13.10 Configuraciones de modos (simetría rectangular). Si bien pueden observarse también los modos circularmente simétricos cualquier ligera asimetría (como las ventanas de Brewster) las destruye.

curvatura, tenemos el resonador *confocal*. Por consiguiente, los puntos focales son casi coincidentes sobre el eje a la mitad entre los espejos, de ahí el nombre confocal.

Si uno de los espejos esféricos es plano, la cavidad se denomina resonador *hemisférico* o *hemiconcéntrico*. Ambas configuraciones son considerablemente más fáciles de alinear que la forma plano-paralela. Las cavidades láser son *estables* o *inestables* en tanto que el rayo tiende a volver sobre sus pasos, permaneciendo así relativamente cerca del eje óptico (figura 13.13).

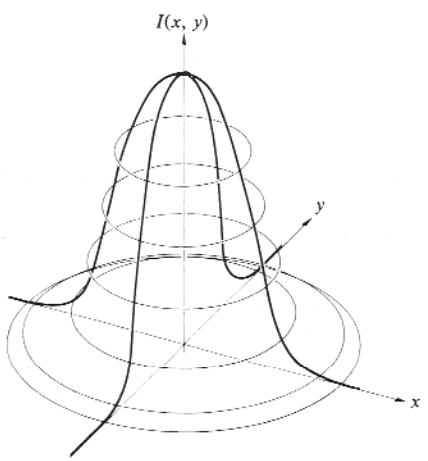


FIGURA 13.11 Distribución gaussiana de irradiancia.

Un haz en una cavidad inestable «se alejará» cada vez más del eje en cada reflexión hasta que deje rápidamente la cavidad por completo. Por el contrario, en una configuración estable (con espejos que son, digamos, 100% y 98% reflectantes) el rayo puede atravesar el resonador 50 veces o más. Los resonadores inestables se emplean comúnmente en láseres de gran potencia, donde el hecho de que el rayo recorra una región muy ancha del medio activo aumenta la amplificación, posibilitando así la extracción de una mayor cantidad de energía. Este método resultará particularmente útil en los medios (como dióxido de carbono o argón) donde el rayo gana mucha energía en cada recorrido de la cavidad. El número de recorridos se determina mediante la denominada *ganancia en pequeña señal* del medio activo. La selección real de una configuración de resonador está supeditada a los requisitos específicos del sistema - no existe ninguna disposición óptima universal.

Como puede verse en la figura 13.13*a*, cuando la cavidad está conformada por espejos curvos, hay una tendencia a «enfocar» el haz, proporcionándole una sección transversal mínima o *cintura* de diámetro D_0. Bajo estas circunstancias, la divergencia externa del haz láser es esencialmente la continuación de la divergencia a partir de la cintura. Por lo tanto, mientras que dos espejos planos producen un haz cuya abertura está limitada por la difracción, en este caso no ocurrirá lo mismo. Recuerden la ecuación (10.58) que describe el radio del disco de Airy y dividan ambas partes por f para obtener el ancho semiangular del rayo circular difractado de diámetro D. Al doblar éste se obtendrá Φ, el *ancho angular total* o la **divergencia de un haz láser de apertura finita:**

$$\Phi \approx 2{,}44\lambda/D$$

Por comparación, lejos de la región de la sección transversal mínima, el ancho angular total de un haz láser con cintura será

$$\Phi \approx 1{,}27\lambda/D_0 \qquad (13.17)$$

donde D_0, el diámetro de la parte central del rayo, puede deducirse de la configuración de la cavidad particular.

La disminución de energía en una cavidad se expresa en términos de Q o **factor de calidad** del resonador. El origen de la expresión se remonta a los primeros tiempos de la ingeniería radioeléctrica que entonces se utilizaba para describir el funcionamiento de un circuito oscilatorio (sintonizador). Un circuito con valores elevados de Q y bajas pérdidas significaba un paso de banda estrecho y una radio sintonizada con precisión. Si una cavidad óptica se perturba de alguna manera,

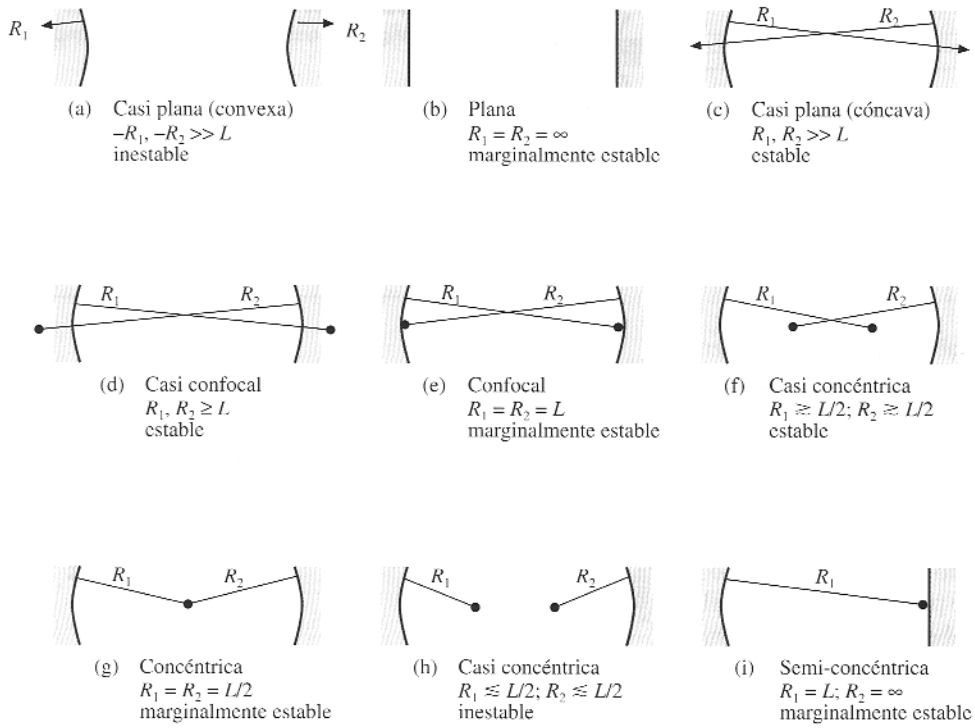


FIGURA 13.12 Configuraciones de cavidad de láser. (Adaptado de *An Introduction to Lasers and Their Applications*, de O'Shea Callen y Rhodes.)

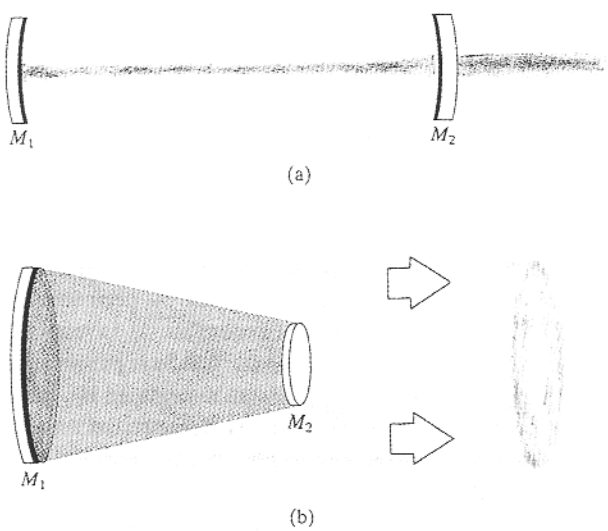


FIGURA 13.13 Resonadores de láser estable e inestable. (Adaptado de *An Introduction to Lasers and Their Applications*, de O'Shea Callen y Rhodes.)

por ejemplo, por el desplazamiento o la eliminación de uno de los espejos, la acción del láser generalmente cesa. Cuando esto se hace intencionadamente con el fin de retrasar el comienzo de la oscilación en la cavidad del láser, se denomina *degradación de Q* o **conmutación de Q**. La potencia de salida de un láser está auto-limitada en el sentido de que la inversión de la población se agota continuamente, mediante la emisión estimulada, por el campo de radiación dentro de la cavidad. Sin embargo, si se evita la oscilación, el número de átomos bombeados en el estado metaestable (de larga vida) puede aumentarse ampliamente, creando así una inversión de población muy grande. Al activar la cavidad en el momento apropiado, un *pulso gigante* muy poderoso (quizá de varios cientos de megavatios) emergerá a medida que los átomos bajan al nivel energético inferior casi al unísono. Hasta ahora se han utilizado numerosas disposiciones de *conmutación de Q* en las que se recurre a varios esquemas de control tales como absorbentes blanqueables que se vuelven transparentes bajo iluminación, prismas y espejos rotatorios, obturadores mecánicos, celdas ultrasónicas o conmutadores electro-ópticos tales como las celdas Kerr o Pockels.

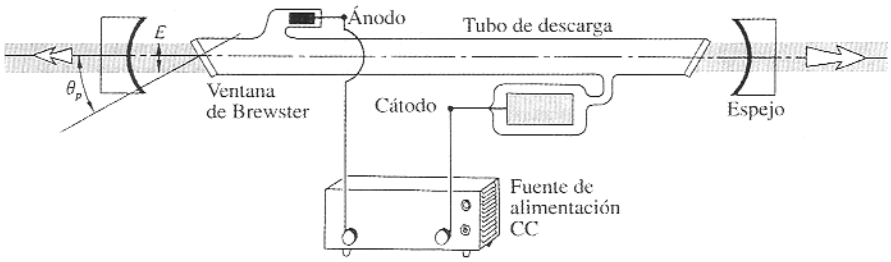


FIGURA 13.14 Una de las primeras configuraciones del láser de He-Ne simple.

El láser de Helio-Neón

El anuncio de Maiman en el que se daba a conocer el primer láser operativo tuvo lugar durante una conferencia de prensa en Nueva York el 7 de julio de 1960. [3] En febrero de 1961, Ali Javan y sus socios W. R. Bennett, Jr., y D.R. Herriott anunciaron haber llevado a cabo una operación exitosa con un láser de gas de helio-neón de *onda continua* (c-w *continuous-wave* en inglés) a 1152,3 nm. El láser de He-Ne (figura 13.14) es aún el dispositivo más conocido en su género que, muy a menudo, proporciona unos cuantos milivatios de potencia continua en el visible (632,8 nm). Su atractivo se debe principalmente a su facilidad de construcción, su precio comparativamente barato y a su fiabilidad relativa; en la mayoría de los casos puede accionarse simplemente mediante un interruptor. El bombeo se logra generalmente por medio de una descarga eléctrica (mediante una excitación bien sea de cc, ca o rf sin electrodos). Los electrones libres y los iones se aceleran a través de un campo aplicado y, como resultado de las colisiones, el medio gaseoso se ioniza y se excita aún más (típicamente, una mezcla de alrededor de 0,8 torr de He y alrededor de 0,1 torr de Ne). Muchos átomos de helio, después de desexcitarse desde unos cuantos niveles superiores, se acumulan en los estados de larga vida 2^1S y 2^3S. Se trata de estados metaestables (figura 13.15) desde los cuales no hay transiciones radiativas permitidas. Los átomos de He excitados chocan inelásticamente con los átomos de Ne en el estado fundamental, transmitiéndoles energía y elevándolos a los estados 5s y 4s. Estos son los niveles superiores del láser donde existe una inversión de población con respecto a los estados 4p y 3p más bajos. Las transiciones entre los estados 5s y 4s están prohibidas. Los fotones espontáneos inician la emisión estimulada dando así lugar a la reacción en cadena. Las transiciones láser dominantes corresponden a 1152,3 nm y 3.391,2 nm en el infrarrojo y, por supuesto, el siempre popular 632,8 nm en el visible (rojo brillante). Los estados *p* se vacían al estado 3s, permaneciendo despoblados y sosteniendo continuamente la inversión. El nivel 3s es metaestable, así que los átomos 3s regresan al estado fundamental después de perder su energía en las paredes del tubo. Ésta es la razón por la cual el diámetro del tubo afecta inversamente a la ganancia siendo, por lo tanto, un importante parámetro de diseño. Contrariamente al rubí, donde la transición del láser es al estado fundamental, la emisión estimulada en el láser de He-Ne ocurre entre dos estados superiores. La importancia de esto, por ejemplo, es que el estado 3p ya está, por lo general, muy escasamente ocupado, se obtendrá

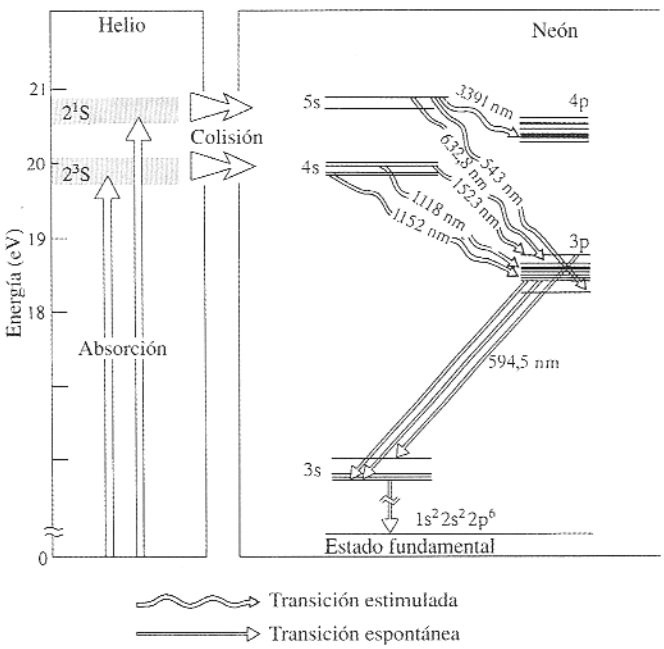


FIGURA 13.15 Niveles de energía del láser de He-Ne.

[3] Su primer artículo que habría dado a conocer sus hallazgos de forma más tradicional, fue rechazado por los editores de *Physical Review Letters* — que se arrepentirían de esto eternamente.

muy fácilmente una inversión de población sin tener que vaciar a medias el estado fundamental.

Regresemos a la figura 13.14 en la que se recogen las características destacadas de uno de los primeros láseres típicos de He-Ne. Los espejos están recubiertos con una película dieléctrica de multicapas cuya reflectancia es superior al 99%. La salida del láser se polariza linealmente insertando unas ventanas de Brewster (es decir, placas inclinadas según el ángulo de polarización) terminando el tubo de descarga. Si, por el contrario, estas caras terminales estuvieran normales al eje, las pérdidas por reflexión (4% en cada interfaz) serían inadmisibles. Inclinándolas según el ángulo de polarización, las ventanas tendrán supuestamente el 100% de transmisión para la luz cuya componente del campo eléctrico es paralela al plano de incidencia (el plano del dibujo). Este estado de polarización se vuelve rápidamente dominante ya que la componente normal se refleja parcialmente fuera del eje a cada paso por las ventanas. La luz linealmente polarizada en el plano de incidencia pronto se transforma en el mecanismo estimulante preponderante en la cavidad, con la exclusión final de la polarización ortogonal. [4]

Según el sistema tradicional, aunque deficiente, disponible en el mercado hasta mediados de los años setenta, las ventanas se colocaban en los extremos del tubo lasér mediante resina epoxídica mientras que los espejos se montaban en el exterior. Inevitablemente la resina empezaba a estropearse dejando entrar, por un lado, humedad atmosférica y dejando salir, por otro, helio. Hoy en día, esos láseres *se cierran herméticamente*, el vidrio se une directamente a unos soportes de metal (Kovar), que sostienen los espejos dentro del tubo. Los espejos (uno de los cuales generalmente es reflectante al 100%) están revestidos con materiales resistentes modernos para poder tolerar el ambiente de descarga en el interior del tubo. La vida útil de estos aparatos que en los años sesenta era tan sólo de unos pocos centenares de horas, hoy en día alcanza las 20.000 horas y más. Las ventanas de Brewster son generalmente opcionales mientras que la mayoría de los láseres de He-Ne presentes en el mercado genera haces más o menos «no polarizados». El típico láser de He-Ne de serie (con una potencia de salida de entre 0,5 mW y 5 mW) funciona en el modo TEM_{00}, tiene una longitud coherente de unos 25 cm, un haz con diámetro de 1 mm y una eficiencia global baja de solamente 0,01%-0,1%. Aunque hay láseres infrarrojos de He-Ne, incluso una nueva versión verde (543,5 mm), la versión rojo brillante sigue siendo la más corriente.

Un estudio sobre los desarrollos del láser

La tecnología láser es un campo tan dinámico que lo que era un adelanto de laboratorio hace uno o dos años puede haberse convertido ahora en un producto comercial común y corriente. El torbellino ciertamente no se detendrá para permitir que términos descriptivos como «el más pequeño», «el más grande», «el más potente», etc., permanezcan válidos durante mucho tiempo. Después de esta premisa, vamos a examinar brevemente la situación actual sin tratar de anticipar las maravillas que ciertamente vendrán después de que se imprima este libro. Los haces láser ya se han reflejado sobre la luna, han soldado retinas desprendidas, generado neutrones por fusión, estimulado el crecimiento de semillas, servido como enlace entre equipos de telecomunicación, leído CD, dirigido máquinas de moler, misiles, barcos, máquinas de rayar, transmitido imágenes para televisión en color, realizado agujeros en diamantes, elevado objetos pequeños por levitación [5] y fascinado a muchos curiosos.

Junto con el rubí hay muchas otras clases de **láseres de estado sólido** cuyas potencias de salida oscilan en longitud de onda entre aproximadamente 170 nm y 3.900 nm. Por ejemplo, las tierras raras trivalentes Nd^{3+}, Ho^{3+}, Gd^{3+}, Tm^{3+}, Er^{3+}, Pr^{3+} y Eu^{3+} experimentan acción láser en cristales hospedantes tales como, $CaWO_4$, Y_2O_3, $SrMoO_4$, LaF_3, granate de aluminio e itrio (YAG abreviatura del inglés: «yttrium aluminum garnet») y vidrio por nombrar sólo algunos. De éstos, el vidrio y el YAG dopados con neodimio, son especialmente importantes, constituyendo medios para láseres de gran potencia que funcionan aproximadamente a 1.060 nm. Se han construido láseres de Nd:YAG que generan más de un kilovatio de potencia continua y se han conseguido potencias de salida enormes en sistemas pulsados poniendo en marcha varios láseres en tándem. El primer láser

[4] La mitad de la potencia de salida del láser *no* se pierde en reflexiones en las ventanas de Brewster cuando la luz del estado $\mathcal{P}$ transversal se esparce. La cavidad no encauza continuamente la energía en esa componente de polarización. Si se refleja fuera del tubo de plasma, no está presente para estimular más emisiones.

[5] Véanse M. Lubin y A. Fraas, «Fusion by Laser», *Sci. Am.*, **224**, 21 (junio de 1971); R. S. Craxton, R. L. McCrory y J. M. Soures, «Progress in Laser Fusion», *Sci Am.* **255**, 69 (agosto de 1986); y A. Ashkin, «The Pressure of Laser Light», *Sci. Am.*, **226**, 63 (febrero de 1972).

del tren sirve como oscilador con conmutación de Q que dispara a la siguiente etapa, que funciona como amplificador; puede haber uno o más de tales amplificadores en el sistema. Reduciendo la realimentación de la cavidad, un láser ya no será autooscilante sino que amplificará la onda incidente que ha provocado la emisión estimulada. Por consiguiente, el amplificador es, efectivamente, un medio activo sujeto a bombeo, pero cuyas caras extremas son sólo parcialmente reflectantes o incluso no reflectantes. En el mercado existen sistemas de rubí de este tipo que proporcionan unos pocos GW (gigavatios, es decir, 10^9 W) en forma de pulsos que duran varios nanosegundos. El 19 de diciembre de 1984, el láser más grande existente entonces, el Nova, del Laboratorio Nacional «Lawrence Livermore» de California, disparó por primera vez la totalidad de sus 10 haces simultáneamente, produciendo un disparo de calentamiento de unos 18 kJ de radiación de 350 nm en un impulso de 1ns (figura 13.16). Este láser enorme de vidrio dopado con neodimio puede enfocar hasta 120 TW en una pastilla de combustible nuclear para fusión —es decir, una potencia aproximadamente 500 veces más elevada que la producida por todas las estaciones eléctricas de Estados Unidos juntas— aunque durante sólo cerca de 10^{-9} s. En 1996, empleando solamente una línea del láser Nova, los investigadores del Laboratorio Nacional de California consiguieron producir pulsos de 1,25 PW, cada uno con una duración de 490 fs y transportando 580 J. Este láser petavatio se proyectó para producir un rayo con una irradiancia de 10^{21} W/cm^2.

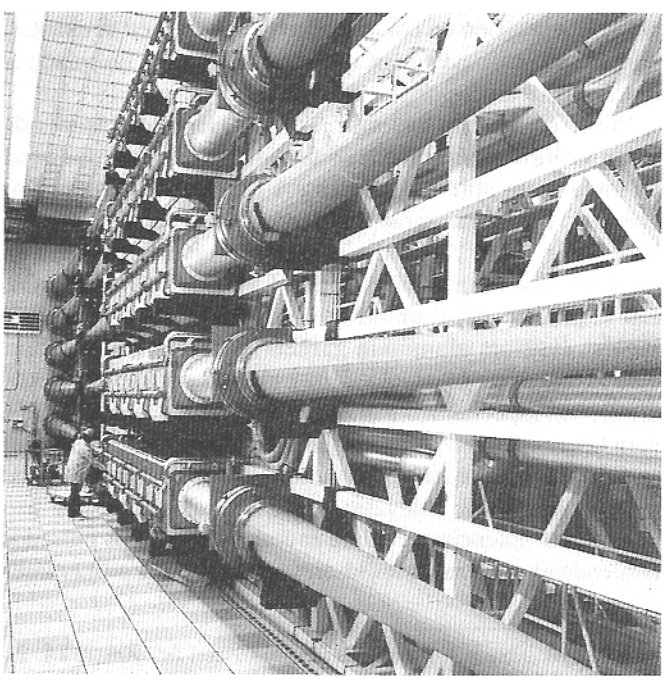


FIGURA 13.16 El láser Nova. (Foto cedida por la Lawrence Livermore National Library.)

Un extenso grupo de **láseres de gas** funciona a través del espectro desde el IR lejano al UV (de 1 mm a 150 nm). Entre ellos, están en primer lugar el helio-neón, argón y criptón así como varios sistemas moleculares de gas tales como dióxido de carbono, fluoruro de hidrógeno y nitrógeno molecular (N_2). El argón emite láser principalmente en el verde, azul verdoso y violeta (principalmente en 488,0 y 514,5 nm) tanto en operación pulsada como continua. Aunque su potencia de salida es generalmente de varios vatios c-w, ha alcanzado los 150 W c-w. El láser de ión de argón es parecido, en algunos aspectos, al láser de He-Ne, aunque evidentemente difiera por su potencia generalmente mayor, longitud de onda más corta, ancho de línea mayor y precio más alto. Se ha logrado emisión láser con todos los gases nobles (He, Ne, Ar, Kr, Xe) así como con los iones gaseosos de muchos otros elementos, pero el grupo anterior se ha estudiado más extensamente.

La molécula de CO_2, que tiene la emisión láser entre los modos vibracionales, emite en el infrarrojo a 10,6 μm, con niveles típicos de potencia c-w desde unos vatios hasta varios kilovatios, pudiendo su eficiencia alcanzar el valor poco usual del 15% cuando se le agrega N_2 y He. Si anteriormente se requería un tubo de descarga de casi doscientos metros de largo para generar 10 kW c-w, hoy en día el mercado ofrece «modelos de mesa» considerablemente más pequeños. Durante un tiempo en los años setenta, la potencia de salida récord perteneció a un láser experimental dinámico de gas que recurría al bombeo térmico en una mezcla de CO_2, N_2 y H_2O para generar 60 kW c-w a 10,6 μm en operación multimodo.

El láser pulsado de nitrógeno funciona con 337,1 nm en el ultravioleta al igual que el láser de helio cadmio c-w. Un buen número de vapores de metal (por ejemplo, Zn, Hg, Sn, Pb) han mostrado transiciones láser en el visible, sin embargo, problemas tales como el mantener la uniformidad del vapor en la región de descarga, han impedido su explotación. El láser de He-Cd, emite a 325,0 nm y 441,6 nm, siendo éstas transiciones del ion de cadmio que aparecen después de la excitación que resulta de las colisiones con átomos metaestables de helio.

El **láser de semiconductor** —también conocido como láser de diodo o de contacto— se inventó en 1962, justo después del desarrollo del diodo electro-luminiscente (LED- del inglés: light-emitting diode). Hoy desempeña un papel central en electroóptica, sobre todo por su pureza espectral, eficiencia elevada (≈100%), robustez, capacidad de modulación a velocidades muy altas, vida útil larga y potencia moderada (hasta 200 mW) a pesar de su tamaño diminuto. Los láseres de semiconductores se emplean por millones en las comunicaciones por fibras ópticas, en los sistemas audio de discos láseres, etc.

Los primeros láseres de esta clase se construyeron con un material, el arseniuro de galio, oportunamente dopado para formar un contacto *p-n*. El alto umbral para la emisión láser asociado a las denominadas «homoestructuras» los obligaba a funcionar solamente en el modo pulsado y a temperaturas criogénicas ya que, de otra manera, el calor producido en sus pequeñas estructuras los destruiría. Si bien el primer láser de semiconductor sintonizable de sal de plomo se desarrolló en 1964, su comercialización tuvo que esperar una docena de años. Funciona a temperaturas de nitrógeno líquido, lo cual es sin duda una desventaja, pero puede barrer de 2 μm a 30 μm.

Los adelantos sucesivos han permitido reducir el umbral y han llevado a la invención del láser de semiconductor a temperatura ambiente de onda continua (c-w). Las transiciones se producen entre las bandas de valencia y de conducción mientras que la emisión estimulada aparece muy cerca del contacto *p-n* (figura 13.17). Por lo general, a medida que la corriente viaja hacia adelante a través del diodo semiconductor, los electrones de la banda de conducción de la capa *n* se recombinarán con los huecos de la capa *p*, emitiendo energía en forma de fotones. Este proceso radiativo, que compite por energía con los mecanismos de absorción existentes (como, por ejemplo, la producción de fonones), llegará a prevalecer cuando la capa de recombinación sea pequeña y la corriente elevada. Para que el sistema produzca luz láser, la luz emitida por el diodo se queda en el interior de la cavidad resonante, y esto se consigue simplemente puliendo las caras de los extremos perpendicularmente al canal de la unión.

Hoy en día, los láseres de semiconductor se construyen para satisfacer necesidades muy específicas; en efecto, existen muchas versiones que producen longitudes de onda que varían de unos 700 nm a cerca de 30 μm. A principios de los años setenta, apareció el láser c-w GaAs/GaAlAs. El volumen de este pequeño chip de diodo que funciona a temperatura ambiente en la región de 750 nm a 900 nm (dependiendo de las cantidades de galio y aluminio), es aproximadamente la decimosexta parte de un centímetro cúbico. La figura 13.17*b* nos muestra un láser de semiconductor de esta clase, con su heteroestructura típica (un dispositivo formado por materiales diferentes). Aquí, el rayo emerge en dos direcciones de la capa activa de GaAs cuyo espesor es de 0,2μm. Estos pequeños láseres producen más de 20 mW de potencia en onda continua. A mediados de los años setenta, se inventó el láser GaInAsP/InP, con una salida de 1,2 μm a 1,6 μm, para apro-

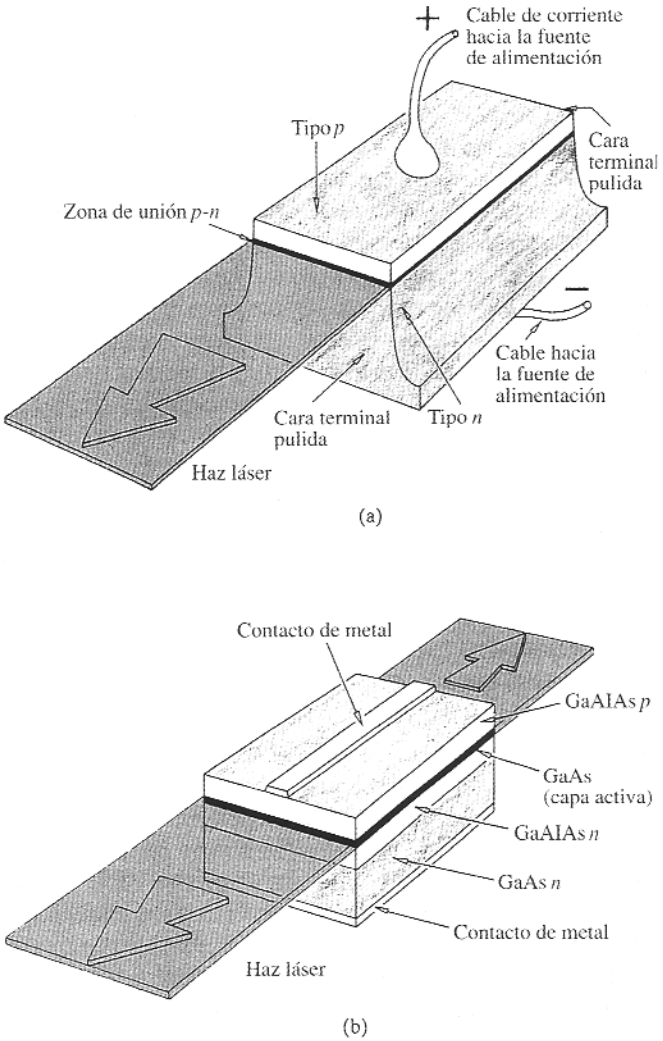


FIGURA 13.17 *(a)* Láser de unión *p-n* de GaAs. *(b)* Un láser de diodo más moderno.

vechar la región de bajas pérdidas ($\lambda \approx 1{,}3\ \mu m$) en el vidrio de fibra óptica.

En la figura 13.18 se muestra el láser de cavidad exfoliada en el que se controla el número de modos axiales a fin de producir una radiación sintonizable de ancho de banda muy estrecho. Las dos cavidades acopladas a lo largo de una pequeña separación restringen la radiación a los extremadamente extrechos anchos de banda que pueden darse en ambas cámaras de resonancia. [6]

El primer **láser líquido** se puso en funcionamiento en enero de 1963. [7] Todos los primeros dispositivos de esta clase eran exclusivamente *quelatos* (es decir, compuestos metaloorgánicos formados por un ion metálico con radicales orgánicos). El láser líquido original contenía una disolución en alcohol de benzoilacetonato de europio que emitía a 613,1 nm. En 1966, se descubrió la acción láser en líquidos orgánicos que no eran quelatos. Esto se produjo al obtenerse una acción láser casualmente (a 755,5 nm) en una disolución de ptalocianina de cloroaluminio mientras se investigaba la emisión Raman estimulada en esa substancia [8].

Desde entonces, se ha logrado que muchas substancias colorantes fluorescentes de estas familias tales como las fluoresceínas, cumarinas y rhodaminas produjeran una acción láser a frecuencias desde el IR hasta el UV. Estos generalmente han sido pulsados aunque se ha obtenido operación en c-w. Existen tantos colorantes orgánicos que parecería posible construir un láser en cualquier frecuencia en el visible. Además, estos dispositivos se distinguen porque pueden sintonizarse intrínseca y continuamente sobre un rango de longitudes de onda (de unos 70 nm, aunque existe un sistema pulsado sintonizable sobre 170 nm). En efecto, hay otras disposiciones que harán variar la frecuencia de un rayo primario de láser (es decir, el rayo entra con un color y emerge con otro. Sección 13.4), pero en el caso del láser de colorante, el mismo rayo primario se sintoniza internamente cambiando, por ejemplo, la concentración o la longitud de la celda de colorante o ajustando una red de difracción reflectora en el extremo de la cavidad. En el mercado pueden obtenerse varios sistemas de láseres de colorantes que permiten utilizar fácilmente colorantes distintos y así funcionar sobre un rango de frecuencias muy ancho.

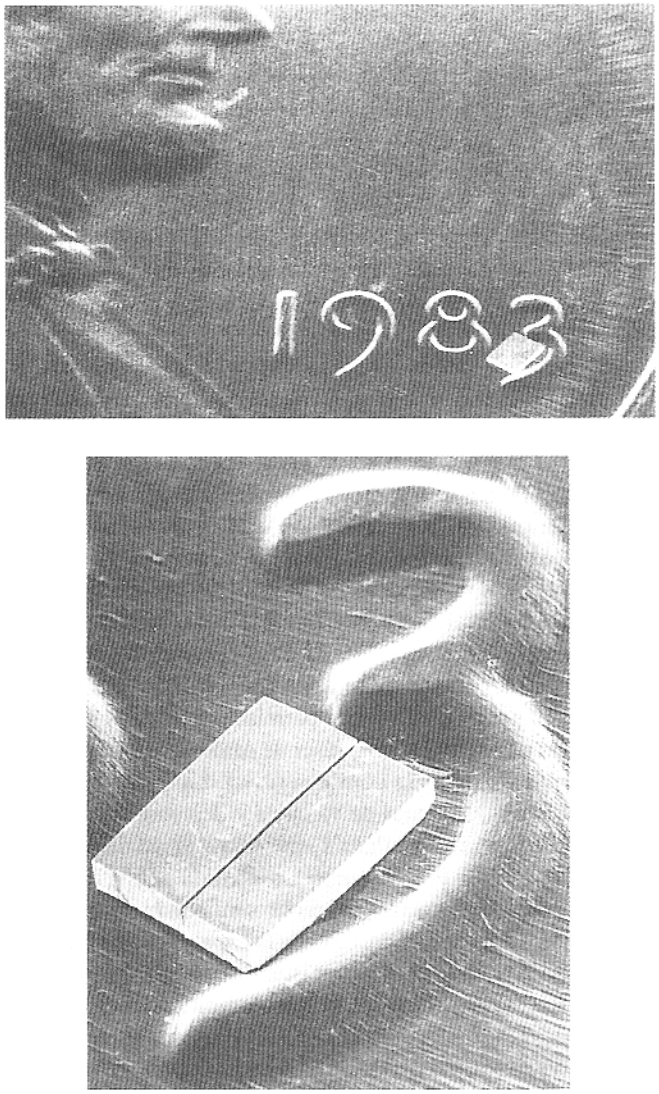


FIGURA 13.18 Láser de cavidad exfoliada. (Foto cedida por Bell Telephone Laboratories.)

El **láser químico** es un láser que se bombea usando la energía liberada por medio de una reacción química. El primero de esta clase se hizo funcionar en 1964 pero sólo en 1969 se desarrolló un láser químico de onda continua. Uno de los más prometedores entre éstos, es el láser de fluoruro de deuterio y dióxido de carbono (DF-CO_2) que es autónomo ya que no

[6] Véase J. Suematsu, «Advances in Semiconductor Lasers», *Phys. Today*, 32 (mayo de 1985). Para un análisis de los diodos láser de heteroestructura, remítanse a M. B. Panish e I. Hayashi, «A New Class of Diode Lasers», *Sci. Am*, **225**, 32 (julio de 1971).

[7] Véase Adam Heller, «Laser Action in Liquids», *Phys. Today* (noviembre de 1967), pág. 35, para una descripción más detallada.

[8] P. Sorokin, «Organic Lasers», *Sci. Amer.* **220**, 30 (febrero de 1969).

requiere ninguna fuente de alimentación externa. Brevemente, la reacción $F_2 + D_2 \rightarrow 2\,DF$, que se produce al mezclar estos dos gases bastante comunes, genera la suficiente energía para bombear un láser de CO_2.

Hay láseres de estado sólido, gaseoso, líquido y de vapor (por ejemplo, de H_2O) así como semiconductores, de electrones libres (de 600 nm a 3 mm), de rayos X y láseres con propiedades muy especiales, como los que generan pulsos extremamente cortos o aquellos dotados de una estabilidad de frecuencia extraordinaria. Estos últimos dispositivos son muy utilizados en el campo de la espectroscopia de alta definición, estando cada vez más solicitados también en otras áreas (por ejemplo, en los interferómetros que se utilizan para tratar de detectar ondas gravitacionales). Sea como fuere, las configuraciones de la cavidad de estos láseres deben controlarse cuidadosamente frente a las influencias perturbadoras de las variaciones de temperatura, de las vibraciones e incluso de las ondas sonoras. Hasta hoy, el láser del Joint Institute for Laboratory Astrophysics de Boulder en Colorado, tiene el récord con una estabilidad de frecuencia (pág. 314) de casi una parte en 10^{14}.

13.1.4 La luz fantástica

Los rayos láser difieren un poco entre sí según la clase de láser; sin embargo, hay varias características muy notables que están presentes, en varios grados, en todos los láseres. Está a la vista el hecho de que la mayoría de los haces láser son extremadamente direccionales, o si se prefiere, altamente colimados. Basta con soplar algo de humo en el rayo láser visible, que de otro modo sería invisible, para ver (por dispersión) un hilo fantástico de luz que se extiende en el cuarto. Un haz de He-Ne en el modo TEM_{00} generalmente tiene una divergencia de sólo un minuto de arco o menos. Recordemos que, en ese modo, la emisión se aproxima a una distribución gaussiana de la irradiancia, es decir, la densidad de flujo disminuye desde un valor máximo en el eje central del rayo y no tiene ahora lóbulos laterales. El haz láser típico es muy estrecho, y generalmente emite con apenas unos milímetros de diámetro. Ya que el haz se parece a una onda plana truncada es, por supuesto, *espacialmente coherente*. En efecto, la direccionalidad puede considerarse como una manifestación de esa coherencia. La luz láser es cuasimonocromática, generalmente con un ancho de banda de frecuencia muy estrecho (pág. 308). En otras palabras, es muy *coherente en términos temporales*.

Otro atributo es el alto flujo o *potencia radiante* que puede emitirse en esa estrecha banda de frecuencias. Como hemos visto, el láser se distingue porque emite toda su energía en forma de un haz estrecho. Por el contrario, una bombilla de 100 vatios puede emitir considerablemente más energía radiante en total que un láser de c-w de baja potencia, pero la emisión es incoherente, extendida sobre un ángulo sólido grande y también con un ancho de banda amplio. Una buena lente [9] puede interceptar totalmente un rayo láser y enfocar esencialmente toda su energía en un punto pequeño (cuyo diámetro varía directamente con λ y con la distancia focal e inversamente con el diámetro del haz). Secciones de haz con diámetros de unas pocas milésimas de pulgada pueden obtenerse fácilmente con lentes de distancia focal convenientemente corta. Un diámetro de unos cientos de millonésima de pulgada es posible en principio. Entonces, se pueden generar densidades de flujo en un haz láser enfocado de más de 10^{17} W/cm^2, por contraste con, digamos, una llama de oxiacetileno que tiene aproximadamente 10^3 W/cm^2. Para comprender mejor estos niveles de potencia, obsérvese que un haz láser enfocado de CO_2 de unos kilovatios en c-w puede perforar un agujero en una placa de acero inoxidable de un cuarto de pulgada en unos diez segundos. En comparación, un agujero y un filtro colocados en frente de una fuente ordinaria ciertamente producirán una luz espacial y temporalmente coherente, pero sólo con una fracción muy pequeña de la potencia total de salida.

Pulsos ópticos de femtosegundos

La invención del láser de colorante con bloqueo de modos, a principios de los años setenta, impulsó considerablemente los esfuerzos que se llevaban a cabo por entonces a fin de generar pulsos de luz extremadamente cortos. [10] Efectivamente, ya en 1974, se producían pulsos ópticos de subpicosegundo (1ps = 10^{-12} s), si bien hasta finales de la década se produjeron escasos adelantos reseñables. En 1981, dos descubrimientos separados llevaron a la producción de pulsos láser de femtosegundos (es decir <0,1 ps ó < 100 fs), en los Laboratorios Bell un equipo desarrolló un láser de colorante de anillo con colisión de pulsos, mientras que un equipo de IBM inventó un nuevo sistema de compresión de pulsos.

[9] La aberración esférica es habitualmente el problema principal ya que los rayos láser son, por lo general, cuasimonocromáticos e incidentes a lo largo del eje de la lente.

[10] Véase Chandrashekhar Joshi y Paul Corkum, «Interactions of Ultra-Intense Laser Light with Matter», *Phys. Today* **36** (enero de 1995).

Aparte de la importancia en el sector concreto de las comunicaciones electro-ópticas, estos resultados han llevado firmemente a la creación de un nuevo campo de investigación denominado *fenómenos ultrarrápidos*. La manera más eficaz de estudiar la evolución de un proceso que se produce a muy elevada velocidad (por ejemplo, la dinámica de portadores en los semiconductores, fluorescencia, procesos biológicos fotoquímicos y cambios en la configuración molecular) es examinarlo en una escala temporal relativamente breve con respeto a lo que está ocurriendo. Pulsos cuya duración es de $\approx$10 fs proporcionan un acceso totalmente nuevo a áreas precedentemente obscuras del estudio de la materia.

En la actualidad, pueden producirse de forma rutinaria pulsos que duran sólo 8 fs (10^{-15} s), lo cual corresponde a trenes de onda cuya extensión es de sólo unas 4 longitudes de onda de luz roja. Una de las técnicas que posibilitan estos grupos de ondas de femtosegundos se apoya en un concepto que se empleó en los estudios del radar en los años cincuenta y que se denomina *compresión de pulsos*. Aquí se amplía el espectro de frecuencia de un pulso de láser inicial para poder así acortar el ancho temporal o inverso del pulso —no hay que olvidar que $\Delta\nu$ y Δt son cantidades de Fourier conjugadas [ecuación (7.63)]—. El pulso inicial (que dura varios picosegundos) se hace pasar por un medio dispersivo no lineal, es decir una fibra óptica de un solo modo. Cuando la intensidad de la luz sea bastante alta, el valor no lineal del índice de refracción será considerable (sección 13.4) y la frecuencia portadora del pulso sufrirá un cambio que depende del tiempo. Al atravesar unos 30 m de fibra, la frecuencia del pulso se ensancha y se agudiza, es decir, se produce una dispersión en el espectro del pulso, con las frecuencias bajas en la parte anterior y las altas en la parte posterior. A continuación, el pulso cuyo espectro se ha ampliado pasa por otro sistema dispersivo (una línea de retardo), como, por ejemplo, un par de redes de difracción. Viajando por caminos distintos, el extremo trasero del pulso, de color azul, alcanzará el extremo rojo adelante, creando un pulso de salida con compresión en el tiempo.

El efecto de moteado

Un fenómeno bastante impresionante y fácilmente observable de la coherencia espacial de la luz del láser es su apariencia granular al reflejarse en una superficie difusa. Usando un láser de He-Ne (632,8 nm), expanda el haz, un poco, haciéndolo pasar a través de una lente simple y proyectándolo sobre una pared o una hoja de papel. El disco iluminado aparece moteado (en inglés: «speckled») con regiones brillantes y oscuras que centellean y resplandecen en una danza psicodélica deslumbrante. Si guiñamos un ojo, los granos crecen de tamaño; si nos acercamos hacia la pantalla, éstos se encogen, si nos quitamos las gafas, la distribución permanece en foco perfecto. En efecto, si una persona es miope las franjas de difracción provocadas por el polvo en la lente se borran y desaparecen pero las motas no. Sostengamos un lápiz a varias distancias del ojo de tal manera que el disco aparezca justo arriba de él. En cada posición, enfoquemos el lápiz dondequiera que enfoquemos, la distribución granular es muy clara. En efecto, si observamos el patrón a través de un telescopio, a medida que se ajusta el telescopio de un extremo a otro, los granos ubicuos permanecen perfectamente visibles aunque la pared esté completamente borrosa.

La luz espacialmente coherente que se esparce de una superficie difusa llena la región circundante con una figura de interferencia *estacionaria* (tal como en el caso de la disposición de división de frente de onda de la sección 9.3). En superficie los gránulos son extremadamente pequeños y van aumentando en tamaño con la distancia. En cualquier posición en el espacio, el campo resultante es la superposición de muchos trenes de onda esparcidos contributivos cuya fase relativa constante deberá definirse por la longitud del camino óptico de cada difusor al punto en cuestión, si se desea sostener la figura de interferencia. La figura 13.19 ilustra muy bien este punto. Muestra un bloque de cemento iluminado, en un caso, por luz láser y, en el otro, por luz colimada de una lámpara de arco de Hg, ambas con aproximadamente la misma coherencia espacial. Sin embargo, mientras que la longitud de coherencia del láser es mucho más elevada que la altura de las características de la superficie, la longitud de coherencia de la luz de Hg no lo es. En el primer caso, las motas en la foto son grandes y oscurecen la estructura de la superficie; en el segundo, a pesar de su coherencia espacial, el patrón moteado no se observa en la foto, prevaleciendo las características de la superficie. Debido a la textura áspera, la diferencia de longitud del camino óptico entre los dos trenes de onda que llegan a un punto en el espacio, esparcidos desde diferentes relieves de la superficie, es generalmente mayor que la longitud de coherencia de la luz de mercurio. Esto significa que las fases relativas de los trenes de onda que se superponen cambian rápidamente y al azar en el tiempo, eliminando la distribución de interferencia a gran escala.

Un sistema real de franjas se forma a partir de las ondas esparcidas que convergen frente a la pantalla. Las franjas pue-

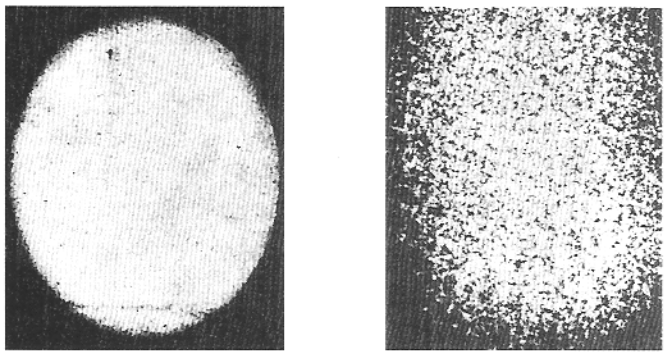


FIGURA 13.19 Distribuciones de moteado (*a*) Un bloque de cemento iluminado por un arco de mercurio y (*b*) con un láser de He-Ne. [De B.J. Thompson, J. *Soc. Phor. Inst. Engr.* **4**, 7 (1965).]

den verse intersectando la distribución de interferencia con una hoja de papel colocada oportunamente. Después de formar la imagen real en el espacio, los rayos comienzan a diverger pudiendo verse, entonces, cualquier región de la imagen directamente con el ojo enfocado correctamente. Por el contrario, los rayos que inicialmente divergen pueden verse como si se hubieran originado detrás de la pantalla de difusión formando así una imagen virtual.

Parece que, como consecuencia de la aberración cromática, los ojos normales e hipermétropes tienden a enfocar la luz roja detrás de la pantalla mientras que, por el contrario, una persona miope ve el campo real enfrente de la pantalla (independientemente de la longitud de onda). Si el observador, pues, mueve su cabeza a la derecha, la distribución se moverá a la derecha en el primer caso (donde el foco está detrás de la pantalla) y a la izquierda en el segundo (foco en el frente). El patrón seguirá el movimiento de su cabeza si se está observando muy próximo a la superficie. El mismo movimiento de paralaje aparente puede verse mirando a través de una ventana: parecerá que los objetos externos se mueven junto con la cabeza del observador mientras que los de adentro se moverán en sentido contrario a ella. El haz láser, brillante, de ancho de banda estrecho, espacialmente coherente, es idealmente adecuado para observar el efecto granular, aunque otros medios son ciertamente posibles. [11]

[11] Para lecturas adicionales sobre este efecto, véase L. I. Goldfischer, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 247 (1965); D. C. Sinclair, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 575 (1965); J. D. Rigden y E. I. Gordon, *Proc. IRE*, **50**, 2367 (1962); B. M. Oliver, *Proc. IEEE*, **51**, 220 (1963).

En la luz solar no filtrada los granos son pequeños, están en la superficie, y son multicoloreados. El efecto es fácil de observarse en un material liso, negro y plano (por ejemplo, el papel pintado de un cartel), pudiendo también verse en una uña de los dedos o en una moneda gastada.

Aunque proporciona una maravillosa demostración, tanto estética como pedagógicamente, el efecto granular puede llegar a ser una auténtica molestia real en sistemas iluminados con luz coherente. Por ejemplo, en las imágenes holográficas la distribución moteado representa un ruido de fondo problemático. Efectivamente, puede detectarse un fenómeno muy parecido al escuchar una radio móvil cuya potencia de la señal cambia según los lugares, dependiendo del medio ambiente y del tipo de interferencia que de ello resulta.

El efecto Raman espontáneo

Puede que un átomo excitado no regrese a su estado inicial después de emitir un fotón. Este tipo de comportamiento había sido detectado y estudiado ampliamente por George Stokes antes de formularse la teoría cuántica. Ya que el átomo baja a un estado provisional, emite un fotón de energía inferior al fotón primario incidente en lo que generalmente se denomina ***transición de Stokes***.

Si el proceso ocurre rápidamente (aproximadamente 10^{-7}s) se llamará **fluorescencia**, mientras que si hay un retraso apreciable (en algunos casos se trata de unos segundos, unos minutos e, incluso, varias horas), se conoce como **fosforescencia**. El uso de cuantos ultravioleta para generar una emisión fluorescente de luz visible se ha vuelto algo común en nuestra vida diaria. Un buen número de materiales muy comunes (por ejemplo, detergentes, colorantes orgánicos y esmalte para dientes) emiten fotones visibles característicos de tal manera que resplandecen bajo iluminación ultravioleta; de ahí el uso muy extendido que se hace de este fenómeno por razones de exhibición comercial y para «blanquear» ropa.

Si se esparce luz cuasimonocromática de una substancia, de ahí en adelante consistirá principalmente en luz de la misma frecuencia. Sin embargo, es posible observar componentes adicionales muy débiles que tienen frecuencias más altas y más bajas (bandas laterales). Además, la diferencia entre las bandas laterales y la frecuencia incidente ν_i resulta ser típica del material sugiriendo, por lo tanto, una aplicación en el terreno de la espectroscopia. El **efecto Raman espontáneo**, como se le llama ahora, lo predijo en 1923 Adolf Smekal y fue obser-

vado experimentalmente en 1928 por Sir Chandrasekhara Vankata Raman (1888-1970), entonces profesor de física en la Universidad de Calcuta. Resultó difícil emplear prácticamente este efecto porque se necesitaban fuentes intensas (por lo general, se usaban descargas de Hg) y muestras de gran tamaño. Asimismo, a menudo el ultravioleta de la fuente complicaba aún más las cosas descomponiendo la muestra. Por eso, no debe sorprender que los aspectos prácticos prometedores del efecto de Raman despertaran tan poco interés. La llegada del láser marcó un punto de inflexión en todo esto, tanto que la ***espectroscopia de Raman*** es ahora una herramienta analítica única y poderosa.

Para entender cómo opera el fenómeno, revisemos las características afines de los espectros moleculares. Una molécula puede absorber energía radiante en el infrarrojo lejano y en las regiones de microondas, convirtiéndola en energía cinética rotatoria. Asimismo, puede absorber fotones infrarrojos (es decir, aquellos que están dentro de un rango de longitudes de onda de aproximadamente 10^{-2} mm hasta alrededor de 700 nm) transformando esa energía en movimiento vibracional de la molécula. Finalmente, una molécula puede absorber energía en las regiones visible y ultravioleta por medio de un mecanismo de transiciones electrónicas, muy parecidas a las de un átomo. Supongamos entonces que tenemos una molécula en un estado vibracional que, usando la notación mecánico-cuántica, llamamos $|b\rangle$, como se indica en forma de diagrama en la figura 13.20*a*. Esto no tiene que ser necesariamente un estado excitado. Un fotón incidente de energía $h\nu_i$ es absorbido elevando el sistema a un estado intermedio o virtual donde inmediatamente da lugar a una transición de Stokes emitiendo un fotón (esparcido) de energía $h\nu_s < h\nu_i$. Al conservar la energía, la diferencia $h\nu_i - h\nu_s = h\nu_{cb}$ se utilizará para excitar la molécula llevándola a un nivel de energía vibracional más elevado $|c\rangle$. Puede que haya también una excitación electrónica o rotatoria.

De forma alternativa, si el estado inicial es de excitación (basta con calentar la muestra) la molécula, después de absorber y emitir un fotón, puede caer a un estado aún más bajo (figura 13.20*b*), dando así lugar a una ***transición anti-Stokes***. En este caso, $h\nu_s > h\nu_i$ lo cual significa que una parte de la energía vibracional de la molécula ($h\nu_{ba} = h\nu_s - h\nu_i$) se ha convertido en energía radiante. Sea como fuere, las diferencias resultantes entre ν_s y ν_i corresponden a diferencias específicas en los niveles de energía para la substancia que se estudia y permiten entender su estructura molecular. La figura 13.21 muestra esparcimiento Rayleigh donde $\nu_s = \nu_i$.

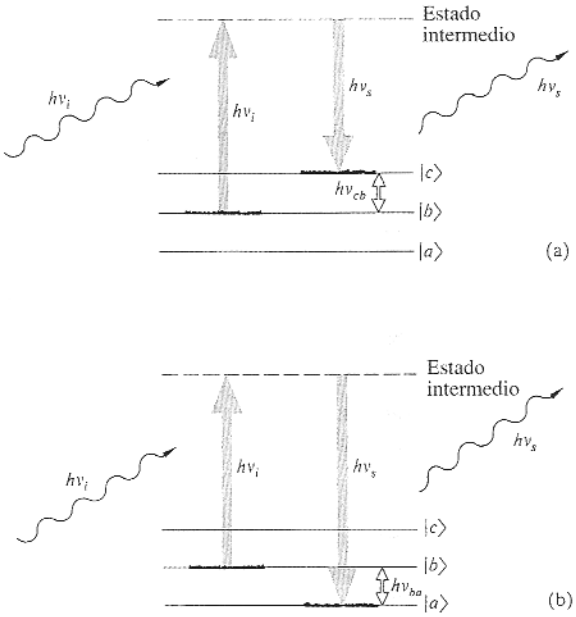


FIGURA 13.20 Esparcimiento Raman espontáneo.

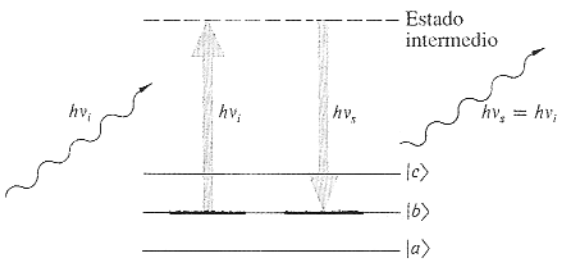


FIGURA 13.21 Esparcimiento Rayleigh.

El láser es una fuente ideal para el esparcimiento Raman espontáneo. Es brillante cuasimonocromático y está disponible en un amplio rango de frecuencias. La figura 13.22 ilustra un sistema típico de Raman con láser. En el mercado pueden encontrarse instrumentos de investigación completos de este tipo incluyendo el láser (generalmente de helio-neón, argón o criptón), sistemas de lentes convergentes y medios electrónicos para recuento de fotones. El monocromador de doble barrido proporciona la discriminación necesaria entre ν_i y ν_s ya que la luz láser no desplazada (ν_i) se esparce junto con el espectro Raman (ν_s). Si bien el esparcimiento Raman asociado con rotación molecular se observó antes de emplearse el láser,

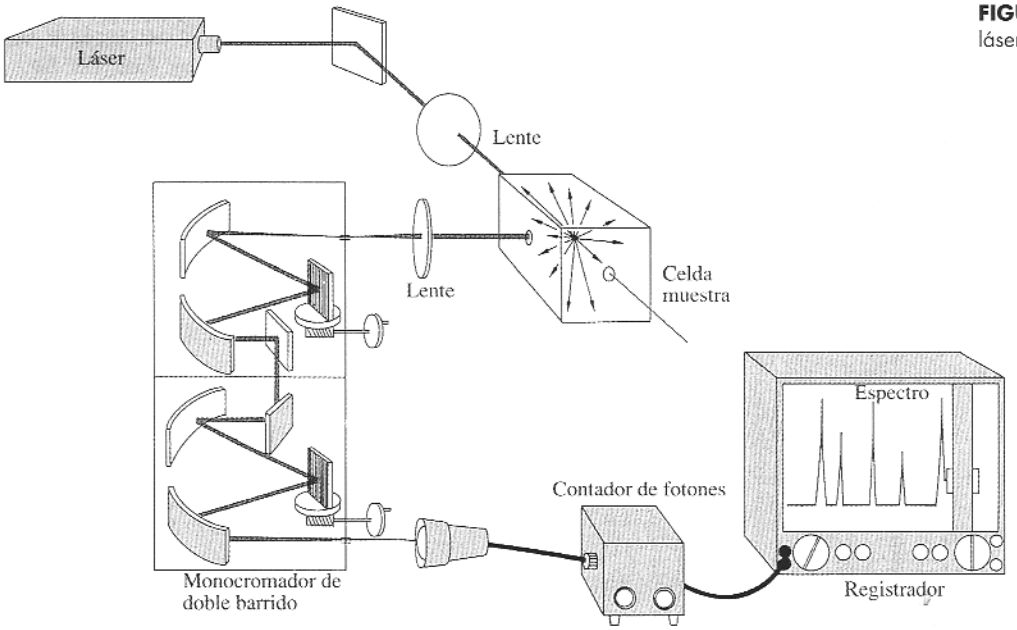


FIGURA 13.22 Sistema Raman de láser.

la mayor sensibilidad disponible hoy en día hace que el proceso sea más fácil permitiendo incluso examinar los efectos del movimiento electrónico.

El efecto Raman estimulado

En 1962, Eric J. Woodbury y Won K. Ng descubrieron más bien accidentalmente un efecto afín notable denominado *esparcimiento Raman estimulado.* Ellos habían estado trabajando con un láser pulsado de rubí de un millón de vatios que incorporaba un conmutador de célula Kerr de nitrobenceno (véase sección 8.11.3). Se percataron que alrededor del 10% de la energía incidente en 694,3 nm se desplazaba en longitud de onda y que aparecía como haz esparcido *coherente* en 766,0 nm. Posteriormente, se determinó que el desplazamiento correspondiente de frecuencia de unos 40 THz era típico de uno de los modos vibracionales de la molécula de nitrobenceno, como lo eran otras nuevas frecuencias también presentes en el haz esparcido. El esparcimiento Raman estimulado puede darse en sólidos, líquidos o gases densos bajo la influencia de pulsos enfocados de láser de alta energía (figura 13.23). El efecto se muestra esquemáticamente en la figura 13.24. Allí, dos haces de fotones inciden simultáneamente en una molécula; uno corresponde a la frecuencia ν_i del láser y el otro tiene la frecuencia esparcida ν_s. En la disposición original, el haz esparcido se reflejaba hacia adelante y hacia atrás en la muestra, pudiendo darse sin embargo el efecto sin resonador. El haz láser pierde un fotón $h\nu_i$ mientras que el esparcido gana un fotón $h\nu_s$ y por consiguiente *se amplifica*. La energía que queda ($h\nu_i - h\nu_s = h\nu_{ba}$) se transmite a la muestra. La reacción en cadena en la cual una gran parte del haz incidente se convierte en luz Raman estimulada, puede ocurrir solamente por encima de cierto umbral elevado de densidad de flujo del haz láser excitador.

El esparcimiento Raman estimulado proporciona una nueva gama completa de fuentes coherentes de alta densidad de flujo que se extiende desde el infrarrojo hasta el ultravioleta. Cabe mencionar que, en principio, cada mecanismo espontáneo de esparcimiento (por ejemplo, el de Rayleigh y Brillouin) tiene su equivalente estimulado. [12]

[12] Para profundizar en estos temas, puede leerse el artículo de revisión de Nicolaas Bloembergen, «The Stimulated Raman Effect», *Am. J. Phys.* **35**, 989 (1967). Contiene una bibliografía bastante buena y un apéndice histórico. Muchos de los artículos en *Laser and Light* tratan también de este material y son lecturas altamente recomendables.

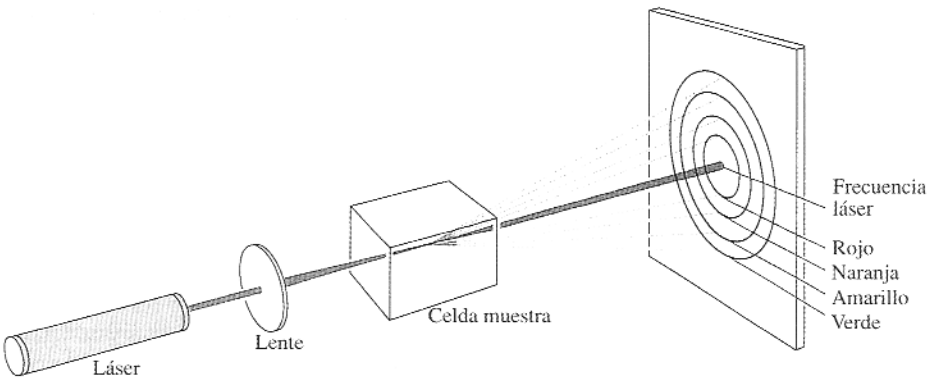
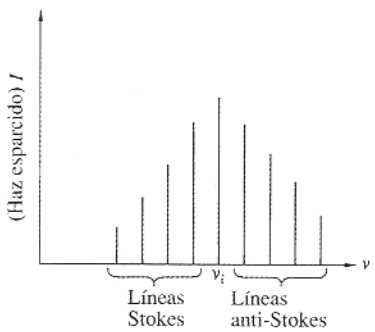


FIGURA 13.23 Esparcimiento Raman estimulado. (Véase RE. W. Minck, R. W. Terhune y C. C. Wang, *Proc. IEEE* **54**, 1357 (1966).]



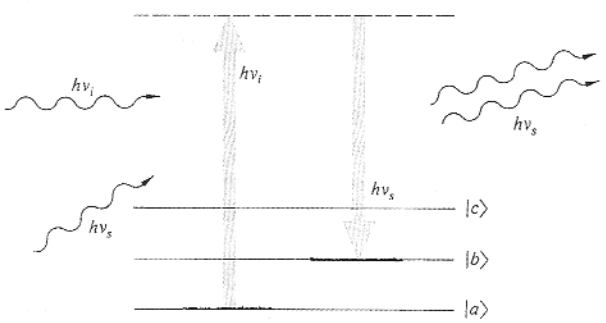


FIGURA 13.24 Diagrama de niveles energéticos del esparcimiento Raman estimulado.

13.2 Formación de imágenes-distribución espacial de la información óptica

La manipulación de todo tipo de datos por medio de técnicas ópticas ya se ha convertido en un *hecho consumado* tecnológico. La literatura, a partir de la década de los sesenta, refleja, en áreas diversas, este interés de largo alcance en la metodología del procesamiento de datos ópticos. Se han logrado aplicaciones prácticas en la mejora de imágenes televisivas y fotográficas, procesamiento de señales de radar y de sonar (análisis de conjuntos de antenas en fase y sintéticas) y también reconocimiento de figuras (por ejemplo, interpretación de aerofotografías y estudios de huellas dactilares), entre otros.

Nuestro interés aquí es desarrollar la nomenclatura y algunas de las ideas necesarias para comprender este empuje contemporáneo de la óptica.

13.2.1 Frecuencias espaciales

En los procesos eléctricos, lo que más interesa son las variaciones de la señal en el tiempo, es decir, la alteración del voltaje momento a momento que podría darse en un par de terminales en algún punto espacial fijo. Por comparación, en la óptica nos ocupamos mayoritariamente de la información difundida en una región del espacio en un punto temporal fijo. Por ejemplo, podemos considerar la escena que se muestra en la figura 13.25*a* como una distribución bidimensional de den-

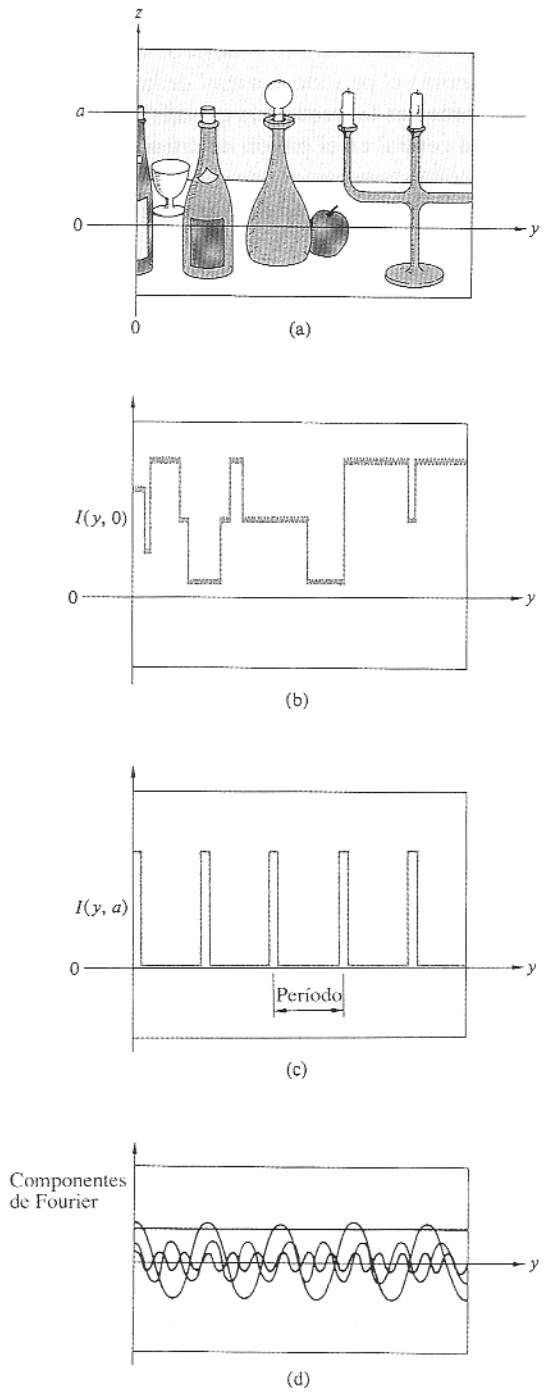


FIGURA 13.25 Distribución bidimensional de irradiancia.

sidad de flujo. Podría tratarse de una transparencia iluminada, una imagen televisiva o de una imagen proyectada en una pantalla; en todo caso, supuestamente hay alguna función $I(y,z)$ que asigna un valor de I a cada punto de la imagen. A fin de simplificar un poco las cosas, supongamos que barremos a lo largo de la pantalla en una línea horizontal ($z = 0$), representando gráficamente las variaciones de la irradiancia con la distancia, punto por punto, como en la figura 13.25*b*. La función $I(y,0)$ puede sintetizarse a partir de funciones armónicas usando las técnicas del análisis de Fourier que se analizaron en los capítulos 7 y 11. En este caso, puesto que la función es bastante compleja, harían falta muchos términos para representarla adecuadamente. Sin embargo, si se conoce la forma funcional de $I(y,0)$, el procedimiento es bastante sencillo. Barriendo a lo largo de otra línea, por ejemplo, $z = a$, obtenemos $I(y, a)$ que está trazada en la figura 13.25*c* y que resulta formada por una serie de pulsos cuadrados igualmente espaciados. Esta función se consideró detenidamente en la sección 7.3 y unas cuantas de sus componentes constitutivas de Fourier se esbozan a grandes rasgos en la figura 13.25*d*. Si los máximos en (*c*) están separados de centro a centro, por ejemplo, por intervalos de 1 cm, el periodo espacial es igual a 1 cm por ciclo siendo su recíproco, es decir, la frecuencia espacial, igual a 1 ciclo por cm.

De modo muy general, podemos transformar la información asociada con cualquier línea de barrido en una serie de funciones sinusoidales de amplitud y frecuencia espacial apropiadas. En los casos de los blancos de la onda sinusoidal simple o de la onda cuadrada de la figura 13.26, cada línea de barrido horizontal es idéntica y los patrones son efectivamente unidimensionales. El espectro de frecuencias espaciales de las componentes de Fourier que se necesitan para sintetizar la onda cuadrada se muestra en la figura 7.21. Por otro lado, $I(y, z)$ para la escena de la botella de vino y el candelabro es bidimensional y tenemos que pensar en términos de transformadas bidimensionales de Fourier (Secciones 7.4.4 y 11.2.2). Cabe mencionar también que, al menos en principio, podríamos haber registrado la amplitud del campo eléctrico en cada punto de la escena y entonces haber llevado a cabo una descomposición similar de esa señal en sus componentes de Fourier.

Recordemos (sección 11.3.3) que la figura de difracción de campo lejano o de Fraunhofer es, en efecto, idéntico al de la transformada de Fourier de la función de abertura $\mathcal{A}(y, z)$ y ésta, a su vez, es proporcional $\varepsilon_A(y, z)$, la eficacia de la fuente por unidad de área [(ecuación (10.37)] sobre la entrada o plano del objeto. Dicho de otro modo, si la distribución de campo en el plano del objeto viene dada por $\mathcal{A}(y, z)$, la transformada

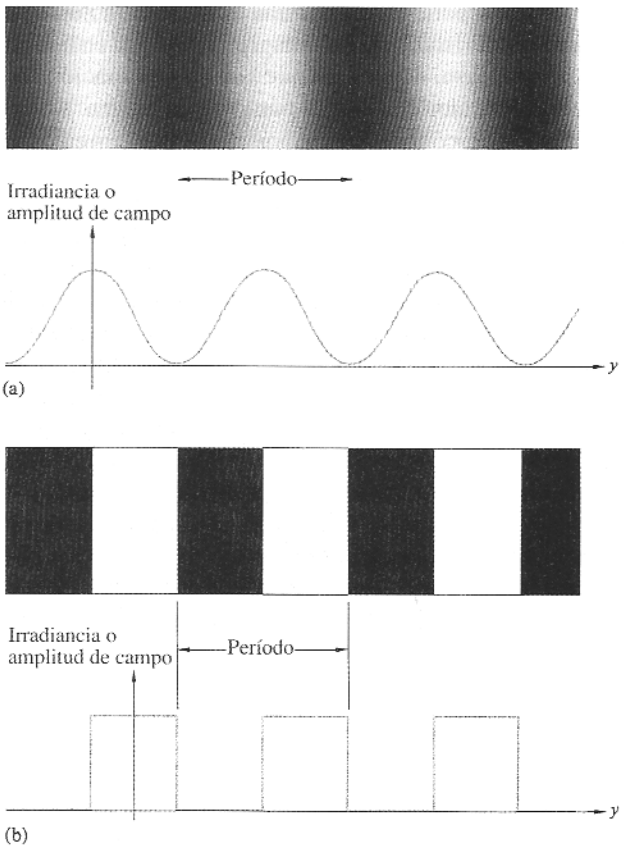


FIGURA 13.26 (*a*) Blanco de onda sinusoidal y (*b*) de onda cuadrada.

bidimensional de Fourier aparecerá como la distribución de campo $E(Y, Z)$ en una pantalla muy distante. Como en las figuras 7.32 y 10.11, podemos insertar una lente (L_t) después del objeto para acortar la distancia al plano imagen. Esa lente objetivo se denomina generalmente ***lente transformadora*** ya que la podemos imaginar como si fuera un *ordenador óptico* capaz de generar transformadas de Fourier instantáneas. Ahora, supongamos que iluminamos una red de transmisión algo idealizada con una onda cuasimonocromática, espacialmente coherente, tal como la onda plana que emana de un láser o de una fuente de arco de Hg, filtrada y colimada (figura 13.27). En ambos casos, se supone que la amplitud del campo es bastante constante en el frente de onda incidente. La función de abertura es entonces una función escalonada periódica (figura 13.28); en otras palabras, conforme nos movemos de un punto a otro en el plano del objeto, la amplitud del campo es cero o una constante. Si a es el espaciado de la red, es también el período espacial de la función escalonada y su recíproco es la frecuencia espacial fundamental de la red. El punto central en el patrón de difracción $(m = 0)$ es el término cc correspondiente a una frecuencia espacial cero —éste es el nivel de referencia que surge debido a que la entrada $\mathcal{A}(y)$ es positiva en todas partes. El nivel de referencia puede desplazarse construyendo la función escalonada en un fondo gris uniforme. A medida que los puntos en el plano de la imagen (o en este caso de la transformada) se alejan del eje central, sus frecuencias espaciales asociadas (m/a) aumentan de acuerdo con la ecuación de la red sen $\theta_m = \lambda(m/a)$. Una red más burda tendría un valor más grande de a, de tal manera que un orden dado (m) sería concomitante con una frecuencia más baja, (m/a) y todos los puntos estarían más cercanos al eje óptico o central.

Si hubiéramos usado como objeto una transparencia semejante a un blanco sinusoidal (figura 13.26*a*) tal que la función de abertura variara sinusoidalmente, se hubieran detectado sólo tres puntos ideales en el plano de la transformada, es decir el punto central de frecuencia cero y el primer orden o fundamental $(m = \pm 1)$ a cada lado del centro. Al extenderlo todo a dos dimensiones, un retículo cruzado (o malla) da como resultado la figura de difracción que se muestra en la figura 13.29. Obsérvese que además de la obvia periodicidad horizontal y vertical a través de la malla, ésta es también repetitiva, por ejemplo, a lo largo de las diagonales. Un objeto más complejo tal como una transparencia de la superficie de la Luna generaría una figura de difracción extremadamente compleja. Debido a la naturaleza periódica simple de la red podríamos pensar en sus componentes de la serie de Fourier, pero ahora ciertamente tendremos que pensar en términos de las transformadas de Fourier. En todo caso, *cada punto de luz en la figura de difracción indica la presencia de una frecuencia espacial específica que es proporcional a su distancia del eje óptico (posición de frecuencia cero).* Las componentes de frecuencia de signo negativo y positivo aparecen diametralmente opuestas alrededor del eje central. Si pudiéramos medir el campo eléctrico en cada punto en el plano de la transformada, observaríamos en efecto la transformada de la función de la abertura, pero esto no es viable. En su lugar, lo que detectaremos es la distribución de densidad de flujo, donde en cada punto la irradiancia es proporcional al promedio temporal del campo eléctrico al cuadrado o, de modo equivalente, al cuadrado de la amplitud de la contribución de la frecuencia espacial particular en ese punto.

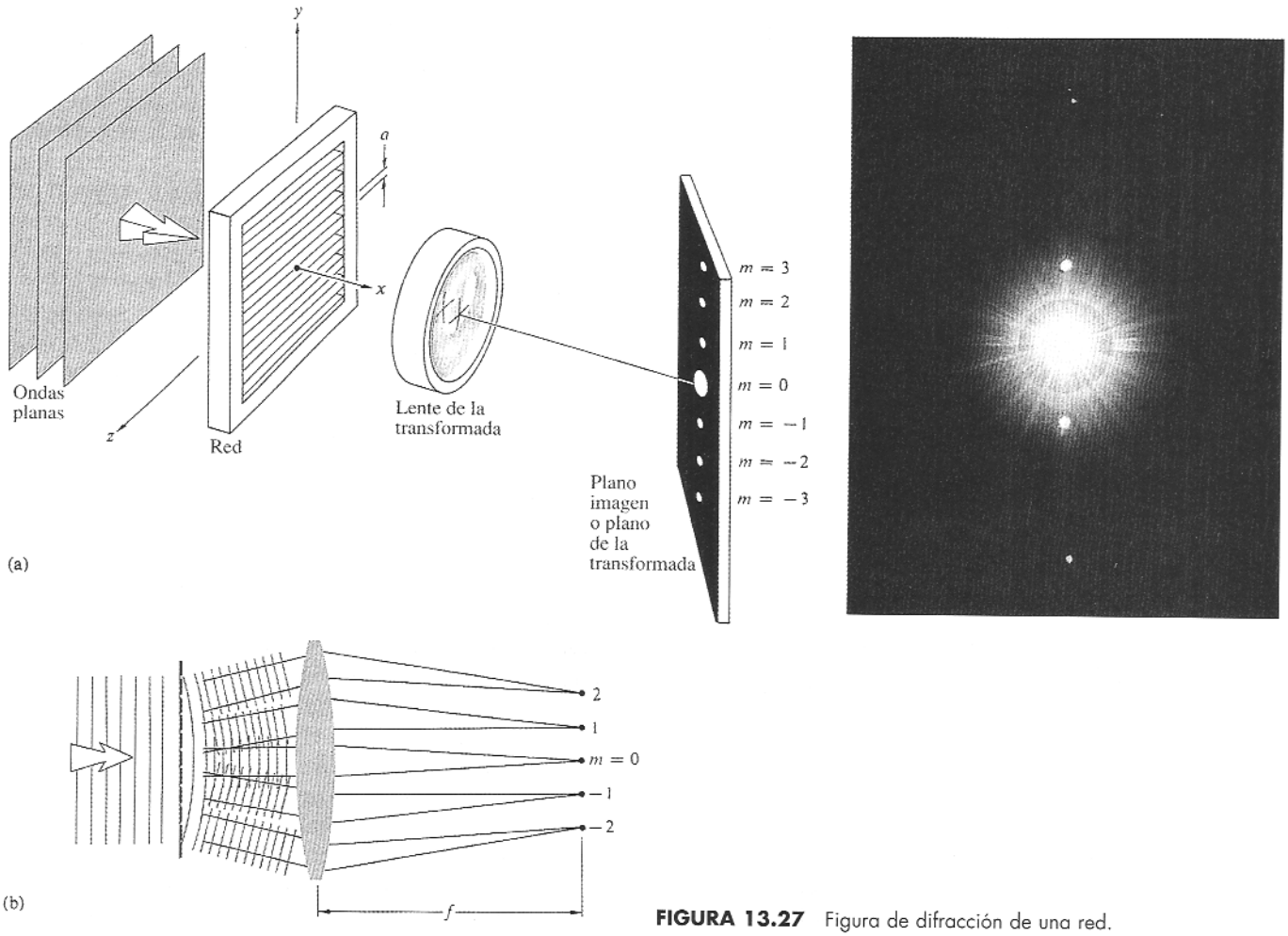


FIGURA 13.27 Figura de difracción de una red.

13.2.2 Teoría de Abbe de la formación de imágenes

Consideremos el sistema de la figura 13.30*a*, que es solamente una versión más elaborada del que se muestra en la figura 13.30*b*. Los frentes de onda monocromáticos planos que emanan de la lente colimadora (L_c) son difractados por una red. El resultado es un frente de onda distorsionado que resolvemos en una nueva serie de ondas planas, cada una correspondiendo a un orden dado $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ o frecuencia espacial, y cada una viajando en una dirección específica (figura 13.30*b*). La lente objetivo (L_t) sirve como *lente transformadora* que forma la figura de difracción de Fraunhofer de la red sobre el plano de la transformada Σ_t (que es también el plano focal posterior de L_t).

Las ondas, por supuesto, se propagan más allá de Σ_t, y llegan al plano de la imagen Σ_i. Ahí se superponen e interfieren para formar una imagen invertida de la red. Por consiguiente, los puntos G_1 y G_2 tienen respectivamente sus imágenes en P_1 y P_2. El objetivo forma dos figuras distintas de interés: una es la transformada de Fourier en el plano focal conjugado al plano de la fuente, y la otra es la imagen del objeto, formada en el plano conjugado al plano del objeto. La figura 13.31 muestra la misma disposición para una rendija larga, estrecha y horizontal, iluminada con luz coherente.

En la figura 13.30*a* podemos considerar los puntos S_0, S_1, S_2, etc. como si fueran emisores puntuales de trenes de onda de Huygens; la figura de difracción resultante en Σ_t es entonces la imagen de la red. Dicho de otro modo, *la imagen sur-*

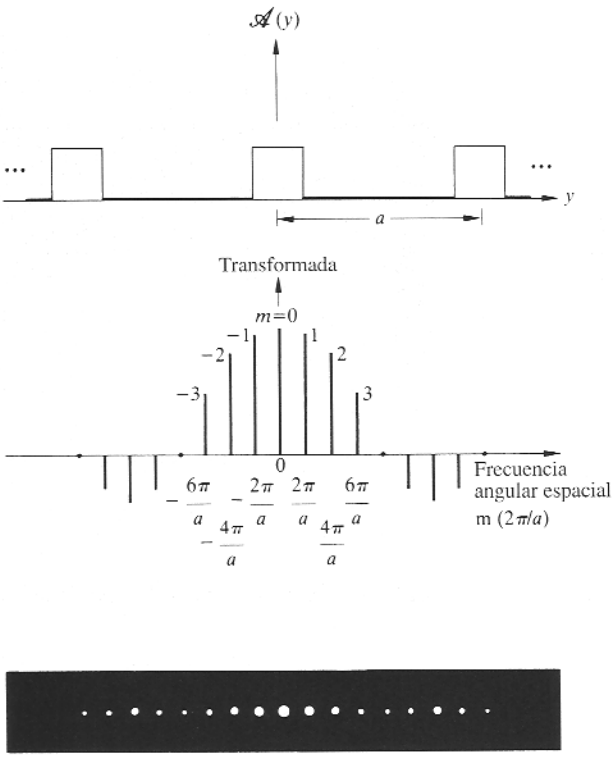


FIGURA 13.28 Onda cuadrada y su transformada.

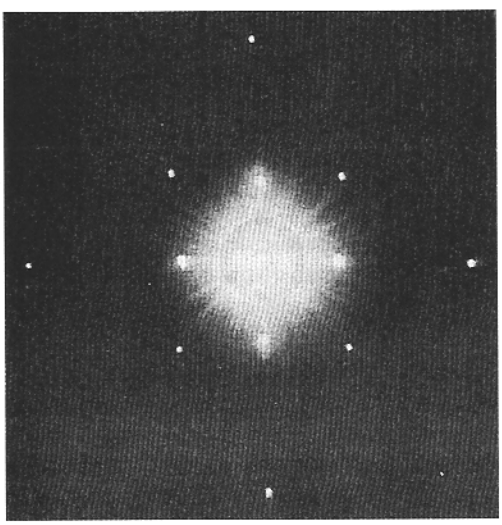


FIGURA 13.29 Figura de difracción de una red cruzada.

ge de un proceso de difracción doble. De otra forma, podemos imaginar que la onda incidente está difractada por el objeto y la onda difractada resultante es entonces difractada una vez más por el objetivo. Si esa lente no estuviera ahí, la figura de difracción del objeto aparecería en Σ_i en lugar de la imagen.

Estas nociones fueron expuestas por primera vez por el profesor Ernst Abbe (1840-1905) en 1873 [13] quien, en ese entonces, se interesaba por la teoría del microscopio, cuya relación con el análisis anterior es evidente si consideramos L_t como objetivo de microscopio. Además, si el retículo se reemplaza por una pieza de algún material delgado translúcido (es decir, la muestra que se está examinando) que se ilumina con la luz de una fuente pequeña y de un sistema condensador, el sistema ciertamente se asemeja a un microscopio.

Carl Zeiss (1816-1888) quien, a mediados del siglo XIX, administraba una pequeña fábrica de microscopios en Jena, se percató de los fallos de las técnicas de prueba y error de esa época. En 1866, contrató a Ernst Abbe, entonces profesor de la Universidad de Jena, a fin de desarrollar un planteamiento más científico en lo referente al diseño de microscopios. Abbe pronto encontró, por experimentación, que una abertura más grande llevaba a una resolución mayor, aunque el cono aparente de luz incidente llenaba sólo una pequeña porción del objetivo. De alguna manera, el «espacio oscuro» de su entorno contribuía a la imagen. En consecuencia, él planteó que el proceso de difracción, muy conocido por ese entonces, que se produce en el borde de una lente (y que lleva al patrón de Airy para una fuente puntual) no era operativo en el mismo sentido que lo era para un objetivo del telescopio iluminado incoherentemente. Por lo visto, las muestras, cuyo tamaño era del orden de λ, esparcían luz en el «espacio oscuro» del objetivo del microscopio. Obsérvese que si, como en la figura 13.30b, la abertura del objetivo no es lo suficientemente grande para recoger toda la luz difractada, la imagen no se corresponde exactamente con ese objeto. Más bien, se relaciona con un objeto ficticio cuya figura de difracción completa es igual a la recogida por L_t. Sabemos de la sección anterior que estas por-

[13] En 1896, Lord Rayleigh propuso una alternativa que es, al fin y al cabo, un planteamiento equivalente. Él consideró cada punto en el objeto como una fuente coherente cuya onda emitida era difractada por la lente transformándola así en una distribución de Airy. A su vez, cada uno de ellos estaba centrado en el punto de imagen ideal (en Σ_i) de la fuente puntual correspondiente. Entonces Σ_i estaba cubierta con una distribución de figuras de Airy un tanto superpuestos e interferentes.

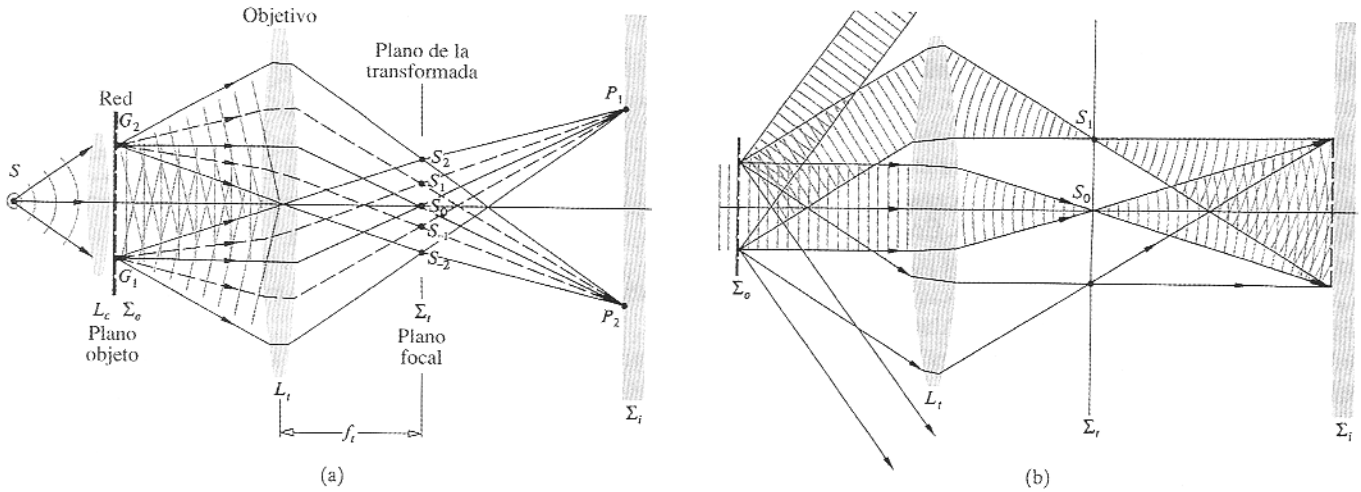


FIGURA 13.30 Formación de imágenes.

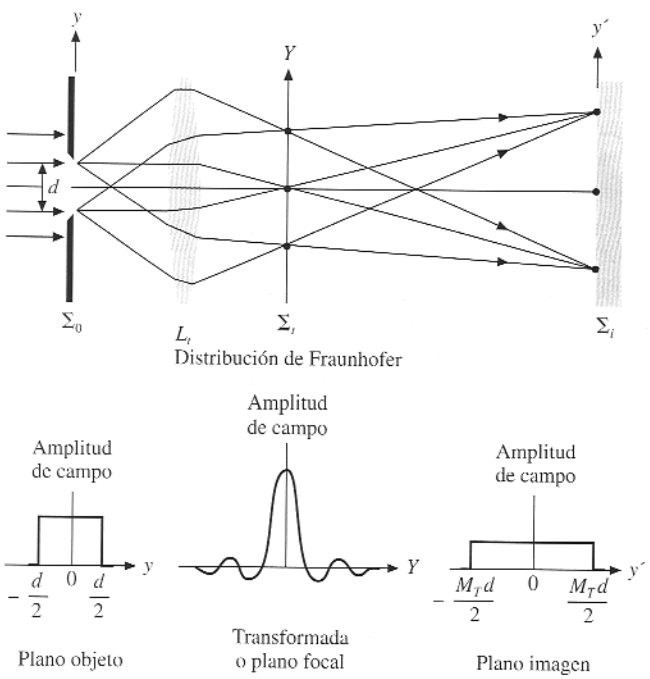


FIGURA 13.31 Imagen de una rendija.

ciones perdidas de la región exterior de la distribución de Fraunhofer están asociadas con las frecuencias espaciales más altas. Y, como veremos más tarde, su eliminación trae como consecuencia una pérdida en la nitidez y resolución de la imagen.

Hablando en términos prácticos, a menos que el retículo que se consideró antes tenga un ancho infinito, no puede en realidad ser estrictamente periódico. Esto significa que tiene un espectro continuo de Fourier dominado por los términos discretos usuales de la serie de Fourier, siendo el otro mucho más pequeño en amplitud. Los objetos irregulares complejos muestran claramente la naturaleza continua de sus transformadas de Fourier. En cualquier caso, cabe destacar que, *a menos que, el objetivo tenga una abertura infinita, funciona como un filtro de paso bajo que rechaza frecuencias espaciales mayores que un valor dado y que deja pasar todas las inferiores* (las primeras son aquellas que se extienden más allá de la frontera física de la lente). Por consiguiente, todos los sistemas prácticos de lentes estarán limitados en su capacidad para reproducir el contenido de las frecuencias espaciales altas en un objeto iluminado con luz coherente. [14] Cabe decir también que hay una no linealidad básica asociada con los sistemas ópticos de formación de imágenes que operan a altas frecuencias espaciales. [15]

[14] Remítanse a H. Volkmann, «Ernst Abbe and His Work», *Appl. Opt.* **5**, 1720 (1966) para información más detallada acerca de los muchos logros de Abbe en el campo de la óptica.

[15] R. J. Becherer y G. B. Parrent, Jr., «Nonlinearity in Optical Imaging Systems», *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 1479 (1967).

13.2.3 Filtrado espacial

Supongamos que en realidad disponemos el sistema que se muestra en la figura 13.30*a*, usando un láser como fuente de ondas planas. Si los puntos S_0, S_1, S_2, etc., tienen que servir como fuentes de una distribución de Fraunhofer, la pantalla de la imagen deberá supuestamente colocarse en $x = \infty$ (aunque 30 ó 40 pies son a menudo suficientes). Con el riesgo de resultar repetitivos, recordemos que la razón por la que se utilizaba L_t, era originalmente traer a una distancia cercana la figura de difracción del objeto desde el infinito. Ahora, vamos a introducir una *lente formadora de imagen* L_i (figura 13.32 y 13.33) para traer desde el infinito la figura de difracción del sistema de los puntos S_0, S_1, S_2, etc., y recolocar Σ_i a una distancia adecuada. La lente transformadora hace que la luz del objeto converja en el plano Σ_t en la forma de una distribución de difracción; es

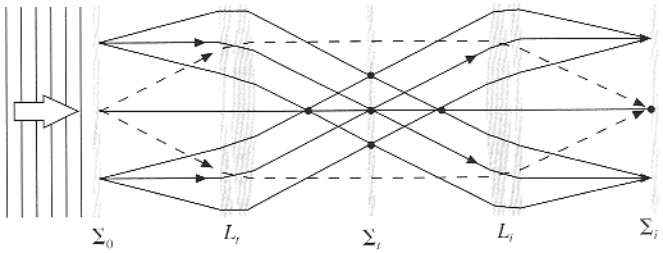
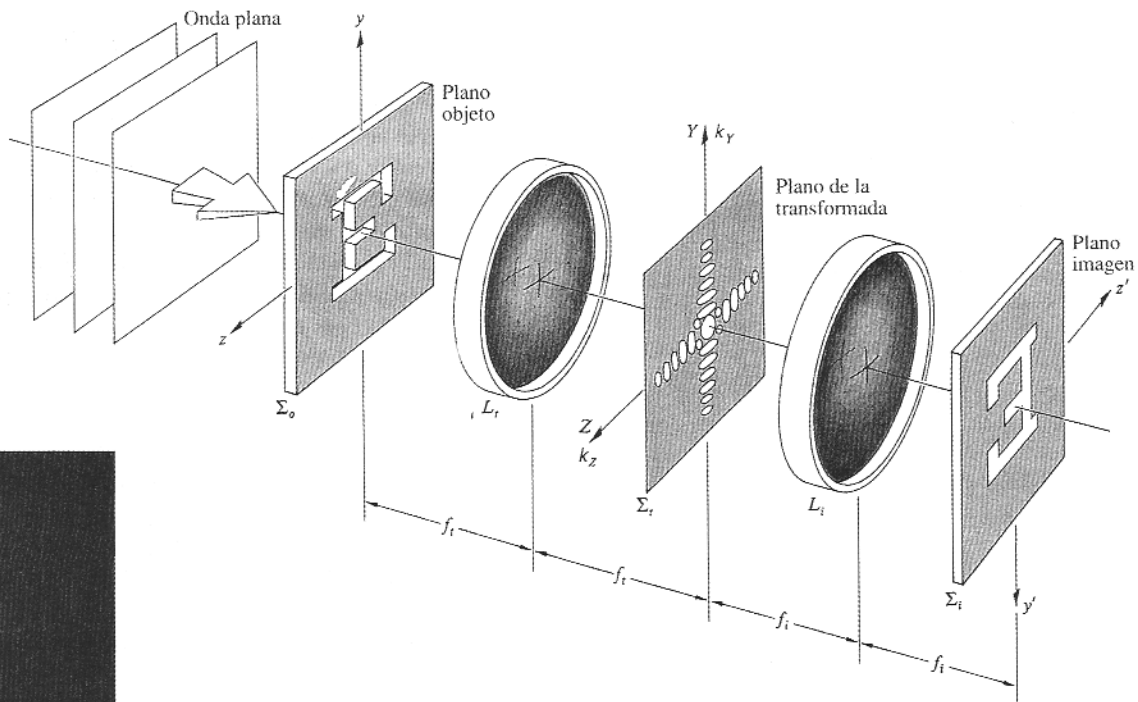
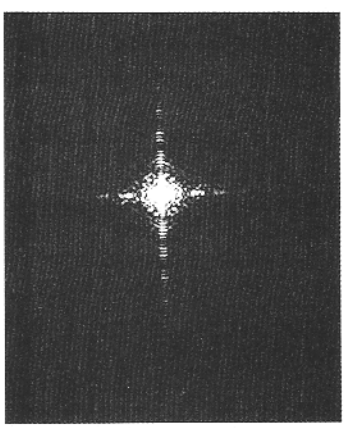


FIGURA 13.32 Planos objeto, de la transformada e imagen.

decir, produce en Σ_t una transformada de Fourier bidimensional del objeto. A saber, el espectro de frecuencias espaciales del objeto se extiende sobre el plano de la transformada. De ahí en adelante, L_i (la *lente de la transformada «inversa»*) proyecta la figura de difracción de la luz distribuida sobre Σ_t en el plano





(a)

FIGURA 13.33 Transformada de Fourier de la letra **E** por ordenador. De la parte (*a*) hasta la (*g*) se ponen de relieve más y más detalles de la transformada a medida que el tiempo de exposición aumenta. (Fotos de E. H.)

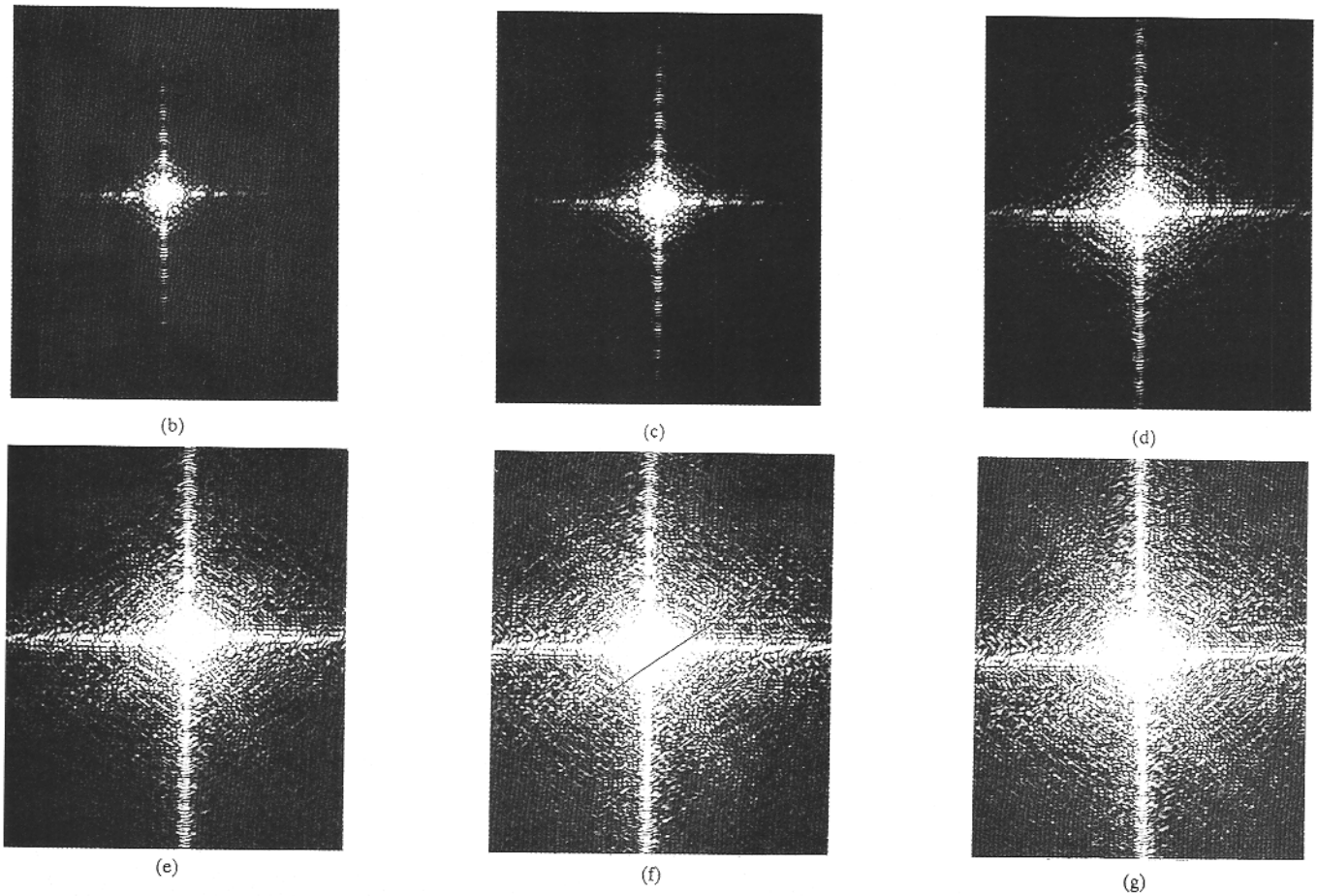


FIGURA 13.33 (Continuación)

imagen. Dicho de otra forma, difracta el haz difractado, lo que efectivamente significa que genera una transformada inversa (invertida). Por consiguiente, la imagen final es esencialmente una transformada inversa de los datos en Σ_t.

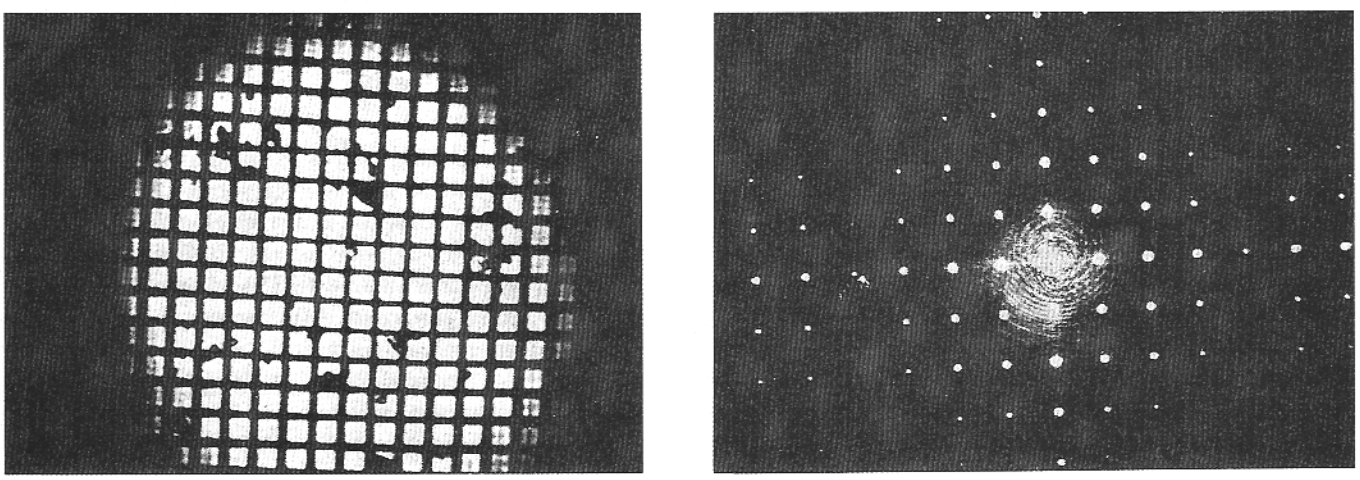
Es bastante frecuente que, en la práctica, L_t y L_i sean lentes multielemento bien corregidas e idénticas ($f_t = f_i$) (para un trabajo esmerado, éstas pueden tener resoluciones de alrededor de 150 pares de líneas/mm —donde un par de líneas es un período en la figura 13.26*b*). Para aplicaciones menos exigentes, pueden utilizarse perfectamente dos objetivos de proyector de gran abertura (alrededor de 100 mm) con distancias focales convenientes de alrededor de 30 ó 40 cm. A continuación, una de estas lentes se gira de tal manera que sus planos focales posteriores coincidan con Σ_t. Además, el plano objeto o de entrada no necesita estar colocado a una distancia focal de L_t; la transformada aún aparece sobre Σ_t. El mover Σ_0 afecta solamente a la fase de la distribución de amplitudes y eso generalmente es de poco interés. El dispositivo que se muestra en las figuras 13.32 y 13.33 se denomina a menudo ***ordenador óptico coherente.*** Éste permite insertar obstrucciones, es decir, mascarillas o filtros, en el plano de la transformada y así obstruir parcial o completamente ciertas frecuencias espaciales, evitando que lleguen al plano de la imagen. *Este proceso de alteración del espectro de frecuencias de la imagen se conoce como* **filtrado espacial** *(*véase sección 7.4.4).

Por nuestro análisis anterior de la difracción de Fraunhofer, sabemos que una rendija larga y estrecha en Σ_0, independien-

temente de su orientación y ubicación, genera una transformada en Σ_t, que consiste en una serie de rayas luminosas que se hallan a lo largo de una línea recta perpendicular a la rendija (figura 10.10) y que *pasan a través del origen.* Por consiguiente, si el objeto lineal recto se describe por $y = mz + b$, la figura de difracción se encuentra a lo largo de la línea $Y = -Z/m$ o, de manera equivalente, de las ecuaciones (11.64) y (11.65), $k_Y = -k_Z/m$. Con esto y la figura de Airy en mente, deberíamos poder anticipar algo de la estructura aproximada de las transformadas de varios objetos. Recuérdese también que estas transformadas están centradas alrededor del eje óptico de frecuencia cero del sistema. Por ejemplo, un signo más transparente, cuya línea horizontal es más gruesa que la vertical, tiene una transformada bidimensional con aproximadamente la forma de un signo más. La línea gruesa horizontal genera una serie de rayas cortas verticales, mientras que el elemento delgado vertical produce una línea de rayas largas horizontales. Cabe recordar que los elementos del objeto con dimensiones pequeñas difractan con ángulos relativamente grandes. Junto con Abbe, uno podría considerar todo este tema en dichos términos en lugar de usar los conceptos de filtrado de frecuencias espaciales y transformadas, que representan la influencia más moderna de la teoría de la comunicación.

Las porciones verticales del símbolo E en la figura 13.33 generan el ancho espectro de frecuencias que aparece como patrón horizontal. Obsérvese que todas las fuentes lineales paralelas en un objeto dado corresponden a una sola disposición lineal en el plano de la transformada. Esta, a su vez, pasa a través del origen en Σ_t (la intersección es cero), exactamente como en el caso del retículo. Un número 5 transparente generará un patrón que consiste tanto en una distribución horizontal como en una vertical de puntos que se extienden sobre una gama de frecuencias relativamente grande. También habrá una estructura anular concéntrica de frecuencia comparativamente baja. Las transformadas de discos y anillos y formas semejantes obviamente tendrán simetría circular. De manera parecida, una abertura elíptica horizontal generará bandas elípticas concéntricas orientadas verticalmente. Muy a menudo, los patrones de campo lejano poseen un centro de simetría (véase problemas 10.14 y 11.29).

Estamos ahora en posición de entender mejor el proceso de filtrado espacial y, para ello, consideraremos un experimento muy similar al publicado en 1906 por A. B. Porter. La figura 13.34*a* ilustra una malla fina de alambre cuya distribución periódica está alterado por unas partículas de polvo. Con la malla en Σ_0, la figura 13.34*b* muestra la transformada tal como aparecería en Σ_t. Aquí empieza lo interesante; ya que la información sobre la transformada, relativa al polvo, está ubicada en una distribución nebulosa irregular alrededor del punto central, podemos eliminarla fácilmente insertando una mascarilla opaca en Σ_t. Si ésta lleva unos agujeros en cada uno



(a) (b)

FIGURA 13.34 Una malla fina, ligeramente polvorienta y su transformada. (Fotos de D. Dutton, M. P. Givens y R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3.*)

de los máximos principales, dejando así pasar sólo esas frecuencias, la imagen aparecerá sin polvo, como en la figura 13.35*a*. En el otro extremo, si dejamos pasar sólo el patrón nebuloso cerca del centro, aparecerá muy poco de la estructura periódica, dejando una imagen hecha, esencialmente, de partículas de polvo (figura 13.35*b*). Dejando pasar solamente

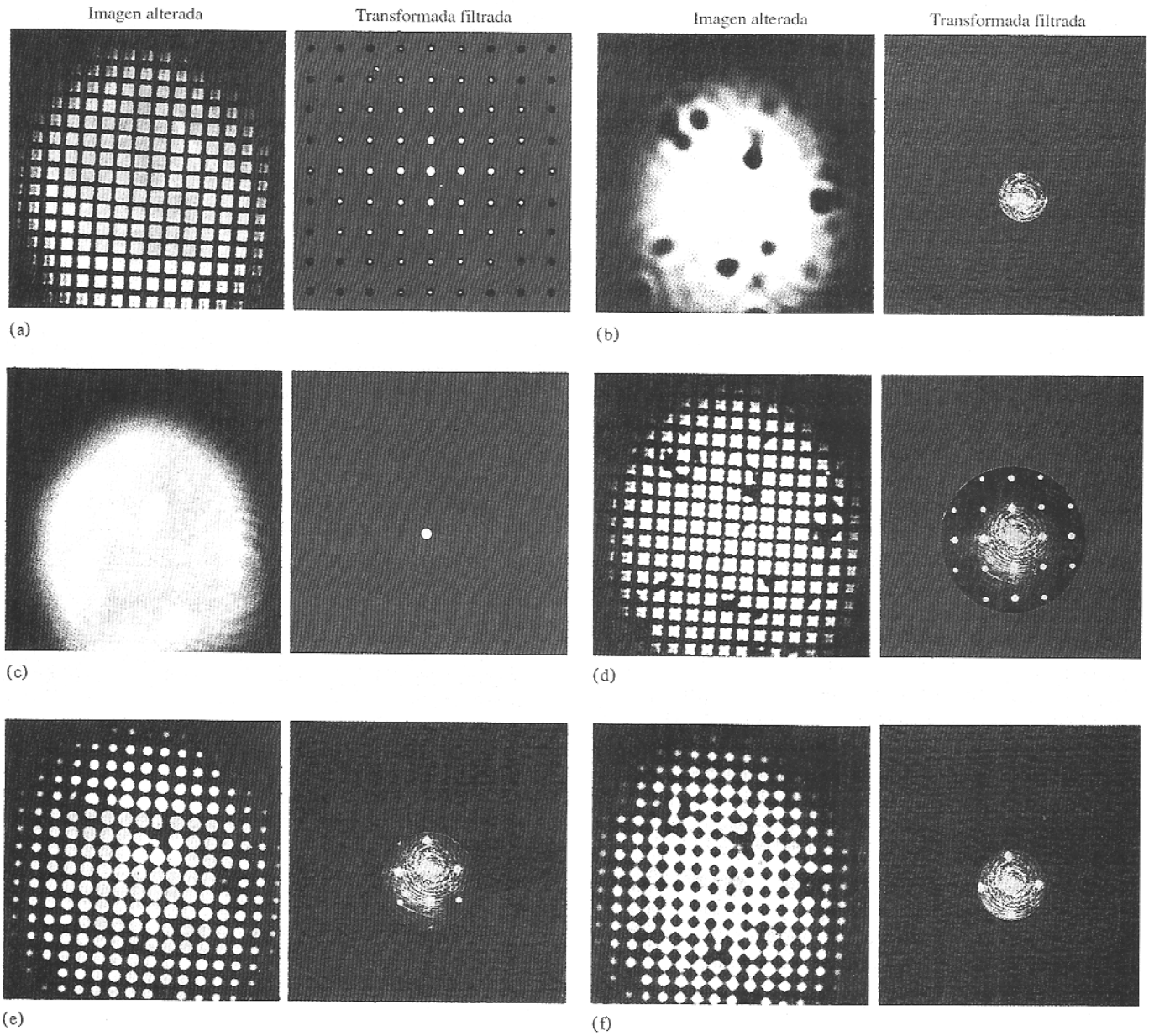
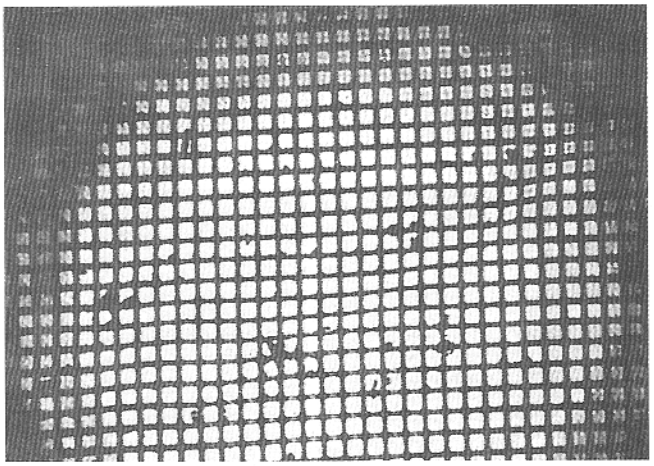


FIGURA 13.35 Imágenes resultantes al oscurecer varias porciones de la figura de difracción de la fig. 13.34*b* con unas máscaras o filtros espaciales. (Fotos de D. Dutton, M. P. Givens y R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3*.)

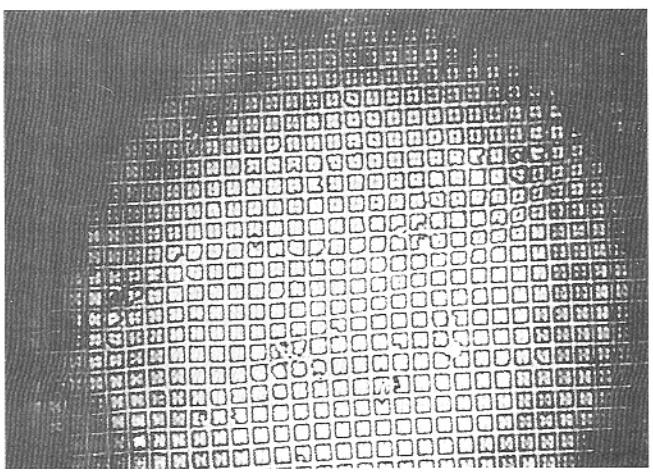
el punto central de orden cero, se genera un campo uniformemente iluminado (cc) como si la malla ya no estuviera colocada. Obsérvese que a medida que se van eliminando más y más cantidades de altas frecuencias, el detalle de la imagen se deteriora notablemente [figura 13.35 (*d*), (*e*) y (*f*)]. Esto puede entenderse muy fácilmente recordando cómo se sintetizó una función, con lo que podríamos llamar «bordes agudos», a partir de unas componentes armónicas. La onda cuadrada de la figura 7.19 sirve para ilustrar este punto. Es evidente que la suma de armónicos más altos sirve predominantemente para definir las esquinas y aplanar las crestas y valles del perfil. De esta manera, ***las frecuencias espaciales altas contribuyen al detalle de los bordes agudos entre las regiones claras y oscuras de la imagen.*** La eliminación de los términos de alta frecuencia ocasiona un redondeo de la función escalonada y una pérdida consecuente de resolución en el caso bidimensional.

¿Qué pasaría si eliminásemos la componente cc, (figura 13.35*c*), dejando pasar todo excepto el punto central? Un punto en la imagen original que aparece negro en la foto indica una irradiancia casi igual a cero y forzosamente una amplitud del campo casi igual a cero. Supuestamente, todas las distintas componentes del campo óptico se anulan completamente unas a otras en ese punto y por lo tanto no hay luz. Sin embargo, al eliminar el término cc, el punto en cuestión debe tener ciertamente una amplitud de campo diferente de cero. Cuando se eleva al cuadrado ($I \propto E_0^2/2$), ésta generará una irradiancia diferente de cero. Se deduce que las regiones que eran originalmente negras en la foto, aparecerán ahora casi blancas mientras que las regiones que eran blancas quedarán ahora grises como en la figura 13.36.

Examinemos ahora algunas de las aplicaciones posibles de esta técnica. La figura 13.37*a* muestra una foto compuesta de la Luna formada por tiras de película que se han unido para formar un único mosaico. Los datos de vídeo fueron enviados a la Tierra por el *Lunar Orbiter 1*. Claramente las discontinuidades regulares similares a las del retículo entre tiras adyacentes en la foto del objeto, generan la distribución vertical de frecuencias de ancho de banda que es evidente en la figura 13.37*c*. Cuando estas componentes de frecuencia se obstruyen, en la imagen procesada no se detecta ningún rastro de lo que había sido un mosaico. De forma muy parecida, pueden suprimirse datos extraños en fotos tomadas con cámaras de burbujas de trazas de partículas subátomicas. [16]



(a)



(b)

FIGURA 13.36 La parte (*b*) es una versión filtrada de (*a*) de donde se eliminó el orden cero. (Fotos de D. Dutton, M. P. Givens y R. E. Hopkins, *Spectra-Physics Laser Technical Bulletin Number 3*.)

Estas fotografías son difíciles de analizar debido a la presencia de trazas de haces no esparcidos (figura 13.38), que al ser todos paralelos, se borran fácilmente con el filtrado espacial.

Consideremos ahora el conocido proceso de semitono o de facsímil por medio del cual una impresora puede crear la ilusión de varios tonos de gris mientras realmente utiliza solamente tinta negra y papel blanco (obsérvese de cerca una fotografía de un periódico). Si se inserta en Σ_0 (figu-

[16] D. G. Falconer, «Optical Processing of Bubble Chamber Photographs», *Appl. Opt.*, **5**. 1365 (1966), incluye algunos usos adicionales para el ordenador óptico coherente.

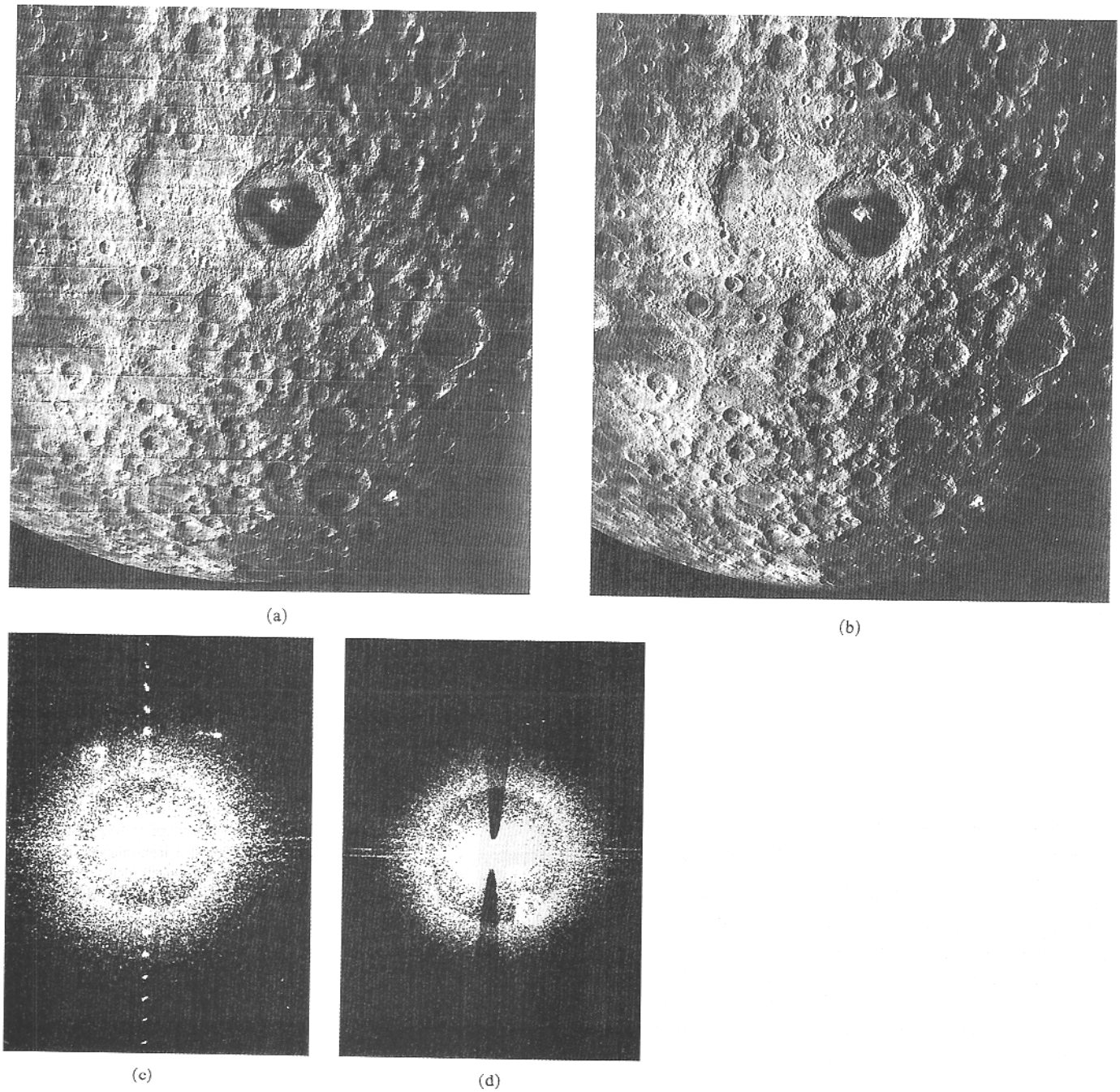


FIGURA 13.37 Filtrado espacial. (*a*) Una foto compuesta de la luna tomada por el *Lunar Orbiter*. (*b*) Versión filtrada de la foto sin las líneas horizontales. (*c*) Una transformada típica sin filtrar (espectro de potencia) del paisaje lunar. (*d*) Figura de difracción con la distribución de puntos verticales filtrada. (Fotos cedidas por D. A. Ansley, W. A. Blikken, The Conductron Corporation y NASA.)

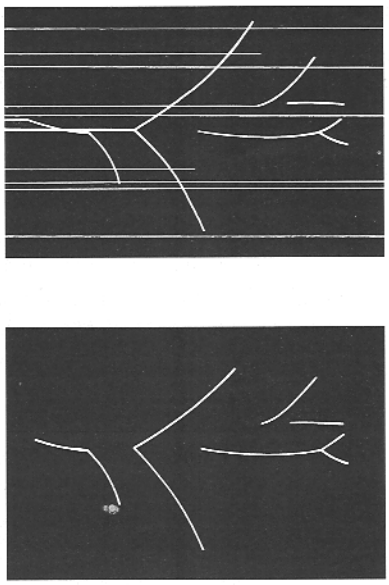


FIGURA 13.38 Trazos sin filtrar y filtrados de una cámara de burbujas.

ra 13.32) una transparencia [17] de tal facsímil, su espectro de frecuencias aparecerá en Σ_t. Una vez más, las componentes de frecuencia relativamente alta que se dan en la malla de semitono pueden eliminarse sin dificultad dando una imagen en tonos de gris (figura 13.39) en la que no se detecta el carácter discontinuo del original. Podría construirse un filtro específico para obstruir solamente las frecuencias de la malla cuadrada usando efectivamente una transparencia negativa de la transformada de la disposición básica de un tablero de ajedrez. De otro modo, por lo general basta con usar un filtro de abertura circular de paso bajo y así descartar, inadvertidamente, parte del detalle de alta frecuencia de la escena original, por lo menos siempre y cuando la frecuencia de la malla sea comparativamente alta.

El mismo procedimiento puede emplearse para eliminar la granulosidad de fotografías muy ampliadas, proceso éste valorado por ejemplo, en fotografías aéreas de reconocimiento. Por el contrario, podríamos afinar los detalles en una fotografía ligeramente borrosa destacando sus componentes de alta frecuencia con un filtro que absorbiera preferentemente las porciones de baja frecuencia del espectro. Muchos de los esfuerzos que se han hecho a partir de la década de los cincuenta, se han dedicado al estudio de la mejora de imágenes fotográficas logrando unos éxitos verdaderamente notables. Entre sus artífices, cabe destacar a A. Maréchal del Instituto de Óptica de la Universidad de París, quien combinó filtros absorbentes y de desfasadores para restablecer el detalle en fotografías muy borrosas. Estos filtros son recubrimientos transparentes que se depositan sobre planos ópticos a fin de retardar la fase de varias porciones del espectro (sección 13.2.4).

[17] La película Polaroid 55 P/N proporciona unos resultados satisfactorios para trabajos de resolución media, mientras que las placas Kodak 649 son buenas donde se requiera una mayor resolución de la transparencia.

FIGURA 13.39 Un autorretrato de K. E. Bethke que consiste solamente en regiones blancas y negras como si fuera semitono. Al eliminar las altas frecuencias aparecen tonalidades de gris y los contornos definidos desaparecen. [De R. A Phillips, *Amer J. Phys.* **37**, 536 (1969).]

A medida que el trabajo de procesamiento óptico de datos sigue adelante en las décadas venideras, indudablemente seremos testigos de la suplantación de las etapas fotográficas, en aplicaciones cada vez más numerosas, por dispositivos electroópticos de tiempo-real (por ejemplo, se emplean ya conjuntos de moduladores ultrasónicos de luz formando una entrada multicanal). [18] El ordenador óptico coherente llegará a cierta madurez, transformándose en una herramienta aún más poderosa cuando las funciones de entrada, filtrado y salida se desarrollen electroópticamente de tal manera que un flujo continuo de datos podría circular a través de tal dispositivo en tiempo real.

13.2.4 Contraste de fase

Se mencionó muy brevemente en la última sección que la imagen reconstruida podía alterarse introduciendo un filtro de desplazamiento de fase. Quizás el ejemplo más conocido de esta técnica se remonte al año 1934 y al trabajo del físico holandés Fritz Zernike, quien inventó el método del **contraste de fase** y lo aplicó en el *microscopio de contraste de fase.*

Un objeto puede «verse» porque se destaca sobre su entorno: tiene un color, tono o ausencia de color, que le proporciona contraste con el fondo. Este tipo de estructura se denomina *objeto de amplitud,* porque se observa por medio de las variaciones que ocasiona en la amplitud de la onda de luz. La onda que tal objeto refleja o transmite queda *modulada en amplitud* en el proceso. Por el contrario, a menudo se desea «ver» *objetos de fase,* es decir, aquellos que son transparentes y que, por lo tanto, no forman ningún contraste con su entorno y que alteran solamente la fase de la onda detectada. El espesor óptico de tales objetos varía generalmente de un punto a otro, conforme el índice de refracción o el espesor efectivo o ambos varían. Obviamente, ya que el ojo no puede detectar variaciones de fase, tales objetos son invisibles. Este es el problema que ha llevado a los biólogos a desarrollar unas técnicas para teñir muestras microscópicas transparentes convirtiendo así objetos de fase en objetos de amplitud. Sin embargo, este planteamiento no es satisfactorio en muchos aspectos, por ejemplo, cuando el colorante mata a la muestra cuyos procesos vitales están bajo estudio, como ocurre muy a menudo.

Recordemos que la difracción se da cuando una porción de la superficie de fase constante se obstruye de alguna manera, es decir, cuando una región del frente de onda se altera (bien sea en amplitud o en fase, es decir, en forma). Supongamos entonces que una onda plana pasa a través de una partícula transparente, que retarda la fase de una región del frente. La onda emergente ya no es perfectamente plana sino que contiene una pequeña muesca que corresponde al área retrasada por la muestra; la onda está *modulada en fase.*

Considerándolo todo desde un punto de vista bastante simplista, podemos imaginar que la onda modulada en fase $E_{PM}(\mathbf{r}, t)$ (figura 13.40) consiste en la onda plana incidente original $E_i(\mathbf{x}, t)$ más una perturbación localizada $E_d(\mathbf{r}, t)$. (El símbolo **r** significa que E_{PM} y E_d dependen de x, y, y z, es decir, varían sobre el plano yz mientras que E_i es uniforme y no lo hace.) En efecto, si el retraso en fase es muy pequeño, la perturbación localizada es una onda de amplitud muy pequeña, E_{0d}, retrasada solamente en aproximadamente $\lambda_0/4$ como en la figura 13.41. Ahí se muestra que la diferencia entre $E_{PM}(\mathbf{r}, t)$ y $E_i(x, t)$ es $E_d(\mathbf{r}, t)$. A la perturbación $E_i(\mathbf{x}, t)$ se le llama *onda directa o de orden cero,* mientras que $E_d(\mathbf{r}, t)$ es la *onda difractada.* La primera produce un campo uniformemente iluminado en Σ_i que no resulta afectado por el objeto, mientras que la última lleva toda la información acerca de la estructura óptica de la partícula. Después de diverger ampliamente del objeto, estos términos de la frecuencia espacial de orden superior (véase sección 13.2.2) se hacen converger en el plano imagen. Las ondas directa y difractada se recombinan desfasadas en $\pi/2$, para formar de nuevo la onda modulada en fase. Ya que la amplitud de la onda reconstruida $E_{PM}(\mathbf{r}, t)$ es la misma en todas partes sobre Σ_i, aunque la fase varíe de punto a punto, la densidad de flujo es uniforme y la imagen no es perceptible. De la misma manera, el espectro de orden cero de una red de fase estará desfasada $\pi/2$ con los espectros de orden superior.

Si pudiéramos desplazar de alguna manera la fase relativa entre los rayos difractados y directos en un $\pi/2$ adicional antes de su recombinación, serían aún coherentes y podrían entonces interferir constructiva o destructivamente (figura 13.42). En ambos casos, el frente de onda reconstruido sobre la región de la imagen resultaría entonces modulado en amplitud y la imagen sería visible.

[18] Hemos analizado el tema del procesamiento óptico de datos tan sólo superficialmente; un estudio más extenso de ello podrá encontrarse, por ejemplo, en el capítulo 7 de *Introduction to Fourier Optics* de Goodman. Ese texto incluye también una buena lista de referencias de lecturas adicionales en revistas especializadas. Véase también P. F. Mueller, «Linear Multiple Image Storage» *Appl. Opt.,* **8**, 267 (1969). Aquí, como en la mayor parte de la óptica moderna, las fronteras se mueven rápidamente y es difícil evitar caer en desusos.

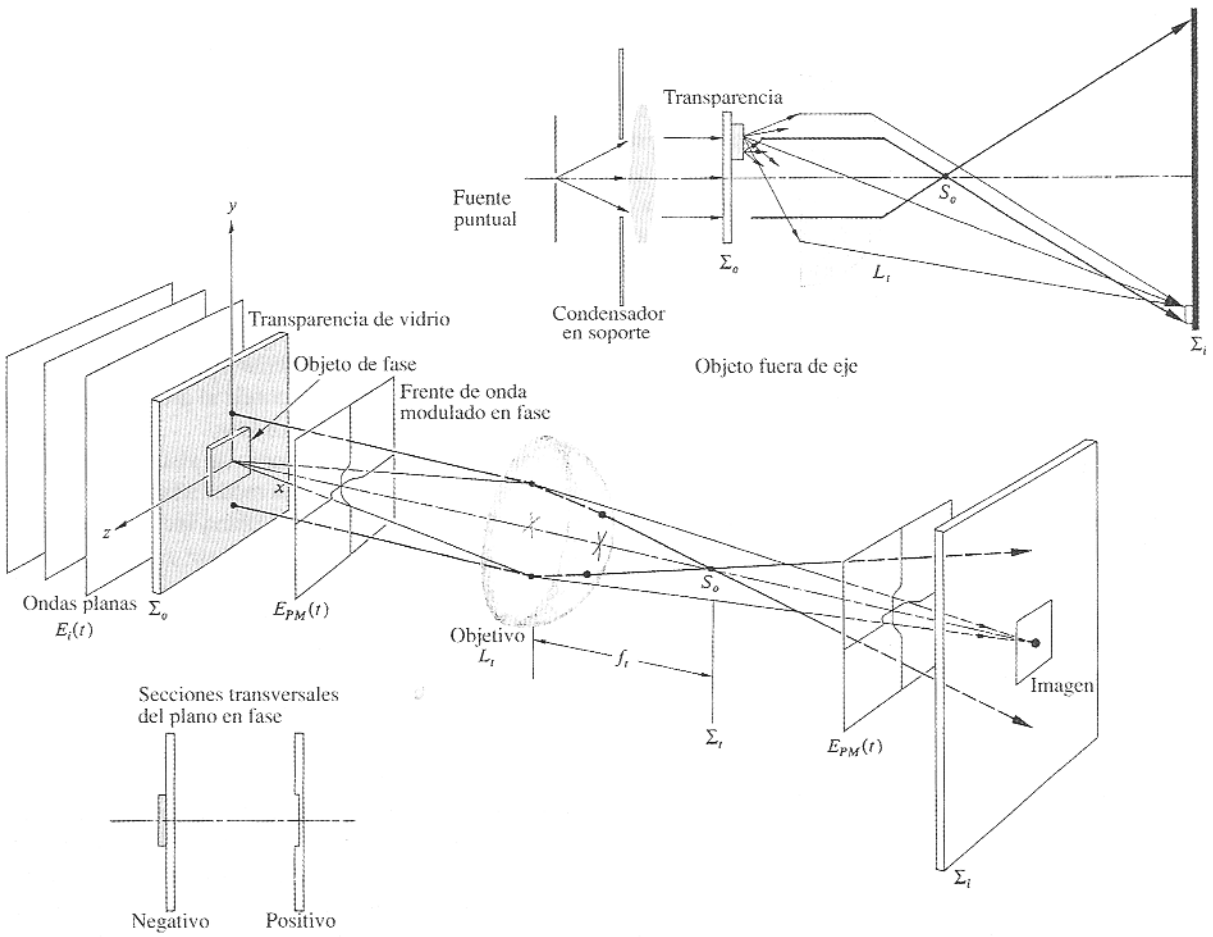


FIGURA 13.40 Disposición para el contraste de fase.

Podemos ver esto analíticamente de una manera muy simple donde

$$E_i(x, t)|_{x=0} = E_0 \text{ sen } \omega t \tag{13.18}$$

es la onda luminosa monocromática entrante en Σ_o sin la muestra en su lugar. La partícula provocará una variación de fase dependiente de la posición $\phi(y, z)$ tal que la onda en salida será

$$E_{PM}(\mathbf{r}, t)|_{x=0} = E_0 \text{ sen } [\omega t + \phi(y, z)] \tag{13.19}$$

Esta es la onda de amplitud constante que es esencialmente la misma en el plano imagen conjugado. Es decir que se producen algunas pérdidas pero si la lente es grande y está libre de aberraciones y pasamos por alto la orientación y el tamaño de la imagen, la ecuación (13.19) será suficiente para representar a la onda PM bien sea en Σ_o o en Σ_i. Reformulando esa perturbación como

$$E_{PM}(y, z, t) = E_0 \text{ sen } \omega t \cos \phi + E_0 \cos \omega t \text{ sen } \phi \tag{13.20}$$

y, limitándonos a *valores muy pequeños* de ϕ, quedará

$$E_{PM}(y, z, t) = E_0 \text{ sen } \omega t + E_0 \phi(y, z) \cos \omega t$$

El primer término es independiente del objeto, mientras que el segundo obviamente no lo es. Entonces, como antes, si cam-

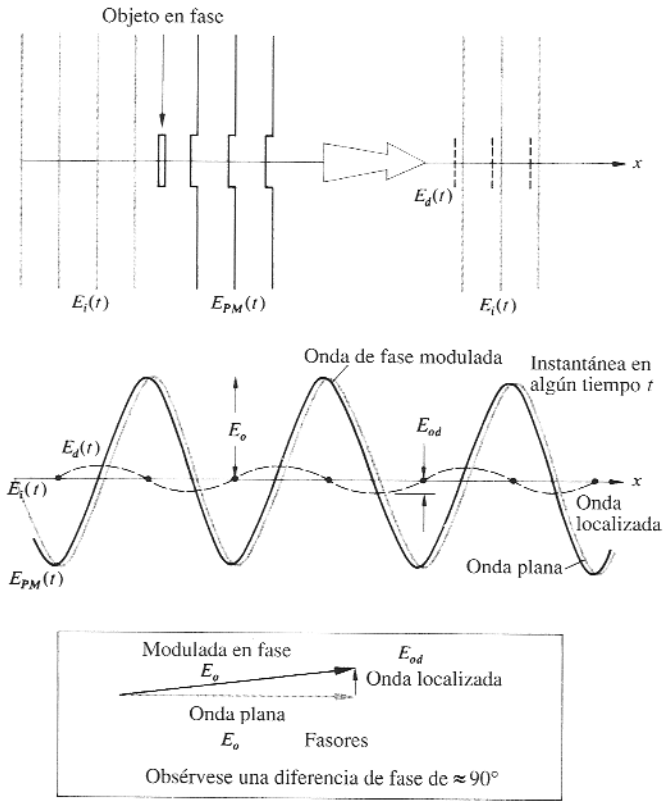


FIGURA 13.41 Frentes de onda en el proceso de contraste de fase.

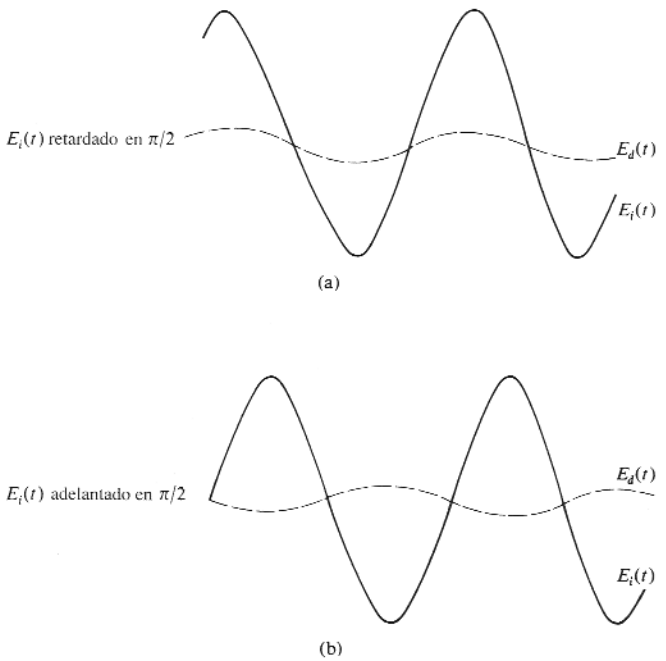


FIGURA 13.42 Efecto de los desplazamientos de fase.

biamos su fase relativa en $\pi/2$, es decir, cambiamos bien sea el coseno a seno o viceversa, obtenemos

$$E_{AM}(y, z, t) = E_0[1 + \phi(y, z)] \operatorname{sen} \omega t \qquad (13.21)$$

lo cual corresponde a una onda modulada en amplitud. Obsérvese que $\phi(y, z)$ puede expresarse en términos de un desarrollo de Fourier, introduciendo así las frecuencias espaciales asociadas con el objeto. Por cierto, este análisis es precisamente análogo al propuesto, en 1936, por E. H. Armstrong para convertir ondas de radio de AM a FM [podría considerarse a $\phi(t)$ como una modulación de frecuencia donde el término de orden cero es la onda portadora]. Se utilizó un filtro eléctrico paso banda para separar la onda portadora del espectro de la información restante, de tal manera que se pudiera lograr un desfase de $\pi/2$. El método de Zernike que hace esencialmente lo mismo es como sigue: insertó un filtro espacial en el plano de la transformada Σ_t del objetivo, capaz de provocar un desfase de $\pi/2$. Obsérvese que la luz directa forma, en realidad, una pequeña imagen de la fuente sobre el eje óptico en la posición de Σ_t. El filtro podría ser entonces una pequeña muesca circular de profundidad d, grabada en una lámina de vidrio transparente de índice n_g. Idealmente, sólo el rayo directo pasaría a través de la muesca obteniendo así un *adelanto de fase* de $(n_g - 1)d$, que se establece igual a $\lambda_0/4$, con respecto a la onda difractada. Un filtro de este tipo se denomina ***lámina de fase*** y, como su efecto corresponde a la figura 13.42*b*, es decir, a interferencia destructiva, los objetos de fase que son más gruesos o tienen un índice más alto aparecen oscuros contra un fondo brillante. Si, por el contrario, la placa de fase tuviera un pequeño disco en relieve en su centro, sería cierto lo opuesto. El primer caso se denomina *contraste de fase positivo;* el segundo, *contraste de fase negativo.*

En la práctica, se obtiene una imagen más brillante usando una fuente extensa en lugar de una puntual, junto con un condensador con soporte. Las ondas planas emergentes iluminan un diafragma anular (figura 13.43), el cual, al ser el plano de la fuente, es conjugado al plano de la transformada del objetivo. Las ondas de orden cero, que se muestran en la figura, pasan a

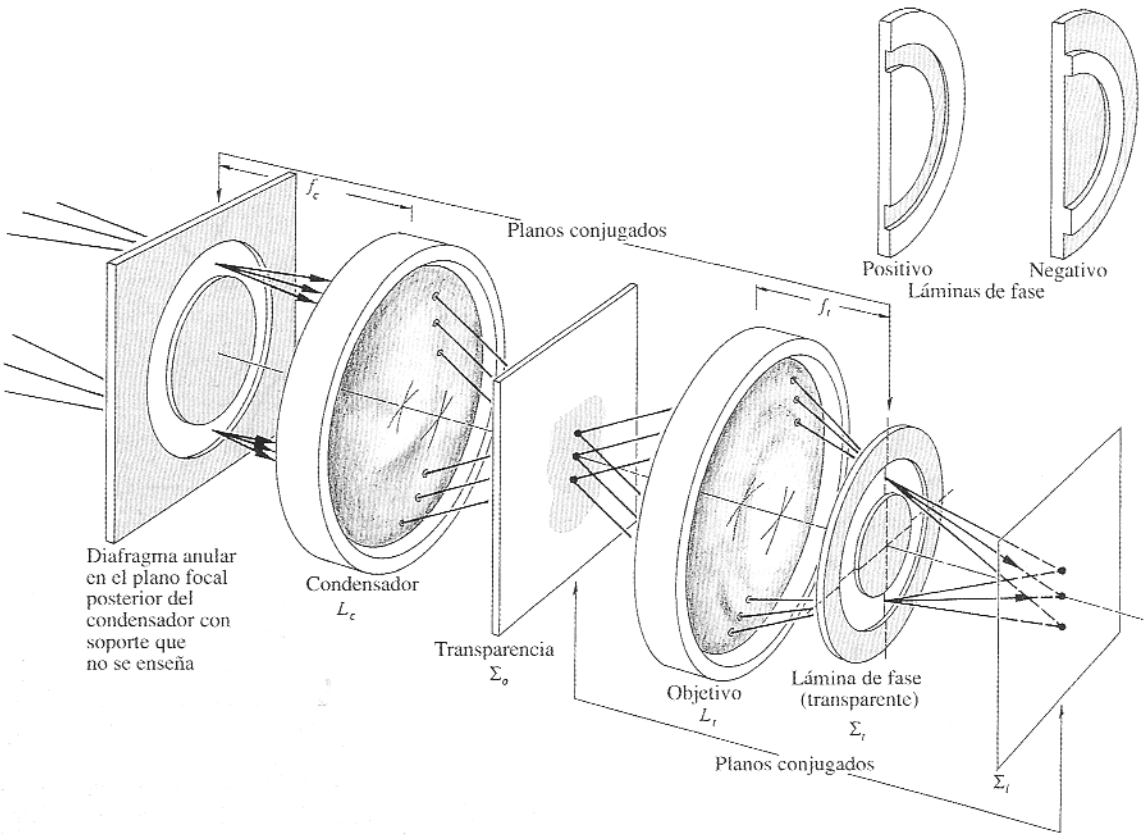


FIGURA 13.43 Contraste de fase (solamente se muestra el orden cero).

través del objeto según los principios de la óptica geométrica para sucesivamente atravesar la delgada región anular de la lámina de fase localizada en Σ_t. Esa región de la lámina es bastante pequeña y así, en la mayoría de los casos, el cono de rayos difractados no da con ella. Haciendo la región anular también absorbente (podrá emplearse una película delgada de metal), el término de orden cero uniforme, muy grande (figura 13.44), se reduce con respecto a los órdenes superiores mejorando el contraste. O, si se prefiere, E_0 se reduce a un valor comparable al de la onda difractada E_{0d}. Por lo general, un microscopio está provisto de un surtido de estas láminas que tienen diferente grado de absorción.

En el lenguaje de la óptica moderna, el contraste de fase es simplemente el proceso mediante el cual se introduce un desplazamiento de fase de $\pi/2$ en el espectro de orden cero de la transformada de Fourier de un objeto de fase (atenuando, quizás, también su amplitud) por medio de un filtro espacial apropiado.

El microscopio de contraste de fase, por el cual Zernike fue galardonado con el Premio Nobel en 1953, se ha aplicado de manera muy extensa (figura 13.45); quizás la aplicación más fascinante es el estudio de las funciones vitales de organismos que de otro modo serían invisibles.

13.2.5 Los métodos de campo oscuro y de schlieren

Supongamos que regresamos a la figura 13.40, donde se examinó un objeto de fase y esta vez, en lugar de retardar y atenuar el orden cero central, lo eliminamos completamente con un disco opaco en S_0. Sin el objeto en su lugar, el plano de la imagen aparecerá totalmente oscuro —de ahí el nombre de ***campo oscuro***—. Con el objeto bien colocado, sólo la onda difractada localizada aparecerá en Σ_i para formar la imagen. (Esto puede

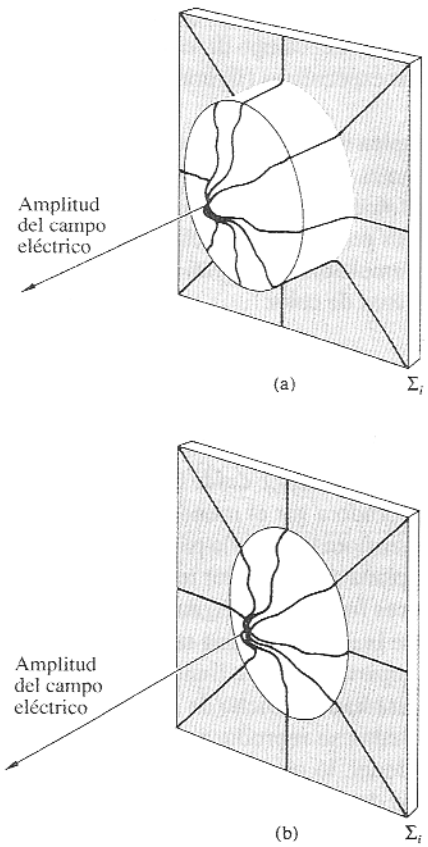
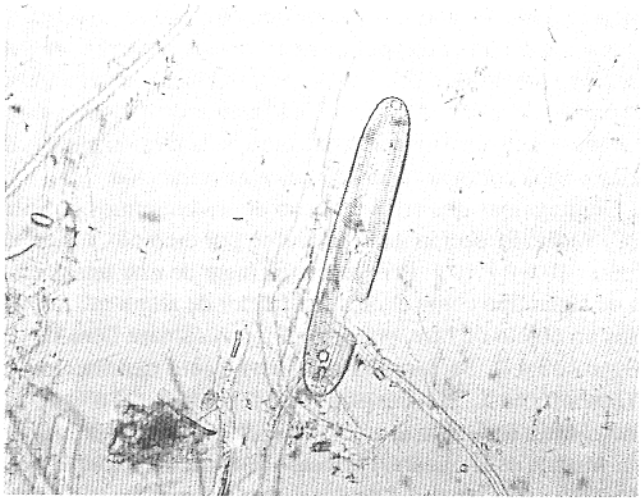


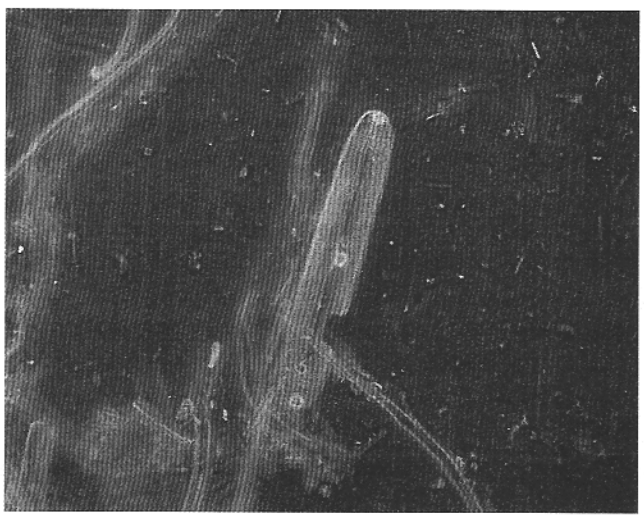
FIGURA 13.44 Amplitud de campo en una zona circular en el plano imagen. En un caso, no hay absorción en la lámina de fase y la irradiancia sería una pequeña ondulación en un gran llano. Atenuando el orden cero, el contraste aumenta.

lograrse también en microscopía, iluminando el objeto oblicuamente de tal forma que no entre luz directa al objetivo.) Obsérvese que, al eliminar la contribución cc, la distribución de amplitud (como en la figura 13.44) bajará y las partes que estaban cerca de cero antes del filtrado se volverán negativas. Ya que la irradiancia es proporcional a la amplitud al cuadrado, esto resultará algo similar a una inversión del contraste con respecto al que se habría visto en contraste de fase (véase sección 13.2.3). Los resultados de esta técnica, en general, no han sido tan satisfactorios como el método de contraste de fase, cuya distribución de densidad de flujo a través de la imagen es directamente proporcional a las variaciones de fase que se inducen sobre el objeto.

En 1864, A. Toepler introdujo un procedimiento para examinar los defectos de las lentes, que desde entonces se conoce



(a)



(b)

FIGURA 13.45 (*a*) Un fotomicrograma convencional de diatomeas, fibras y bacterias. (*b*) Un fotomicrograma de fase de la misma escena. (Fotos de T. J. Lowery y R. Hawley.)

como *método* ***schlieren***.[19] Lo analizaremos aquí, debido a su uso muy difundido en una amplia gama de estudios de la diná-

[19] En alemán, la palabra *Schlieren* significa rayas o estrías. A menudo se escribe con mayúscula porque así se escriben todos los nombres en alemán y no porque haya habido un Sr. Schlieren.

mica de fluidos y porque es asimismo otro buen ejemplo de la aplicación del filtrado espacial. Los sistemas schlieren son particularmente útiles en balística, aerodinámica y en el análisis de ondas ultrasónicas (figura 13.46), en efecto, dondequiera que sea deseable examinar variaciones de la presión puestas de relieve en la configuración del índice de refracción.

Supongamos que armamos uno de los conjuntos posibles para ver la difracción de Fraunhofer, por ejemplo, los de las figuras 10.6 ó P.10.5. Pero ahora, en lugar de usar una abertura de algún tipo como el objeto difractor de amplitud, insertamos un objeto de fase, por ejemplo, una cámara llena de gas (figura 13.47). Se formará así nuevamente distribución de Fraunhofer en Σ_f, y, si ese plano está seguido por el objetivo de una cámara fotográfica, en el plano de la película se formará una imagen de la cámara. Podríamos entonces fotografiar cualquier objeto de amplitud dentro del área de prueba pero, naturalmente, los objetos de fase aún serían invisibles. Imaginemos que ahora introducimos el filo de una navaja en Σ_f, levantándola desde abajo hasta que obstruya (algunas veces sólo parcialmente) la luz de orden cero y, por consiguiente, todos los órdenes superiores en la parte inferior también. Igual que en el método de campo oscuro, los objetos de fase son entonces perceptibles como lo serán las inhomogeneidades en las ventanas de la cámara de prueba y los defectos de las lentes. Por esta razón y, debido a la amplitud del campo de visión normalmente necesaria, los sistemas especulares (figura 13.48) no se han popularizado mucho.

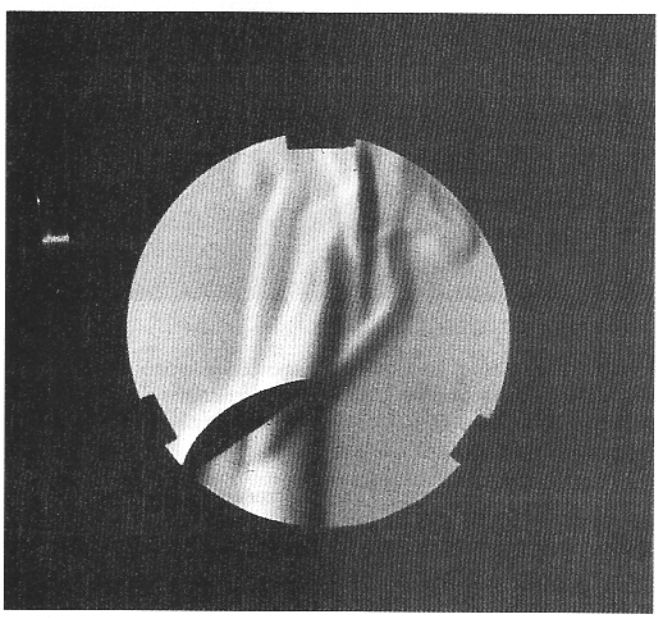


FIGURA 13.46 Foto schlieren de una cuchara en una llama de vela. (Foto de E.H.)

Por lo general, se emplea iluminación cuasimonocromática cuando los datos resultantes se van a analizar electrónicamente, por ejemplo, con un fotodetector. Por otra parte, las fuentes con un espectro ancho nos permiten aprovechar la elevada sensibilidad al color de las emulsiones fotográficas y se han creado varios sistemas schlieren de color.

13.3 Holografía

Como la técnica fotográfica se conoce desde hace mucho tiempo, nos hemos acostumbrado a ver el mundo tridimensional comprimido en la bidimensionalidad de la página de un álbum de recortes. La imagen plana del animador televisivo que sonríe entre un sinfín de luces fosforescentes, aunque esté ahí, no parece más palpable que la imagen de una tarjeta postal de la Torre Eiffel. Ambos comparten la grave limitación de ser sólo representaciones de la irradiancia. Dicho de otro modo, cuando la imagen de una escena se reproduce comúnmente, por cualquier medio tradicional, lo que finalmente vemos no es una reproducción precisa del campo luminoso que inundaba al objeto, sino más bien un registro punto por punto del cuadrado de la amplitud del campo. La luz que se refleja en una fotografía lleva consigo información acerca de la irradiancia pero nada acerca de la fase de la onda que emanaba del objeto. En efecto, si tanto la amplitud como la fase de la onda original se pudieran reconstruir de alguna manera, el campo de luz resultante (suponiendo que las frecuencias son las mismas) no se distinguiría del original. Esto significa que entonces veríamos (y podríamos fotografiar) la imagen formada en una tridimensionalidad perfecta, exactamente como si el objeto estuviera ante nosotros, generando en realidad la onda.

13.3.1 Métodos

Dennis Gabor estuvo reflexionando sobre todo esto durante varios años antes de que empezara, en 1947, sus ahora famosos experimentos en holografía en el Research Laboratory de la British Thompson-Houston Company. Su disposición original, que se muestra en la figura 13.49, era un proceso de formación de imágenes sin lentes, de dos pasos: en el primero,

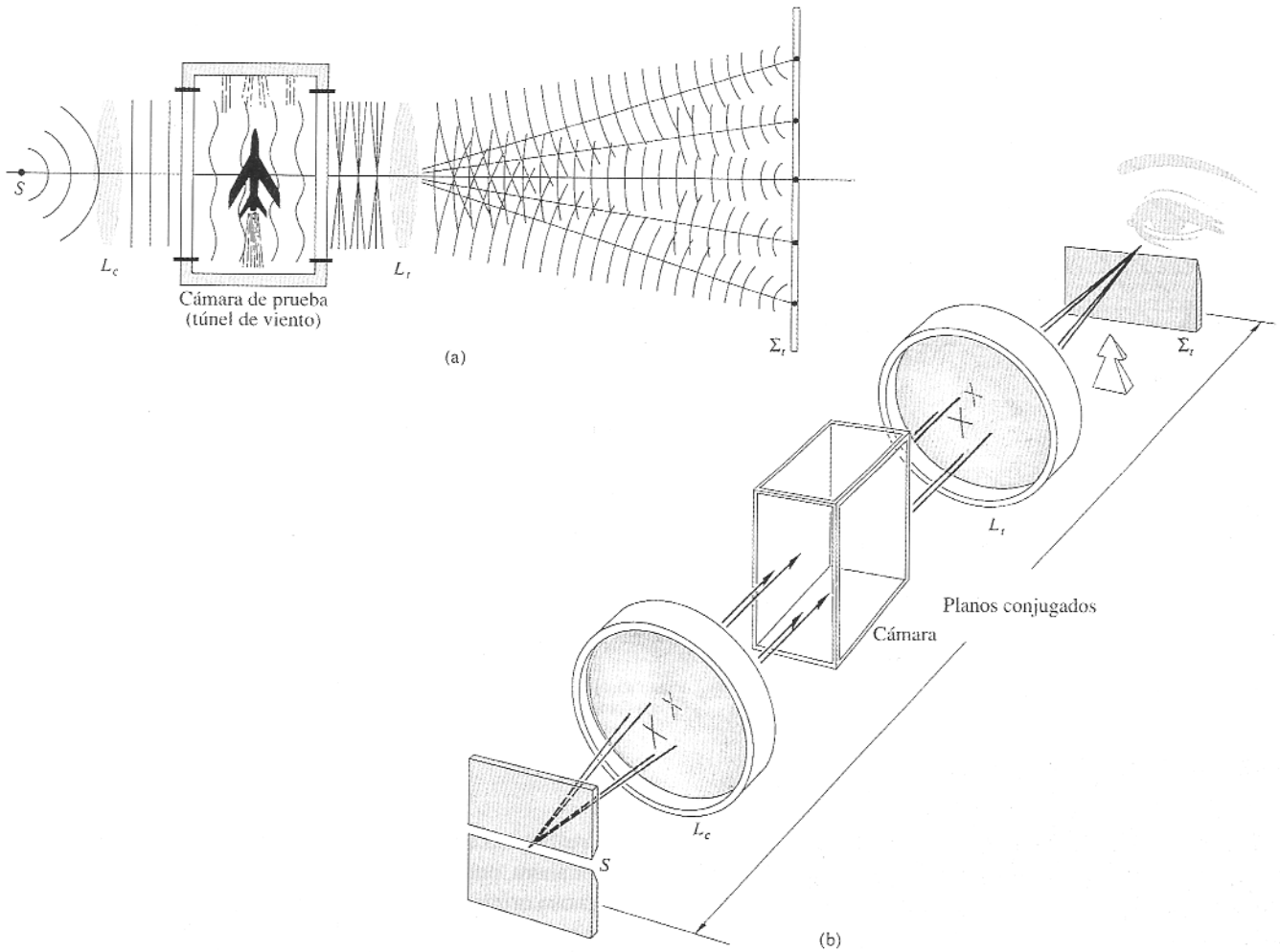


FIGURA 13.47 Una disposición schlieren.

registró fotográficamente una figura de interferencia generada por la interacción de luz cuasimonocromática esparcida por un objeto y una onda de referencia coherente. Denominó la figura resultante **holograma,** de la palabra griega *holos* que significa completo. El segundo paso del procedimiento fue la *reconstrucción* del campo óptico o imagen que se llevó a cabo mediante la difracción de un haz coherente por una transparencia, que era el holograma revelado. Recordando de alguna forma la técnica de contraste de fase de Zernike (sección 13.2.4), el holograma se formaba cuando el *fondo* no esparcido u *onda de referencia* interfería con la onda difractada del pequeño objeto semitransparente, *S*, que a menudo en aquellos comienzos era una pieza de microfilm. El punto clave es que la figura de interferencia u holograma contiene, por medio de la configuración de franjas, la información correspondiente tanto a la amplitud como a la fase de la onda esparcida por el objeto.

Efectivamente, no es del todo obvio que ahora, enviando una onda plana a través del holograma, podamos reconstruir la imagen del objeto original. Baste decir, por el momento, que si el objeto fuera muy pequeño, la onda esparcida sería casi esférica y la figura de interferencia una serie de anillos concéntri-

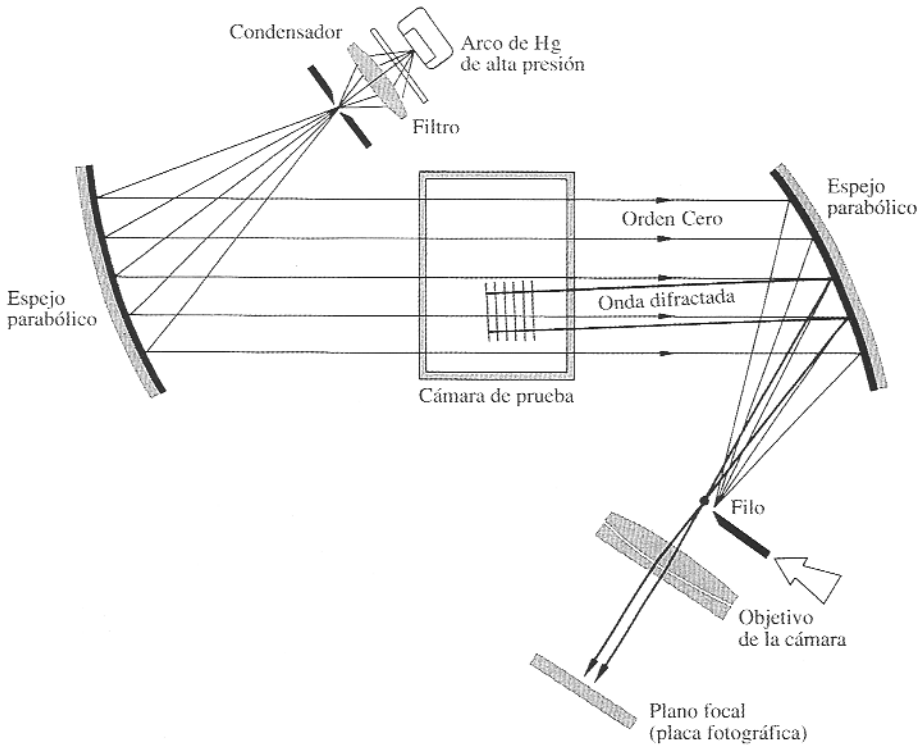


FIGURA 13.48 Una disposición schlieren usando espejos.

cos (centrados alrededor de un eje que pasa por el objeto y normal a la onda plana). Excepto por el hecho de que las franjas circulares variarían gradualmente en irradiancia de una a otra, la distribución de densidad de flujo resultante correspondería a una placa zonal de Fresnel convencional (sección 10.3.5). Recordemos que una placa zonal funciona de forma parecida a una lente en el sentido que difracta la luz colimada en un rayo que converge a un punto focal real, P_r, produciendo además una onda divergente que parece proceder del punto P_r y que constituye una imagen virtual. Entonces podemos imaginar, aunque de manera muy simple, que cada punto en un objeto extenso genera su propia placa zonal, desplazada de las otras y que el acoplamiento de tales placas zonales parcialmente superpuestas forma el holograma. [20] Durante la fase de reconstrucción, cada placa zonal constituyente forma tanto una imagen real como una virtual de un único punto del objeto y, de esta manera, punto por punto, el holograma regenera el campo luminoso original. Cuando el haz reconstructor tiene la misma longitud de onda que el haz registrador inicial (no tiene por qué ser necesariamente así y de hecho, muy a menudo, no lo es), la imagen virtual no está distorsionada y aparece en la posición anteriormente ocupada por el objeto. Entonces es el campo de la imagen virtual el que en realidad corresponde al campo del objeto original. Como tal, a veces se dice que la imagen virtual es la *imagen verdadera,* mientras que la otra es la real o, quizás más apropiadamente, la *imagen conjugada.* En cualquier caso, consideramos el holograma como un compuesto de figuras de interferencia y, por lo menos con esta configuración muy simple, esas figuras se asemejan a placas zonales. Como veremos en seguida, la red sinusoidal es un sistema de franjas igualmente fundamental que produce hologramas complejos.

La investigación de Gabor, por la que en 1971 fue galardonado con el Premio Nobel de Física, tenía como motivación la

[20] Véase M. P. Givens, «Introduction to Holography», *Am. J. Phys.*, **35,** 1056 (1967).

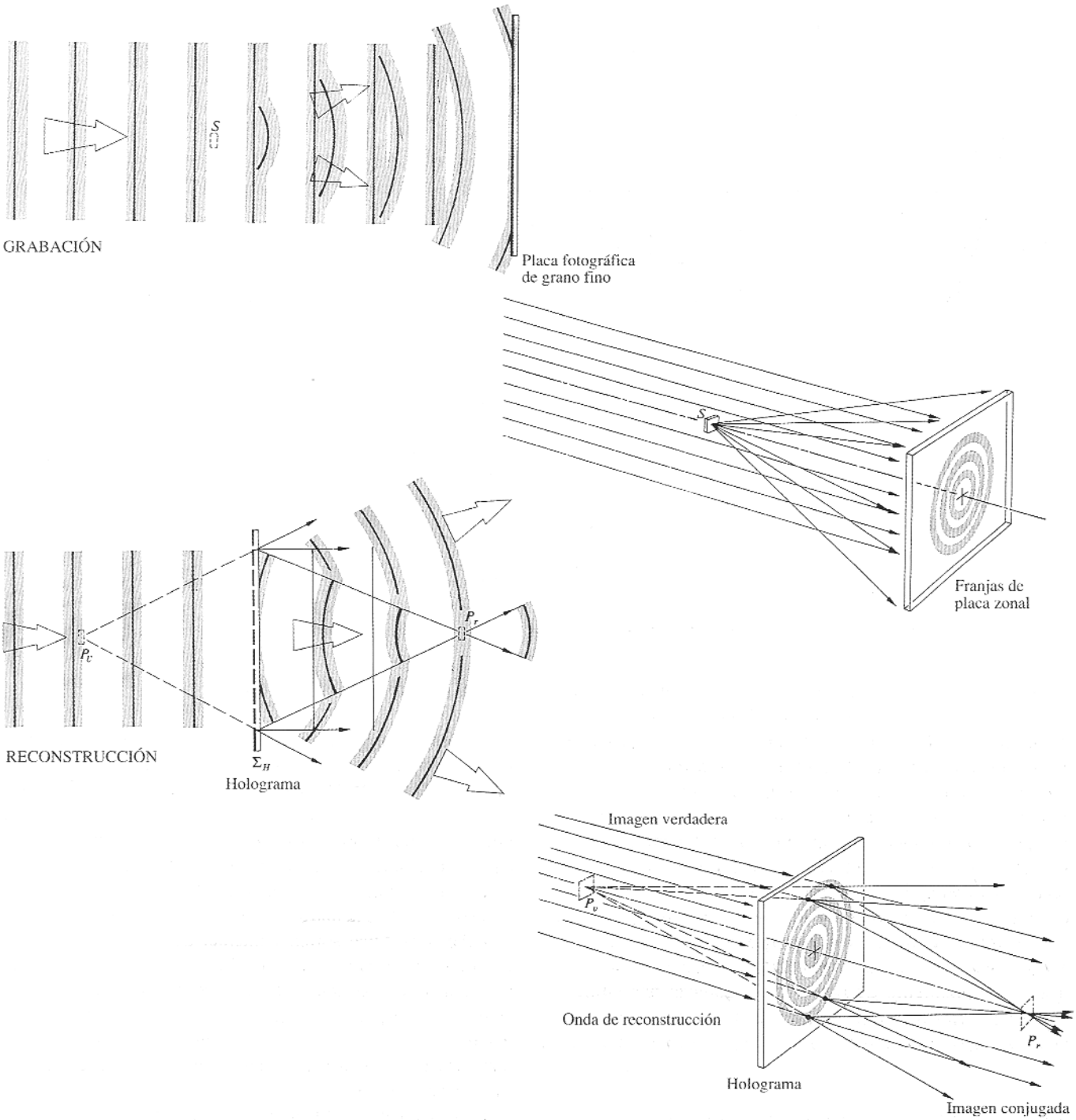


FIGURA 13.49 Registro holográfico (en línea) y reconstrucción de una imagen.

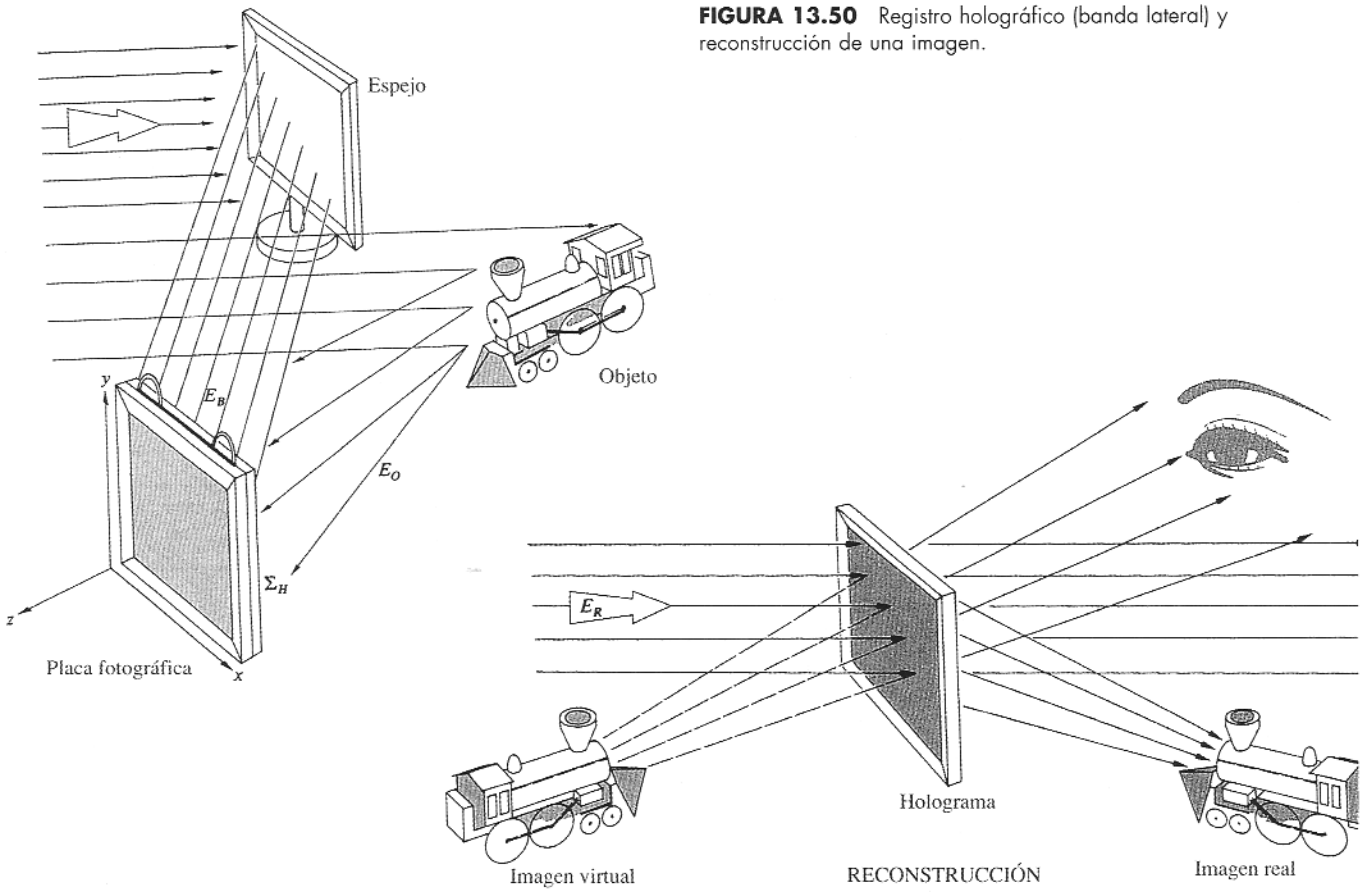


FIGURA 13.50 Registro holográfico (banda lateral) y reconstrucción de una imagen.

mejora de los microscopios electrónicos. Si bien su trabajo despertó algo de interés al comienzo, en el conjunto permaneció en un estado de olvido casi inadvertido, durante casi quince años. Al principio de la década de los sesenta hubo un resurgimiento de interés en el proceso de **reconstrucción de frentes de onda** de Gabor y, en particular, en relación con ciertos problemas de radar. Pronto, gracias a una abundancia de nueva luz láser coherente y a varios avances tecnológicos, la holografía se convirtió en objeto de numerosas investigaciones muy prometedoras. El renacimiento tuvo lugar en el Radar Laboratory de la Universidad de Michigan, gracias al trabajo de Emmett N. Leith y Juris Upatnieks que, entre otras cosas, introdujeron una disposición mejorada para generar hologramas, tal y como se ilustra en la figura 13.50. Contrariamente a la configuración *en línea* de Gabor, donde la imagen conjugada había sido inoportunamente colocada frente a la imagen verdadera, ambas estaban ahora satisfactoriamente separadas del eje como se muestra en el diagrama. Una vez más, el holograma es una distribución de interferencia que surge de una onda de referencia coherente y una onda esparcida por el objeto (este tipo se denomina a veces **holograma de Fresnel de banda lateral**). La figura 13.51 recoge la disposición equivalente para producir hologramas de Fresnel de banda lateral, partiendo de objetos transparentes.

Lo que ocurre aquí puede entenderse de dos modos: el primero esencialmente visual, el modo óptico de Fourier, y el segundo esencialmente matemático. Examinaremos ambas perspectivas, dado que se complementan recíprocamente. Primero, se trata fundamentalmente de un problema de interferencia (o, si se prefiere, de una difracción) por el cual podemos volver a la noción de frente de onda complejo compuesto por ondas planas de componentes de Fourier (figuras 7.32 y 10.11) y que viaja en direcciones asociadas con las distintas frecuencias espaciales del campo luminoso del objeto, bien sea reflejado o transmitido.

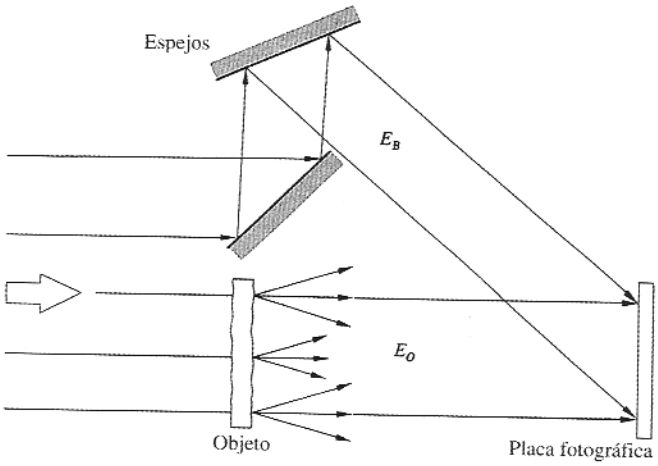


FIGURA 13.51 Disposición holográfica de Fresnel de banda lateral para un objeto transparente.

Cada una de estas ondas planas de Fourier interfiere con la onda de referencia sobre la placa fotográfica, preservando así la información asociada con aquella frecuencia espacial particular bajo la forma de una distribución de franjas característica.

Para ver cómo ocurre esto, examinemos la versión simplificada de dos ondas que se muestra en la figura 13.52. En ese momento, la onda de referencia tiene una cresta a lo largo de la cara del plano de la película y el tren de ondas difundido del objeto, que penetra con un ángulo θ, tiene unas crestas similares en los puntos A, B y C correspondientes a los puntos donde se producirá la interferencia máxima en el momento que se muestra. Sin embargo, dado que ambas ondas se propagan hacia la derecha, permanecerán en fase en esos puntos, los valles se superpondrán entre sí y los máximos quedarán fijados en A, B y C. De manera parecida, entre estos puntos, el valle se sobrepone a la cresta produciéndose así los mínimos. La fase relativa (ϕ) de las dos ondas, que varía de punto a punto a lo largo de la película, puede escribirse como función de x. Ya que ϕ cambia por 2π, conforme x procede a lo largo de $\overline{AB}$, $\phi/2\pi = x/\overline{AB}$. Obsérvese que sen $\theta = \lambda/\overline{AB}$ así que, eliminando la longitud específica $\overline{AB}$, la fase en general será

$$\phi(x) = (2\pi x \text{ sen } \theta)/\lambda \qquad (13.22)$$

Si suponemos que las dos ondas tienen la misma amplitud E_0, el campo resultante se deduce de la ecuación (7.17):

$$E = 2E_0 \cos \tfrac{1}{2}\phi \text{ sen } (\omega t - kx - \tfrac{1}{2}\phi)$$

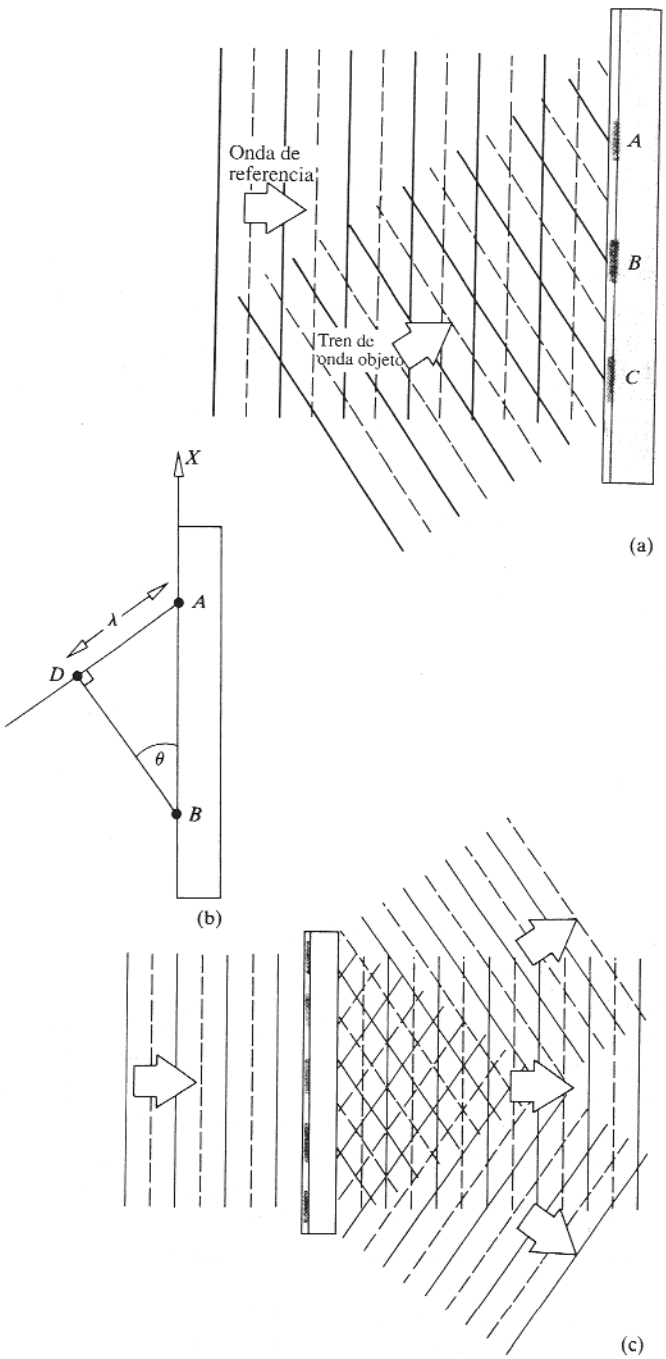


FIGURA 13.52 Interferencia de dos ondas planas para formar un retículo cosenoidal.

y la distribución de la irradiancia, que es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo, aplicando la ecuación (3.44) será

$$I(x) = \tfrac{1}{2}c\epsilon_0(2E_0 \cos \tfrac{1}{2}\phi)^2 = 2c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\phi$$

o

$$I(x) = 2c\epsilon_0 E_0^2 + 2c\epsilon_0 E_0^2 \cos \phi. \qquad (13.23)$$

Tendremos así una distribución de la irradiancia cosenoidal en el plano de la película, con un período espacial de $\overline{AB}$ y una frecuencia espacial $(1/\overline{AB})$ de sen θ/λ.

Tratando la película de tal manera que el perfil de la transmisión de la amplitud corresponda a $I(x)$, el resultado será un retículo cosinusoidal. Al iluminar este holograma simple (que corresponde esencialmente a un objeto sin estructura ni información) con una onda plana idéntica a la onda de referencia original (figura 13.52*c*), emergerán tres haces: uno de orden cero y dos de primer orden de los cuales uno viajará en la dirección del haz de objeto original, correspondiendo a su frente de onda reconstruido.

Supongamos ahora ir un paso más allá de este holograma básico y examinemos un objeto dotado de alguna estructura óptica. Utilicemos, por lo tanto, como objeto una transparencia con una estructura periódica simple que posee una monofrecuencia espacial, digamos, un retículo cosinusoidal. Una representación algo idealizada (que excluye a los términos superiores débiles, debido a la dimensión finita del haz y del retículo) se recoge en la figura 13.53 que ilustra el retículo iluminado, los tres haces transmitidos y el haz de referencia. Se obtendrán entonces tres versiones un poco diferentes de la figura 13.52, donde cada una de las tres ondas transmitidas formará con la onda de referencia un ángulo algo diferente (θ). Por consiguiente, cada una de las tres áreas supepuestas corresponderá a un grupo de franjas cosenoidales con frecuencia espacial ligeramente diferente según la ecuación (13.22). Al volver a iluminar al holograma resultante (figura 13.53*a* y *b*), tendremos tres elementos distintos: la onda no difractada, la imagen virtual y la imagen real. Obsérvese que las imágenes del retículo original se forman sólo donde los tres haces se encuentran para proporcionar su contenido de frecuencia espacial.

Al emplear objetos aún más complejos, podemos anticipar que la fase relativa (ϕ) entre el objeto y las ondas de referencia variarán punto por punto de manera compleja, modulando la señal portadora básica (figura 13.54) producida por dos ondas planas donde no hay objetos presentes. Generalizando la figura 13.53, podemos concluir que la diferencia de ángulo de fase ϕ (que varía con θ) está codificada en la configuración de las franjas. Además, si las amplitudes de las ondas de referencia y objeto hubieran sido diferentes, la irradiancia de esas franjas se habría alterado en consecuencia. Puede así deducirse que la amplitud de la onda objeto en cada punto del plano de la película resultará codificada en la visibilidad de las franjas resultantes.

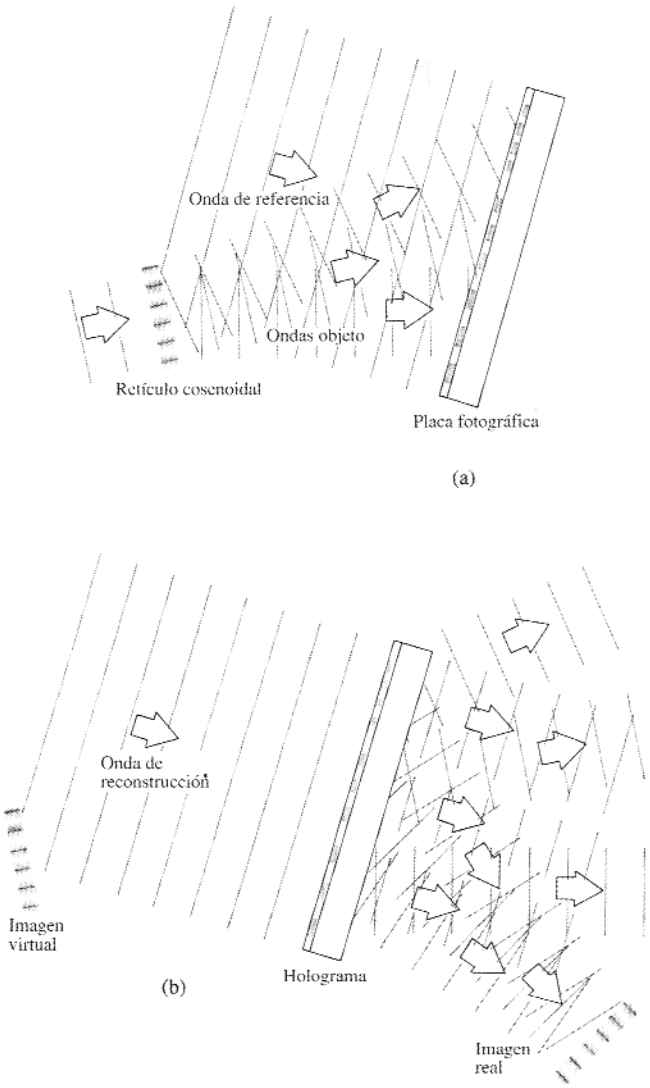
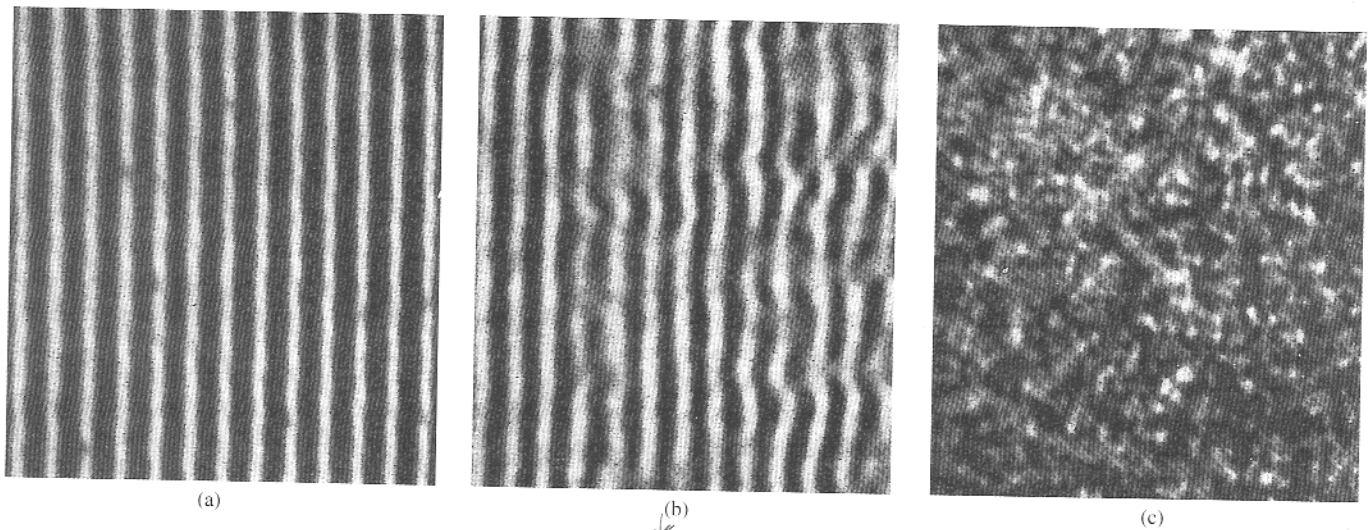


FIGURA 13.53 Obsérvese que hay tres regiones con diferentes frecuencias espaciales. Cada una de éstas genera tres ondas en el holograma reiluminado.



(a) (b) (c)

FIGURA 13.54 Varios grados de modulación de franjas holográficas. (Foto cortesía de Emmett N. Leith y *Scientific American*.)

Es posible tratar analíticamente el proceso ilustrado en la figura 13.50 de la siguiente forma: supongamos que el plano xy es el plano del holograma, Σ_H. Entonces,

$$E_B(x, y) = E_{0B} \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \qquad (13.24)$$

describe el fondo plano u onda de referencia en Σ_H, omitiendo toda consideración de polarización. Su amplitud, E_{0B}, es constante mientras que la fase es una función de la posición. Esto significa muy sencillamente que el frente de onda de referencia está inclinado de alguna manera con respecto a Σ_H. Por ejemplo, si la onda estuviera orientada de tal manera que pudiera hacerse coincidir con Σ_H por una sola rotación con un ángulo de θ alrededor de y, la fase en cualquier punto en el plano del holograma dependería de su valor de x. Entonces ϕ tendría otra vez la forma

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} x \text{ sen } \theta = kx \text{ sen } \theta$$

siendo, en ese caso particular, independiente de y y variando linealmente con x. Para simplificar, la escribiremos, muy generalmente, como $\phi(x, y)$ recordando que se trata de una función conocida simple. La onda esparcida por el objeto puede, a su vez, expresarse como

$$E_O(x, y) = E_{0O}(x, y) \cos [2\pi\nu t + \phi_O(x, y)] \qquad (13.25)$$

donde tanto la amplitud como la fase son ahora funciones complejas de la posición correspondiente a un frente de onda irregular. Desde un punto de vista de la teoría de comunicaciones, se trata de una onda portadora modulada en amplitud y en fase que lleva toda la información disponible acerca del objeto. Obsérvese que esta información está codificada en variaciones espaciales más que temporales de la onda. Las dos perturbaciones E_B y E_O se superponen e interfieren para formar una distribución de irradiancia que se registra mediante la emulsión fotográfica. La irradiancia resultante, excepto por una constante multiplicadora, es $I(x, y) = \langle (E_B + E_O)^2 \rangle_T$ la cual, de la sección 9.1, viene dada por

$$I(x, y) = \frac{E_{0B}^2}{2} + \frac{E_{0O}^2}{2} + E_{0B}E_{0O} \cos (\phi - \phi_O) \qquad (13.26)$$

Obsérvese nuevamente que la fase de la onda objeto define la posición en Σ_H de los máximos y mínimos de la irradiancia. Además, el contraste o la visibilidad de las franjas

$$\mathcal{V} = (I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}})/(I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}) \qquad [12.1]$$

en el plano del holograma, que es

$$\mathcal{V} = 2E_{0B}E_{0O}/(E_{0B}^2 + E_{0O}^2) \qquad (13.27)$$

contiene la información apropiada acerca de la amplitud de la onda objeto.

Una vez más, en la jerga de la teoría de la comunicación, podemos ver que la placa fotográfica sirve tanto como disposi-

tivo de almacenamiento como detector o mezclador. Produce, en su superficie, una distribución de regiones opacas que corresponden a una forma de onda espacial modulada. Por consiguiente, el tercer término o término de diferencia de frecuencias, en la ecuación (13.27), está modulado tanto en amplitud como en fase por medio de la dependencia de la posición de $E_{0O}(x, y)$ y $\phi_O(x, y)$.

La figura 13.54*b* es una vista ampliada de una porción de la distribución de franjas que constituye el holograma de un objeto semitransparente, simple y esencialmente bidimensional. Si las dos ondas interferentes fueran perfectamente planas (como en la figura 13.54*a*), las evidentes variaciones de posición e irradiancia de las franjas, que representan la información, estarían ausentes dando como resultado la distribución tradicional de Young (sección 9.3). La configuración de una red de transmisión sinusoidal (figura 13.54*a*) puede considerarse como la forma de onda portadora, que es modulada entonces por la señal. Además, podemos imaginar que la superposición coherente de innumerables patrones de placa zonal, cada uno producido por cada punto en un objeto de gran tamaño, se han transformado en las franjas moduladas de la figura 13.54*b*. Al aumentar aún más la cantidad de modulación, como en el caso de un objeto tridimensional grande reflector difuso, las franjas pierden el tipo de simetría aún visible en la figura 13.54*b* volviéndose considerablemente más complejas. Por cierto, los hologramas están a menudo cubiertos con extraños remolinos y sistemas de anillos concéntricos debidos a la difracción producida por el polvo y otras partículas en los elementos ópticos.

El perfil de la transmisión de amplitud del holograma procesado puede establecerse proporcionalmente a $I(x, y)$. En ese caso, la *onda emergente final*, $E_F(x,y)$, es proporcional al producto $I(x, y)\, E_R(x,y)$, donde $E_R(x,y)$ es la *onda de reconstrucción* incidente en el holograma. Entonces, si la onda de reconstrucción de frecuencia ν, es incidente oblicuamente en Σ_H, como lo era la onda básica, podemos escribir

$$E_R(x, y) = E_{0R} \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \qquad (13.28)$$

La onda final (excepto por una constante multiplicativa) es el producto de las ecuaciones (13.26) y (13.28):

$$\begin{aligned} E_F(x, y) = {} & \tfrac{1}{2}E_{0R}(E_{0B}^2 + E_{0O}^2) \cos [2\pi\nu t + \phi(x, y)] \\ & + \tfrac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{0O} \cos (2\pi\nu t + 2\phi - \phi_O) \\ & + \tfrac{1}{2}E_{0R}E_{0B}E_{0O} \cos (2\pi\nu t + \phi_O) \end{aligned} \qquad (13.29)$$

Los tres términos describen la luz emitida por el holograma, pudiendo volver a escribirse el primero como

$$\tfrac{1}{2}(E_{0B}^2 + E_{0O}^2)E_R(x, y)$$

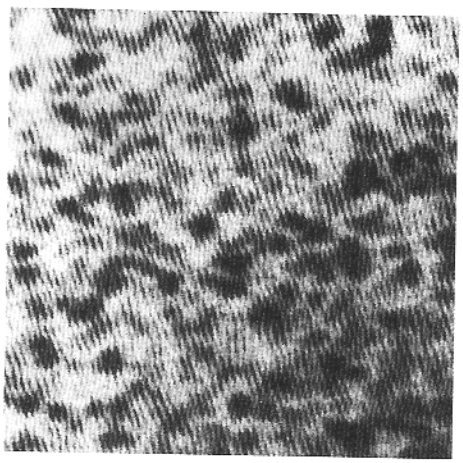
y es una versión modulada en amplitud de la onda de reconstrucción. En efecto, cada porción del holograma funciona como una red de difracción siendo éste, nuevamente, el rayo directo, no deflectado, de *orden cero*. Como no contiene ninguna información acerca de la fase ϕ_O de la onda objeto, no nos interesa aquí.

Las siguientes dos *ondas*, u *ondas laterales*, son la suma y los términos de diferencia, respectivamente. Éstas son las dos *ondas de primer orden* difractadas por el holograma de tipo reticular. La primera de éstas, es decir, el término de suma, representa una onda que, excepto por una constante multiplicativa, tiene la misma amplitud que la onda objeto $E_{0O}(x, y)$. Además, su fase contiene una contribución $2\phi(x, y)$ que, como podemos recordar, apareció al inclinar los frentes de onda de fondo y los frentes de reconstrucción, con respecto a Σ_H. Es este factor de fase el que proporciona la separación angular entre las imágenes reales y virtuales. Además, en lugar de contener la fase de la onda objeto, el término de suma contiene su negativo. Se trata entonces de una onda que si bien lleva toda la información apropiada acerca del objeto lo hace de una manera no del todo correcta. En efecto, ésta es la imagen real formada en luz convergente en el espacio situado más allá del holograma, es decir, entre éste y el observador. La fase negativa se manifiesta en una imagen de dentro hacia afuera, algo parecido al efecto pseudoscópico que se produce cuando los elementos de un par estereoscópico se intercambian. Las protuberancias aparecen como muescas y los puntos objetos que estaban frente y más cerca de Σ_H, tienen ahora su imagen más cerca pero también más allá de Σ_H. Entonces, un punto en el sujeto original, lo más cerca del observador, aparece lo más alejado en la imagen real. La escena aparece volteada sobre sí misma a lo largo de un eje en una forma que, quizás, debería verse a fin de entenderla.

Por ejemplo, imaginemos que estamos viendo la imagen holográfica conjugada de una bolera. La fila de bolos de atrás, aunque está parcialmente cubierta por las filas de enfrente, tiene, sin embargo, su imagen más cerca del observador que el primer bolo. A pesar de esto, recordemos que no es como si se estuviera observando el conjunto desde atrás. Nunca se detectó luz en la parte de atrás de los

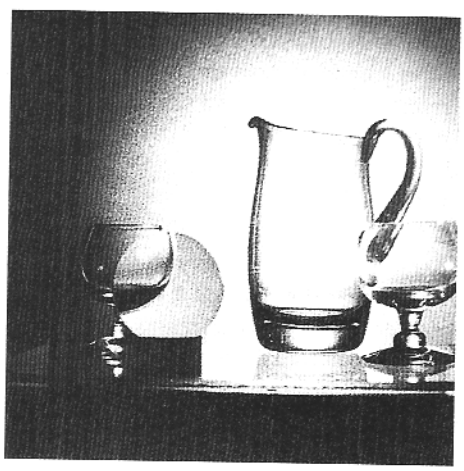
bolos, estamos observando una vista frontal volcada. Como consecuencia, la imagen conjugada es de utilidad limitada, aunque puede hacerse que tenga una configuración normal formando un segundo holograma con la imagen real como objeto.

El término de la diferencia en la ecuación (13.29), excepto por una constante multiplicativa, tiene precisamente la forma de la onda objeto $E_{OO}(x, y)$. Si tuviéramos que observar a través del (y no al) holograma iluminado, como si fuera una ventana mirando a la escena posterior, «veríamos» el objeto exactamente como si estuviera colocado realmente ahí. Podríamos mover la cabeza un poco y mirar alrededor de un objeto en primer plano, a fin de ver lo que anteriormente había tapado. Dicho de otro modo, además de una tridimensionalidad completa, los efectos de paralaje son evidentes como no ocurre en ninguna otra técnica reproductora (figura 13.55). Imaginemos que estamos viendo la imagen holográfica de una lupa enfocada en una página impresa. Al mover el ojo con respecto al plano del holograma, las palabras que resultan aumentadas por la lente (que es en realidad nada más que una imagen) cambian, como lo harían en la vida «real» con una lente «real» y una impresión «real». En el caso de un escena ampliada con profundidad considerable, tendríamos que volver a enfocar los ojos a medida que se van viendo diferentes partes de la misma a varias distancias. El objetivo de una cámara ten-

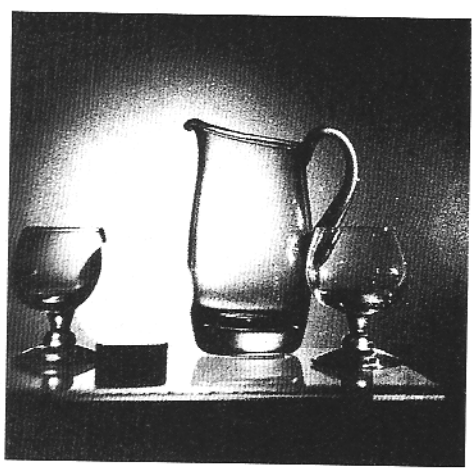


(a)

(b)

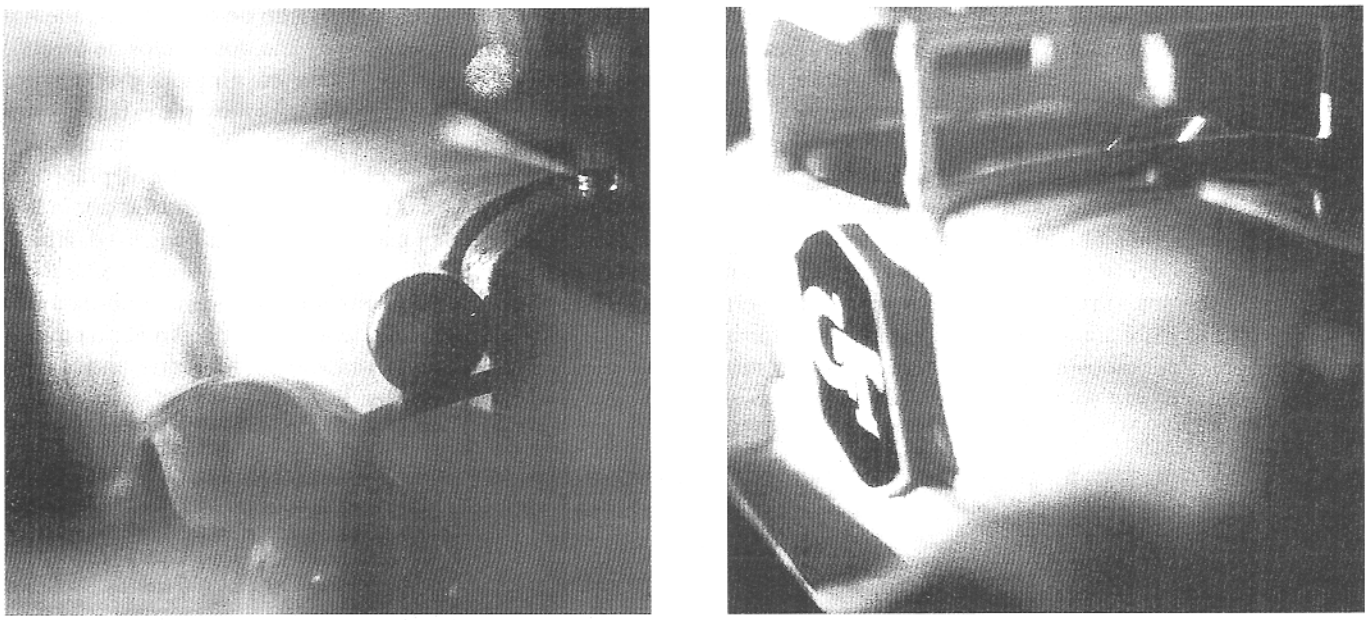


(c)



(d)

FIGURA 13.55 De la parte (*b*) a la (*d*) se enseñan tres diferentes vistas fotografiadas de la misma imagen holográfica generada por el holograma en (*a*). (Fotos de Smith, *Principles of Holography.*)



(a) (b)

FIGURA 13.56 Imagen holográfica reconstruida de una maqueta de coche. En (*a*) y (*b*) se cambiaron la posición de la cámara y el plano focal. (Fotos de O'Shea, Callen y Rhodes, *An Introduction to Lasers and Their Applications.*)

dría que reajustarse precisamente de la misma manera, si fotografiáramos regiones diferentes de una imagen virtual (figura 13.56).

Los hologramas exhiben otras características extremadamente importantes e interesantes. Por ejemplo, si estuviéramos de pie cerca de una ventana, podríamos oscurecerla completamente con, digamos, una pieza de cartón, excepto por un área pequeñísima a través de la cual podríamos mirar y aún ver los objetos situados detrás. Lo mismo es cierto para un holograma ya que cada pequeño fragmento de él contiene información acerca de todo el objeto, al menos como se ve desde la misma posición ventajosa, pudiendo cada fragmento reproducir, quizás con menor resolución, la imagen completa.

La figura 13.57 nos proporciona un resumen gráfico de lo dicho hasta ahora e incluso nos ofrece una disposición oportuna para armar y observar prácticamente un holograma. Aquí se muestra una emulsión fotográfica algo profunda, comparada con la figura 13.52, donde había sido tratada como si fuera puramente bidimensional. Está claro que cualquier emulsión tiene que tener un espesor finito, que normalmente será alrededor de 10 μm, mientras que el período espacial de las franjas puede ser de 1μm más o menos. La figura 13.58 *a*, que está más cerca del punto, muestra el tipo de franjas tridimensionales que se dan realmente en la emulsión. En las ondas planas, estos planos de franjas rectas y paralelas, se orientan de tal manera que biseccione el ángulo entre la referencia y las ondas objeto. No hay que olvidar que los hologramas considerados hasta ahora se han observado mirando a través de los mismos, es decir, todos eran **hologramas de transmisión** y en cada caso se habían producido llevando la onda de referencia y la onda del objeto a través de la película desde el mismo lado.

Algo parecido ocurre cuando las ondas de referencia y del objeto atraviesan la película desde lados opuestos, tal y como se ilustra en la figura 13.58*b*. Si, para simplificar, consideramos ambas ondas planas, la distribución resultante podrá visualizarse haciendo deslizar dos lápices a lo largo de los frentes; entonces aparecerá claro que las franjas son (planos de) bandas rectas, paralelas a la cara de la placa de la película. Cuando se superpone la onda de un objeto muy contorsionada una onda de referencia plana y coherente, las franjas se modulan con la información que describe el objeto en cuestión, y la red de difracción tridimensional correspondiente se llamará

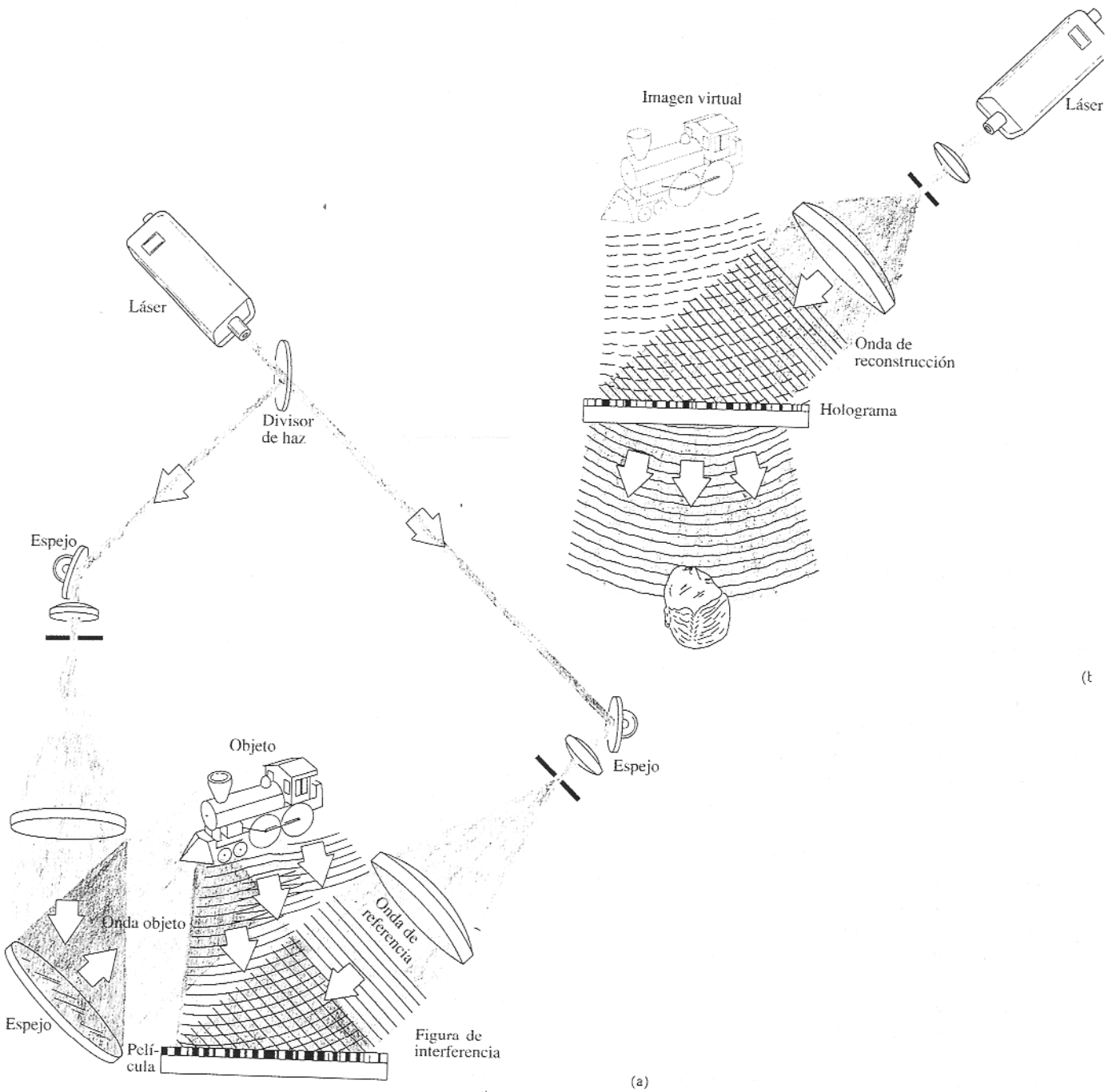


FIGURA 13.57 (*a*) Creación de un holograma de transmisión de una locomotora de juguete. (*b*) Réplica de un holograma de transmisión.

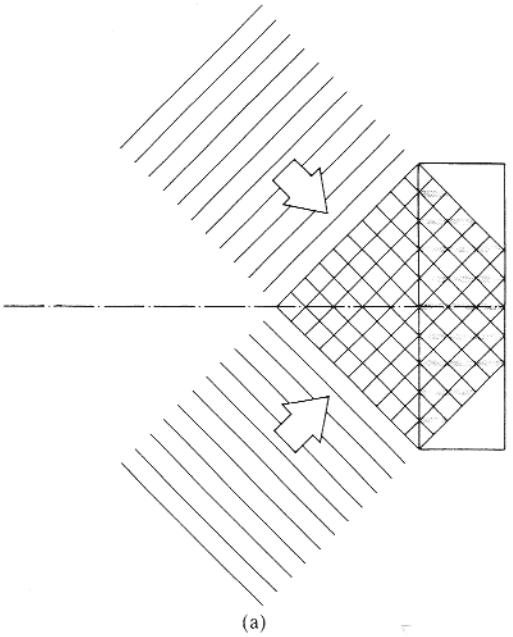


FIGURA 13.58 (*a*) Interferencia de dos ondas planas que se desplazan hacia el mismo lado para crear un holograma de transmisión. (*b*) Interferencia de dos ondas planas que se desplazan hacia lados opuestos para crear un holograma de reflexión. Se ha omitido la refracción.

holograma de reflexión. Al reproducirlo, volverá a difundir el rayo iluminante hacia el observador, así que se verá una imagen virtual detrás del holograma, como si se estuviera mirando en un espejo.

La interpretación de placas zonales se ha podido aplicar a los diferentes esquemas holográficos que hemos considerado hasta ahora, independientemente de si la onda difractada pertenecía al género de campo *cercano* o *lejano* (es decir, si se trataba de hologramas de Fresnel o de Fraunhofer, respectivamente). En efecto, se aplica generalmente donde el interferograma resulta de la superposición de trenes de ondas esféricas esparcidas por cada punto objeto y una onda de referencia coherente plana o aún esférica (siempre y cuando la última curvatura sea diferente de la del tren de ondas). Un fallo característico de estos esquemas es el que los radios de la placa zonal, R_m, varían como $m^{1/2}$ por medio de la ecuación (10.91). Entonces las franjas zonales son más compactas lejos del centro de cada lente zonal (es decir, a mayores valores de m). Esto equivale a un aumento de la frecuencia espacial de los anillos brillantes y oscuros que deben ser registrados por la placa fotográfica. El mismo fenómeno puede detectarse en la representación de la red coseno, donde la frecuencia espacial aumenta con θ. Pero, como la película, no importa lo fino que sea el grano, está limitada en su respuesta de frecuencia espacial, habrá un corte mas allá del cual no podrá registrar datos. Todo esto representa una limitación intrínseca en la resolución. Por el contrario, si la frecuencia media de las franjas se pudiera hacer constante, las limitaciones impuestas por el medio fotográfico se reducirían considerablemente y la resolución aumentaría de forma correspondiente. Siempre y cuando se pueda registrar la frecuencia espacial promedio de las franjas, hasta emulsiones gruesas como Polaroid P/N, podrían usarse sin gran pérdida de resolución. En la figura 13.59 se recoge un conjunto que permite lograr este resultado haciendo que los trenes de onda difractados del objeto interfieran con una onda esférica de referencia con aproximadamente la misma curvatura. El interferograma resultante se denomina holograma de **transformada de Fourier** (en este caso específico, es el holograma de la variedad de alta resolución *sin lentes*). Este esquema ha sido diseñado de tal forma que la onda de referencia anule la dependencia cuadrática (del tipo de lente zonal) de la fase con la posición en Σ_H. Esto ocurrirá precisamente sólo para un objeto bidimensional plano. En el caso de un objeto tridimensional (figura 13.60) esto se da solamente sobre un plano siendo, pues, el holograma resultante una composición de ambos tipos, es decir, una lente

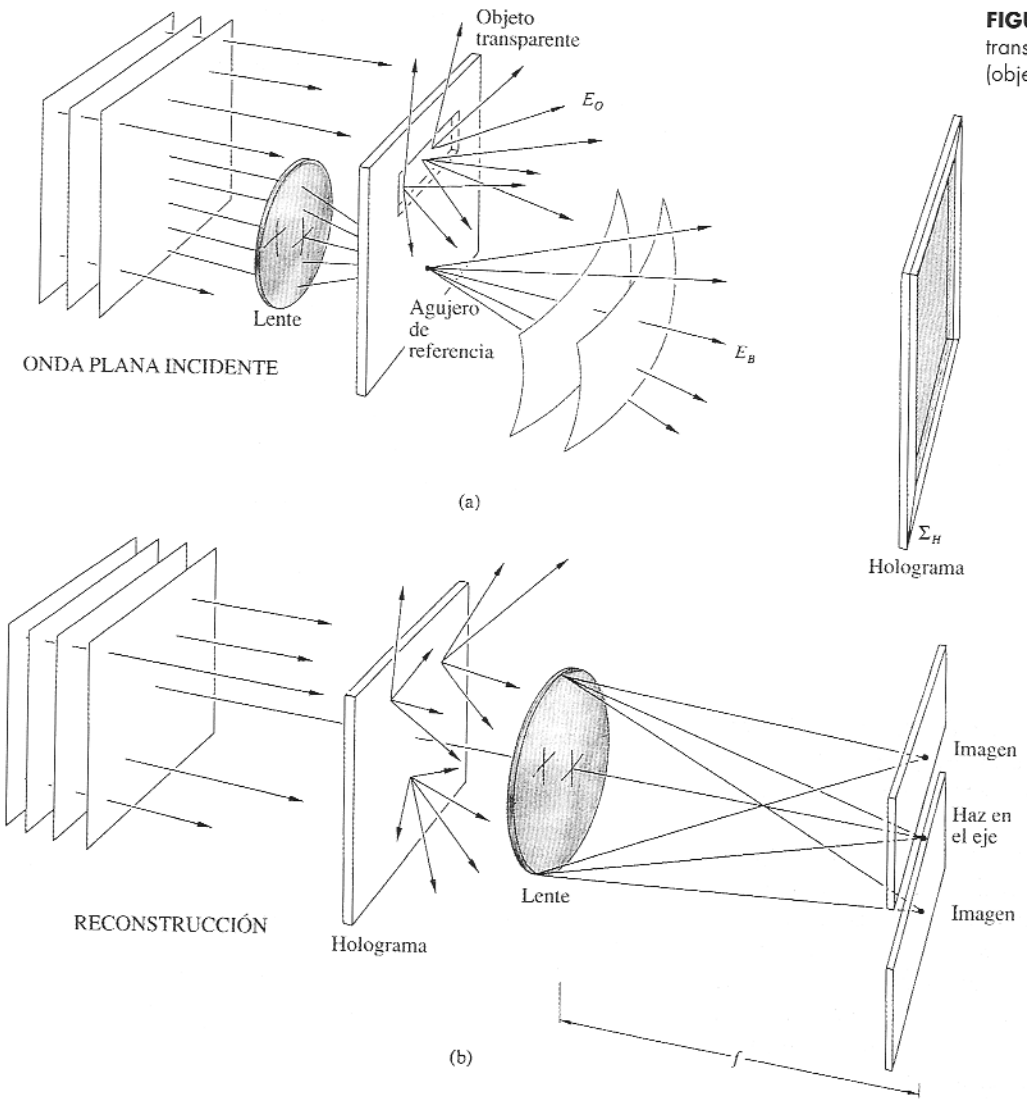


FIGURA 13.59 Holografía de la transformada de Fourier sin lentes (objeto transparente).

zonal y una transformada de Fourier. Contrariamente a otras disposiciones, las dos imágenes generadas por un holograma de transformada de Fourier son virtuales, están en el mismo plano y orientadas como si se reflejaran a través del origen (figura 13.61).

La naturaleza reticular de todos los hologramas anteriores es patente también aquí. En efecto, si miramos a través de un holograma de transformada de Fourier hacia una pequeña fuente luminosa blanca (un «destello» luminoso en un cuarto oscuro funciona muy bien), veremos las dos imágenes especulares pero resultarán muy indefinidas y rodeadas por bandas de colores espectrales. La similitud con la luz blanca que ha pasado a través de una red es inconfundible. [21]

[21] Véase DeVelis y Reynolds, *Theory and Applications of Holography*, Stroke, *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Smith, *Principles of Holography* o quizá *The Engineering Uses of Holography*, publicado por E. R. Robertson y J. M. Harvey.

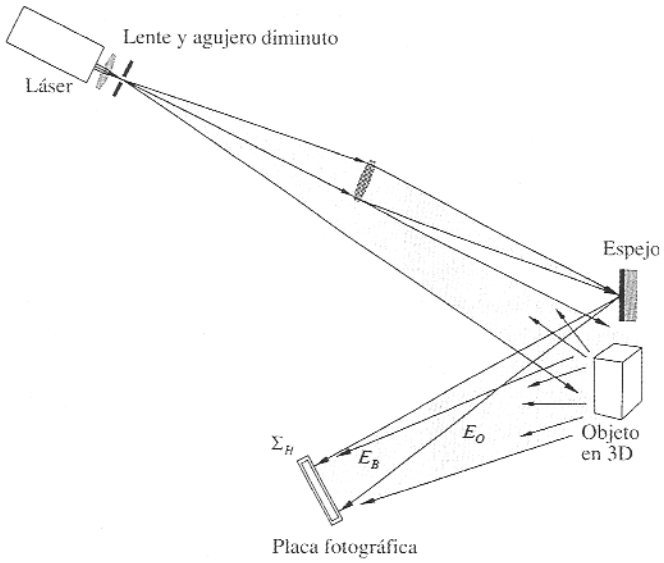


FIGURA 13.60 Holografía de la transformada de Fourier sin lentes (objeto opaco).

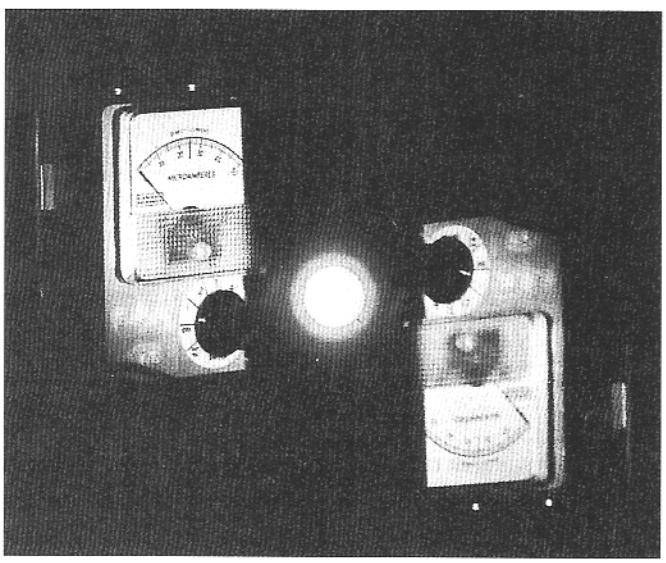


FIGURA 13.61 Reconstrucción de un holograma de una transformada de Fourier. [Fotos de G. W. Stroke, D. Brumm y A. Funkhauser, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 1327 (1965).]

13.3.2 Desarrollos y aplicaciones

Durante años se procuró aplicar el invento de la holografía, a parte de ciertas posibilidades obvias como las inevitables vallas de anuncios tridimensionales. Afortunadamente, varios desarrollos tecnológicos significativos han comenzado, en tiempos recientes, lo que ciertamente marcará una extensión progresiva del campo y de la utilidad de la holografía. Los primeros esfuerzos en el campo fueron simbolizados por un sinnúmero de carros y trenes de juguete, piezas de ajedrez y estatuillas —pequeños objetos que descansaban sobre gigantescos bloques de granito—. Ellos tenían que tener un tamaño pequeño debido a la potencia limitada del láser y de la longitud de coherencia, mientras que la ubicua plataforma masiva de granito servía para aislar las más mínimas vibraciones que podían entorpecer las franjas y por lo tanto dañar o borrar los datos almacenados. Un sonido fuerte o una ráfaga de aire podría resultar en el deterioro de la imagen reconstruida al hacer que la placa fotográfica, el objeto o los espejos se desplazaran varias millonésimas de pulgada durante la exposición, que podía durar del orden de un minuto. Era aquélla la época de la «naturaleza muerta» de la holografía. Pero ahora, gracias a películas nuevas, más rápidas y destellos de luz de corta duración ($\approx$40 ns) y alta potencia de un láser de rubí pulsado monomodo, incluso los retratos y la holografía que detiene la acción se han hecho realidad [22] (figura 13.62).

A lo largo de los años sesenta y de buena parte de los setenta, se enfatizaron mucho los maravillosos aspectos visuales de la holografía. Así también durante la década de los años ochenta, con la producción masiva de más de cien millones de hologramas de reflexión de plástico baratos (pegados a tarjetas de crédito, metidos en los paquetes de bombones, decorando cubiertas de revistas, joyas y álbumes de discos). El desarrollo de un fotopolímero estable, barato y capaz de producir imágenes de alta calidad ha favorecido aún más la producción de hologramas desechables. Sin embargo, hoy en día se reconoce ampliamente el potencial de la holografía también como instrumento no visual y en este nuevo camino se van hallando cada vez más aplicaciones.

Hologramas de Volumen

En 1962, el soviético Yuri Nikolayevitch Denisyuk presentó un esquema para generar hologramas que era conceptualmente similar al primer (1891) proceso fotográfico en color de Gabriel

[22] L. D. Siebert, *Appl. Phys. Letters*, **11**, 326 (1967) y R. G. Zech y L. D. Siebert, *Appl. Phys. Letters*, **13**, 417 (1968).

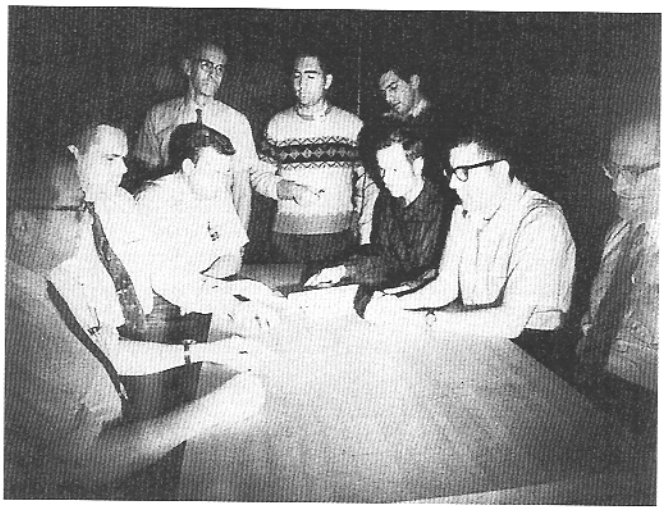


FIGURA 13.62 Reconstrucción de un retrato holográfico. (Foto cedida por L. D. Siebert.)

Lippmann. Brevemente, la onda objeto se refleja en el sujeto y se propaga hacia atrás, superponiéndose a la onda entrante coherente de fondo. De esta manera, las dos ondas forman una distribución tridimensional de ondas estacionarias, tal y como se muestra en la figura 13.58. La distribución espacial de las franjas es registrada por la fotoemulsión en todo su espesor para formar lo que se ha dado en llamar **holograma de volumen**. Si bien, desde entonces, se han introducido unas cuantas variaciones, las ideas básicas siguen siendo las mismas; en lugar de generar una estructura reticular bidimensional, el holograma de volumen es una red tridimensional. En otras palabras, se trata de un conjunto tridimensional, modulado, periódico, de objetos de fase o de amplitud, que representan los datos. Puede registrarse en varios medios, por ejemplo, en fotoemulsiones gruesas donde los objetos de amplitud son granos de plata depositada; en vidrio fotocrómico; con cristales halógenos como KBr que responden a la irradiación mediante variaciones de los centros de color; o con un cristal ferroeléctrico como niobato de litio, que sufre alteraciones locales en su índice de refracción, formando así lo que podría llamarse un holograma de volumen de fase. En todo caso, uno se queda con un conjunto de volumen de datos, almacenado como sea en el medio, que durante el proceso (de reconstrucción) se comporta en una forma muy parecida a un cristal que está siendo irradiado con rayos X. La onda incidente de reconstrucción se esparce según la ley de Bragg (pág. 484). Esto no es muy sorprendente, ya que tanto los centros de dispersión como λ simplemente se han aumentado proporcionalmente.

Una característica importante de los hologramas de volumen es la interdependencia [mediante la ley de Bragg, $2d$ sen $\theta = m\lambda$, ecuación (10.71)] de la longitud de onda y el ángulo de dispersión; es decir, solamente una luz de color determinada será difractada con un ángulo particular por el holograma. Otra propiedad significativa es que, alterando sucesivamente el ángulo incidente (o la longitud de onda), un medio de volumen único puede almacenar muchos hologramas coexistentes a la vez. Esta última propiedad hace que tales sistemas sean muy interesantes como dispositivos de memoria compactos. Por ejemplo, se ha empleado un holograma de 8 mm de espesor para almacenar 550 páginas de información, cada una recuperable individualmente. Teóricamente, un simple cristal de niobato de litio es capaz de almacenar fácilmente miles de hologramas pudiendo recrear nuevamente cada uno de ellos con un haz láser apuntado hacia el cristal con el ángulo apropiado. En la actualidad, las investigaciones se centran también en el tantalato niobato de potasio (KTN) como medio de almacenamiento de cristal fotorrefractivo potencial. Imaginemos una película holográfica tridimensional de cine; una biblioteca; o las estadísticas vitales de cada uno —signos particulares, tarjetas de crédito, impuestos, malos hábitos, ingresos, historial, etc.— todos grabados en un puñado de pequeños cristales transparentes.

Se han formado reconstrucciones multicolores usando placas (en blanco y negro) holográficas de volumen. Se emplean dos, tres o más haces láser superpuestos, incoherentes, con diferentes colores para generar hologramas constitutivos, separados, coexistentes del objeto, individualmente o todos a la vez. Al iluminarlos todos simultáneamente con los diversos rayos constitutivos, resultará una imagen multicoloreada.

Otro esquema importante y muy alentador fue inventado por G. W. Stroke y A. E. Labeyrie y se le conoce como **holografía de reflexión de luz blanca**. Aquí, la onda de reconstrucción es un haz de luz blanca ordinaria de, digamos, una linterna o un proyector, con un frente de onda similar a la onda de fondo cuasimonocromática original. Al iluminarlo por el mismo lado del observador, solamente la longitud de onda específica, que penetra en el holograma de volumen con el ángulo de Bragg apropiado, se reflejará para formar una imagen virtual, tridimensional, reconstruida. Entonces, si la escena se grabara con luz láser roja, sólo la luz roja se reflejaría supuestamente como imagen. Sin embargo, es de interés pedagógico aclarar que la emulsión puede encogerse durante el proceso de fijación y si no se lleva de nuevo químicamente a su

forma original (por ejemplo, con trietanolamina), el espaciamiento d de los planos de Bragg disminuye. Esto significa que con un ángulo θ determinado, la longitud de onda reflejada disminuirá proporcionadamente. Por lo tanto, una escena grabada con luz roja de He-Ne puede reproducirse en naranja o incluso en verde al reconstruirla con un rayo de luz blanca.

Si se almacenan varios hologramas que corresponden a diferentes longitudes de onda, resultará una imagen multicolor. Las ventajas de usar una fuente de luz blanca común para reconstruir imágenes tridimensionales a todo color son obvias y de largo alcance.

Interferometría Holográfica

Uno de los avances holográficos recientes más innovadores y prácticos se ha producido en el área de la interferometría. Tres planteamientos distintos han resultado ser muy útiles en una serie exhaustiva de situaciones de prueba no destructivas donde, por ejemplo, se podía estudiar las distorsiones de micropulgada de un objeto imputables a esfuerzos, vibración, calor, etc. En la técnica de la *doble exposición,* se hace simplemente un holograma del objeto sin perturbación y sucesivamente, antes de procesarlo, se expone el mismo por segunda vez a la luz procedente del objeto ahora distorsionado. El resultado final son dos ondas reconstruidas superpuestas que avanzan para formar una distribución de franjas indicativa de los desplazamientos sufridos por el objeto, es decir, de los cambios en la longitud del camino óptico (figura 13.63). Las variaciones del índice tales como las que aparecen en los túneles de viento y otros parecidos, generarán el mismo tipo de distribución.

En el método de *tiempo real,* se deja el sujeto en su posición original durante todo el proceso; se forma un holograma procesado y se hace que la imagen virtual resultante se superponga precisamente al objeto (figura 13.64). Cualquier distorsión que aparezca durante las pruebas siguientes, aparecerá al mirar a través del holograma, como un sistema de franjas que pueden estudiarse conforme evolucionan en tiempo real. El método se aplica tanto a objetos opacos como transparentes. Se pueden tomar películas de cine para formar un registro continuo de la respuesta.

El tercer planteamiento es el de *tiempo promedio* particularmente aplicable a sistemas oscilatorios rápidos y de amplitud pequeña. Aquí la placa de la película se expone durante una tiempo relativamente largo, en el que el objeto vibrador ha ejecutado un número de oscilaciones. El holograma resultante puede considerarse como una superposición de imágenes múltiples con el efecto de que emerge una distribución de ondas estacionarias. Las áreas brillantes revelan regiones no desviadas o nodales estacionarias, mientras que las líneas de contorno trazan áreas de amplitud vibracional constante.

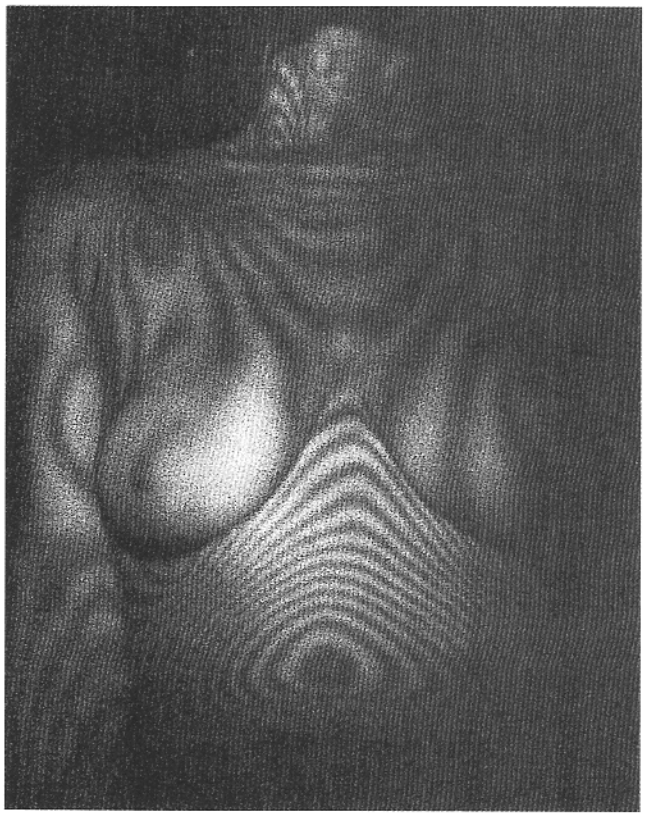


FIGURA 13.63 Interferograma holográfico de doble exposición. [Foto de S.M. Zivi y G.H. Humberstone, «Chest Motion Visualized by Holographic Interferometry», *Medical Research* pág. 5 (Junio de 1970).]

Hoy las pruebas holográficas de sistemas mecánicos es una práctica muy difundida en la industria a la que se recurre en una gama muy vasta de aplicaciones, desde la reducción del ruido en las transmisiones de los coches hasta las inspecciones de los motores a chorro.

Holografía Acústica

En la holografía acústica, para la creación inicial del holograma se recurre a una onda sonora de frecuencia ultraalta (ultrasonido) mientras que el haz láser sirve, entonces, para formar

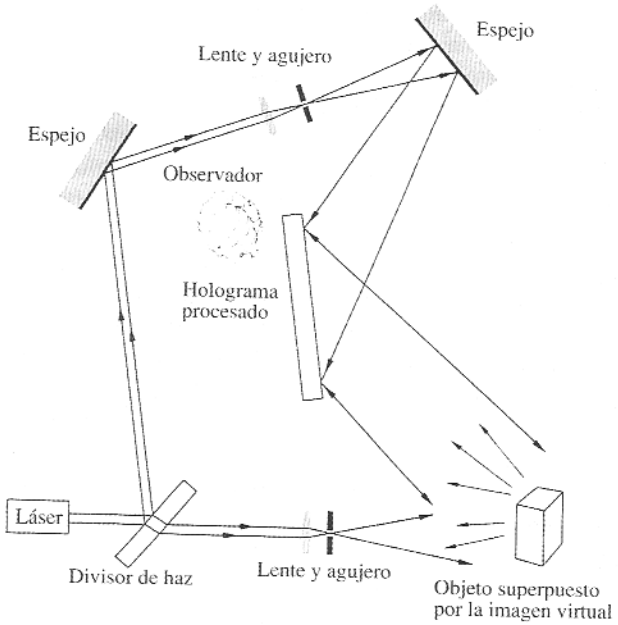


FIGURA 13.64 Interferometría holográfico de tiempo real.

una imagen reconstruida reconocible. En una aplicación, la figura ondulatoria estacionaria en la superficie del agua producido por transductores coherentes sumergidos, corresponde a un holograma del objeto situado debajo (figura 13.65). Si se fotografía, se crea un holograma que puede iluminarse ópticamente para formar una imagen visual. De forma alterativa, las ondulaciones se pueden radiar desde arriba con un rayo láser para producir una reconstrucción instantánea en luz reflejada.

Las ventajas de las técnicas acústicas estriban en el hecho de que las ondas sonoras pueden propagarse por distancias considerables en líquidos densos y sólidos contrariamente a la luz. Por consiguiente, los hologramas acústicos son capaces de registrar cosas tan diversas como submarinos sumergidos y órganos internos del cuerpo. [23] En el caso de la figura 13.65, se vería algo semejante a una película de cine de rayos X del pez. La figura 13.66 recoge la imagen de un penique formado por una holografía acústica en la que se han empleado ultrasonidos de frecuencia de 48 MHz. En el agua, eso corresponde a una

[23] Véase A.F. Metherell, «Acoustical Holography» *Sci. Am.* **221**, 36 (Octubre de 1969). Remítanse también a A.L. Dalisa et al., «Photoanodic Engraving of Holograms on Silicon», *Appl. Phys. Letters*, **17**, 208 (1970) para otro uso interesante de figuras de relieve de superficies.

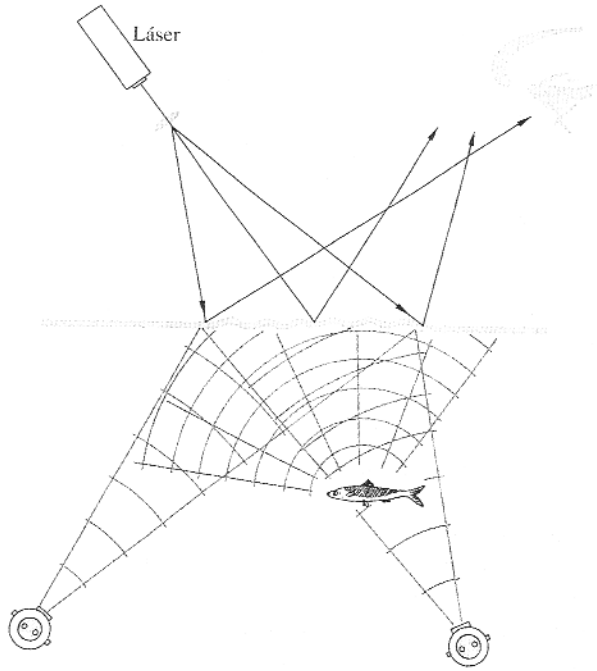


FIGURA 13.65 Holografía acústica.

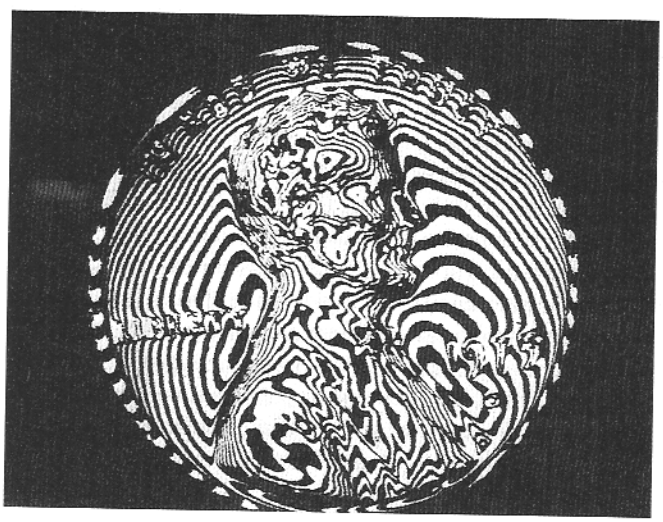


FIGURA 13.66 Imagen interferométrica de un penique por holografía acústica. (Foto cedida por Holosonics, Inc.)

longitud de onda de unos 30 μm así que cada contorno de franja revela un cambio de elevación de $\frac{1}{2}\lambda$ ó 15 μm.

Elementos Ópticos Holográficos

Evidentemente, cuando dos ondas planas se superponen, tal y como ocurre en la figura 13.52, se produce una red cosenoidal lo cual, obviamente, lleva a sugerir que la holografía puede usarse también para fines no visuales, como producir redes de difracción. En efecto, el *elemento óptico holográfico* (EOH) es cualquier dispositivo de difracción compuesto de un sistema de «franjas» (es decir, una distribución de objetos de fase o de amplitud difractantes) creado bien sea directamente por interferometría o por simulación computerizada. En el mercado existen redes de difracción holográficas, ya sea con brillo o sinusoidales (con hasta alrededor de 3.600 líneas/mm). Aunque generalmente se trate de redes menos eficaces que los rayados, producen, sin embargo, una cantidad muy inferior de luz parásita, lo cual puede ser importante en muchas aplicaciones.

Supongamos que registramos la figura de interferencia de un haz convergente usando una onda de referencia plana. Al iluminar el holograma de transmisión resultante con una onda plana acoplada, aparecerá una onda convergente recreada y el holograma funcionará como una lente (véase la figura 13.49). De manera parecida, si el rayo de referencia es una onda divergente de una fuente puntual y el objeto es una onda plana, el holograma resultante, reiluminado por la fuente puntual, nos devolverá una onda plana. De esta manera, un elemento óptico holográfico puede desempeñar las tareas de una lente compleja con la ventaja de permitir un sistema compacto, ligero y barato.

Los elementos ópticos holográficos ya se emplean en las cajas de los supermercados, cuyos lectores leen automáticamente las barras del Código Universal de Productos (UPC) de la mercancía. Un haz láser pasa a través de un disco de rotación compuesto de varias facetas holográficas de lentes-prisma. Éstas vuelven a enfocar, se mueven y barren rápidamente el haz a lo largo de un volumen del espacio, asegurándose que la lectura del código ocurra a la primera pasada sobre el dispositivo. Se usan también elementos ópticos holográficos en las pantallas de información de las cabinas de los aviones que permiten visualizar los datos en una pantalla normalmente transparente colocada frente al piloto, sin oscurecerle la vista. También se encuentran en las fotocopiadoras y en los concentradores solares.

Los EOH se encuentran en los correladores ópticos como *filtros espaciales acoplados*, a fin de detectar los fallos de los semiconductores y de los tanques en fotos de reconocimiento. En estos casos, el EOH es un holograma formado usando como objeto la transformada de Fourier del objetivo (por ejemplo, una fotografía de un tanque o una palabra impresa). Supongamos que haya que encontrar automáticamente una palabra en una página impresa, empleando un ordenador óptico como el de la figura 13.32 para poner en correlación la palabra con la página. Se coloca el holograma de la transformada del objetivo sobre el plano de la transformada y se ilumina con la transformada de la página entera. La amplitud de campo que emerge desde el filtro de EOH será proporcional al producto de las transformadas de la página y de la palabra. La transformada de este producto, generada por la última lente y visualizada sobre el plano de la imagen, es la correlación mutua que se buscaba (recuérdese el teorema de Wiener-Khintchine). Si la palabra se halla en la página, la correlación será muy alta y en la imagen final se verá una zona superpuesta muy luminosa dondequiera que aparezca la palabra en cuestión. [24]

Es posible sintetizar, punto por punto, un holograma de un objeto ficticio. Dicho de otro modo, en el planteamiento más directo, los hologramas pueden producirse calculando, por medio de un ordenador digital, la distribución de irradiancia que aparecería si unos objetos estuvieran iluminados oportunamente en una sesión hipotética de grabación. Para servir como holograma real, se fotografía entonces una imagen del interferograma producida por un tubo de rayos catódicos o por un trazador controlado por ordenador. El resultado después de iluminarlo es la imagen tridimensional reconstruida de un objeto que nunca existió realmente. De manera más práctica, los EOH generados por ordenadores, se producen habitualmente en la actualidad, a menudo para servir de referencia para pruebas ópticas. Ya que, en principio, estos encuentros de tecnologías pueden generar frentes de onda que de otra forma no podrían producirse, el futuro es muy alentador.

13.4 Óptica no lineal

Por lo general, el campo de la *óptica no lineal* abarca aquellos fenómenos para los cuales las intensidades de los campos eléctrico y magnético de potencias más elevadas que los primeros desempeñan un papel dominante. El efecto Kerr (sección 8.11.3), que es una variación cuadrática del índice de refracción con el voltaje aplicado y, por lo tanto, con el campo eléctrico, es típico entre varios efectos no lineales conocidos desde hace mucho tiempo.

[24] Véase A. Ghatak y K. Thyagarajan, *Contemporary Optics*, pág. 214.

El análisis clásico usual de la propagación de la luz —superposición, reflexión, refracción, etc.— presupone una relación lineal entre el campo electromagnético de la luz y el sistema atómico que responde y que forma el medio. Pero, como un dispositivo oscilatorio mecánico (por ejemplo, un resorte lastrado) puede forzarse hasta obtener respuesta no lineal, por medio de la aplicación de fuerzas lo suficientemente grandes, también podemos anticipar que un rayo luminoso extremadamente intenso podría generar efectos ópticos no lineales apreciables.

Los campos eléctricos asociados con rayos luminosos de fuentes comunes, o si se prefiere, tradicionales, son demasiado pequeños para que tal comportamiento sea fácilmente observable. Esta fue precisamente la razón, amén de una carencia inicial de proezas técnicas, por la cual se tuvo que esperar la llegada del láser a fin de que se pudiera traer suficiente fuerza bruta a la región óptica del espectro. Para poner un ejemplo de los tipos de campos que se obtienen fácilmente con la tecnología actual, considérese que una buena lente puede enfocar un haz láser en una mancha con un diámetro de unas 10^{-3} pulgadas, lo cual corresponde a un área de unos 10^{-9} m^2. Un impulso de 200 megavatios, procedente, por ejemplo, de un láser de rubí con conmutación Q, produciría entonces una densidad de flujo de 20×10^{16} W/m^2. Se deduce entonces (problema 13.27) que la amplitud de campo eléctrico correspondiente viene dada por

$$E_0 = 27{,}4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2} \tag{13.30}$$

En este caso particular, para $n \approx 1$, la amplitud del campo es alrededor de $1{,}2 \times 10^8$ V/m. Esto es más que suficiente para la ruptura en aire (unos 3×10^6 V/m) y unos órdenes de magnitud menor que los campos típicos que mantienen unido un cristal, siendo éste aproximadamente el mismo que el campo de cohesión del electrón en un átomo de hidrógeno (5×10^{11} V/m). La disponibilidad de estos y aún mayores (10^{12} V/m) campos ha hecho posible una amplia gama de nuevos e importantes fenómenos y dispositivos no lineales. Limitaremos este análisis a varios fenómenos no lineales asociados con medios pasivos (es decir, medios que actúan esencialmente como catalizadores sin poner de relieve sus propias frecuencias características). Consideraremos, concretamente, la rectificación óptica, la generación óptica de armónicos, la mezcla de frecuencias y el autoenfoque de la luz. Por el contrario, los esparcimientos Raman, Rayleigh y Brillouin estimulados representan fenómenos ópticos no lineales que aparecen en medios activos que imponen sus frecuencias características en la onda luminosa. [25]

Como quizás recuerden, el campo electromagnético de una onda luminosa que se propaga a través de un medio ejerce unas fuerzas en los electrones débilmente ligados exteriores o de valencia. Por lo general, estas fuerzas son muy pequeñas y, en un medio lineal isótropo, la polarización eléctrica resultante es paralela y directamente proporcional al campo aplicado. En efecto, la polarización sigue al campo; si éste es armónico, aquélla será armónica también. Por lo tanto, puede escribirse

$$P = \epsilon_0 \chi E \tag{13.31}$$

donde χ es una constante sin dimensiones denominada susceptibilidad eléctrica y una representación gráfica de P frente a E es una línea recta. Naturalmente, en el caso extremo de campos muy altos, es de esperar que P se sature, en otras palabras, simplemente no puede aumentar lineal e indefinidamente con E (como es sabido con los materiales ferromagnéticos, donde el momento magnético se satura a valores bastante bajos de H). Entonces podemos anticipar un aumento gradual de la omnipresente, aunque generalmente despreciable, no linealidad cuando E aumenta. Como las direcciones de **P** y **E** coinciden en el caso más simple de un medio isótropo, podemos expresar la polarización más efectivamente como un desarrollo en serie:

$$P = \epsilon_0(\chi E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + \cdots) \tag{13.32}$$

La susceptibilidad lineal usual, χ, es mucho mayor que los coeficientes de los términos no lineales χ_2, χ_3, etc. y, por consiguiente, los últimos contribuyen notablemente sólo con campos de alta amplitud. Ahora supongamos que una onda luminosa de la forma

$$E = E_0 \operatorname{sen} \omega t$$

incida en el medio. La polarización eléctrica resultante

$$P = \epsilon_0 \chi E_0 \operatorname{sen} \omega t + \epsilon_0 \chi_2 E_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + \epsilon_0 \chi_3 E_0^3 \operatorname{sen}^3 \omega t + \cdots \tag{13.33}$$

se puede reescribir como

$$P = \epsilon_0 \chi E_0 \operatorname{sen} \omega t + \frac{\epsilon_0 \chi_2}{2} E_0^2 (1 - \cos 2\omega t) + \frac{\epsilon_0 \chi_3}{4} E_0^3 (3 \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} 3\omega t) + \cdots \tag{13.34}$$

[25] Para un análisis más exhaustivo que éste, véase N. Bloembergen, *Nonlinear Optics* o G. C. Baldwin, *An Introduction to Nonlinear Optics*.

Conforme la onda armónica luminosa atraviesa el medio, crea lo que podría considerarse como una onda de polarización, es decir, una redistribución ondulatoria de la carga dentro del material en respuesta al campo. Si los términos lineales fueran efectivos, la onda de polarización eléctrica correspondería a una corriente oscilatoria junto con la luz incidente. La luz nuevamente reradiada de ahí en adelante en tal proceso correspondería a la onda refractada usual, que se propaga generalmente con una velocidad reducida v y que tiene la misma frecuencia que la luz incidente. Por el contrario, la presencia de términos de orden superior en la ecuación (13.33) implica que la onda de polarización ciertamente no tenga el mismo perfil armónico que el campo incidente. En efecto, la ecuación (13.34) puede compararse con una representación en serie de Fourier del perfil distorsionado de $P(t)$.

13.4.1 Rectificación óptica

El segundo término en la ecuación (13.34) tiene dos componentes de gran interés. Primero, hay un término *cc* o *de nivel de polarización constante* que varía como E_0^2. En consecuencia, si un rayo intenso polarizado en un plano atraviesa el cristal apropiado (piezoeléctrico), la presencia de la no linealidad cuadrática se manifestará, en parte, por una polarización eléctrica constante del medio. Por lo tanto, en el cristal aparecerá una diferencia de voltaje, proporcional a la densidad de flujo del rayo. Este efecto, en analogía con su réplica en radiofrecuencia, se denomina **rectificación óptica**.

13.4.2 Generación de armónicos

El término cos $2\omega t$ [ecuación (13.34)] corresponde a una variación de la polarización eléctrica que es igual al doble de la frecuencia fundamental, es decir, al doble de la de la onda incidente. La luz reradiada que aparece de los osciladores forzados, tiene también una componente de esta misma frecuencia, 2ω, así que el proceso se denomina **generación de segundo armónico** o GSA para abreviar. En términos de la representación de fotones, podemos visualizar dos fotones idénticos de energía $\hbar\omega$ que se funden con el medio para formar un solo fotón de energía $\hbar 2\omega$. Peter *A*. Franken y varios colegas de la Universidad de Michigan, fueron los primeros en 1961 en observar experimentalmente la GSA. Ellos enfocaron un pulso de luz roja (694,3 nm) de 3 kW de un láser de rubí sobre un cristal de cuarzo. Aproximadamente una parte en 10^8 de esta onda incidente se convirtió en el segundo armónico de 347,15 nm en el ultravioleta.

Obsérvese que, para un material determinado, si $P(E)$ es una función impar, es decir, si al invertir la dirección del campo **E** simplemente cambia la dirección de **P**, las potencias pares de E en la ecuación (13.32) deben desaparecer. Esto es precisamente lo que sucede en un medio isótropo tal como vidrio o agua —no hay direcciones particulares en un líquido—. Además, en cristales como la calcita, que están estructurados de tal forma que tienen lo que se conoce como *centro de simetría* o *centro de inversión,* una inversión de todos los ejes coordenados debe dejar inalteradas las interrelaciones entre las cantidades físicas. Por lo tanto, no pueden producirse armónicos pares con materiales de esta clase. Sin embargo, puede darse la generación de un tercero armónico (GTA) como se ha observado, por ejemplo, en la calcita. El requisito para GSA de que un cristal no tenga simetría de inversión es también necesario para que sea piezoeléctrico. Bajo presión, un cristal piezoeléctrico [tal como cuarzo, dihidrógeno fosfato potásico (KDP) o dihidrógeno fosfato amónico (ADP)] sufre una distorsión asimétrica de su distribución de cargas produciendo entonces un voltaje. De las 32 clases de cristales, 20 son de este tipo y pueden, por lo tanto, ser útiles en GSA. La expresión escalar simple [ecuación (13.32)] no es en realidad una descripción adecuada de un cristal dieléctrico típico. Las cosas son bastante más complejas porque las componentes del campo en numerosas direcciones diferentes en un cristal pueden afectar a la polarización eléctrica en cualquier dirección. Un análisis exhaustivo requiere que **P** y **E** estén relacionadas, no por un escalar simple, sino por un grupo de cantidades dispuestas en la forma particular de un tensor, en concreto el tensor de susceptibilidad. [26]

Una dificultad notable que aparece en la generación de cantidades abundantes de luz de segundo armónico surge de la dependencia del índice de refracción con la frecuencia, es decir, de la dispersión. En algún punto inicial, donde la onda incidente o ω genera la onda de segundo armónico ó 2ω, las dos son coherentes. Conforme la onda ω se propaga a través del cristal, continúa generando contribuciones adicionales de luz de segundo armónico, que se combinan totalmente en forma constructiva sólo si mantienen una relación de fase apropiada. Sin embargo, la onda ω viaja con una velocidad de fase v_ω, que es generalmente diferente de la velocidad de fase, $v_{2\omega}$, de la onda 2ω. Entonces, el segundo armónico recién emitido se desfasa periódicamente con algunas de las ondas 2ω generadas ante-

[26] Por cierto, no hay nada extraordinario acerca de este tipo de comportamiento, ocurre muy a menudo. Hay tensores de inercia, tensores de coeficientes de desmagnetización, tensores de esfuerzo, etc.

riormente. Al calcular [27] la irradiancia del segundo armónico, $I_{2\omega}$, que emerge de una placa de espesor ℓ ésta resulta ser

$$I_{2\omega} \propto \frac{\text{sen}^2\,[2\pi(n_\omega - n_{2\omega})\ell/\lambda_0]}{(n_\omega - n_{2\omega})^2} \tag{13.35}$$

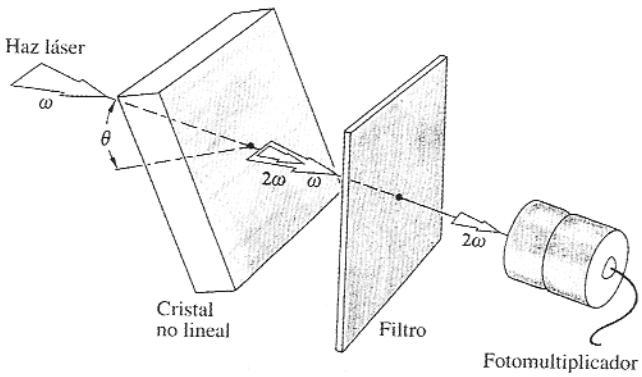
(véase figura 13.67). El resultado es que $I_{2\omega}$, tiene su máximo valor cuando $\ell = \ell_c$, donde

$$\ell_c = \frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{|n_\omega - n_{2\omega}|} \tag{13.36}$$

Se trata de lo que comúnmente se denomina *longitud de coherencia* (aunque, quizás, sería mejor otro nombre) siendo, por lo general, del orden de tan sólo unas $20\lambda_0$. A pesar de esto, se puede obtener una GSA eficaz mediante un procedimiento llamado *acoplamiento de índices,* que anula los efectos indeseables de la dispersión; en resumen, se actúa de tal manera que $n_\omega = n_{2\omega}$. Un material que se emplea corrientemente para GSA es el KDP: es piezoeléctrico, transparente y también birrefringente uniáxico negativo y tiene, asimismo, la interesante propiedad de que, si la luz fundamental es una *onda ordinaria* polarizada linealmente, el segundo armónico resultante será una *onda extraordinaria.* Como puede verse en la figura 13.68, si la luz se propaga dentro de un cristal de KDP con el ángulo específico θ_0 con respecto al eje óptico, el índice, $n_{0\omega}$, de la onda fundamental ordinaria será precisamente igual al índice del segundo armónico extraordinario $n_{e2\omega}$. Los trenes de onda del segundo armónico interferirán entonces constructivamente, aumentando así la eficiencia de la conversión en varios órdenes de magnitud. Los generadores de segundo armónico, que son simplemente cristales cortados y orientados oportunamente, se consiguen en el mercado, pero no hay que olvidar que θ_0 es una función de λ y cada uno de tales dispositivos funcionan a una sola frecuencia. En tiempos recientes, se ha obtenido un rayo continuo de segundo armónico de 1 W en 532,3 nm colocando un cristal de niobato de sodio y bario dentro de la cavidad de un láser de 1 W en 1,06μ. El hecho de que la onda ω pasa una y otra vez en ambos sentidos a través del cristal aumenta la eficacia neta de conversión.

La generación de armónicos ópticos perdió rápidamente su «exotismo» inicial para transformarse en un proceso comercial rutinario a comienzos de los ochenta. Sin embargo, siguen produciéndose logros técnicos muy interesantes, como el conjunto de conversión armónica de 74 cm de diámetro (figura 13.69)

[27] Véase, por ejemplo, B. Lengyel, *Introduction to Laser Physics,* Capítulo VII. Se trata de un buen análisis básico.



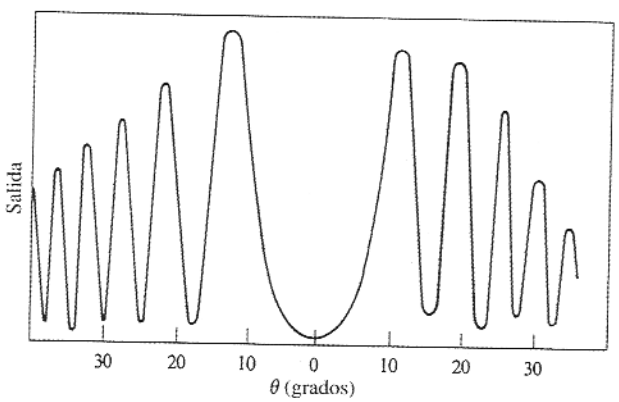
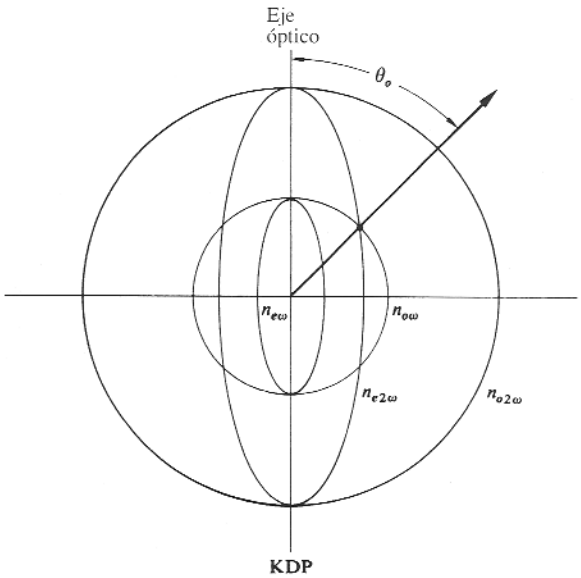


FIGURA 13.67 Generación de segundo armónico como función de θ para una lámina de cuarzo de 0,78 mm de espesor. Los máximos se dan cuando el espesor efectivo es un múltiplo par de ℓ_c. [Foto de P. D. Maker, R. W. Terhune, M. Nisenoff y C. M. Savage, *Phys. Rev. Letters* **8**, 21 (1962).]

construido para el programa de fusión del láser Nova. Su función es la de convertir hasta el 80% de la emisión infrarroja (1,05 μm) del láser de neodimio-vidrio en una radiación de alta frecuencia más eficaz. A causa de su gran tamaño, el conversor es un mosaico de pequeños paneles de monocristal KDP alineados que forman dos capas, una detrás de la otra. A fin de generar el segundo armónico (luz verde en 0,53 μm) el conjunto se coloca de tal manera que cada estrato funcione independientemente y produzca dos componentes superpuestas con frecuencia desplazada. Cada una procede de una capa de cristal y está polarizada ortogonalmente. El tercer armónico (luz azul en 0,35 μm) se obtiene orientando otra vez el conjunto hacia el ángulo de



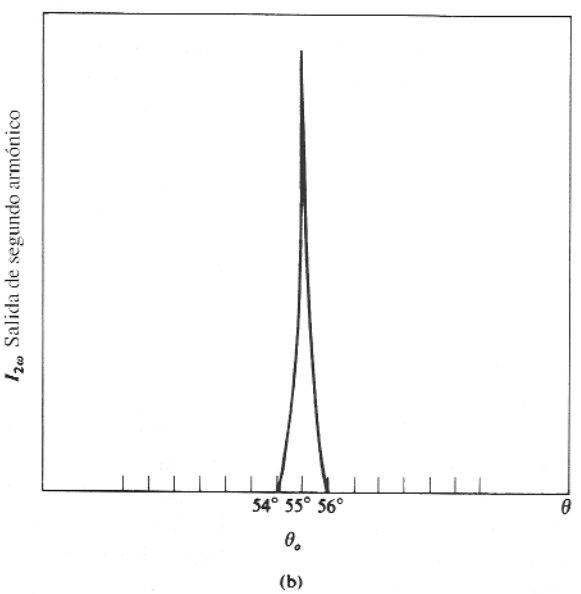


FIGURA 13.68 Superficie de índice de refracción para KDP. (b) $I_{2\omega}$ frente a la orientación del cristal de KDP. (Foto de Maker et al.)

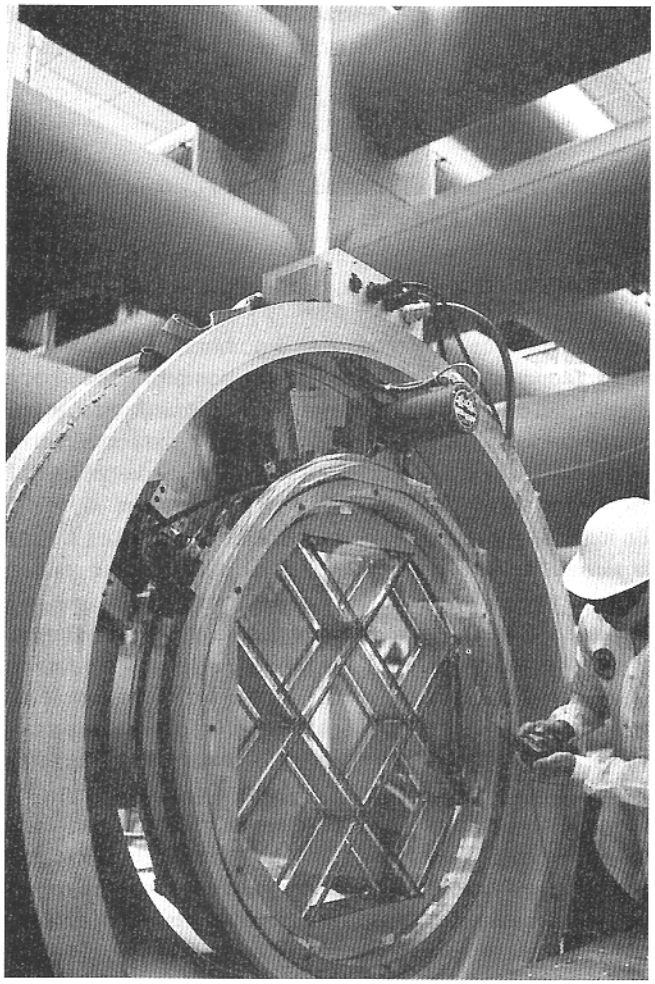


FIGURA 13.69 Conversor de frecuencias de KDP del láser Nova. (Foto cedida por el Lawrence Livermore National Laboratory.)

acoplamiento de fase apropiado, para que alrededor de dos tercios de la energía del haz se desplacen en el segundo armónico mientras atraviesa la primera capa de cristal. La segunda capa mezcla el IR restante con la luz verde del segundo armónico para producir la luz azul del tercero

13.4.3 Mezclado de frecuencias

Otra situación de interés práctico considerable comprende la *mezcla* de dos o más rayos primarios de diferentes frecuencias

dentro de un dieléctrico no lineal. El proceso puede apreciarse más fácilmente substituyendo una onda con la forma

$$E = E_{01} \operatorname{sen} \omega_1 t + E_{02} \operatorname{sen} \omega_2 t \qquad (13.37)$$

en la expresión más simple para P proporcionada por la ecuación (13.32). La contribución de segundo orden es entonces

$$\epsilon_0 \chi_2 (E_{01}^2 \operatorname{sen}^2 \omega_1 t + E_{02}^2 \operatorname{sen}^2 \omega_2 t + 2E_{01}E_{02} \operatorname{sen} \omega_1 t \operatorname{sen} \omega_2 t)$$

Los dos primeros términos pueden expresarse como funciones de $2\omega_1$ y $2\omega_2$ respectivamente, mientras que la última cantidad da lugar a los términos de suma y diferencia, $\omega_1 + \omega_2$ y $\omega_1 - \omega_2$.

Referente al modelo cuántico, el fotón de frecuencia $\omega_1 + \omega_2$ simplemente corresponde a una fusión de los dos fotones originales en un nuevo fotón, exactamente como lo hizo en el caso de la GSA donde ambos cuantos tenían la misma frecuencia. La energía y el momento de los fotones anulados se absorben por el fotón resultante. La generación de un fotón por la diferencia $\omega_1 - \omega_2$ es un poco más compleja. La conservación de la energía y el momento requieren que al interaccionar con un fotón ω_2, desaparezca sólo el fotón ω_1 de frecuencia superior, creando así dos nuevos cuantos, uno un fotón ω_2 y el otro un fotón de diferencia.

Como aplicación de este fenómeno, supongamos que batimos, dentro de un cristal no lineal, una onda intensa de frecuencia ω_p llamada *luz de bombeo,* con una *onda señal* débil de frecuencia más baja ω_s que se va a amplificar. La luz de bombeo se convierte así tanto en luz señal como en una onda diferencia, denominada *luz inactiva,* de frecuencia $\omega_i = \omega_p - \omega_s$. Si ahora la luz inactiva se combina con la luz de bombeo, la última se convierte en cantidades adicionales de luz inactiva y señal. De esta manera, tanto las ondas señal como inactiva se amplifican. Se trata en realidad de una extensión en la región de frecuencias ópticas del conocido concepto de *amplificación paramétrica,* cuyo empleo en el espectro de las microondas se remonta a finales de la década de los cuarenta. El primer *oscilador óptico paramétrico,* recogido en la figura 13.70, se puso en funcionamiento en 1965. Las caras de los extremos planos y paralelos de un cristal no lineal (niobato de litio) se recubrieron para formar una cavidad óptica de Fabry-Perot. Las frecuencias de la señal e inactiva (ambas alrededor de 1.000 nm) correspondían a dos de las frecuencias resonantes de la cavidad. Cuando la densidad de flujo de la luz de bombeo fue lo suficientemente alta, se transfirió la energía de ella a los modos señal e inactivo, con el consiguiente refuerzo de esos modos y la emisión de energía radiante coherente en esas frecuencias. Esta transferencia de energía de una onda a otra dentro de un medio sin pérdidas, es un ejemplo típico de los procesos paramétricos. Cambiando el índice de refracción del cristal (mediante la temperatura, el campo eléctrico, etc.) el oscilador se hace sintonizable. Varias configuraciones de oscilador se han desarrollado desde entonces, usando también otros materiales no lineales como niobato de bario y sodio. El oscilador óptico paramétrico es una fuente de energía radiante coherente tipo láser, ampliamente sintonizable desde el IR al UV.

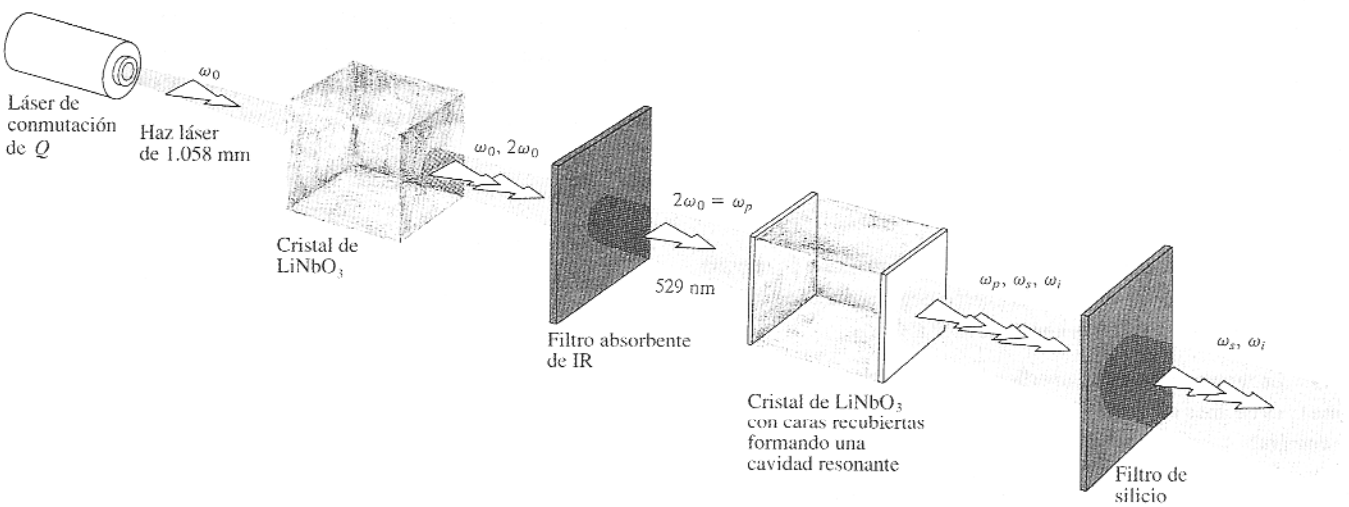


FIGURA 13.70 Oscilador paramétrico óptico. [Según J. A. Giordmaine y R. C. Miller, *Phys. Rev. Letters* **4**, 973 (1965).]

13.4.4 Autoenfoque de la luz

Cuando un dieléctrico está sometido a un campo eléctrico que varía en el espacio, es decir, cuando hay un gradiente del campo, paralelo a **P**, resultará una fuerza interna. Esto produce el efecto de alterar la densidad, cambiando la permitividad y variando así el índice de refracción en medios isótropos tanto lineales como no lineales. Supongamos entonces que enviamos un intenso rayo láser con una distribución transversal gaussiana de densidad de flujo sobre una muestra. Las variaciones inducidas del índice de refracción harán que el medio en la región del rayo funcione como si fuera una lente positiva. Por lo tanto, el haz se contrae, la densidad de flujo aumenta aún más y la contracción continúa en un proceso conocido como **autoenfoque**. El efecto puede sostenerse hasta que el haz llegue a un diámetro límite de filamento (de alrededor de 5×10^{-6} m), reflejándose total e internamente como si se hallara en un elemento de fibra óptica sumergido en el medio. [28]

[28] Véase J. A. Giordmaine, «Nonlinear Optics.» *Phys. Today,* 39 (enero de 1969).

PROBLEMAS

13.1* Después de un tiempo, un cubo de acero basto (10 cm por cada lado) alcanza el equilibrio dentro de un horno a la temperatura de 400°C. Teniendo en cuenta que su emisividad total es 0,97, determine a qué velocidad el cubo irradia energía desde cada cara.

13.2 Una persona tiene por medio una área desnuda total de alrededor de 1,4 m^2 y una temperatura media de la piel de 33° C. Calcule la potencia neta radiada por unidad de área, la irradiancia o, más precisamente, la exitancia, si la emisividad total de la persona es del 97% y el medio tiene temperatura ambiente (20° C). ¿Cuánta energía emana ese cuerpo por segundo?

13.3 Suponga que medimos la exitancia emitida por un pequeño agujero en un horno que resulta ser de 22,8 W/cm^2, usando un pirómetro óptico de algún tipo. Calcule la temperatura interna del horno.

13.4 Si se eleva la temperatura de un objeto parecido a un cuerpo negro de 200 K a 2.000 K, ¿cuánto aumenta la cantidad de energía radiada?

13.5* Su temperatura corpórea media es de alrededor de 33° C. Suponiendo que a esa temperatura su cuerpo radia como un cuerpo negro, ¿en qué longitud de onda emitirá más energía?

13.6* ¿Cuál es la longitud de onda que lleva el máximo de energía cuando un objeto que se parece a un cuerpo negro radia energía dentro de un medio a temperatura ambiente (20° C)?

13.7* La temperatura de la superficie de una estrella azul-blanca de clase O es de unos 40×10^3 K. ¿En qué frecuencia radiará el máximo de energía?

13.8* Al fotografiar el espectro solar usando cohetes para explorar por encima de la atmósfera de la Tierra, resulta que tiene un máximo en su exitancia espectral de aproximadamente 465 nm. Calcule la temperatura de superficie del Sol, suponiendo que es un cuerpo negro. Esta aproximación da un valor que es alrededor de 400 K por encima del verdadero.

13.9* Un objeto parecido a un cuerpo negro emite el máximo de energía por unidad de longitud de onda en el extremo rojo del espectro visible ($\lambda = 680$ nm). ¿Cuál es la temperatura en la superficie?

13.10* La energía por unidad de área por unidad de tiempo por intervalo de longitud de onda emitida por un cuerpo negro a la temperatura T está dado por

$$I_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\left[\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}\right]$$

A una temperatura específica, la potencia radiada total por unidad de área del cuerpo negro es igual al área bajo la curva I_λ frente a λ correspondiente. Usando esta información, deduzca la ley de Stefan-Boltzmann. [*Sugerencia:* para eliminar el exponente cambie las variables en la integral de modo que

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$$

Aproveche el hecho que $\int_0^\infty x^n \frac{dx}{e^x - 1} = \Gamma(n+1)\,\zeta(n+1)$ donde la función gamma viene dada por $\Gamma(n+1) = n!$ y la función zeta de Riemann por $n = 3$ es $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$].

13.11* En el campo atómico, la energía se mide frecuentemente en electrón-voltios. Llegue a la siguiente expresión para la energía de un cuanto de luz en eV cuando la longitud de onda está en nanómetros:

$$\mathscr{E} = \frac{1239.8\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{\lambda}$$

¿Cuál es la energía de un cuanto de luz de 600 nm?

13.12 La figura P.13.12 muestra la *irradiancia espectral* que incide sobre una superficie horizontal, en un día claro, a nivel del mar, con el Sol en el cenit. ¿Cuál es el fotón más energético que podemos esperar encontrar (en eV y J)?

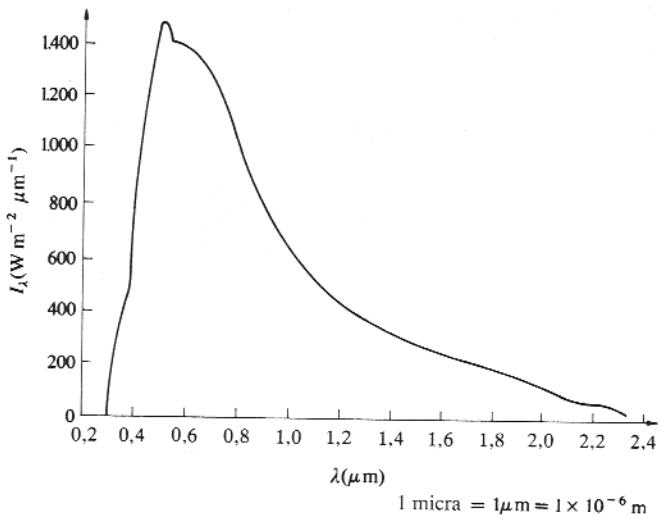


FIGURA P.13.12

13.13* Suponga que tenemos una lámpara de luz amarilla de 100 W (550 nm) a 100 m de distancia de una abertura con obturador de 3 cm de diámetro. Suponiendo que la lámpara tiene un poder de conversión a potencia radiante del 2,5%, ¿cuántos fotones pasarán a través de la abertura si el obturador se abre durante $\frac{1}{1000}$ s?

13.14 La *constante solar* es la densidad de flujo radiante en una superficie esférica centrada en el Sol y que tiene un radio igual al radio orbital medio de la tierra; tiene un valor de 0,133-0.14 W/cm^2. Si suponemos una longitud de onda promedio de unos 700 nm, ¿cuántos fotones, como máximo, llegarán por segundo a cada metro cuadrado de un panel de células solares situado justo arriba de la atmósfera?

13.15 Una cámara de 50,0 cm^3 se llena de gas argón hasta una presión de 20,3 Pa a una temperatura de 0° C. Casi todos los átomos, aparte de un número despreciable, se hallan en su estado fundamental. Un tubo de descarga en torno a la muestra estimula el 1% de los átomos en el mismo estado excitado que tiene una vida media de 1,4 × 10^{-8} s. ¿A qué velocidad máxima —que por supuesto decrecerá en el tiempo— emitirá a continuación el gas los fotones? Suponga que la emisión espontánea es el único mecanismo en función y que el medio es un gas ideal.

13.16* Demuestre que en un sistema de átomos y fotones en equilibrio a una temperatura T, la proporción de las velocidades de transición entre la emisión estimulada y la espontánea viene dada por

$$\left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}\right]$$

13.17* Un sistema atómico en equilibrio térmico absorbe y emite 2,0 eV fotones de luz. Calcule la proporción de las velocidades de transición entre la emisión estimulada y la espontánea a la temperatura de 300 K. Explique las implicaciones de su respuesta. [*Sugerencia*: vea el problema anterior].

13.18 Repita el problema anterior con una temperatura de 30,0 × 10^3 K y confronte los dos resultados.

13.19* En un sistema atómico en equilibrio que tiene dos niveles de energía, demuestre que a una temperatura alta, donde $k_B T >> \mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i$, las densidades en número de los dos estados tienden a ser iguales. [*Sugerencia*: calcule la proporción de las velocidades de transición para la emisión total repecto a la absorción].

13.20* Del espacio llega a la Tierra una radiación de 21 cm procedente de unas grandes nubes de gas de hidrógeno. Suponiendo que la temperatura de fondo del espacio es de 3,0 K, calcule la proporción de las velocidades de transición entre la emisión estimulada y la espontánea y explique el resultado.

13.21* El haz de un láser de He-Ne (λ = 632,8 nm), que tiene inicialmente un diámetro de 3,0 mm, brilla sobre una pared perpendicular a 100 m de distancia. Considerando que el sistema está limitado por difracción, ¿cuál es el ancho del círculo de luz en la pared?

13.22* Determine aproximadamente la cantidad de energía que puede producir un láser de rubí cuyo cristal tiene un diámetro de 5,0 mm y de largo 0,050 m. Suponga que el pulso luminoso dura 5,0 × 10^{-6} s y que la densidad del óxido de aluminio (Al_2O_3) es de 3,7 × 10^3 kg/m^3. Usando los datos de la figura 13.6 y el hecho de que los iones de cromo hacen una transición láser de 1,79 eV, ¿cuánta potencia hay disponible por cada pulso?

13.23 ¿Cuál es la velocidad de transición de los átomos de neón en un láser de He-Ne si la caída de energía por la emisión de 632,8 nm es de 1,96 eV y la salida de potencia es de 1,0 mW?

13.24* Suponiendo que un láser de rubí que funciona a 694,3 nm tiene un ancho de banda con una frecuencia de 50 MHz, ¿cuál es el ancho de línea correspondiente?

13.25* Calcule la diferencia de frecuencia entre los modos axiales adyacentes de una cavidad resonante en un láser de gas típico de 25 cm de largo ($n \approx 1$).

13.26* Un láser de He-Ne tiene un ancho de banda de transición con ensanchamiento Doppler de alrededor de 1,4 GHz a 632,8 nm. Suponiendo que $n = 1{,}0$, calcule la longitud de la cavidad máxima para operación en un modo axial. Haga un esquema del ancho de línea de transición y de los modos de la cavidad correspondientes.

13.27 Demuestre que la intensidad máxima del campo eléctrico $E_{máx}$ que existe para una irradiancia dada I es

$$E_{máx} = 27{,}4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2} \text{ in units of V/m}$$

donde n es el índice de refracción del medio.

13.28* Un láser de He-Ne operando a 632,8 nm, tiene un diámetro interno de la cintura del rayo de 0,60 mm. Calcule el ancho angular total, o divergencia, del rayo

13.29 ¿Cómo sería la distribución de un rayo láser difractado por los tres retículos cruzados de la figura P.13.29?

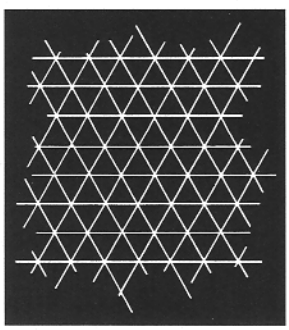
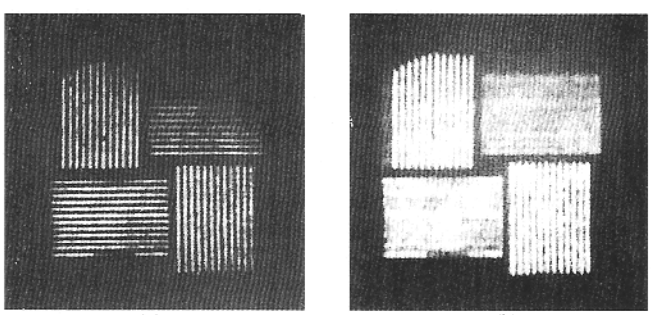


FIGURA P.13.29

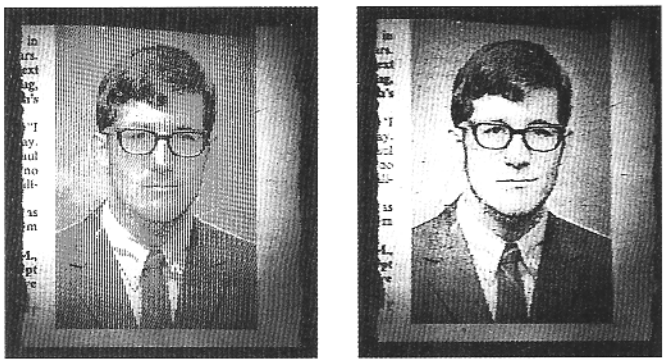
13.30 Haga un esquema aproximado de la figura de difracción de Fraunhofer que aparecería si una transparencia de la figura P.13.30*a* sirviera como objeto. ¿Cómo lo filtraría para obtener la figura P.13.30*b*?



(a) (b)

FIGURA P.13.30 Fotos cedidas por R. A Phillips.

13.31 Repita el problema anterior usando en su lugar la figura P.13.31.



(a) (b)

FIGURA P.13.31 Fotos cedidas por R. A. Phillips.

13.32* Repita el problema anterior usando esta vez la figura P.13.32.

13.33 Volviendo a la figura 13.34, ¿qué tipo de filtro espacial produciría cada uno de las distribuciones que se muestran en la figura P.13.33?

13.34 Refiriéndose a la figura 13.33, demuestre que el aumento transversal del sistema viene dado por $-f_i / f_t$ y trace el diagrama del rayos apropiado. Trace un rayo hacia arriba a través del centro de la primera lente con un ángulo θ con el eje. Del punto donde el rayo cruza Σ_t, trace otro hacia abajo que pase por el centro de la segunda lente con un ángulo Φ. Demuestre que $\Phi/\theta = f_t/f_i$. Usando la noción de frecuencia espacial de la ecuación (11.64), muestre que k_O en el plano del objeto está relacionado con k_I en el plano de la imagen por

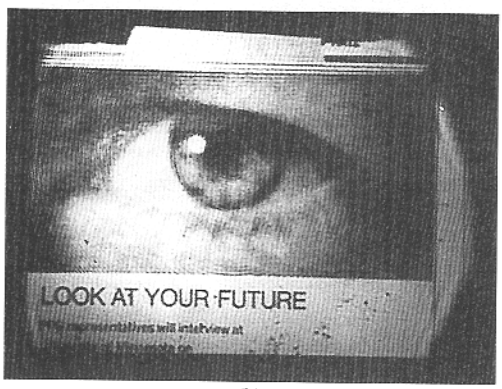
$$k_I = k_O(f_t/f_i)$$

¿Qué significa esto respecto a la dimensión de la imagen cuando $f_i > f_t$? ¿Qué se puede decir sobre los períodos espaciales de los datos de entrada confrontándolos con la imagen de salida?

13.35 Una red de difracción que tiene sólo 50 surcos por cm es el objeto del ordenador óptico que se muestra en la figura 13.33. Si un láser de He-Ne lo ilumina coherentemente con ondas planas de luz verde (543,5 nm) y cada lente tiene una distancia focal de 100 cm, ¿cuál será la distancia entre los puntos de difracción sobre el plano de la transformada?

13.36* Suponga que tiene una red cosenoidal (por ejemplo, una transparencia cuyo perfil de transmisión de *amplitud* es cosenoidal) con un período espacial de 0,01 mm. La red está iluminada por ondas planas cuasimonocromáticas de $\lambda = 500$ nm y la disposición es la misma que en la figura 13.33, donde las longitudes focales de las len-

(a)



(b)

FIGURA P.13.32 Fotos cedidas por R. A Phillips.

tes transformadora y formadora de imagen son respectivamente de 2,0 m y de 1,0 m.

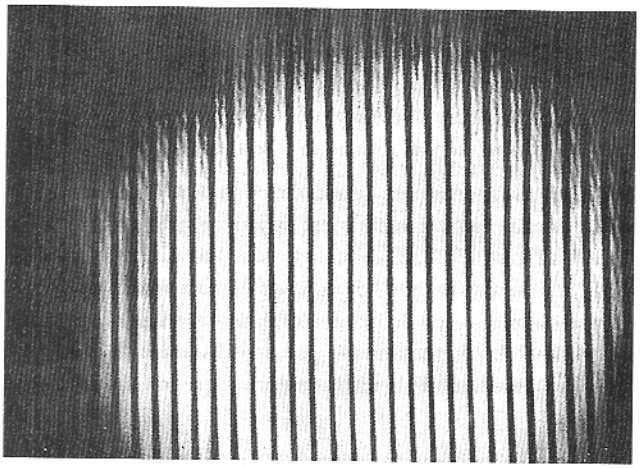
a) Explique la figura resultante y diseñe un filtro que deje pasar *solamente* los términos de primer orden. Detállelo.

b) ¿Cómo aparecerá la imagen en Σ_i con el filtro puesto?

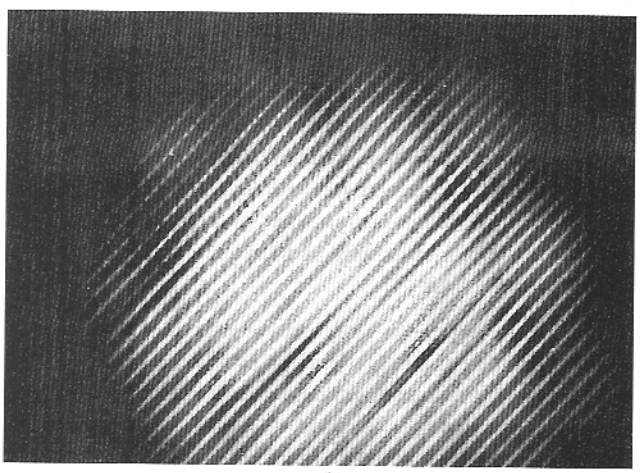
c) ¿Cómo podría dejarse pasar sólo el término *cc* y cómo aparecería la imagen entonces?

13.37 Suponga que insertamos una máscara en el plano de la transformada del problema anterior, la cual lo obscurece todo excepto la contribución de la difracción $m = +1$. ¿Cómo aparecerá la nueva imagen en Σ_i? Explique su razonamiento. Ahora suponiendo que quitamos sólo el término $m = +1$ o $m = -1$, ¿cómo aparecerá esta última imagen?

13.38* Refiriéndose a los dos problemas anteriores con la red cosenoidal orientada horizontalmente, haga un esquema de la amplitud del campo eléctrico a lo largo de y' sin filtrado y represente gráficamente la distribución de la irradiancia de la imagen correspondiente. ¿Cómo aparecerá el campo eléctrico de la imagen si se filtra el término cc? Represéntelo con un diagrama y también haga un diagrama de la nueva distribución de la irradiancia. Comente la frecuencia espacial de la imagen con y sin el filtro puesto. Relacione sus respuestas con la figura 11.13.



(a)



(b)

FIGURA P.13.33 Fotos cedidas por D. Dunon, M. P. Givens y R. E. Hopkins.

13.39 Substituya la red cosenoidal del problema anterior con una red de barras «cuadradas», es decir, con una serie de muchas bandas finas de ancho igual, alternando opacas y transparentes. Luego filtre todos los términos en el plano de la transformada excepto el cero y los

dos puntos de difracción de primer orden, los cuales tendrán unas irradiancias relativas de 1,00, 0,36 y 0,36. Compárelos con las figura 7.21*a* y 7.22 y derive una expresión para la forma general de la distribución de la irradiancia en el plano de la imagen, haciendo también un esquema. ¿Cómo será el sistema de franjas resultante?

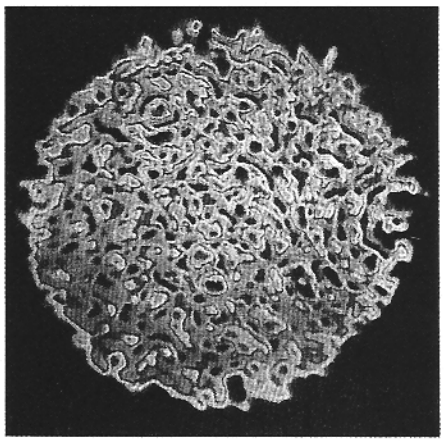
13.40 Una malla cuadrada de alambre fina con 50 alambres por cm está colocada verticalmente sobre el plano objeto del ordenador óptico de la figura 13.32. Si cada lente tiene una distancia focal de 1,00 m, ¿cuál será la longitud de onda de iluminación si los puntos de difracción en el plano de la transformada tienen que estar separados horizontal y verticalmente por una distancia de 2,0 mm? ¿Cuál será el espaciado de la malla conforme aparece en el plano de la imagen?

13.41* Imagine que hay una máscara opaca con una serie de agujeros circulares ordenados, todos del mismo tamaño y todos colocados como si se tratara de los ángulos de las casillas de un tablero de ajedrez. Ahora suponga que nuestro robot perforador enloquezca y haga unos agujeros adicionales, esparcidos al azar, sobre toda la máscara. Si consideramos esta pantalla como el objeto del problema 13.39, ¿cómo aparecerá la figura de difracción? Suponiendo que entre un agujero ordenado y el siguiente hay una distancia de 0,1 mm en el objeto, ¿cuál será la frecuencia espacial de los puntos correspondientes en la imagen? Describa también un filtro que elimine los agujeros al azar de la imagen final.

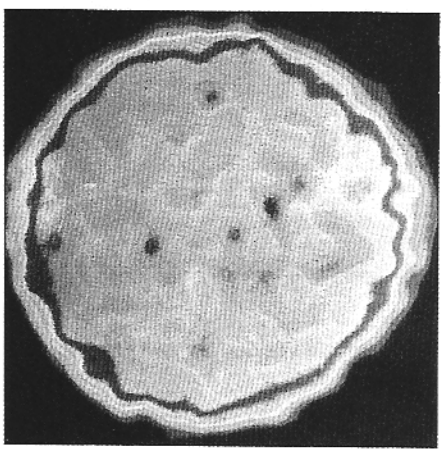
13.42* Suponga que tenemos una transparencia fotográfica de gran tamaño que contiene la fotografía de un estudiante hecha por una serie regular de pequeños puntos circulares, todos del mismo tamaño, pero cada uno con su propia densidad, de manera que deja pasar un haz luminoso con una amplitud de campo particular. Considerando que una onda plana ilumina la transparencia, analice la idea de representar la amplitud del campo eléctrico justo detrás de ella como el producto (promedio) de una serie regular bidimensional de funciones cilíndricas (figura 11.4, pág. 526) y la función continua de la fotografía bidimensional: las primeras como una cama de faquir de clavos y la segunda como una fotografía normal. Aplicando el teorema de la convolución en frecuencia, ¿cómo aparecerá la distribución luminosa en el plano de la transformada? ¿Y cómo podría filtrarse para producir un imagen continua de salida?

13.43* La disposición que se recoge en la figura P.13.43 se usa para convertir un haz láser colimado en una onda esférica. El agujero de alfiler rectifica el rayo, es decir, elimina los efectos de difracción debidos al polvo y a otras partículas en la lente. ¿Cómo lo consigue?

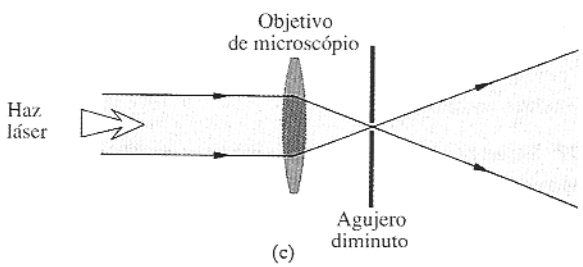
13.44 ¿Qué sucedería a la distribución moteada si un haz láser se proyectara sobre una suspensión como leche en lugar de una pared lisa?



(a)



(b)



(c)

FIGURA P.13.43 (*a*) y (*b*). Haz láser de gran potencia antes y después del filtrado espacial. (Foto cedida por la Lawrence Livermore National Laboratory.)

APÉNDICE 1
La teoría electromagnética

ECUACIONES DE MAXWELL EN FORMA DIFERENCIAL

El conjunto de expresiones integrales que se conocen como ecuaciones de Maxwell son:

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \qquad [3.5]$$

$$\oint_C \frac{\mathbf{B}}{\mu}\cdot d\mathbf{l} = \iint_A \left(\mathbf{J} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} \qquad [3.13]$$

$$\oiint_A \epsilon\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho\, dV \qquad [3.7]$$

y

$$\oiint_A \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad [3.9]$$

donde las unidades, como de costumbre, están en SI.

Las ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en una forma diferencial que es más útil para deducir los aspectos ondulatorios del campo electromagnético. Esta transición puede lograrse fácilmente recurriendo a dos teoremas del cálculo vectorial, a saber, el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\oiint_A \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\, dV \qquad (A1.1)$$

y el teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \iint_A \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad (A1.2)$$

Aquí la cantidad **F** no es un vector fijo, sino una función que depende de las variables de posición. Es una regla que asocia a un vector único, por ejemplo, en coordenadas cartesianas, $\mathbf{F}(x, y, z)$ con cada punto (x, y, z) en el espacio. Las funciones con valores vectoriales de esta clase, tales como **E** y **B** se conocen como campos vectoriales.

Aplicando el teorema de Stokes a la intensidad de campo eléctrico tenemos

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \iint \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \qquad (A1.3)$$

Al comparar esto con la ecuación (3.5) se deduce que

$$\iint \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = -\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \qquad (A1.4)$$

Este resultado debe ser cierto para todas las superficies limitadas por la trayectoria C, lo cual se da solamente si los integrandos son iguales entre sí, es decir, si

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (A1.5)$$

Una aplicación similar a **B** del teorema de Stokes, usando la ecuación (3.13) da como resultado

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\left(\mathbf{J} + \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \qquad (A1.6)$$

El teorema de la divergencia de Gauss aplicado a la intensidad del campo eléctrico proporciona

$$\oiint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint \nabla\cdot\mathbf{E}\, dV \qquad (A1.7)$$

Si recurrimos a la ecuación (3.7) esto queda

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\epsilon}\iiint_V \rho\, dV \qquad (A1.8)$$

y como esto tiene que valer para cualquier volumen (es decir, para un dominio cerrado arbitrario) los dos integrandos deben ser iguales. Por consiguiente, en cualquier punto (x, y, z, t) en el espacio-tiempo

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \qquad (A1.9)$$

De la misma manera, el teorema de la divergencia de Gauss aplicado al campo **B** y combinado con la ecuación 3.9 da

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad (A1.10)$$

Las ecuaciones (A1.5), (A1.6), (A1.9) y (A1.10) son las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Remítanse a las ecuaciones (3.18) hasta la (3.21) para el caso simple de coordenadas cartesianas y *espacio libre* ($\rho = J = 0, \epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$).

ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Para deducir la ecuación de onda electromagnética en su forma más general, debemos considerar de nuevo la presencia de algún medio. Vimos en la sección 3.5.1 que es preciso introducir el *vector de polarización* **P** que es una medida del comportamiento general del medio ya que es el momento dipolar eléctrico resultante por unidad de volumen. Como el campo dentro del material ha sido alterado, tenemos que definir una nueva cantidad, el *desplazamiento* **D**:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{A1.11}$$

Claramente entonces, $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{D}}{\epsilon_0} - \dfrac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$

El campo eléctrico interno **E** es la diferencia entre el campo $\mathbf{D}/\epsilon_0$, que existiría en la ausencia de polarización, y el campo $\mathbf{P}/\epsilon_0$ que surge de la polarización.

Para un dieléctrico isótropo, lineal, homogéneo, **P** y **E** están en la misma dirección y son mutuamente proporcionales. Se deduce que **D** es, por consiguiente, proporcional a **E**:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{A1.12}$$

Al igual que **E**, **D** se extiende en todo el espacio y de ninguna manera está limitado a la región ocupada por el dieléctrico como ocurre con **P**. Las líneas de **D** comienzan y terminan en cargas móviles, libres. Las de **E** comienzan y terminan bien sea en cargas *libres* o en cargas de polarización ligadas. Si no hay carga libre presente, como podría ocurrir en la proximidad de un dieléctrico polarizado o en el espacio libre, las líneas de **D** se cierran en sí mismas.

Ya que, en general, la respuesta de los medios ópticos a los campos **B** difiere tan sólo ligeramente de la del vacío, no necesitamos describir el proceso en detalle. Basta decir que el material quedará polarizado. Podemos definir una *polarización magnética* o vector de *magnetización* **M** como el momento dipolar magnético por unidad de volumen. A fin de estudiar la influencia de un medio magnéticamente polarizado, introducimos un vector auxiliar **H**, tradicionalmente conocido como *intensidad de campo magnético*

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{M} \tag{A1.13}$$

Para un medio isótropo lineal (no ferromagnético) y homogéneo, **B** y **H** son paralelos y proporcionales:

$$\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} \tag{A1.14}$$

Junto con las ecuaciones (A1.12) y (A1.14) hay una *ecuación constitutiva* más,

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \tag{A1.15}$$

Conocida como *Ley de Ohm*, es una afirmación de una regla determinada experimentalmente que es válida para conductores a temperaturas constantes. La intensidad del campo eléctrico y, por consiguiente, la fuerza que actúa sobre cada electrón en un conductor, determina el flujo de carga. La constante de proporcionalidad que relaciona **E** y **J** es la conductividad de un medio particular, σ.

Consideremos el entorno muy general de un medio isótropo, homogéneo, lineal (no ferroeléctrico ni ferromagnético), que se halla físicamente en reposo. Utilizando las relaciones constitutivas, las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir como

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon \tag{A1.9}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{A1.10}$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{A1.5}$$

y

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu\sigma\mathbf{E} + \mu\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{A1.16}$$

Si estas expresiones de alguna manera deben proporcionar una ecuación de onda (2.61), es mejor que formemos las segundas derivadas con respecto a las variables espaciales. Tomando el rotacional de la ecuación (A1.16) obtenemos

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \mu\sigma(\nabla\times\mathbf{E}) + \mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E}) \tag{A1.17}$$

donde, ya que **E** se supone que es una función que exhibe un buen comportamiento, las derivadas respecto al espacio y al tiempo pueden intercambiarse. La ecuación (A1.5) puede reemplazarse para obtener la necesaria segunda derivada con respecto al tiempo:

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{A1.18}$$

El triple producto vectorial se puede simplificar aprovechando la identidad de operadores

$$\nabla\times(\nabla\times) = \nabla(\nabla\cdot) - \nabla^2 \tag{A1.19}$$

de tal modo que

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \nabla^2\mathbf{B}$$

donde en coordenadas cartesianas

$$(\nabla\cdot\nabla)\mathbf{B} = \nabla^2\mathbf{B} \equiv \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial z^2}$$

Como la divergencia de **B** es cero, la ecuación (A1.18) queda

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{A1.20}$$

Una ecuación similar se satisface por la intensidad de campo eléctrico. Siguiendo esencialmente el mismo procedimiento anterior, tomando el vector rotacional de la ecuación (A1.5)

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})$$

Eliminando **B** esto queda

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

y entonces aprovechando la ecuación (A1.19) llegamos a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla(\rho/\epsilon)$$

habiendo utilizado el hecho de

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \nabla(\rho/\epsilon)$$

Para un medio no cargado ($\rho = 0$) y

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad \text{(A1.21)}$$

Las ecuaciones (A1.20) y (A1.21) se denominan *ecuaciones de telegrafía.* [1]

[1] Para un par de cables paralelos que pueden servir como líneas telegráficas, la resistencia finita del alambre produce una pérdida de potencia y calentamiento de Joule. Una onda electromagnética que avanza a lo largo de la línea tiene cada vez menos energía disponible. Las derivadas de primer orden respecto del tiempo en las ecuaciones (A1.20) y (A1.21) aparecen por la corriente de conducción y llevan a la disipación o al amortiguamiento.

En medios no conductores $\sigma = 0$, y estas ecuaciones quedan

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(A1.22)}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(A1.23)}$$

y similarmente

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(A1.24)}$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{D} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(A1.25)}$$

En el medio especial no conductor del vacío (espacio libre) donde

$$\rho = 0 \qquad \sigma = 0 \qquad K_e = 1 \qquad K_m = 1$$

estas ecuaciones quedan simplemente

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \text{(A1.26)}$$

y

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \text{(A1.27)}$$

Ambas expresiones describen campos dependientes del espacio-tiempo acoplados y ambas tienen la forma de la ecuación diferencial de onda (véase sección 3.2 para más información).

APÉNDICE 2
La teoría de difracción de Kirchhoff

Para resolver la ecuación de Helmholtz [ecuación (10.113)] supongamos que tenemos dos funciones escalares U_1 y U_2 para las que el Teorema de Green es

$$\iiint_V (U_1\nabla^2 U_2 - U_2\nabla^2 U_1)\,dV$$

$$= \oiint_S (U_1\nabla U_2 - U_2\nabla U_1)\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{(A2.1)}$$

Está claro que si U_1 y U_2 son soluciones de la ecuación de Helmholtz, es decir, si

$$\nabla^2 U_1 + k^2 U_1 = 0$$

y

$$\nabla^2 U_2 + k^2 U_2 = 0$$

entonces

$$\oiint_S (U_1\nabla U_2 - U_2\nabla U_1)\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{(A2.2)}$$

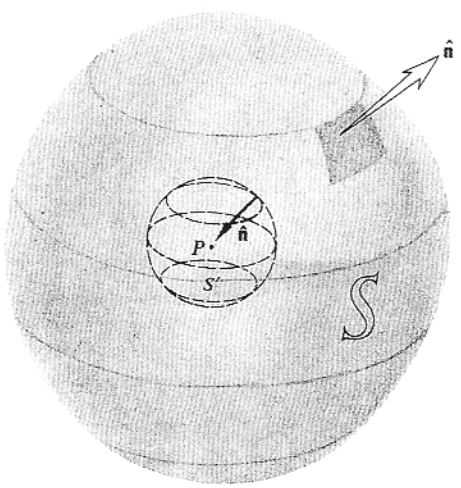


FIGURA A2.1

Sea $U_1 = \tilde{\mathscr{E}}$, la parte espacial de una perturbación óptica escalar no especificada [ecuación (10.112)]. Y sea

$$U_2 = \frac{e^{ikr}}{r}$$

donde r se mide desde un punto P. Ambas selecciones satisfacen claramente la ecuación de Helmholtz. Hay una singularidad en el punto P, donde $r = 0$, de tal modo que la rodeamos con una pequeña esfera a fin de excluir a P de la región encerrada por S (véase fig. A2.1). La ecuación (A2.2) queda ahora

$$\oiint_S \left[\tilde{\mathscr{E}}\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\nabla\tilde{\mathscr{E}}\right]\cdot d\mathbf{S}$$

$$+ \oiint_{S'} \left[\tilde{\mathscr{E}}\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\nabla\tilde{\mathscr{E}}\right]\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{(A2.3)}$$

Ahora, desarrollemos la parte de la integral que corresponde a S'. Sobre la pequeña esfera, la normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ apunta hacia el origen en P, y

$$\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)e^{ikr}\hat{\mathbf{n}}$$

ya que el gradiente está dirigido radialmente hacia afuera. En términos del ángulo sólido ($dS = r^2\,d\Omega$) medido en P, la integral sobre S' queda

$$\oiint_{S'} \left(\tilde{\mathscr{E}} - ik\tilde{\mathscr{E}}r + r\frac{\partial\tilde{\mathscr{E}}}{\partial r}\right)e^{ikr}\,d\Omega \qquad \text{(A2.4)}$$

donde $\nabla\tilde{\mathscr{E}}\cdot d\mathbf{S} = -(\partial\tilde{\mathscr{E}}/\partial r)r^2\,d\Omega$. A medida que la esfera que rodea a P se encoge, $r \to 0$ en S' y $\exp(ikr) \to 1$. Debido a la continuidad de E su valor en cualquier punto en S' se acerca a su valor en P, es decir, $\tilde{\mathscr{E}}_p$. Los últimos dos términos en la ecuación (A2.4) tienden a cero y la integral queda $4\pi\tilde{\mathscr{E}}_p$. Finalmente, la ecuación (A2.3) queda

$$\tilde{\mathscr{E}}_p = \frac{1}{4\pi}\left[\oiint_S \frac{e^{ikr}}{r}\nabla\tilde{\mathscr{E}}\cdot d\mathbf{S} - \oiint_S \tilde{\mathscr{E}}\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\cdot d\mathbf{S}\right] \qquad \text{[10.114]}$$

que se denomina *teorema integral de Kirchhoff*.

TABLA 1

La función Sinc

(Sen u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	1,000000	0,999983	0,999933	0,999850	0,999733	0,999583	0,999400	0,999184	0,998934	0,998651
0,1	0,998334	0,997985	0,997602	0,997186	0,996737	0,996254	0,995739	0,995190	0,994609	0,993994
0,2	0,993347	0,992666	0,991953	0,991207	0,990428	0,989616	0,988771	0,987894	0,986984	0,986042
0,3	0,985067	0,984060	0,983020	0,981949	0,980844	0,979708	0,978540	0,977339	0,976106	0,974842
0,4	0,973546	0,972218	0,970858	0,969467	0,968044	0,966590	0,965105	0,963588	0,962040	0,960461
0,5	0,958851	0,957210	0,955539	0,953836	0,952104	0,950340	0,948547	0,946723	0,944869	0,942985
0,6	0,941071	0,939127	0,937153	0,935150	0,933118	0,931056	0,928965	0,926845	0,924696	0,922518
0,7	0,920311	0,918076	0,915812	0,913520	0,911200	0,908852	0,906476	0,904072	0,901640	0,899181
0,8	0,896695	0,894182	0,891641	0,889074	0,886480	0,883859	0,881212	0,878539	0,875840	0,873114
0,9	0,870363	0,867587	0,864784	0,861957	0,859104	0,856227	0,853325	0,850398	0,847446	0,844471
1,0	0,841471	0,838447	0,835400	0,832329	0,829235	0,826117	0,822977	0,819814	0,816628	0,813419
1,1	0,810189	0,806936	0,803661	0,800365	0,797047	0,793708	0,790348	0,786966	0,783564	0,780142
1,2	0,776699	0,773236	0,769754	0,766251	0,762729	0,759188	0,755627	0,752048	0,748450	0,744833
1,3	0,741199	0,737546	0,733875	0,730187	0,726481	0,722758	0,719018	0,715261	0,711488	0,707698
1,4	0,703893	0,700071	0,696234	0,692381	0,688513	0,684630	0,680732	0,676819	0,672892	0,668952
1,5	0,664997	0,661028	0,657046	0,653051	0,649043	0,645022	0,640988	0,636942	0,632885	0,628815
1,6	0,624734	0,620641	0,616537	0,612422	0,608297	0,604161	0,600014	0,595858	0,591692	0,587517
1,7	0,583332	0,579138	0,574936	0,570725	0,566505	0,562278	0,558042	0,553799	0,549549	0,545291
1,8	0,541026	0,536755	0,532478	0,528194	0,523904	0,519608	0,515307	0,511001	0,506689	0,502373
1,9	0,498053	0,493728	0,489399	0,485066	0,480729	0,476390	0,472047	0,467701	0,463353	0,459002
2,0	0,454649	0,450294	0,445937	0,441579	0,437220	0,432860	0,428499	0,424137	0,419775	0,415414
2,1	0,411052	0,406691	0,402330	0,397971	0,393612	0,389255	0,384900	0,380546	0,376194	0,371845
2,2	0,367498	0,363154	0,358813	0,354475	0,350141	0,345810	0,341483	0,337161	0,332842	0,328529
2,3	0,324220	0,319916	0,315617	0,311324	0,307036	0,302755	0,298479	0,294210	0,289947	0,285692
2,4	0,281443	0,277202	0,272967	0,268741	0,264523	0,260312	0,256110	0,251916	0,247732	0,243556
2,5	0,239389	0,235231	0,231084	0,226946	0,222817	0,218700	0,214592	0,210495	0,206409	0,202334
2,6	0,198270	0,194217	0,190176	0,186147	0,182130	0,178125	0,174132	0,170152	0,166185	0,162230
2,7	0,158289	0,154361	0,150446	0,146546	0,142659	0,138786	0,134927	0,131083	0,127253	0,123439
2,8	0,119639	0,115854	0,112084	0,108330	0,104592	0,100869	0,097163	0,093473	0,089798	0,086141
2,9	0,082500	0,078876	0,075268	0,071678	0,068105	0,064550	0,061012	0,057492	0,053990	0,050506
3,0	0,047040	0,043592	0,040163	0,036753	0,033361	0,029988	0,026635	0,023300	0,019985	0,016689
3,1	0,013413	0,010157	0,006920	0,003704	0,000507	−0,002669	−0,005825	−0,008960	−0,012075	−0,015169
3,2	−0,018242	−0,021294	−0,024325	−0,027335	−0,030324	−0,033291	−0,036236	−0,039160	−0,042063	−0,044943
3,3	−0,047802	−0,050638	−0,053453	−0,056245	−0,059014	−0,061762	−0,064487	−0,067189	−0,069868	−0,072525
3,4	−0,075159	−0,077770	−0,080358	−0,082923	−0,085465	−0,087983	−0,090478	−0,092950	−0,095398	−0,097823
3,5	−0,100224	−0,102601	−0,104955	−0,107285	−0,109591	−0,111873	−0,114131	−0,116365	−0,118575	−0,120761
3,6	−0,122922	−0,125060	−0,127173	−0,129262	−0,131326	−0,133366	−0,135382	−0,137373	−0,139339	−0,141282
3,7	−0,143199	−0,145092	−0,146960	−0,148803	−0,150622	−0,152416	−0,154186	−0,155930	−0,157650	−0,159345
3,8	−0,161015	−0,162661	−0,164281	−0,165877	−0,167448	−0,168994	−0,170515	−0,172011	−0,173482	−0,174929
3,9	−0,176350	−0,177747	−0,179119	−0,180466	−0,181788	−0,183086	−0,184358	−0,185606	−0,186829	−0,188027

TABLA 1 (*continúa*)

(Sen u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,0	−0,189201	−0,190349	−0,191473	−0,192573	−0,193647	−0,194698	−0,195723	−0,196724	−0,197700	−0,198652
4,1	−0,199580	−0,200483	−0,201361	−0,202216	−0,203046	−0,203851	−0,204633	−0,205390	−0,206124	−0,206833
4,2	−0,207518	−0,208179	−0,208817	−0,209430	−0,210020	−0,210586	−0,211128	−0,211647	−0,212142	−0,212614
4,3	−0,213062	−0,213487	−0,213888	−0,214267	−0,214622	−0,214955	−0,215264	−0,215550	−0,215814	−0,216055
4,4	−0,216273	−0,216469	−0,216642	−0,216793	−0,216921	−0,217028	−0,217112	−0,217174	−0,217214	−0,217232
4,5	−0,217229	−0,217204	−0,217157	−0,217089	−0,217000	−0,216889	−0,216757	−0,216604	−0,216430	−0,216235
4,6	−0,216020	−0,215784	−0,215527	−0,215250	−0,214953	−0,214635	−0,214298	−0,213940	−0,213563	−0,213166
4,7	−0,212750	−0,212314	−0,211858	−0,211384	−0,210890	−0,210377	−0,209846	−0,209296	−0,208727	−0,208140
4,8	−0,207534	−0,206911	−0,206269	−0,205609	−0,204932	−0,204236	−0,023524	−0,202794	−0,202046	−0,201282
4,9	−0,200501	−0,199702	−0,198887	−0,198056	−0,197208	−0,196344	−0,195464	−0,194568	−0,193656	−0,192728
5,0	−0,191785	−0,190826	−0,189853	−0,188864	−0,187860	−0,186841	−0,185808	−0,184760	−0,183699	−0,182622
5,1	−0,181532	−0,180428	−0,179311	−0,178179	−0,177035	−0,175877	−0,174706	−0,173522	−0,172326	−0,171117
5,2	−0,169895	−0,168661	−0,167415	−0,166158	−0,164888	−0,163607	−0,162314	−0,161010	−0,159695	−0,158369
5,3	−0,157032	−0,155684	−0,154326	−0,152958	−0,151579	−0,150191	−0,148792	−0,147384	−0,145967	−0,144540
5,4	−0,143105	−0,141660	−0,140206	−0,138744	−0,137273	−0,135794	−0,134307	−0,132812	−0,131309	−0,129798
5,5	−0,128280	−0,126755	−0,125222	−0,123683	−0,122137	−0,120584	−0,119024	−0,117459	−0,115887	−0,114310
5,6	−0,112726	−0,111137	−0,109543	−0,107943	−0,106338	−0,104728	−0,103114	−0,101495	−0,099871	−0,098243
5,7	−0,096611	−0,094976	−0,093336	−0,091693	−0,090046	−0,088396	−0,086743	−0,085087	−0,083429	−0,081768
5,8	−0,080104	−0,078438	−0,076770	−0,075100	−0,073428	−0,071755	−0,070080	−0,068404	−0,066726	−0,065048
5,9	−0,063369	−0,061689	−0,060009	−0,058329	−0,056648	−0,054967	−0,053287	−0,051606	−0,049927	−0,048248
6,0	−0,046569	−0,044892	−0,043216	−0,041540	−0,039867	−0,038195	−0,036524	−0,034856	−0,033189	−0,031525
6,1	−0,029863	−0,028203	−0,026546	−0,024892	−0,023240	−0,021592	−0,019947	−0,018305	−0,016667	−0,015032
6,2	−0,013402	−0,011775	−0,010152	−0,008533	−0,006919	−0,005309	−0,003703	−0,002103	−0,000507	0,001083
6,3	0,002669	0,004249	0,005824	0,007393	0,008956	0,010514	0,012066	0,013612	0,015151	0,016684
6,4	0,018211	0,019731	0,021244	0,022751	0,024250	0,025743	0,027228	0,028706	0,030177	0,031640
6,5	0,033095	0,034543	0,035983	0,037414	0,038838	0,040253	0,041661	0,043059	0,044449	0,045831
6,6	0,047203	0,048567	0,049922	0,051268	0,052604	0,053931	0,055249	0,056558	0,057857	0,059146
6,7	0,060425	0,061695	0,062955	0,064204	0,065444	0,066673	0,067892	0,069101	0,070299	0,071487
6,8	0,072664	0,073830	0,074986	0,076130	0,077264	0,078386	0,079498	0,080598	0,081688	0,082765
6,9	0,083832	0,084887	0,085930	0,086962	0,087982	0,088991	0,089987	0,090972	0,091945	0,092906
7,0	0,093855	0,094792	0,095717	0,096629	0,097530	0,098418	0,099293	0,100157	0,101008	0,101846
7,1	0,102672	0,103485	0,104286	0,105074	0,105849	0,106611	0,107361	0,108098	0,108822	0,109533
7,2	0,110232	0,110917	0,111589	0,112249	0,112895	0,113528	0,114149	0,114756	0,115350	0,115931
7,3	0,116498	0,117053	0,117594	0,118122	0,118637	0,119138	0,119627	0,120102	0,120563	0,121012
7,4	0,121447	0,121869	0,122277	0,122673	0,123055	0,123423	0,123779	0,124121	0,124449	0,124765
7,5	0,125067	0,125355	0,125631	0,125893	0,126142	0,126378	0,126600	0,126809	0,127005	0,127188
7,6	0,127358	0,127514	0,127658	0,127788	0,127905	0,128009	0,128100	0,128178	0,128243	0,128295
7,7	0,128334	0,128360	0,128373	0,128373	0,128361	0,128335	0,128297	0,128247	0,128183	0,128107
7,8	0,128018	0,127917	0,127803	0,127677	0,127539	0,127388	0,127224	0,127049	0,126861	0,126661
7,9	0,126448	0,126224	0,125988	0,125739	0,125479	0,125207	0,124923	0,124627	0,124320	0,124000

TABLA 1 (*continúa*)

(Sen u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
8,0	0,123670	0,123328	0,122974	0,122609	0,122232	0,121845	0,121446	0,121036	0,120615	0,120183
8,1	0,119739	0,119286	0,118821	0,118345	0,117859	0,117363	0,116855	0,116338	0,115810	0,115272
8,2	0,114723	0,114165	0,113596	0,113018	0,112429	0,111831	0,111223	0,110605	0,109978	0,109341
8,3	0,108695	0,108040	0,107376	0,106702	0,106019	0,105327	0,104627	0,103918	0,103200	0,102473
8,4	0,101738	0,100994	0,100243	0,099483	0,098714	0,097938	0,097154	0,096362	0,095562	0,094755
8,5	0,093940	0,093117	0,092287	0,091450	0,090606	0,089755	0,088896	0,088031	0,087159	0,086280
8,6	0,085395	0,084503	0,083605	0,082701	0,081790	0,080874	0,079951	0,079023	0,078089	0,077149
8,7	0,076203	0,075253	0,074296	0,073335	0,072369	0,071397	0,070421	0,069439	0,068453	0,067463
8,8	0,066468	0,065468	0,064465	0,063457	0,062445	0,061429	0,060410	0,059386	0,058359	0,057328
8,9	0,056294	0,055257	0,054217	0,053173	0,052127	0,051077	0,050025	0,048970	0,047913	0,046853
9,0	0,045791	0,044727	0,043660	0,042592	0,041521	0,040449	0,039375	0,038300	0,037223	0,036145
9,1	0,035066	0,033985	0,032904	0,031821	0,030738	0,029654	0,028569	0,027484	0,026399	0,025313
9,2	0,024227	0,023141	0,022055	0,020970	0,019884	0,018799	0,017714	0,016630	0,015547	0,014464
9,3	0,013382	0,012301	0,011222	0,010143	0,009066	0,007990	0,006916	0,005843	0,004772	0,003703
9,4	0,002636	0,001570	0,000507	−0,000554	−0,001612	−0,002669	−0,003722	−0,004774	−0,005822	−0,006868
9,5	−0,007911	−0,008950	−0,009987	−0,011021	−0,012051	−0,013078	−0,014101	−0,015121	−0,016138	−0,017150
9,6	−0,018159	−0,019164	−0,020165	−0,021161	−0,022154	−0,023142	−0,024126	−0,025106	−0,026081	−0,027051
9,7	−0,028017	−0,028977	−0,029933	−0,030884	−0,031830	−0,032771	−0,033707	−0,034637	−0,035562	−0,036482
9,8	−0,037396	−0,038304	−0,039207	−0,040104	−0,040995	−0,041881	−0,042760	−0,043633	−0,044500	−0,045361
9,9	−0,046216	−0,047064	−0,047906	−0,048741	−0,049570	−0,050392	−0,051208	−0,052017	−0,052819	−0,053614
10,0	−0,054402	−0,055183	−0,055957	−0,056724	−0,057484	−0,058237	−0,058982	−0,059720	−0,060450	−0,061173
10,1	−0,061888	−0,062596	−0,063296	−0,063988	−0,064673	−0,065350	−0,066019	−0,066680	−0,067333	−0,067978
10,2	−0,068615	−0,069244	−0,069865	−0,070477	−0,071082	−0,071678	−0,072266	−0,072845	−0,073416	−0,073979
10,3	−0,074533	−0,075078	−0,075615	−0,076143	−0,076663	−0,077174	−0,077677	−0,078170	−0,078655	−0,079131
10,4	−0,079599	−0,080057	−0,080507	−0,080947	−0,081379	−0,081802	−0,082216	−0,082620	−0,083016	−0,083403
10,5	−0,083781	−0,084149	−0,084509	−0,084859	−0,085200	−0,085532	−0,085855	−0,086169	−0,086473	−0,086768
10,6	−0,087054	−0,087331	−0,087599	−0,087857	−0,088106	−0,088346	−0,088576	−0,088797	−0,089009	−0,089212
10,7	−0,089405	−0,089589	−0,089764	−0,089929	−0,090085	−0,090232	−0,090370	−0,090498	−0,090617	−0,090727
10,8	−0,090827	−0,090919	−0,091001	−0,091073	−0,091137	−0,091191	−0,091236	−0,091272	−0,091299	−0,091316
10,9	−0,091324	−0,091324	−0,091314	−0,091295	−0,091267	−0,091229	−0,091183	−0,091128	−0,091064	−0,090990
11,0	−0,090908	−0,090817	−0,090717	−0,090608	−0,090490	−0,090364	−0,090228	−0,090084	−0,089931	−0,089770
11,1	−0,089599	−0,089420	−0,089233	−0,089037	−0,088832	−0,088619	−0,088397	−0,088167	−0,087929	−0,087682
11,2	−0,087427	−0,087163	−0,086891	−0,086612	−0,086324	−0,086027	−0,085723	−0,085411	−0,085091	−0,084763
11,3	−0,084426	−0,084083	−0,083731	−0,083371	−0,083004	−0,082630	−0,082247	−0,081857	−0,081460	−0,081055
11,4	−0,080643	−0,080223	−0,079796	−0,079362	−0,078921	−0,078473	−0,078017	−0,077555	−0,077086	−0,076609
11,5	−0,076126	−0,075636	−0,075140	−0,074637	−0,074127	−0,073611	−0,073088	−0,072559	−0,072023	−0,071481
11,6	−0,070934	−0,070379	−0,069819	−0,069253	−0,068681	−0,068103	−0,067519	−0,066929	−0,066334	−0,065733
11,7	−0,065127	−0,064515	−0,063898	−0,063275	−0,062647	−0,062014	−0,061376	−0,060733	−0,060084	−0,059431
11,8	−0,058773	−0,058111	−0,057443	−0,056771	−0,056095	−0,055414	−0,054728	−0,054039	−0,053345	−0,052646
11,9	−0,051944	−0,051238	−0,050528	−0,049814	−0,049096	−0,048375	−0,047650	−0,046921	−0,046189	−0,045453

TABLA 1 (*continúa*)

(Sen u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
12,0	−0,044714	−0,043972	−0,043227	−0,042479	−0,041727	−0,040973	−0,040216	−0,039456	−0,038694	−0,037929
12,1	−0,037161	−0,036391	−0,035618	−0,034844	−0,034067	−0,033288	−0,032506	−0,031723	−0,030938	−0,030152
12,2	−0,029363	−0,028573	−0,027781	−0,026988	−0,026193	−0,025398	−0,024600	−0,023802	−0,023003	−0,022202
12,3	−0,021401	−0,020599	−0,019796	−0,018992	−0,018188	−0,017384	−0,016578	−0,015773	−0,014967	−0,014161
12,4	−0,013355	−0,012549	−0,011743	−0,010937	−0,010131	−0,009326	−0,008521	−0,007716	−0,006912	−0,006109
12,5	−0,005306	−0,004504	−0,003702	−0,002902	−0,002103	−0,001304	−0,000507	0,000289	0,001083	0,001877
12,6	0,002668	0,003459	0,004248	0,005035	0,005820	0,006603	0,007385	0,008164	0,008942	0,009717
12,7	0,010491	0,011262	0,012030	0,012797	0,013560	0,014321	0,015080	0,015836	0,016589	0,017339
12,8	0,018087	0,018831	0,019572	0,020311	0,021046	0,021778	0,022506	0,023231	0,023953	0,024671
12,9	0,025386	0,026097	0,026804	0,027507	0,028207	0,028903	0,029594	0,030282	0,030966	0,031645
13,0	0,032321	0,032992	0,033658	0,034321	0,034978	0,035632	0,036281	0,036925	0,037564	0,038199
13,1	0,038829	0,039454	0,040075	0,040690	0,041300	0,041905	0,042506	0,043101	0,043690	0,044275
13,2	0,044854	0,045428	0,045996	0,046559	0,047117	0,047669	0,048215	0,048756	0,049291	0,049820
13,3	0,050344	0,050861	0,051373	0,051879	0,052379	0,052873	0,053361	0,053843	0,054319	0,054788
13,4	0,055252	0,055709	0,056160	0,056605	0,057043	0,057476	0,057901	0,058321	0,058733	0,059140
13,5	0,059540	0,059933	0,060320	0,060700	0,061073	0,061440	0,061800	0,062154	0,062500	0,062840
13,6	0,063174	0,063500	0,063820	0,064132	0,064438	0,064737	0,065029	0,065314	0,065593	0,065864
13,7	0,066128	0,066385	0,066636	0,066879	0,067115	0,067344	0,067566	0,067781	0,067989	0,068190
13,8	0,068384	0,068570	0,068750	0,068922	0,069087	0,069245	0,069396	0,069540	0,069677	0,069806
13,9	0,069929	0,070044	0,070152	0,070253	0,070346	0,070433	0,070512	0,070584	0,070649	0,070707
14,0	0,070758	0,070801	0,070838	0,070867	0,070889	0,070904	0,070912	0,070913	0,070907	0,070893
14,1	0,070873	0,070846	0,070811	0,070770	0,070721	0,070666	0,070603	0,070534	0,070457	0,070374
14,2	0,070284	0,070186	0,070082	0,069971	0,069854	0,069729	0,069598	0,069460	0,069315	0,069163
14,3	0,069005	0,068840	0,068668	0,068490	0,068305	0,068114	0,067916	0,067712	0,067501	0,067283
14,4	0,067060	0,066829	0,066593	0,066350	0,066101	0,065845	0,065584	0,065316	0,065042	0,064762
14,5	0,064476	0,064183	0,063885	0,063581	0,063271	0,062954	0,062633	0,062305	0,061971	0,061632
14,6	0,061287	0,060936	0,060580	0,060218	0,059851	0,059478	0,059100	0,058717	0,058328	0,057933
14,7	0,057534	0,057129	0,056719	0,056304	0,055884	0,055459	0,055029	0,054594	0,054154	0,053710
14,8	0,053260	0,052806	0,052347	0,051884	0,051416	0,050944	0,050467	0,049985	0,049500	0,049010
14,9	0,048516	0,048017	0,047515	0,047008	0,046497	0,045983	0,045464	0,044942	0,044416	0,043886
15,0	0,043353	0,042815	0,042275	0,041730	0,041183	0,040632	0,040077	0,039520	0,038959	0,038395
15,1	0,037828	0,037257	0,036684	0,036108	0,035529	0,034948	0,034363	0,033776	0,033187	0,032595
15,2	0,032000	0,031403	6,030803	0,030202	0,029598	0,028992	0,028383	0,027773	0,027161	0,026547
15,3	0,025931	0,025313	0,024693	0,024072	0,023450	0,022825	0,022199	0,021572	0,020944	0,020314
15,4	0,019683	0,019051	0,018418	0,017783	0,017148	0,016512	0,015875	0,015237	0,014599	0,013960
15,5	0,013320	0,012680	0,012040	0,011399	0,010758	0,010116	0,009475	0,008833	0,008191	0,007549
15,6	0,006907	0,006266	0,005624	0,004983	0,004342	0,003702	0,003062	0,002422	0,001783	0,001145
15,7	0,000507	−0,000130	−0,000766	−0,001401	−0,002035	−0,002668	−0,003300	−0,003931	−0,004561	−0,005190
15,8	−0,005817	−0,006443	−0,007067	−0,007690	−0,008311	−0,008931	−0,009549	−0,010166	−0,010780	−0,011393
15,9	−0,012004	−0,012613	−0,013219	−0,013824	−0,014427	−0,015027	−0,015625	−0,016221	−0,016814	−0,017405

TABLA 1 (*continúa*)

(Sen u)/u

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
16,0	−0,017994	−0,018580	−0,019163	−0,019744	−0,020322	−0,020898	−0,021470	−0,022040	−0,022607	−0,023170
16,1	−0,023731	−0,024289	−0,024843	−0,025395	−0,025943	−0,026488	−0,027030	−0,027568	−0,028103	−0,028634
16,2	−0,029162	−0,029686	−0,030207	−0,030724	−0,031237	−0,031747	−0,032252	−0,032754	−0,033252	−0,033746
16,3	−0,034236	−0,034722	−0,035204	−0,035682	−0,036156	−0,036626	−0,037091	−0,037552	−0,038009	−0,038461
16,4	−0,038909	−0,039352	−0,039792	−0,040226	−0,040656	−0,041081	−0,041502	−0,041918	−0,042330	−0,042737
16,5	−0,043139	−0,043536	−0,043928	−0,044315	−0,044698	−0,045076	−0,045448	−0,045816	−0,046179	−0,046536
16,6	−0,046889	−0,047236	−0,047578	−0,047915	−0,048247	−0,048574	−0,048895	−0,049212	−0,049522	−0,049828
16,7	−0,050128	−0,050423	−0,050713	−0,050997	−0,051275	−0,051548	−0,051816	−0,052078	−0,052335	−0,052586
16,8	−0,052831	−0,053071	−0,053306	−0,053535	−0,053758	−0,053975	−0,054187	−0,054393	−0,054594	−0,054789
16,9	−0,054978	−0,055161	−0,055339	−0,055511	−0,055677	−0,055837	−0,055992	−0,056141	−0,056284	−0,056421
17,0	−0,056553	−0,056678	−0,056798	−0,056912	−0,057021	−0,057123	−0,057220	−0,057310	−0,057395	−0,057474
17,1	−0,057548	−0,057615	−0,057677	−0,057732	−0,057782	−0,057826	−0,057865	−0,057897	−0,057924	−0,057944
17,2	−0,057959	−0,057968	−0,057972	−0,057969	−0,057961	−0,057947	−0,057927	−0,057902	−0,057870	−0,057833
17,3	−0,057790	−0,057742	−0,057688	−0,057628	−0,057562	−0,057491	−0,057414	−0,057331	−0,057243	−0,057149
17,4	−0,057049	−0,056944	−0,056834	−0,056717	−0,056596	−0,056468	−0,056336	−0,056197	−0,056054	−0,055905
17,5	−0,055750	−0,055590	−0,055425	−0,055254	−0,055078	−0,054897	−0,054710	−0,054518	−0,054321	−0,054119
17,6	−0,053912	−0,053699	−0,053481	−0,053258	−0,053031	−0,052798	−0,052560	−0,052317	−0,052069	−0,051816
17,7	−0,051558	−0,051296	−0,051028	−0,050756	−0,050479	−0,050198	−0,049911	−0,049620	−0,049324	−0,049024
17,8	−0,048719	−0,048410	−0,048096	−0,047778	−0,047455	−0,047128	−0,046796	−0,046461	−0,046121	−0,045776
17,9	−0,045428	−0,045075	−0,044718	−0,044358	−0,043993	−0,043624	−0,043251	−0,042875	−0,042494	−0,042110
18,0	−0,041722	−0,041330	−0,040934	−0,040535	−0,040132	−0,039726	−0,039316	−0,038902	−0,038485	−0,038065
18,1	−0,037642	−0,037215	−0,036785	−0,036351	−0,035915	−0,035475	−0,035033	−0,034587	−0,034139	−0,033687
18,2	−0,033233	−0,032775	−0,032315	−0,031853	−0,031387	−0,030919	−0,030449	−0,029976	−0,029500	−0,029022
18,3	−0,028541	−0,028059	−0,027574	−0,027086	−0,026597	−0,026105	−0,025612	−0,025116	−0,024619	−0,024119
18,4	−0,023618	−0,023114	−0,022610	−0,022103	−0,021594	−0,021085	−0,020573	−0,020060	−0,019546	−0,019030
18,5	−0,018512	−0,017994	−0,017474	−0,016953	−0,016431	−0,015908	−0,015384	−0,014859	−0,014333	−0,013806
18,6	−0,013278	−0,012750	−0,012220	−0,011691	−0,011160	−0,010629	−0,010098	−0,009566	−0,009033	−0,008501
18,7	−0,007968	−0,007435	−0,006901	−0,006368	−0,005834	−0,005301	−0,004767	−0,004234	−0,003701	−0,003168
18,8	−0,002635	−0,002102	−0,001570	−0,001038	−0,000507	0,000024	0,000554	0,001083	0,001612	0,002140
18,9	0,002668	0,003194	0,003720	0,004245	0,004769	0,005292	0,005813	0,006334	0,006853	0,007371
19,0	0,007888	0,008404	0,008918	0,009431	0,009942	0,010452	0,010960	0,011466	0,011971	0,012474
19,1	0,012976	0,013475	0,013973	0,014468	0,014962	0,015454	0,015944	0,016431	0,016917	0,017400
19,2	0,017881	0,018360	0,018836	0,019310	0,019782	0,020251	0,020717	0,021181	0,021643	0,022102
19,3	0,022558	0,023011	0,023462	0,023910	0,024355	0,024797	0,025236	0,025672	0,026105	0,026535
19,4	0,026962	0,027386	0,027807	0,028224	0,028638	0,029049	0,029457	0,029861	0,030262	0,030659
19,5	0,031053	0,031444	0,031831	0,032214	0,032594	0,032970	0,033342	0,033711	0,034076	0,034437
19,6	0,034794	0,035148	0,035497	0,035843	0,036185	0,036522	0,036856	0,037186	0,037512	0,037833
19,7	0,038151	0,038464	0,038774	0,039079	0,039379	0,039676	0,039968	0,040256	0,040540	0,040820
19,8	0,041095	0,041365	0,041632	0,041893	0,042151	0,042404	0,042652	0,042896	0,043135	0,043370
19,9	0,043600	0,043826	0,044047	0,044263	0,044475	0,044682	0,044885	0,045082	0,045275	0,045464

Adaptado de L. Levi, *Applied Optics*.

SOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS SELECCIONADOS

CAPÍTULO 2

2.1 $(0{,}003)\,(2{,}54 \times 10^{\ -2})/580 \times 10^{-9}$ = número de ondas = 131; $c = \nu\lambda$, $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8/10^{10}$, $\lambda = 3$ cm. Las ondas se extienden 3,9 m.

2.6 $v = \nu\lambda = 1.498$ m/s $= (440\text{ Hz})\lambda$; $\lambda = 3{,}40$ m.

2.13 $\psi = A \operatorname{sen} 2\pi\,(\kappa x - \nu t)$, $\psi_1 = 4 \operatorname{sen} 2\pi\,(0{,}2x - 3t)$

(a) $\nu = 3$ (b) $\lambda = 1/0{,}2$ (c) $\tau = 1/3$

(d) $A = 4$ (e) $v = 15$ (f) x positiva

$\psi = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$, $\psi_2 = (1/2{,}5) \operatorname{sen}(7x + 3{,}5t)$

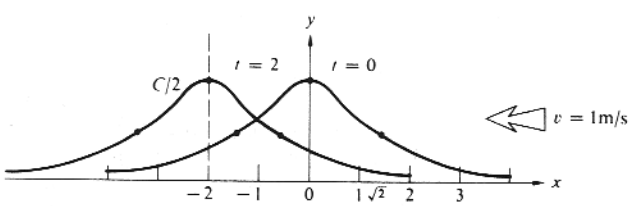
(a) $\nu = 3{,}5/2\pi$ (b) $\lambda = 2\pi/7$ (c) $\tau = 2\pi/3{,}5$

(d) $A = 1/2{,}5$ (e) $v = \frac{1}{2}$ (f) x negativa

2.15 $v_y = -\omega A \cos(kx - \omega t + \varepsilon)$, $a_y = -\omega^2 y$. Movimiento armónico simple $a_y \propto y$.

2.16 $\tau = 2{,}2 \times 10^{-15}$ s; por consiguiente $\nu = 1/\tau = 4{,}5 \times 10^{14}$ Hz; $v = \nu\lambda$, 3×10^8 m/s $= (4{,}5 \times 10^{14}\text{ Hz})\lambda$; $\lambda = 6{,}6 \times 10^{-7}$ m y $k = 2\pi/\lambda = 9{,}5 \times 10^6\text{ m}^{-1}$. $\psi(x,t) = (10^3\text{ V/m}) \cos[9{,}5 \times 10^6\text{ m}^{-1} \times (x + 3 \times 10^8\text{ m/s}\ t)]$. Se trata del coseno porque $\cos 0 = 1$.

2.17 $y(x, t) = C/[2 + (x + vt)^2]$.



2.19 No, no es doblemente diferenciable (de manera no trivial) y no es una solución de la ecuación diferencial de onda.

2.21 $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$ y sea $y = t$, con lo cual $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}(\pm v) + \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = 0$ y el resultado deseado sigue inmediatamente.

2.22 $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 = k\dfrac{dx}{dt} - kv$, y esto es cero con tal que $\dfrac{dx}{dt} = \pm v$, como corresponde. Para la onda particular del Problema 2.20, $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(\pm v) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = \pi^3 \times 10^6(\pm v) + \pi^9 \times 10^{14} = 0$ y la velocidad es -3×10^8 m/s.

2.24

$$\psi(z, 0) = A \operatorname{sen}(kz + \varepsilon);$$

$$\psi(-\lambda/12, 0) = A \operatorname{sen}(-\pi/6 + \varepsilon) = 0{,}866$$

$$\psi(\lambda/6, 0) = A \operatorname{sen}(\pi/3 + \varepsilon) = 1/2$$

$$\psi(\lambda/4, 0) = A \operatorname{sen}(\pi/2 + \varepsilon) = 0$$

$$A \operatorname{sen}(\pi/2 + \varepsilon) = A(\operatorname{sen}\pi/2 \cos\varepsilon + \cos\pi/2 \operatorname{sen}\varepsilon)$$

$$= A\cos\varepsilon = 0,\ \varepsilon = \pi/2$$

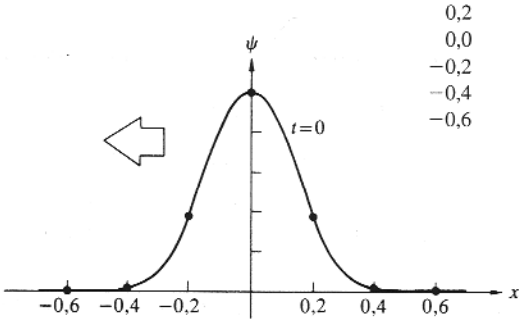
$$A \operatorname{sen}(\pi/3 + \pi/2) = A \operatorname{sen}(5\pi/6) = 1/2$$

por consiguiente $A = 1$, pues $\psi(z, 0) = \operatorname{sen}(kz + \pi/2)$.

2.25 Tanto (a) como (b) son ondas siendo funciones doblemente diferenciables de $(z - vt)$ y $(x + vt)$, respectivamente. Por lo tanto, para (a) $\psi = a^2(z - bt/a)^2$ y la velocidad es b/a en la dirección positiva de z. *Para* (b) $\psi = a^2(x + bt/a + c/a)^2$ y la velocidad es b/a en la dirección positiva de x.

2.27 $\psi(x, t) = 5{,}0 \exp[-a(x + \sqrt{b/a}\,t)^2]$, la dirección de propagación es x negativa; $v = \sqrt{b/a} = 0{,}6$ m/s. $\psi(x, 0) = 5{,}0 \exp(-25x^2)$;

x	ψ
0,6	0,000 6
0,4	0,09
0,2	1,8
0,0	5,0
−0,2	1,8
−0,4	0,09
−0,6	0,000 6



2.29 30° corresponde a $\frac{1}{12}\lambda$ o $(1/12)3 \times 10^8/6 \times 10^{14} = 42$ nm.

2.30
$$\psi = A \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau}\right)$$
$$\psi = 60 \text{ sen } 2\pi\left(\frac{x}{400 \times 10^{-9}} - \frac{t}{1{,}33 \times 10^{-15}}\right)$$
$$\lambda = 400 \text{ nm}$$
$$v = 400 \times 10^{-9}/1{,}33 \times 10^{-15} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$
$$\nu = (1/1{,}33) \times 10^{+15} \text{ Hz}, \quad \tau = 1{,}33 \times 10^{-15} \text{ s}.$$

2.33
$$\psi = A \exp i(k_x x + k_y y + k_z z)$$
$$k_x = k\alpha \qquad k_y = k\beta \qquad k_z = k\gamma$$
$$|\mathbf{k}| = [(k\alpha)^2 + (k\beta)^2 + (k\gamma)^2]^{1/2} = k[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{1/2}$$

2.35 $\lambda = h/mv = 6{,}6 \times 10^{-34}/6(1) = 1{,}1 \times 10^{-34}$ m

2.36 $\mathbf{k}$ puede construirse formando un vector unitario en la dirección apropiada y multiplicándolo por k. El vector unitario es

$$[(4-0)\hat{\mathbf{i}} + (2-0)\hat{\mathbf{j}} + (1-0)\hat{\mathbf{k}}]/\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}$$
$$= (4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{21}$$

y $\mathbf{k} = k(4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})/\sqrt{21}$.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

por lo tanto $\psi(x, y, z, t) = A \text{ sen } [(4k/\sqrt{21})x$

$$+ (2k/\sqrt{21})y + (k/\sqrt{21})z - \omega t].$$

2.38
$$\psi(\mathbf{r}_1, t) = \psi[\mathbf{r}_2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), t] = \psi(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1, t)$$
$$= \psi[\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), t]$$
$$= \psi(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2, t) = \psi(\mathbf{r}_2, t)$$

ya que $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = 0$

Capítulo 3

3.1
$$E_y = 2\cos[2\pi \times 10^{14}(t - x/c) + \pi/2]$$
$$E_y = A\cos[2\pi\nu(t - x/v) + \pi/2] \text{ de la ecuación (2.26)}$$

(a) $\nu = 10^{14}$ Hz, $v = c$, y $\lambda = c/\nu = 3 \times 10^8/10^{14} = 3 \times 10^{-6}$ m, se mueve en la dirección positiva de x, $A = 2$ V/m, $\varepsilon = \pi/2$ linealmente polarizada en la dirección y.

(b) $B_x = 0, \quad B_y = 0, \quad B_z = \frac{2}{c}\cos[2\pi \times 10^{14}(t - x/c) + \pi/2]$.

3.2 $E_z = 0$, $E_y = E_x = E_0$ sen $(kz - \omega t)$ o coseno; $B_z = 0$, $B_y = -B_x = E_y/c$, si se quiere,

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \text{ sen } (kz - \omega t), \quad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}}) \text{ sen } (kz - \omega t).$$

3.5 El campo está polarizado linealmente en la dirección de y y varía de manera sinusoidal desde cero en $z = 0$ hasta cero en $z = z_0$. Recurriendo a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$
$$\left[-k^2 - \frac{\pi^2}{z_0^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right] E_0 \text{ sen } \frac{\pi z}{z_0} \cos(kx - \omega t) = 0$$

y puesto que esto es cierto para todos x, y, y t, cada término tiene que igualar a cero

$$\text{y por lo tanto } k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{\omega z_0}\right)^2}$$

$$\text{Además, } v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{\omega z_0}\right)^2}}$$

3.7 $\langle\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\rangle = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t')\, dt'$.

Sea $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t' = x$; por lo tanto

$$\langle\cos^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)\rangle = \frac{1}{-\omega T}\int \cos^2 x\, dx$$
$$= \frac{1}{-\omega T}\int \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx$$
$$= -\frac{1}{\omega T}\left[\frac{x}{2} + \frac{\text{sen } 2x}{4}\right]_{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t}^{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(t+T)}$$

3.11 $\mathbf{E}_0 = (-E_0/\sqrt{2})\hat{\mathbf{i}} + (E_0/\sqrt{2})\hat{\mathbf{j}}$; $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)(\hat{\mathbf{i}}/\sqrt{2} + \hat{\mathbf{j}}\sqrt{2})$, de aquí que $\mathbf{E} = (1/\sqrt{2})(-10\hat{\mathbf{i}} + 10\hat{\mathbf{j}})\cos[(\sqrt{2}\pi/\lambda)(x + y) - \omega t]$ e $I = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2 = 0{,}13$ W/m^2.

3.12

(a) $l = c\Delta t = (3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s})(2{,}00 \times 10^{-9}\text{s}) = 0{,}600$ m.

(b) El volumen de un pulso es $(0{,}600 \text{ m})(\pi R^2) = 2{,}945 \times 10^{-6}$ m^3; por lo tanto $(6{,}0 \text{ J})/(2{,}945 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 2{,}0 \times 10^6$ J/m^3.

3.14 $u = \dfrac{(\text{potencia})\ (t)}{(\text{volumen})} = \dfrac{(10^{-3}\ \text{W})(t)}{(\pi r^2)(ct)} = \dfrac{10^{-3}\ \text{W}}{\pi(10^{-3})^2(3 \times 10^8)}$

$$u = \frac{10^{-5}}{3\pi}\ \text{J/m}^3 = 1.06 \times 10^{-6}\ \text{J/m}^3$$

3.16 $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$, $E = h\nu$

$$\frac{I}{h\nu} = \frac{19{,}88 \times 10^{-2}}{(6{,}63 \times 10^{-34})\,(100 \times 10^6)}$$

$$= 3 \times 10^{24}\ \text{fotones/m}^2\ \text{s}$$

Todos los fotones en el volumen V cruzan la unidad de área en un segundo

$$V = (ct)\ (1\ \text{m}^2) = 3 \times 10^8\ \text{m}^3$$

$$3 \times 10^{24} = V\ (\text{densidad})$$

$$\text{densidad} = 10^{16}\ \text{fotones/m}^3$$

3.18 $P_e = iV = (0{,}25)(3{,}0) = 0{,}75$ W. Esta es la potencia eléctrica disipada. La potencia disponible como luz es $P_l = (0{,}01)P_e = 75 \times 10^{-4}$ W.

(a) Flujo de fotones

$$= P_l/h\nu = 75 \times 10^{-4}\,\lambda/hc$$

$$= 75 \times 10^{-4}\,(550 \times 10^{-9})/(6{,}63 \times 10^{-34})3 \times 10^8$$

$$= 2{,}08 \times 10^{16}\ \text{fotones/s}$$

(b) Hay $2{,}08 \times 10^{16}$ en el volumen $(3 \times 10^8)(1\text{s})(10^{-3}\ \text{m}^2)$;

$$\therefore\quad \frac{2{,}08 \times 10^{16}}{3 \times 10^5} = \text{fotones/m}^3 = 0{,}69 \times 10^{11}$$

(c) $\text{I} = 75 \times 10^{-4}\ \text{W}/10 \times 10^{-4}\ \text{m}^2 = 7{,}5\ \text{W/m}^2$

3.20 Imagine dos cilindros concéntricos de radios r_1 y r_2 rodeando a la onda. La energía que fluye por segundo a través del primer cilindro debe atravesar el segundo cilindro; es decir $\langle S_1\rangle 2\pi r_1 = \langle S_2\rangle 2\pi r_2$, y $\langle S\rangle 2\pi r =$ constante y $\langle S\rangle$ varía inversamente con r. Por consiguiente, ya que $\langle S\rangle \propto E_0^2$, E_0 varía como $\sqrt{1/\text{r}}$.

3.22 $$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{c}\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle$$

A = área. $$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{A}\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{Ac}\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \frac{I}{c}$$

3.24 $$\mathscr{E} = 300\ \text{W}(100\ \text{s}) = 3 \times 10^4\ \text{J}$$

$$p = \mathscr{E}/c = 3 \times 10^4/3 \times 10^8 = 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

3.25

(a) $\langle \mathcal{P} \rangle = 2\langle S\rangle/c = 2(1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2)/(3 \times 10^8\ \text{m/s}) = 9 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2$.

(b) S, y por lo tanto $\mathcal{P}$, disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia, y por consiguiente $\langle S\rangle = [(0.7 \times 10^9\ \text{m})^{-2}/(1.5 \times 10^{11}\ \text{m})^{-2}] \times (1.4 \times 10^3\ \text{W/m}^2) = 6.4 \times 10^7\ \text{W/m}^2$, y $\langle \mathcal{P} \rangle = 0.21\ \text{N/m}^2$.

3.27 $$\langle S \rangle = 1.400\ \text{W/m}^2$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 2(1.400\ \text{W/m}^2/3 \times 10^8\ \text{m/s}) = 9{,}3 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2$$

$$\langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = 2.000\ \text{m}^2(9{,}3 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2) = 1{,}9 \times 10^{-2}\ \text{N}$$

3.28 $$\langle S \rangle = (200 \times 10^3\ \text{W})(500 \times 2 \times 10^{-6}\ \text{s})/A(1s)$$

$$\langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = A\langle S \rangle/c = 6{,}7 \times 10^{-7}\ \text{N}$$

3.29 $$\langle F \rangle = A\langle \mathcal{P} \rangle = A\langle S \rangle/c = \frac{10\ \text{W}}{3 \times 10^8} = 3{,}3 \times 10^{-8}\ \text{N}$$

$$a = 3{,}3 \times 10^{-8}/100\ \text{kg} = 3{,}3 \times 10^{-10}\ \text{m/s}^2$$

$$v = at = \tfrac{1}{3} \times 10^{-9}(t) = 10\ \text{m/s}$$

$$t = 3 \times 10^{10}\ \text{s} \qquad 1\ \text{año} = 3{,}2 \times 10^7\ \text{s}$$

3.30 **B** rodea a **v** con círculos y **E** es radial, por consiguiente **E** × **B** es tangente a la esfera y no se emite energía hacia el exterior.

3.35 $n = c/v = (2{,}998 \times 10^8\ \text{m/s})/(1{,}245 \times 10^8\ \text{m/s}) = 2{,}41$

3.40 La agitación térmica de los dipolos moleculares produce una disminución importante en K_e, surtiendo poco efecto en n. Con frecuencias ópticas, n se debe principalmente a la polarización electrónica ya que las rotaciones de los dipolos moleculares han dejado de ser eficaces con frecuencias mucho más bajas.

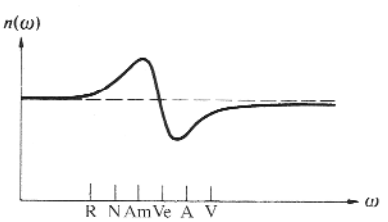
3.41 De la ecuación (3.70), para una frecuencia resonante única obtenemos

$$n = \left[1 + \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\right]^{1/2}$$

puesto que para materiales de baja densidad $n \approx 1$, el segundo término es $<< 1$, y sólo necesitamos retener los dos primeros términos de la expansión binomial de n. Por consiguiente $\sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2$ y

$$n = 1 + \frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m_e}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

3.43 El orden normal del espectro para un prisma de vidrio es R, N, Am, Ve, A, V, con el rojo (R) que tiene una desviación mínima y el violeta (V) una desviación máxima. Para un prisma de fuchsina, existe una banda de absorción en el verde y, por lo tanto, los índices para el amarillo y el azul en ambos lados (n_{Am} y n_A) son extremos, como la figura 3.26, es decir, n_{Am} es el máximo, n_A el mínimo, y $n_{Am} > n_N > n_R > n_V > n_A$. Por consiguiente, el espectro en orden creciente de desviación es A, V, banda negra, R, N, Am.



3.45 Con ω en el visible, $(\omega_0^2 - \omega^2)$ es más pequeño para vidrio con plomo y más grande para sílice fundida. Por lo tanto $n(\omega)$ es más grande que en el primer caso y más pequeño en el segundo.

3.47 C_1 es el valor al que n se acerca a medida que λ se vuelve más grande.

3.48 Los valores horizontales de $n(\omega)$ aproximados en cada región entre bandas de absorción aumentan al disminuir ω.

Capítulo 4

4.1 $E_{0s} \propto \dfrac{VE_{0i}}{r} = K\dfrac{VE_{0i}}{r}$; por lo tanto $\dfrac{VK}{r}$ carece de unidades, y por consiguiente K tiene unidades de $(longitud)^{-2}$. La única cantidad que no se ha tomado en cuenta es λ, por lo tanto concluimos que $K = \lambda^{-2}$, y $I_i/I_s \propto K^2 \propto \lambda^{-4}$.

4.4 $x_0(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega) = (q_eE_0/m_e)e^{i\alpha} = (q_eE_0/m_e)(\cos\ \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$; al elevar al cuadrado ambos lados da como resultado $x_0^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2] = (q_eE_0/m_e)^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)$, x_0 se deduce inmediatamente. En cuanto a α, divida las partes imaginarias de ambos lados de la primera ecuación anterior, es decir, $x_0\gamma\omega = (q_eE_0/m_e)\operatorname{sen}\alpha$, por las partes reales, $x_0(\omega_0^2 - \omega^2) = (q_eE_0/m_e)\cos\alpha$ para obtener $\alpha = \tan^{-1}[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$. α oscila continuamente entre 0 y $\pi/2$ hasta π.

4.5 El ángulo de la fase se retarda en un valor $(n\ \Delta y\ 2\pi/\lambda) - \Delta y\, 2\pi/\lambda$ ó $(n-1)\,\Delta y\,\omega/c$. Por lo tanto

$$E_p = E_0 \exp i\omega[t - (n-1)\Delta y/c - y/c]$$

o

$$E_p = E_0 \exp[-i\omega(n-1)\Delta y/c] \exp i\omega(t - y/c)$$

si $n \approx 1$ o $\Delta y << 1$. Puesto que $e^x \approx 1 + x$ para pequeños valores de x,

$$\exp[-i\omega(n-1)\Delta y/c] \approx 1 - i\omega(n-1)\Delta y/c$$

y puesto que $\exp(-i\pi/2) = -i$,

$$E_p = E_u + \frac{\omega(n-1)\Delta y}{c} E_u e^{-i\pi/2}$$

4.8

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t$$
$$\operatorname{sen} 30^\circ = 1{,}52 \operatorname{sen}\theta_t$$
$$\theta_t = \operatorname{sen}^{-1}(1/3{,}04)$$
$$\theta_t = 19^\circ\,13'$$

4.11 $n_{ti} = \dfrac{n_t}{n_i} = \dfrac{c/v_t}{c/v_i} = \dfrac{v_i}{v_t} = \dfrac{\nu\lambda_i}{\nu\lambda_t} = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_t}$

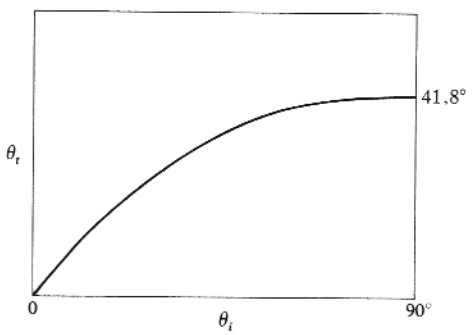
por lo tanto $\lambda_t = \lambda_i 3/4 = 9$ cm

$$\operatorname{sen}\theta_i = n_{ti} \operatorname{sen}\theta_t$$

$\operatorname{sen}^{-1}[\frac{3}{4}(0{,}707)] = \theta_t = 32^\circ$

4.15

θ_i (grados)	θ_t (grados)
0	0
10	6,7
20	13,3
30	19,6
40	25,2
50	30,7
60	35,1
70	38,6
80	40,6
90	41,8



4.22 El número de ondas por unidad de longitud a lo largo de $\overline{AC}$ en la interfaz iguala a $(\overline{BC}/\lambda_i)/\overline{BC}\operatorname{sen}\theta_i) = (\overline{AD}/\lambda_t)(\overline{AD}/\operatorname{sen}\theta_t)$. La ley de Snell se deduce multiplicando ambos lados por c/ν.

4.24 Sea τ el tiempo que tarda la onda en moverse a lo largo del haz de b_1 a b_2, de a_1 a a_2, y de a_1 a a_3. Por lo tanto $\overline{a_1a_2} = \overline{b_1b_2} = v_i\tau$ y $\overline{a_1a_3} = v_t\tau$.

$$\operatorname{sen}\theta_i = \overline{b_1b_2}/\overline{a_1b_2} = v_i/\overline{a_1b_2}$$

$$\operatorname{sen}\theta_t = \overline{a_1a_3}/\overline{a_1b_2} = v_t/\overline{a_1b_2}$$

$$\operatorname{sen}\theta_r = \overline{a_1a_2}/\overline{a_1b_2} = v_i/\overline{a_1b_2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{n_t}{n_i} = n_{ti} \quad \text{y} \quad \theta_i = \theta_r$$

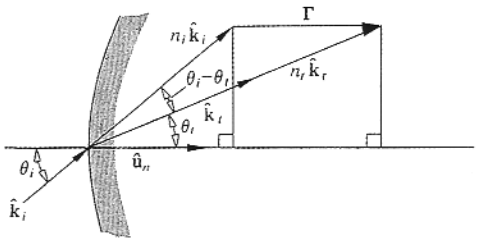
4.25

$$n_i \operatorname{sen}\theta_i = n_t \operatorname{sen}\theta_t$$
$$n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n)$$

donde $\hat{\mathbf{k}}_i$, $\hat{\mathbf{k}}_t$ son los vectores de onda unitarios. Por lo tanto

$$n_t(\hat{\mathbf{k}}_t \times \hat{\mathbf{u}}_n) - n_i(\hat{\mathbf{k}}_i \times \hat{\mathbf{u}}_n) = 0$$
$$(n_t\hat{\mathbf{k}}_t - n_i\hat{\mathbf{k}}_i) \times \hat{\mathbf{u}}_n = 0$$

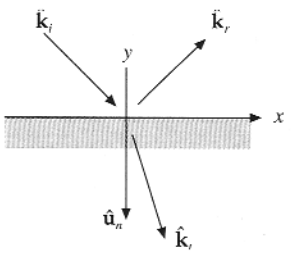
Sea $n_t\hat{\mathbf{k}}_t - n_i\hat{\mathbf{k}}_i = \boldsymbol{\Gamma} = \Gamma\hat{\mathbf{u}}_n$



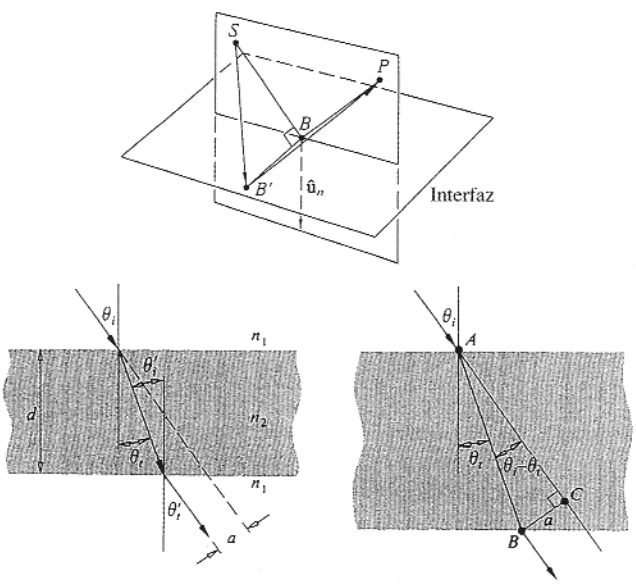
Γ se denomina a menudo *constante astigmática*; Γ = la diferencia entre las proyecciones de $n_t\hat{\mathbf{k}}_t$ y $n_i\hat{\mathbf{k}}_i$ en $\hat{\mathbf{u}}_n$; dicho de otro modo, tome el producto escalar $\boldsymbol{\Gamma}\cdot\hat{\mathbf{u}}_n$:

$$\Gamma = n_t\cos\theta_t - n_i\cos\theta_i$$

4.26 Puesto que $\theta_i = \theta_r$, $\hat{\mathbf{k}}_{ix} = \hat{\mathbf{k}}_{rx}$ y $\hat{\mathbf{k}}_{iy} = -\hat{\mathbf{k}}_{ry}$, y puesto que $(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{u}}_n)\hat{\mathbf{u}}_n = \hat{\mathbf{k}}_{iy}$, $\hat{\mathbf{k}}_i - \hat{\mathbf{k}}_r = 2(\hat{\mathbf{k}}_i\cdot\hat{\mathbf{u}}_n)\hat{\mathbf{u}}_n$.



4.27 Ya que $\overline{SB'} > \overline{SB}$ y $\overline{B'P} > \overline{BP}$, el camino más corto corresponde a B' coincidente con B en el plano de incidencia.



4.30

$$n_1\operatorname{sen}\theta_i = n_2\operatorname{sen}\theta_t \qquad \theta_t = \theta_i'$$

$$n_2\operatorname{sen}\theta_i' = n_1\operatorname{sen}\theta_t'$$

$$n_1\operatorname{sen}\theta_i = n_1\operatorname{sen}\theta_t' \quad \text{y} \quad \theta_i = \theta_t'$$

$$\cos\theta_t = d/\overline{AB}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t) = a/\overline{AB}$$

$$\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t) = \frac{a}{d}\cos\theta_t$$

$$\frac{d\operatorname{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\cos\theta_t} = a$$

4.32 En lugar de propagarse del punto S al punto P en una línea recta, el rayo recorre un camino que cruza la placa con un ángulo más agudo. A pesar de que de esta manera, las longitudes de camino en el aire se aumentan ligeramente, la reducción en el tiempo empleado dentro de la placa lo compensa largamente. Siendo éste el caso, es de esperar que el desplazamiento a aumente con n_{21}. A medida que n_{21} crece para un determinado θ_i, θ_t decrece, $(\theta_i - \theta_t)$ aumenta y de los resultados del problema 4.30 a aumenta claramente.

4.33

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\iint_A \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \qquad [3.5]$$

En el límite esto se reduce a $E_{2x}(\overline{BC}) - E_{1x}(\overline{AD}) = 0$, puesto que el área $\to 0$ y $\partial\mathbf{B}/\partial t$ es finita. Por consiguiente $E_{2x} = E_{1x}$.

4.34 De la ecuación (4.40)

$$r_{\parallel} = \frac{1{,}52\cos 30° - \cos 19°13'}{\cos 19°13' + 1{,}52\cos 30°}$$

donde el problema 4,8 $\theta_t = 19°13'$. De manera parecida

$$t_{\parallel} = \frac{2\cos 30}{\cos 19°13' + 1{,}52\cos 30°}$$

$$r_{\parallel} = \frac{1{,}32 - 0{,}944}{0{,}944 + 1{,}32} = 0{,}165$$

$$t_{\parallel} = \frac{1{,}732}{0{,}944 + 1{,}32} = 0{,}766$$

4.35 Empezando con la ecuación (4.34), y dividiendo el numerador y el denominador por n_i y reemplazando n_{ti} con $\operatorname{sen}\theta_i/\operatorname{sen}\theta_t$ se obtiene

$$r_{\perp} = \frac{\operatorname{sen}\theta_t\cos\theta_i - \operatorname{sen}\theta_i\cos\theta_t}{\operatorname{sen}\theta_t\cos\theta_i + \operatorname{sen}\theta_i\cos\theta_t}$$

que es equivalente a la ecuación (4.42). La ecuación (4.44) sigue exactamente de la misma forma. Para encontrar $r_{\parallel}$ empiece de la misma manera con la ecuación (4.40) y obtenga

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{sen}\theta_i\cos\theta_i - \cos\theta_t\operatorname{sen}\theta_t}{\cos\theta_t\operatorname{sen}\theta_t + \operatorname{sen}\theta_i\cos\theta_i}$$

Se pueden seguir varios caminos; uno es reescribir $r_{\parallel}$ como

$$r_{\parallel} = \frac{(\text{sen}\,\theta_i \cos\theta_t - \text{sen}\,\theta_t \cos\theta_i)(\cos\theta_i \cos\theta_t - \text{sen}\,\theta_i \,\text{sen}\,\theta_t)}{(\text{sen}\,\theta_i \cos\theta_t + \text{sen}\,\theta_t \cos\theta_i)(\cos\theta_i \cos\theta_t + \text{sen}\,\theta_i \,\text{sen}\,\theta_t)}$$

y por lo tanto $r_{\parallel} = \dfrac{\text{sen}\,(\theta_i - \theta_t)\cos(\theta_i + \theta_t)}{\text{sen}\,(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} = \dfrac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)}$

Podemos calcular $t_{\parallel}$, que lleva el mismo denominador, siguiendo el mismo camino.

4.43 $[E_{0r}]_{\perp} + [E_{0i}]_{\perp} = [E_{0t}]_{\perp}$; el campo tangencial en el medio incidente es igual al campo tangencial en el medio transmisor,

$$[E_{0r}/E_{0i}]_{\perp} - [E_{0r}/E_{0i}]_{\perp} = 1, \qquad t_{\perp} - r_{\perp} = 1$$

De otra manera, de las ecuaciones (4.42) y (4.44),

$$\frac{+\text{sen}\,(\theta_i - \theta_t) + 2\,\text{sen}\,\theta_t \cos\theta_i}{\text{sen}\,(\theta_i + \theta_t)} \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta_i \cos\theta_t - \cos\theta_i \,\text{sen}\,\theta_t + 2\,\text{sen}\,\theta_t \cos\theta_i}{\text{sen}\,\theta_i \cos\theta_t + \cos\theta_i \,\text{sen}\,\theta_t} = 1$$

4.50 De la ecuación (4.73) podemos ver que la función exponencial tendrá la forma $k(x - vt)$, con tal que descompongamos en factores k_t sen θ_i/n_{ti}, dejando el segundo término como $\omega n_{ti} t/k_t$ sen θ_i, que tiene que ser $v_t t$. Por lo tanto $\omega n_t/(2\pi/\lambda_t)n_i \times \text{sen}\,\theta_i = v_t$ y así $v_t = c/n_i$ sen $\theta_i = v_i/\text{sen}\,\theta_i$.

4.51 De la ecuación de la definición (página 127) $\beta = k_t[(\text{sen}^2\,\theta_i/n_{ti}^2) - 1]^{1/2} = 3{,}702 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$, y puesto que $y\beta = 1$, $y = 2{,}7 \times 10^{-7}$ m.

4.52 El haz se difunde en el trozo húmedo de papel y se producirá transmisión hasta que se alcance el ángulo crítico, donde la luz se retrorrefleja hacia la fuente. $\tan\theta_c = (R/2)/d$, y así $n_{ti} = 1/n_i = \text{sen}[\tan^{-1}(R/2d)]$.

4.53 $1{,}000\,29 \text{ sen } 88.7° = n \text{ sen } 90°$

$$(1{,}000\,29)\,(0{,}999\,74) = n; \qquad n = 1{,}000\,03$$

4.55

$$\theta_i + \theta_t = 90° \text{ cuando } \theta_i = \theta_p$$

$$n_i \,\text{sen}\,\theta_p = n_t \,\text{sen}\,\theta_t = n_t \cos\theta_p$$

$$\tan\theta_p = n_t/n_i = 1{,}52, \qquad \theta_p = 56°40' \qquad [8.25]$$

4.57

$$\tan\theta_p = n_t/n_i = n_2/n_1$$

$$\tan\theta_p' = n_1/n_2, \qquad \tan\theta_p = 1/\tan\theta_p'$$

$$\frac{\text{sen}\,\theta_p}{\cos\theta_p} = \frac{\cos\theta_p'}{\text{sen}\,\theta_p'} \therefore \text{sen}\,\theta_p \,\text{sen}\,\theta_p' - \cos\theta_p \cos\theta_p' = 0$$

$$\cos(\theta_p + \theta_p') = 0, \qquad \theta_p + \theta_p' = 90°$$

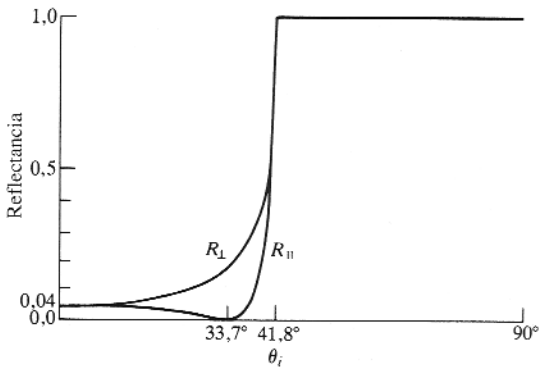
4.58 De la ecuación (4.92)

$$\tan\gamma_r = r_{\perp}[E_{0i}]_{\perp}/r_{\parallel}[E_{0i}]_{\parallel} = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} \tan\gamma_i$$

y de las ecuaciones (4.42) y (4.43)

$$\tan\gamma_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan\gamma_i$$

4.60



4.61 $T_{\perp} = \left(\dfrac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}\right) t_{\perp}^2$. De la ecuación (4.44) y la Ley de Snell's,

$$T_{\perp} = \left(\frac{\text{sen}\,\theta_t \cos\theta_t}{\text{sen}\,\theta_t \cos\theta_i}\right)\left(\frac{4\,\text{sen}^2\,\theta_t \cos^2\theta_i}{\text{sen}^2\,(\theta_i + \theta_t)}\right) = \frac{\text{sen}\,2\theta_i \,\text{sen}\,2\theta_t}{\text{sen}^2\,(\theta_i + \theta_t)}$$

De manera similar para $T_{\parallel}$.

4.63 Si Φ_i es el flujo radiante incidente o potencia y T es la transmitancia a través de la primera interfaz aire-vidrio, el flujo transmitido es $T\Phi_i$. De la ecuación (4.68) para incidencia normal, la transmitancia de vidrio a aire también es T. Por lo tanto, un flujo $T\Phi_i T$ sale de la primera transparencia y $\Phi_i T^{2N}$ de la última. Puesto que $T = 1 - R$, $T_t = (1 - R)^{2N}$ de la ecuación (4.67).

$$R = (0{,}5/2{,}5)^2 = 4\%, \qquad T = 96\%$$

$$T_t = (0{,}96)^6 \approx 78{,}3\%$$

4.64 $T = \dfrac{I(y)}{I_0} = e^{-\alpha y}, \qquad T_1 = e^{-\alpha}, \qquad T = (T_1)^y$

$$T_t = (1 - R)^{2N}(T_1)^d$$

4.65 Para $\theta_i = 0$, $R = R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\dfrac{n_t - n_i}{n_t + n_i}\right)^2$ [4.67]

Para $n_{ti} \to 1$, $n_t \to n_i$ claramente $R \to 0$.
Para $\theta_i = 0$,

$$T = T_{\parallel} = T_{\perp}\frac{4n_t n_i}{(n_t + n_i)^2}$$

y puesto que $n_t \to n_i$, $\lim_{n_{ti}\to 1} T = 4n_i^2/(2n_i)^2 = 1$.
Del problema 4.61, y puesto que $n_t \to n_i$ la ley de Snell's dice que $\theta_t \to \theta_i$, obtenemos

$$\lim_{n_{ti}\to 1} T_{\parallel} = \frac{\text{sen}^2\,2\theta_i}{\text{sen}^2\,2\theta_i} = 1, \qquad \lim_{n_{ti}\to 1} T_{\perp} = 1$$

De la ecuación (4.43) y del hecho que $R_{\parallel} = r_{\parallel}^2$ y $\theta_t \to \theta_i$, $\lim_{n_{ti}\to 1} R_{\parallel} = 0$.
De manera parecida, de la ecuación (4.42) $\lim_{n_{ti}\to 1} R_{\perp} = 0$.

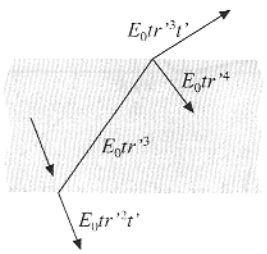
4.67 Para $\theta_i > \theta_c$, la ecuación (4.70) puede escribirse

$$r_\perp = \frac{\cos\theta_i - i(\text{sen}^2\,\theta_i - n_{ti}^2)^{1/2}}{\cos\theta_i + i(\text{sen}^2\,\theta_i - n_{ti}^2)^{1/2}}$$

$$r_\perp r_\perp^* = \frac{\cos^2\theta_i + \text{sen}^2\,\theta_i - n_{ti}^2}{\cos^2\theta_i + \text{sen}^2\,\theta_i - n_{ti}^2} = 1$$

De manera parecida $r_\parallel r_\parallel^* = 1$.

4.68



$$t_\parallel = \frac{2\,\text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1}{\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$t_\parallel' = \frac{2\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2}{\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_2-\theta_1)}$$

$$t_\parallel t_\parallel' = \frac{\text{sen}\,2\theta_1\,\text{sen}\,2\theta_2}{\text{sen}^2\,(\theta_1+\theta_2)\cos^2(\theta_1-\theta_2)}$$

$$= T_\parallel \text{ de la ecuación (4.98)}$$

De manera parecida $t_\perp t_\perp' = T_\perp$

$$r_\parallel^2 = \left[\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\right]^2 = \left[\frac{-\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\right]^2$$

$$r_\parallel'^2 = \left[\frac{\tan(\theta_2-\theta_1)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}\right]^2 = r_\parallel^2 = R_\parallel$$

4.70 De la ecuación (4.45)

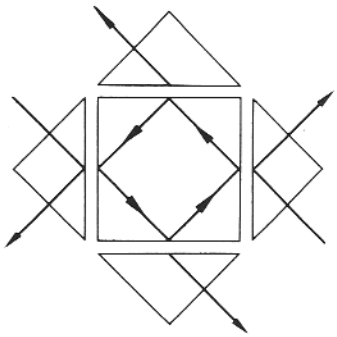
$$t_\parallel'(\theta_p')t_\parallel(\theta_p) = \left[\frac{2\,\text{sen}\,\theta_p\cos\theta_p'}{\text{sen}\,(\theta_p+\theta_p')\cos(\theta_p'-\theta_p)}\right] \times \left[\frac{2\,\text{sen}\,\theta_p'\cos\theta_p}{\text{sen}\,(\theta_p+\theta_p')\cos(\theta_p-\theta_p')}\right]$$

$$= \frac{\text{sen}\,2\theta_p'\,\text{sen}\,2\theta_p}{\cos^2(\theta_p-\theta_p')} \quad \text{ya que} \quad \theta_p+\theta_p' = 90°$$

$$= \frac{\text{sen}^2\,2\theta_p}{\cos^2(\theta_p-\theta_p')} \quad \text{ya que} \quad \text{sen}\,2\theta_p' = \text{sen}\,2\theta_p$$

$$= \frac{\text{sen}^2\,2\theta_p}{\cos^2(2\theta_p-90°)} = 1$$

4.71 Puede utilizarse como mezclador para obtener varias proporciones de las ondas incidentes en los haces emitidos. Para ello, se ajustan los espaciados. [Para ulteriores observaciones, véase H. A. Daw y J. R. Izatt, *J. Opt. Soc. Am.* **55**, 201 (1965).]



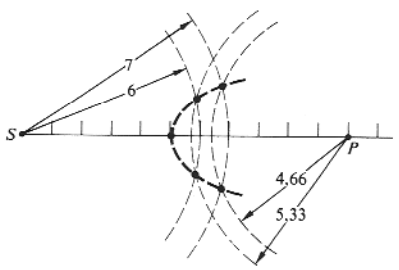
4.72 De la fig. 4.62 la selección obvia es plata. Obsérvese que en la proximidad de 300 nm, $n_I \approx n_R \approx 0{,}6$, en cuyo caso la ecuación (4.83) da como resultado $R \approx 0{,}18$. Ligeramente por encima de 300 nm n_I aumenta rápidamente mientras que n_R decrece bastante considerablemente con el resultado que $R \approx 1$ en el visible y poco más allá.

4.73 La luz atraviesa la base del prisma como una onda evanescente que se propaga a lo largo del intervalo ajustable de acoplamiento. La energía se mueve dentro de la película dieléctrica cuando la onda evanescente satisface ciertos requisitos. La película actúa como una guía de ondas que puede soportar configuraciones características de vibración o modos. Cada modo tiene asociado una velocidad determinada y una polarización. La onda evanescente se acoplará dentro de la película cuando se ajuste a la configuración del modo.

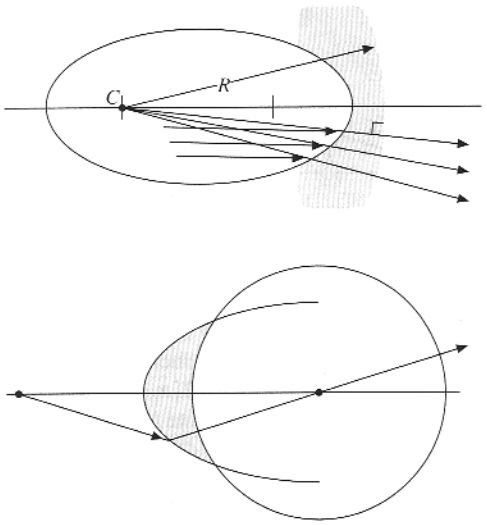
Capítulo 5

5.1 Todas las *LCO* de *S* a *P* tienen que ser iguales; por lo tanto $\ell_o n_1 + \ell_i n_2 = s_o n_1 + s_i n_2 =$ constante; trace una perpendicular desde *A* hasta el eje óptico, el punto donde toca es *B*. $\overline{BP} = s_o + s_i - x$, lo demás se infiere del Teorema de Pitágoras.

5.2 Empleando $\ell_o n_1 + \ell_i n_2 =$ constante, $\ell_o + \ell_i 3/2 =$ constante, $5 + (6)\,3/2 = 14$. Por lo tanto $2\ell_o + 3\ell_i = 28$ cuando $\ell_o = 6$, $\ell_i = 5{,}3$, $\ell_o = 7$, $l_i = 4{,}66$. Obsérvese que los arcos centrados en *S* y *P* tienen que cruzarse para obtener valores de ℓ_o y ℓ_i físicamente interesantes.



5.4 De la fig. 5.4, una onda plana incidente en una superficie elíptica cóncava se vuelve esférica. Si la segunda superficie esférica tiene la misma curvatura, la onda tendrá todos los rayos normales a ella y saldrá sin alteración alguna.



5.8 Primera superficie: $\dfrac{n_1}{s_o} + \dfrac{n_2}{s_i} = \dfrac{n_2 - n_1}{R}$

$$\frac{1}{1{,}2} + \frac{1{,}5}{s_i} = \frac{0{,}5}{0{,}1}$$

$s_i = 0{,}36$ m (imagen real 0,36 m a la derecha del primer vértice). Segunda superficie $s_o = 0{,}20 - 0{,}36 = -0{,}16$ m (distancia objeto virtual).

$$\frac{1{,}5}{-0{,}16} + \frac{1}{s_i} = \frac{-0{,}5}{-0{,}1}, \qquad s_i = 0{,}069$$

La imagen final es real ($s_i > 0$), invertida ($M_T < 0$), y está a 6,9 cm a la derecha del segundo vértice.

5.10 De la ecuación (5.8), $1/8 + 1{,}5/s_i = 0{,}5/-20$. En la primera superficie, $s_i = -10$ cm. Imagen virtual a 10 cm a la izquierda del primer vértice. En la segunda superficie, el objeto *es real* a 15 cm del segundo vértice.

$$1{,}5/15 + 1/s_i = -0{,}5/10, \qquad s_i = -20/3 = -6{,}66 \text{ cm}$$

Virtual, a la izquierda del segundo vértice.

5.11 $s_o + s_i = s_o s_i / f$ para minimizar $s_o + s_i$,

$$\frac{d}{ds_o}(s_o + s_i) = 0 = 1 + \frac{ds_i}{ds_o}$$

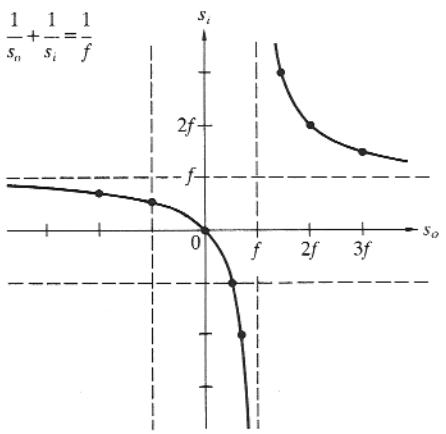
$$\text{o} \quad \frac{d}{ds_o}\left(\frac{s_o s_i}{f}\right) = \frac{s_i}{f} + \frac{s_o}{f}\frac{ds_i}{ds_o} = 0$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{ds_i}{ds_o} = -1 \quad \text{y} \quad \frac{ds_i}{ds_o} = -\frac{s_i}{s_o}, \quad \therefore \quad s_i = s_o$$

La separación sería máxima si cualquiera fuera ∞, sin embargo, ambas no pueden serlo. Por consiguiente, $s_i = s_o$ es la condición para un mínimo. De la ecuación gaussiana, $s_o = s_i = 2f$.

5.12 $1/5 + 1/s_i = 1/10$, $s_i = -10$ cm virtual, $M_T = -s_i/s_o = 10/5 = 2$ derecha. La imagen mide 4 cm de altura. Or $-5(x_i) = 100$, $x_i = -20$, $M_T = -x_i/f = 20/10 = 2$.

5.13 $1/s_o + 1/s_i = 1/f$



5.15 $s_i < 0$ porque la imagen es virtual. $1/100 + 1/-50 = 1/f, f = -100$ cm. La imagen se halla también a 50 cm de la derecha. $M_T = -s_i/s_o = 50/100 = 0{,}5$. La imagen de la hormiga es la mitad y derecha ($M_T > 0$).

5.17 $1/f = (n_l - 1)[(1/R_1) - (1/R_2)]$

$$= 0{,}5[(1/\infty) - (1/10)] = -0{,}5/10$$

$$f = -20 \text{ cm}, \qquad \mathcal{D} = 1/f = -1/0{,}2 = -5 \text{ D}$$

5.20

(a) De la ecuación gaussiana de lentes

$$\frac{1}{15{,}0 \text{ m}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{3{,}00 \text{ m}}$$

y $s_i = +3{,}75$ m.

(b) Calculando el aumento, obtenemos

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{3{,}75 \text{ m}}{15{,}0 \text{ m}} = -0{,}25$$

Ya que la distancia de la imagen es positiva, la imagen es *real*. Como el aumento es negativo, la imagen está *invertida* y como el valor absoluto del aumento es inferior a uno, la imagen es *reducida*.

(c) De la definición del aumento, se deduce que

$$y_i = M_T y_o = (-0{,}25)\,(2{,}25 \text{ m}) = -0{,}563 \text{ m}$$

donde el signo menos simboliza la inversión de la imagen.

(d) Nuevamente de la ecuación gaussiana

$$\frac{1}{17{,}5\text{ m}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{3{,}00\text{ m}}$$

y $s_i = +3{,}62$ m. La imagen del animal mide tan sólo 0,13 m de largo.

5.24 Lo primero que hay que calcular es la distancia focal en el agua, utilizando la fórmula del productor de lentes. Estableciendo la relación $f_{ag}/f_a = f_{ag}/(10\text{ cm}) = (n_v - 1)/[(n_v/n_{ag}) - 1] = 0{,}56/0{,}17 = 3{,}24$; $f_{ag} = 32$ cm. La fórmula gaussiana para las lentes proporciona la distancia de la imagen: $1/s_i + 1/100\text{ cm} = 1/32{,}4\text{ cm}$; $s_i = 48$ cm.

5.25 La imagen resultará invertida si tiene que ser real, por lo tanto el dispositivo debería estar invertido, de no ser así hará falta algo más para girar la imagen; $M_T = -3 = -s_i/s_o$; $1/s_o + 1/3s_o = 1/0{,}60$ m; $s_o = 0{,}80$ m, por lo tanto 0,80 m + 3(0,80 m) = 3,2 m.

5.26

$$\frac{1}{f} = (n_{lm} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f_{ag}} = \frac{(n_{lm} - 1)}{(n_l - 1)}\frac{1}{f_a} = \frac{1{,}5/1{,}33 - 1}{1{,}5 - 1}\frac{1}{f_a} = \frac{0{,}125}{0{,}5}\frac{1}{f_a}$$

$$f_{ag} = 4f_a$$

5.30 $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, $1/50 = 1/f_1 - 1/50$, $f_1 = 25$ cm. Si R_{11} y R_{12}, y R_{21} y R_{22} son los radios de la primera y segunda lente,

$$1/f_1 = (n_l - 1)(1/R_{11} - 1/R_{12}), \qquad 1/25 = 0{,}5(2/R_{11})$$

$$R_{11} = -R_{12} = -R_{21} = 25\text{ cm}$$

$$1/f_2 = (n_l - 1)\,(1/R_{21} - 1/R_{22})$$

$$-1/50 = 0.55[1/(-25) - 1/R_{22}]$$

$$R_{22} = -275\text{ cm}$$

5.31

$$M_{T_1} = -s_{i1}/s_{o1} = -f_1/(s_{o1} - f_1)$$

$$M_{T_2} = -s_{i2}/s_{o2} = -s_{i2}/(d - s_{i1})$$

$$M_T = f_1 s_{i2}/(s_{o1} - f_1)\,(d - s_{i1})$$

De la ecuación (5.30), reemplazando s_{i1}, obtenemos

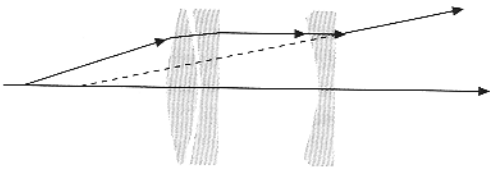
$$M_T = \frac{f_1 s_{i2}}{(s_{o1} - f_1)d - s_{o1}f_1}$$

5.32 La primera lente $1/s_{i1} = 1/30 - 1/30 = 0$, $s_{i1} = \infty$. La segunda lente $1/s_{i2} = 1/(-20) - 1/(-\infty)$, el objeto para la segunda lente se halla a la derecha en ∞, es decir, $s_{o2} = -\infty$. $s_{i2} = -20$ cm, virtual, 10 cm a la izquierda de la primera lente.

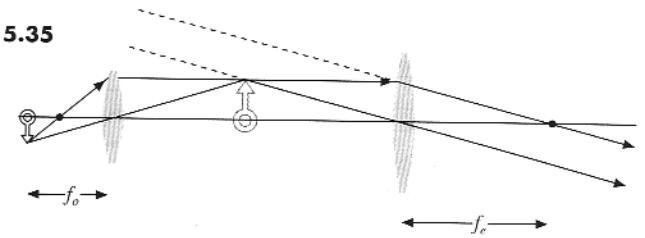
$$M_T = (-\infty/30)\,(+20/-\infty) = \frac{2}{3}$$

o de la ecuación (5.34)

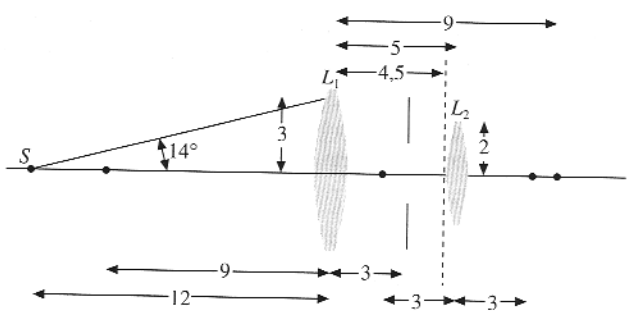
$$M_T = \frac{30(-20)}{10(30 - 30) - 30(30)} = \frac{2}{3}$$



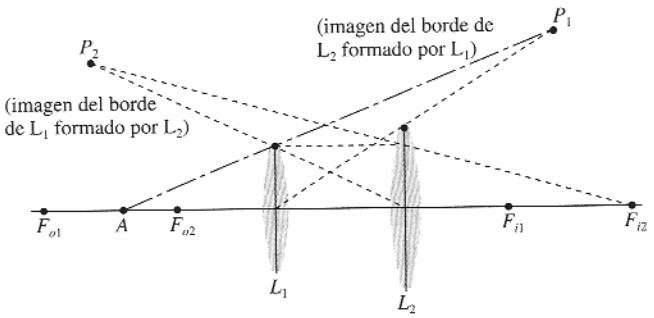
5.35



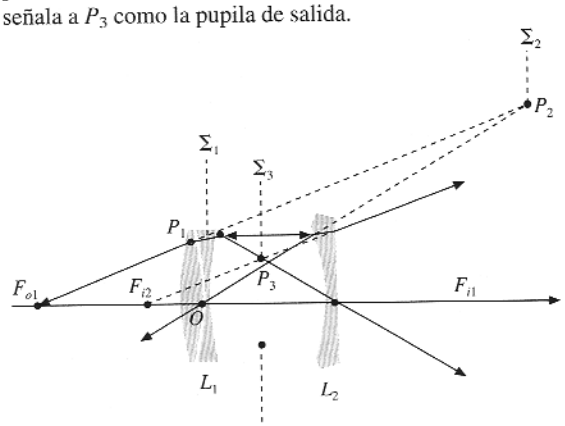
5.38 El ángulo subtendido por L_1 en S es $\tan^{-1} 3/12 = 14°$. Para encontrar la imagen del diafragma producida por L_1 se recurre a la ecuación (5.23): $x_o x_i = f^2$, $(-6)(x_i) = 81$, $x_i = -13.5$ cm, de manera que la imagen se halla a 4,5 cm tras la lente L_1. El aumento es $-x_i/f = 13{,}5/9 = 1{,}5$, y por lo tanto la imagen (del borde) del orificio es (0,5) (1,5) = 0.75 cm de radio. De ahí que el ángulo subtendido en S sea $\tan^{-1} 0{,}75/16{,}5 = 2{,}6°$. La imagen de L_2 en L_1 se obtiene de (-4) $(x_i) = 81$, $x_i = -20{,}2$ cm, dicho de otro modo, la imagen se halla a 11,2 cm a la derecha de L_1. $M_T = 20{,}2/9 = 2{,}2$; por lo tanto la imagen del borde de L_2 se halla 4,4 cm encima del eje. En consecuencia, el ángulo que subtiende en S es $\tan^{-1} 4{,}4/(12 + 11{,}2)$ o 9,8°. En consecuencia, el diafragma es el D.A., y la pupila de entrada (su imagen por L_1) tiene un diámetro de 1,5 cm y se halla 4,5 cm detrás de L_1. La imagen del diafragma por L_2 es la pupila de salida. Por consiguiente, $\frac{1}{2} + 1/s_i = \frac{1}{3}$ y $s_i = -6$, es decir, 6 cm frente a L_2. $M_T = \frac{6}{2} = 3$, de manera que la pupila de salida tiene un diámetro de 3 cm.



5.39 Cualquiera de los márgenes de L_1 y L_2 será el D.A.; por lo tanto, dado que no hay lentes a la izquierda de L_1, ya sea su periferia o P_1 será la pupila de entrada. Más allá (a la izquierda de) del punto A, L_1 subtiende el ángulo más pequeño siendo la pupila de entrada; más cerca (a la derecha de A) P_1 señala el borde de la pupila de entrada. En el primer caso, P_2 es la pupila de salida; en el segundo (puesto que no hay lentes a la derecha de L_2) la pupila de salida es el borde de la propia L_2.

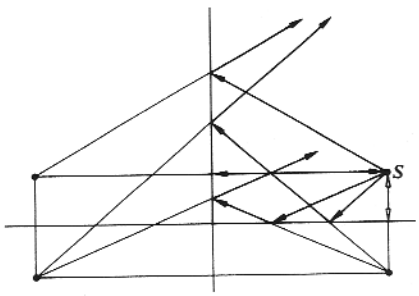


5.40 El D.A. es cualquiera de los dos bordes de L_1 o L_2. Por lo tanto, la pupila de entrada se indica ya sea por P_1 o por P_2. Más allá de F_{o1}, P_1 subtiende el ángulo más pequeño; por lo tanto, Σ_1 indica la posición de D.A. La imagen de D.A. en las lentes a su derecha, L_2, señala a P_3 como la pupila de salida.



5.41 Trace el rayo principal del extremo hasta L_1 de modo que al prolongarlo, atraviese el centro de la pupila de entrada. De ahí, atraviesa el centro del D.A. y entonces se dobla en L_2 para extenderse por el centro de la pupila de salida. Un rayo marginal de S se extiende hasta el borde de la pupila de entrada, se dobla en L_1 de tal manera que no da con el borde de D.A., doblándose sucesivamente en L_2 para que pase por el borde de la pupila de salida.

5.42



5.43 No, pero podría estar mirándole a usted.

5.44 El espejo está paralelo al plano de la pintura y, por lo tanto, la imagen de la muchacha debería hallarse justo detrás de ella y no a su derecha.

5.45 $1/s_o + 1/s_i = -2/R$. Let $R \to \infty$: $1/s_o + 1/s_i = 0$, $s_o = -s_i$, y $M_T = +1$. La imagen es virtual, del mismo tamaño y derecha.

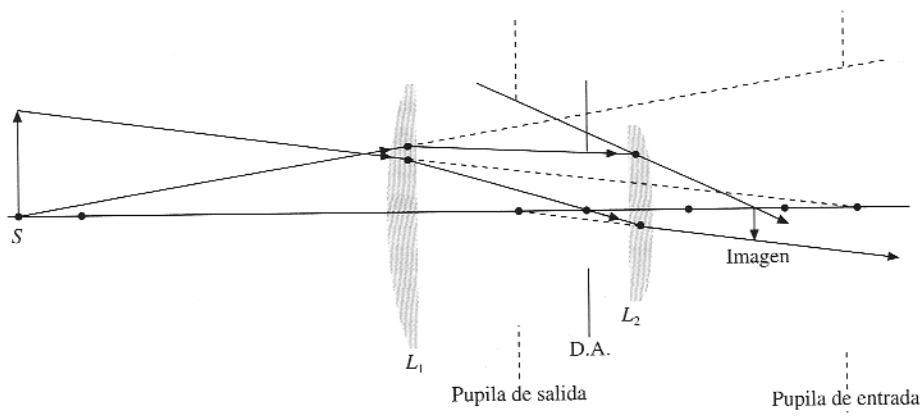
5.46 De la ecuación (5.49), $1/100 + 1/s_i = -2/80$, y por lo tanto $s_i = -28{,}5$ cm. Virtual ($s_i < 0$), derecha ($M_T > 0$), y reducida. (Compruébese con la tabla 5.5.)

5.48 La imagen en la pantalla debe ser real $\therefore$ s_i es +

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{100} = -\frac{2}{R}, \qquad \frac{5}{100} = -\frac{2}{R}, \qquad R = -40 \text{ cm}$$

5.49 La imagen es derecha y reducida, lo cual hace suponer (tabla 5.5) la presencia de un espejo esférico convexo.

5.52 Para ser aumentada y estar derecha, el espejo tiene que ser cóncavo y la imagen virtual; $M_T = 2{,}0 = s_i/(0{,}015 \text{ m})$, $s_i = -0{,}03$ m, y por lo tanto $1/f = 1/(0{,}015 \text{ m}) + 1/(-0{,}03 \text{ m})$; $f = 0{,}03$ m y $f = -R/2$; $R = -0{,}06$ m.



5.53 $M_T = y_i/y_o = -s_i/s_o$, recurriendo a la ecuación (5.50), $s_i = fs_o/(s_o - f)$, y ya que $f = -R/2$, $M_T = -f/(s_o - f) = -(-R/2)/(s_o + R/2) = R/(2s_o + R)$.

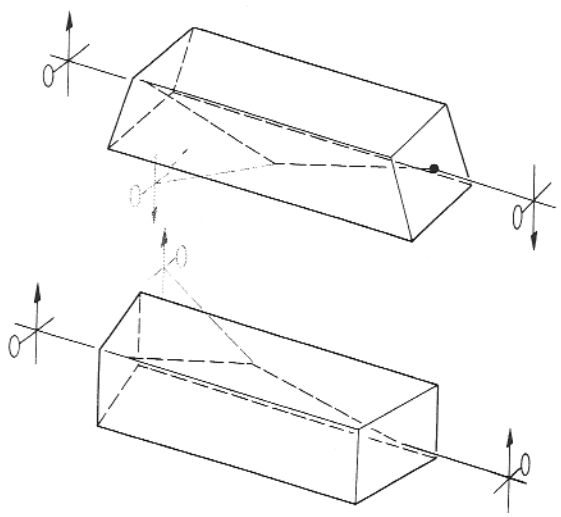
5.56 $M_T = -s_i/25 \text{ cm} = -0{,}064$; $s_i = 1{,}6$ cm. $1/25 \text{ cm} + 1/1{,}6 \text{ cm} = -2/R$, $R = -3{,}0$ cm.

5.60 $f = -R/2 = 30$ cm, $1/20 + 1/s_i = 1/30$, $1/s_i = 1/30 - 1/20$.

$$s_i = -60 \text{ cm}, \qquad M_T = -s_i/s_o = 60/20 = 3$$

La imagen es virtual ($s_i < 0$), derecha ($M_T > 0$), se halla a 60 cm detrás del espejo y mide 9 cm de alto.

5.61 Imagen girada en 180°.



5.62 De la ecuación (5.64)

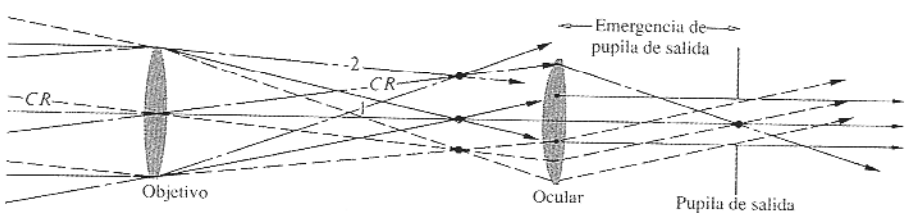
$$\text{NA} = (2{,}624 - 2{,}310)^{1/2} = 0{,}550$$

$$\theta_{\text{máx}} = \text{sen}^{-1}\, 0{,}550 = 33°22'$$

El ángulo máximo que se acepta es $2\theta_{\text{máx}} = 66°44'$. Un rayo a 45° se saldría rápidamente de la fibra, es decir, muy poca energía no se escapa, incluso en la primera reflexión.

5.63 Considerando que la ecuación (5.65) (p. 203), $\log 0{,}5 = -0{,}30 = -\alpha L/10$, y así $L = 15$ km.

5.64 De la ecuación (5.64) (p. 200) NA = 0,232 y así $N_m = 9{,}2 \times 10^2$.



5.66 $M_T = -f/x_o = -1/x_o\mathcal{D}$. Para el ojo humano $\mathcal{D} \approx 58{,}6$ dioptrías.

$$x_o = 230000 \times 1{,}61 = 371 \times 10^3 \text{ km}$$

$$M_T = -1/3{,}71 \times 10^6(58{,}6) = 4{,}6 \times 10^{-11}$$

$$y_i = 2160 \times 1{,}61 \times 10^3 \times 4{,}6 \times 10^{-11} = 0{,}16 \text{ mm}$$

5.68 $1/20 + 1/s_{io} = 1/4$, $\quad s_{io} = 5$ m

$1/0{,}3 + 1/s_{ie} = 1/0{,}6$, $\quad s_{ie} = -0{,}6$ m

$$M_{To} = -5/10 = -0.5$$

$$M_{Ie} = -(-0{,}6)/0{,}5 = +1{,}2$$

$$M_{To}M_{Te} = -0{,}6$$

5.72 El rayo 1 en la figura anterior no alcanza el ocular, por lo tanto, se produce una disminución en la energía que llega al punto imagen correspondiente. Esto es viñetado.

5.73 Los rayos que no hubiesen podido alcanzar el ocular en el problema anterior, están obligados a cruzarlo por la lente de campo. Obsérvese que la lente de campo dobla ligeramente a los rayos principales de manera que atraviesan el eje óptico un poco más cerca del ocular, desplazando la pupila de salida y acortando la emergencia de pupila de salida. (Para más información sobre este tema, véase *Modern Optical Engineering*, de Smith).

5.77 $$\mathcal{D}_l - \frac{\mathcal{D}_c}{1 + \mathcal{D}_c d} = \frac{3{,}2D}{1 + (3{,}2D)(0{,}017 \text{ m})} = +3{,}03D$$

o a dos figuras $+3{,}0D$. $f_l = 0{,}330$ m, y así el punto lejano es 0,330 m − 0,017 m = 0,313 m detrás del cristalino del ojo. Para la lentilla $f_c = 1/3{,}2 = 0{,}313$ m. Por consiguiente, el punto lejano en 0,31 m es el mismo para ambos, como efectivamente tiene que ser.

5.79

(a) La distancia intermedia de la imagen se consigue de la fórmula para las lentes aplicada al objetivo:

$$\frac{1}{27 \text{ mm}} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{25 \text{ mm}}$$

y $s_i = 3{,}38 \times 10^2$ mm. Se trata de la distancia desde el objetivo hasta la imagen intermedia, a la que habrá de añadirse la distancia focal del ocular para calcular la separación de la lente; $3{,}38 \times 10^2 \text{ mm} + 25 \text{ mm} = 3{,}6 \times 10^2$ mm.

(b) $M_{To} = -s_i/s_o = -3{,}38 \times 10^2 \text{ mm}/27 \text{ mm} = -12{,}5\times$, mientras que el ocular tiene un aumento de $d_o\mathcal{D} = (254 \text{ mm})(1/25 \text{ mm}) = 10{,}2\times$.

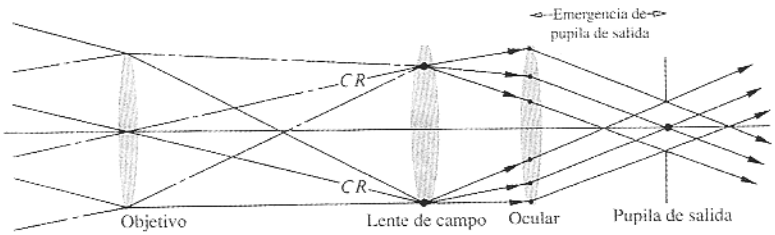


Figura para la solución 5.73

Por lo tanto, el aumento total es MP = $(-12{,}5)(10{,}2) = -1{,}3 \times 10^2$; el signo menos simboliza la inversión de la imagen.

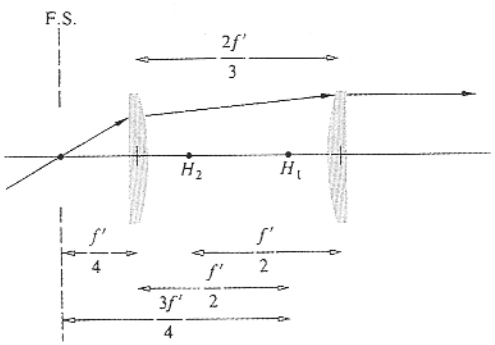
Capítulo 6

6.2 De la ecuación (6.8),

$$1/f = 1/f' + 1/f' - d/f'f' = 2/f' - 2/3f', \qquad f = 3f'/4$$

De la ecuación (6.9), $\overline{H_{11}H_1} = (3f'/4)(2f'/3)/f' = f'/2$

De la ecuación (6.10), $\overline{H_{22}H_2} = -(3f'/4)(2f'/3)/f' = -f'/2$



6.3 De la ecuación (6.2), $1/f = 0$ cuando $-(1/R_1 - 1/R_2) = (n_l - 1)d/n_l R_1 R_2$. Por lo tanto $d = n_l(R_1 - R_2)/(n_l - 1)$.

6.4 $1/f = 0{,}5[1/6 - 1/10 + 0{,}5(3)/1{,}5(6)10]$

$= 0{,}5[10/60 - 6/60 + 1/60]$; $f = +24$

$h_1 = -24(0{,}5)\,(3)/10(1{,}5) = -2.4$

$h_2 = -24(0{,}5)\,(3)/6(1{,}5) = -4$

6.6 $f = \frac{1}{2}nR/(n-1)$; $h_1 = +R$, $h_2 = -R$

6.10 $f = 29{,}6 + 0{,}4 = 30$ cm; $s_o = 49{,}8 + 0{,}2 = 50$ cm; $1/50 + 1/s_i = 1/30$ cm. $s_i = 75$ cm de H_2 y 74,6 cm de la cara posterior.

6.12 De la ecuación (6.2),

$1/f = \frac{1}{2}[(1/4{,}0) - (1/-15) + \frac{1}{2}(4{,}0)/(3/2)(4{,}0)(-15)]$

$= 0{,}147$ y $f = 6{,}8$ cm.

$h_1 = -(6{,}8)\frac{1}{2}(4{,}0)/(-15)(3/2) = +0{,}60$ cm, mientras que $h_2 = -2{,}3$. Para encontrar la imagen $1/(100{,}6) + 1/s_i = 1/(6{,}8)$; $s_i = 7{,}3$ cm o 5 cm desde la cara posterior de la lente.

6.18 $h_1 = n_{t1}(1 - a_{11})/-a_{12} = (\mathfrak{D}_2 d_{21}/n_{t1})f$

$= -(n_{t1} - 1)d_{21}f/R_2 n_{t1}$

de la ecuación (5.64) donde $n_{t1} = n_l$;

$h_2 = n_{t2}(a_{22} - 1)/-a_{12}$

$= -(\mathfrak{D}_1 d_{21}/n_{t1})f$ de la ecuación (5.70)

$= -(n_{i1} - 1)d_{21}f/R_1 n_{t1}$

6.19 $\mathscr{A} = \mathscr{R}_2\mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1$, pero para la superficie plana

$$\mathscr{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\mathfrak{D}_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\mathfrak{D}_2 = (n_{t1} - 1)/(-R_2)$ pero $R_2 = \infty$

$$\mathscr{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es la matriz unitaria, por lo tanto $\mathscr{A} = \mathscr{T}_{21}\mathscr{R}_1$.

6.20 $\mathfrak{D}_1 = (1{,}5 - 1)/0{,}5 = 1$

y $\mathfrak{D}_2 = (1{,}5 - 1)/-(-0{,}25) = 2$

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2(0{,}3)/1{,}5 & -1 + 2(1)\,(0{,}3)/(1{,}5 - 2) \\ 0{,}3/1{,}5 & -1(0{,}3)/1{,}5 + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6 & -2.6 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$|\mathscr{A}| = 0{,}6(0{,}8) - (0{,}2)(-2{,}6) = 0{,}48 + 0{,}52 = 1$

6.25 Véase E. Slayter, *Optical Methods in Biology*. $\overline{PC}/\overline{CA} = (n_1/n_2)R/R = n_1/n_2$, mientras que $\overline{CA}/\overline{P'C} = n_1/n_2$. Por lo tanto, los triángulos ACP y ACP' son similares; recurriendo a la Ley del seno

$$\frac{\operatorname{sen} \measuredangle PAC}{\overline{PC}} = \frac{\operatorname{sen} \measuredangle APC}{\overline{CA}}$$

o

$$n_2 \operatorname{sen} \measuredangle PAC = n_1 \operatorname{sen} \measuredangle APC$$

pero $\theta_i = \measuredangle PAC$, por lo tanto $\theta_t = \measuredangle APC = \measuredangle P'AC$, y el rayo refractado parece proceder de P'.

6.26 De la ecuación (5.6), sea $\cos\varphi = 1 - \varphi^2/2$; entonces

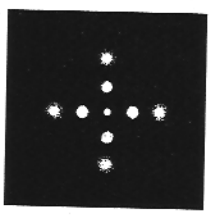
$$\ell_o = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R) + R(s_o + R)\varphi^2]^{1/2}$$
$$\ell_o^{-1} = [s_o^2 + R(s_o + R)\varphi^2]^{-1/2}$$
$$\ell_i^{-1} = [s_i^2 - R(s_i - R)\varphi^2]^{-1/2}$$

donde se utilizan los dos primeros términos de la serie binómica,

$$\ell_o^{-1} \approx s_o^{-1} - (s_o + R)h^2/2s_o^3R \quad \text{donde } \varphi \approx h/R,$$
$$\ell_i^{-1} \approx s_i^{-1} + (s_i - R)h^2/2s_i^3R$$

Sustituyéndolos en la ecuación (5.5) llegamos a la ecuación (6.40).

6.27



Capítulo 7

7.1 $E_0^2 = 36 + 64 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos \pi/2 = 100$, $E_0 = 10$; $\tan\alpha = \frac{8}{6}$, $\alpha = 53{,}1° = 0{,}93$ rad.

$$E = 10 \operatorname{sen}(120\pi t + 0{,}93)$$

7.5 $\dfrac{1\text{ m}}{500\text{ nm}} = 0{,}2 \times 10^7 = 2.000.000$ ondas

$$\text{En el vidrio } \frac{0{,}05}{\lambda_0/n} = \frac{0{,}05(1{,}5)}{500\text{ nm}} = 1{,}5 \times 10^5$$

$$\text{en el aire } \frac{0{,}95}{\lambda_0} = 0{,}19 \times 10^7$$

total 2.050.000 ondas.

$OPD = [(1.5)(0.05) + (1)(0.95)] - (1)(1)$
$OPD = 1{,}025 - 1{,}000 = 0{,}025$ m

$$\frac{\Lambda}{\lambda_0} = \frac{0{,}025}{500\text{ nm}} = 5 \times 10^4 \text{ ondas}$$

7.8 $E = E_1 + E_2 = E_{01}\{\operatorname{sen}[\omega t - k(x + \Delta x) + \operatorname{sen}(\omega t - kx)\}$

Ya que $\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta + \gamma)\cos\frac{1}{2}(\beta - \gamma)$

$$E = 2E_{01}\cos\frac{k\Delta x}{2}\operatorname{sen}\left[\omega t - k\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

7.9 $E = E_0\operatorname{Re}[e^{i(kx+\omega t)} - e^{i(kx-\omega t)}]$
$= E_0\operatorname{Re}[e^{ikx}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})]$
$= E_0\operatorname{Re}[e^{ikx}2i\operatorname{sen}\omega t]$
$= E_0\operatorname{Re}[2i\cos kx\operatorname{sen}\omega t - 2\operatorname{sen}kx\operatorname{sen}\omega t]$

y $E = -2E_0\operatorname{sen}kx\operatorname{sen}\omega t$. Onda estacionaria con nodo en $x = 0$.

7.10

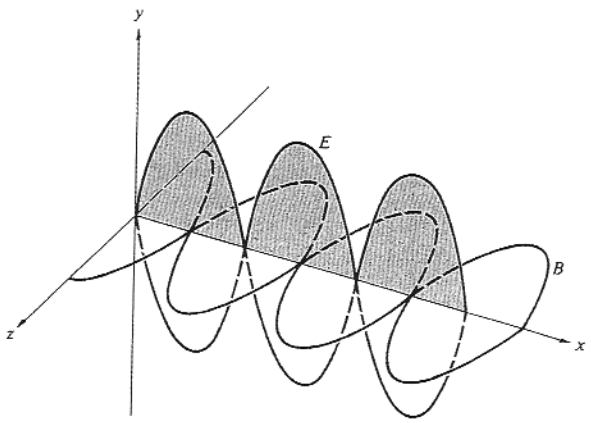
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Integrando para obtener

$$B(x, t) = -\int \frac{\partial E}{\partial x}\,dt = -2E_0k\cos kx\int \cos\omega t\,dt$$
$$= -\frac{2E_0k}{\omega}\cos kx\operatorname{sen}\omega t$$

Pero $E_0k/\omega = E_0/c = B_0$; por lo tanto

$$B(x, t) = -2B_0\cos kx\operatorname{sen}\omega t$$



7.15 $E = E_0\cos\omega_c t + E_0\alpha\cos\omega_m t\cos\omega_c t$

$$= E_0\cos\omega_c t + \frac{E_0\alpha}{2}[\cos(\omega_c - \omega_m)t + \cos(\omega_c + \omega_m)t]$$

Rango audible $\nu_m = 20$ Hz a 20×10^3 Hz. El máximo de modulación de la frecuencia es $\nu_m(\text{máx}) = 20 \times 10^3$ Hz.

$$\nu_c - \nu_m(\text{máx}) \leq \nu \leq \nu_c + \nu_m(\text{máx})$$
$$\Delta\nu = 2\nu_m(\text{máx}) = 40 \times 10^3 \text{ Hz}$$

7.16 $v = \omega/k = ak, \qquad v_g = d\omega/dk = 2ak = 2v$

7.19

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{g/k}$$
$$v_g = v + k\frac{dv}{dk} \qquad [7.38]$$
$$\frac{dv}{dk} = -\frac{1}{2k}\sqrt{\frac{g}{k}} = -\frac{v}{2k}$$
$$v_g = v/2$$

7.21 $v_g = v + k\dfrac{dv}{dk}$ y $\dfrac{dv}{dk} = \dfrac{dv}{d\omega}\dfrac{d\omega}{dk} = v_g\dfrac{dv}{d\omega}$

Ya que $v = c/n$, $\dfrac{dv}{d\omega} = \dfrac{dv}{dn}\dfrac{dn}{d\omega} = -\dfrac{c}{n^2}\dfrac{dn}{d\omega}$

$$v_g = v - \frac{v_g ck}{n^2}\frac{dn}{d\omega} = \frac{v}{1 + (ck/n^2)(dn/d\omega)} = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

7.26 $\omega >> \omega_i$, $\quad n^2 = 1 - \dfrac{Nq_e^2}{\omega^2\epsilon_0 m_e}\sum f_i = 1 - \dfrac{Nq_e^2}{\omega^2\epsilon_0 m_e}$

Utilizando la expansión binómica, obtenemos

$$(1 - x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{para } x << 1$$

$$n = 1 - Nq_e^2/\omega^2\epsilon_0 m_e 2, \qquad dn/d\omega = Nq_e^2/\epsilon_0 m_e\omega^3$$

$$v_g = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}$$

$$= \frac{c}{1 - Nq_e^2/\omega^2\epsilon_0 m_e 2 + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e\omega^2}$$

$$= \frac{c}{1 + Nq_e^2/\epsilon_0 m_e\omega^2 2}$$

y $v_g < c$,

$$v = c/n = \frac{c}{1 - Nq_e^2/\epsilon_0 m_e\omega^2 2}$$

Expansión binómica

$$(1 - x)^{-1} \approx 1 + x, \qquad x << 1$$

$$v = c[1 + Nq_e^2/e_0 m_e\omega^2 2]; \qquad vv_g = c^2$$

7.28 $\displaystyle\int_0^\lambda \operatorname{sen} akx \operatorname{sen} bkx\, dx$

$$= \frac{1}{2k}\left[\int_0^\lambda \cos[(a - b)kx]k\, dx - \int_0^\lambda \cos[(a + b)kx]k\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2k}\frac{\operatorname{sen}(a - b)kx}{a - b}\bigg|_0^\lambda - \frac{1}{2k}\frac{\operatorname{sen}(a + b)kx}{a + b}\bigg|_0^\lambda$$

$$= 0 \quad \text{si } a \neq b$$

Mientras que si $a = b$

$$\int_0^\lambda \operatorname{sen}^2 akx\, dx = \frac{1}{2k}\int_0^\lambda (1 + \cos 2akx)k\, dx = \frac{\lambda}{2}$$

Las otras integrales son parecidas.

7.29 La función es par, por lo tanto $B_m = 0$.

$$A_0 = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/a}^{\lambda/a} dx = \frac{2}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda}{a}\right) = \frac{4}{a}$$

$$A_m = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/a}^{\lambda/a} (1)\cos mkx\, dx$$

$$= \frac{2}{mk\lambda}\operatorname{sen} mkx\Big]_{-\lambda/a}^{\lambda/a}$$

$$A_m = \frac{2}{m\pi}\operatorname{sen}\frac{m2\pi}{a}$$

7.33

$$f'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^a E_0 L\frac{\operatorname{sen} kL/2}{kL/2}\cos kx\, dk$$

$$= \frac{E_0 L}{\pi 2}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(kL/2 + kx)}{kL/2}\, dk$$

$$+ \frac{E_0 L}{\pi 2}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(kL/2 - kx)}{kI/2}\, dk$$

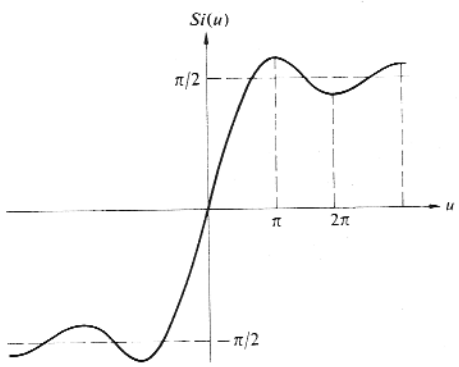
Sea $kL/2 = w$, $(L/2)\, dk = dw$, $kx = wx'$.

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(w + wx')}{w}\, dw + \frac{E_0}{\pi}\int_0^b \frac{\operatorname{sen}(w - wx')}{w}\, dw$$

donde $b = aL/2$. Sea $w + wx' = t$, $dw/w = dt/t$. $0 \leq w \leq b$ y $0 \leq t \leq (x' + 1)b$. Sea $w - wx' = -t$ en la otra integral. $0 \leq w \leq b$ y $0 \leq t \leq (x' - 1)b$.

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi}\int_0^{(x'+1)b} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt - \frac{E_0}{\pi}\int_0^{(x'-1)b} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

$$f'(x) = \frac{E_0}{\pi}\operatorname{Si}[b(x' + 1)] - \frac{E_0}{\pi}\operatorname{Si}[b(x' - 1)], \qquad x' = 2x/L$$



7.34 Por analogía con la ecuación (7.61),

$$A(\omega) = \frac{\Delta t}{2}E_0 \operatorname{sinc}(\omega_p - \omega)\frac{\Delta t}{2}$$

De la tabla 1 (pág. 659) sinc $(\pi/2) = 63{,}7\%$. En realidad no alcanza el 50%,

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{1{,}65}\right) = 49{,}8\%$$

$$\left|(\omega_p - \omega)\frac{\Delta t}{2}\right| < \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad -\frac{\pi}{\Delta t} < (\omega_p - \omega) < \frac{\pi}{\Delta t}$$

por lo tanto, valores apreciables de $A(\omega)$ se hallan en una rango $\Delta\omega \sim 2\pi/\Delta t$ y $\Delta\nu\,\Delta t \sim 1$. El espectro de potencia es proporcional a $A^2(\omega)$, y $[\text{sinc}\,(\pi/2)]^2 = 40{,}6\%$.

7.35 $\Delta l_c = c\,\Delta t_c$, $\Delta l_c \approx c/\Delta\nu$. Pero $\Delta\omega/\Delta k_0 = \bar{\omega}/\bar{k}_0 = c$; por lo tanto $|\Delta\nu/\Delta\lambda_0| = \bar{\nu}/\bar{\lambda}_0$,

$$\Delta l_c \approx \frac{c\bar{\lambda}_0}{\Delta\lambda_0\bar{\nu}} \qquad \Delta l_c \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta\lambda_0$$

O si se intenta utilizar el principio de incertidumbre:

$$\Delta l \approx \frac{h}{\Delta p} \quad \text{donde } p = h/\lambda \text{ y } \Delta\lambda_0 << \bar{\lambda}_0$$

7.36
$$\Delta l_c = c\,\Delta t_c = 3 \times 10^8\ \text{m/s}\ 10^{-8}\ \text{s} = 3\ \text{m}$$
$$\Delta\lambda_0 \sim \lambda_0^2/\Delta l_c = (500 \times 10^{-9}\ \text{m})^2/3\ \text{m}$$
$$\Delta\lambda_0 \sim 8{,}3 \times 10^{-14}\ \text{m} = 8{,}3 \times 10^{-5}\ \text{nm}$$
$$\Delta\lambda_0/\bar{\lambda}_0 = \Delta\nu/\bar{\nu} = 8{,}3 \times 10^{-5}/500 = 1{,}6 \times 10^{-7}$$
$$\approx 1 \text{ parte en } 10^7$$

7.37 $\Delta\nu = 54 \times 10^3$ Hz

$$\Delta\nu/\bar{\nu} = \frac{(54 \times 10^3)(10.600 \times 10^{-9}\ \text{m})}{(3 \times 10^8\ \text{m/s})}$$
$$= 1{,}91 \times 10^{-9}$$
$$\Delta l_c = c\Delta t_c \approx c/\Delta\nu$$
$$\Delta l_c \approx \frac{(3 \times 10^8\ \text{m/s})}{(54 \times 10^3\ \text{Hz})} = 5{,}55 \times 10^3\ \text{m}$$

7.39 $\Delta l_c = c\,\Delta t_c = 3 \times 10^8 \times 10^{-10} = 3 \times 10^{-2}$ m
$\Delta\nu \approx 1/\Delta t_c = 10^{10}$ Hz
$\Delta\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta l_c$ (véase problema 7.35)
$= (632{,}8\ \text{nm})^2/3 \times 10^{-2}\ \text{m} = 0{,}013\ \text{nm}$
$\Delta\nu = 10^{15}$ Hz, $\Delta l_c = c \times 10^{-15} = 300$ nm
$\Delta\lambda_0 \approx \bar{\lambda}_0^2/\Delta l_c = 1334{,}78$ nm

Capítulo 8

8.1

(a) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \cos(kz - \omega t + \pi)$. Para amplitudes iguales, E_y está retrasada con respecto a E_x en π. Por lo tanto, el estado $\mathcal{P}$ a 135° o −45°.

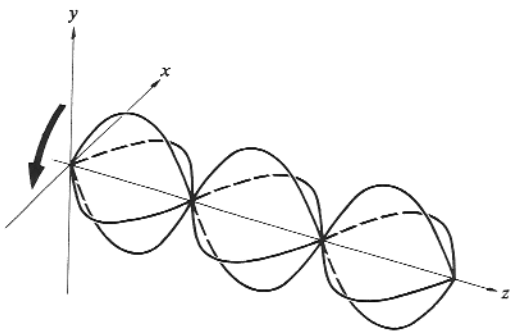
(b) $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t - \pi/2) + \hat{\mathbf{j}}E_0 \cos(kz - \omega t + \pi/2)$. Para amplitudes iguales, E_y está retrasada con respecto a E_x by π. Por lo tanto, lo mismo que (a).

(c) E_x precede a E_y en $\pi/4$. Tienen amplitudes iguales. Se trata, por lo tanto, de una elipse inclinada a +45° y esta a izquierdas.

(d) E_y precede a E_x en $\pi/2$. Tienen amplitudes iguales. Se trata, por lo tanto, de un estado $\mathcal{R}$.

8.2 $E_x = \hat{\mathbf{i}} \cos \omega t, \qquad E_y = \hat{\mathbf{j}}\ \text{sen}\ \omega t$

Onda estacionaria circular a izquierdas.



8.3 $\mathbf{E}_{\mathcal{R}} = \hat{\mathbf{i}}E_0 \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}E_0\ \text{sen}\ (kz - \omega t)$

$\mathbf{E}_{\mathcal{L}} = \hat{\mathbf{i}}E_0' \cos(kz - \omega t) - \hat{\mathbf{j}}E_0'\ \text{sen}\ (kz - \omega t)$

$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\mathcal{R}} + \mathbf{E}_{\mathcal{L}} = \hat{\mathbf{i}}\,(E_0 + E_0') \cos(kz - \omega t)$

$+ \hat{\mathbf{j}}(E_0 - E_0')\ \text{sen}\ (kz - \omega t).$

Sea $E_0 + E_0' = E_{0x}''$ y $E_0 - E_0' = E_{0y}''$; entonces $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E_{0x}'' \cos(kz - \omega t) + \hat{\mathbf{j}}E_{0y}''\ \text{sen}\ (kz - \omega t)$. De la ecuación (8.11) y (8.12) está claro que donde $\varepsilon = -\pi/2$ y $\alpha = 0$.

8.4 $E_{0y} = E_0 \cos 25°$; $E_{0z} = E_0\ \text{sen}\ 25°$;

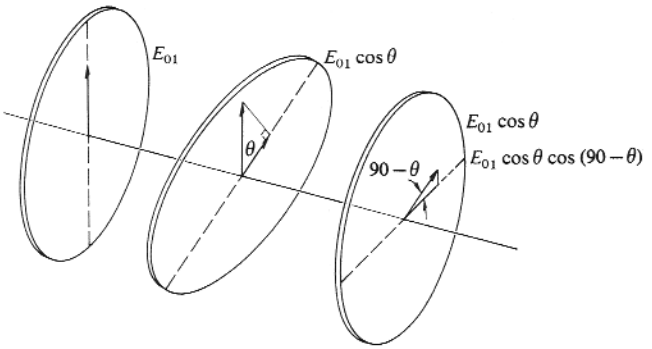
$$\mathbf{E}(x, t) = (0{,}91\hat{\mathbf{j}} + 0{,}42\hat{\mathbf{k}})E_0 \cos(kx - \omega t + \tfrac{1}{2}\pi)$$

8.6 $\mathbf{E} = E_0[\hat{\mathbf{j}}\ \text{sen}\ (kx - \omega t) - \hat{\mathbf{k}} \cos(kx - \omega t)]$

8.9 Con luz natural cada filtro deja pasar el 32% del haz incidente. La mitad de la densidad del flujo de entrada se halla en la forma de un estado $\mathcal{P}$, paralelo al eje de extinción que, de hecho no emerge en absoluto. Por lo tanto, se transmite un 64 % de la luz paralela al eje de transmisión. En el problema presente, un 32% de I_i penetra en el segundo filtro y un 64% $(32\%I_i) = 21\%I_i$ sale del mismo.

8.20 De la figura (superior derecha) se deduce que

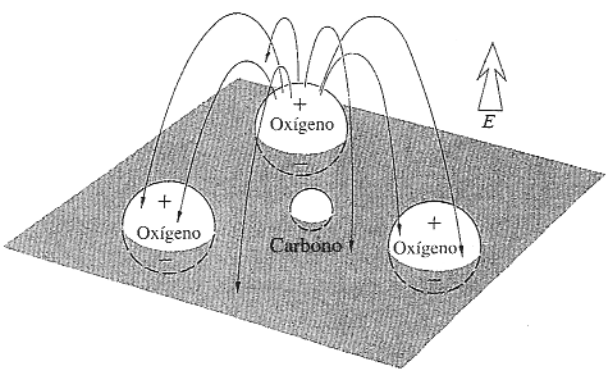
$$I = \tfrac{1}{2}E_{01}^2\ \text{sen}^2\,\theta \cos^2\theta = \frac{E_{01}^2}{8}(1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)$$
$$= \frac{E_{01}^2}{8}(1 - \cos^2 2\theta) = \frac{E_{01}^2}{8}[1 - (\tfrac{1}{2}\cos 4\theta + \tfrac{1}{2})]$$
$$= \frac{E_{01}^2}{16}(1 - \cos 4\theta) = \frac{I_1}{8}(1 - \cos 4\theta) \qquad \theta = \omega t$$



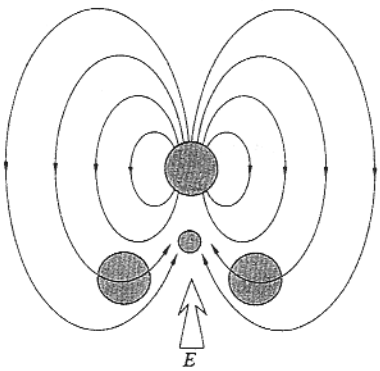
8.21 No. El cristal funciona como si fuesen dos muestras orientadas en dirección opuesta y en serie. Dos cristales en serie, con orientación similar se comportarían como una muestra gruesa separando, por lo tanto, aún más los rayos *o* y *e*.

8.23 La luz esparcida por el papel atraviesa los polaroides polarizándose linealmente. La luz procedente del filtro superior izquierdo tiene su campo **E** paralelo a la sección principal (que es diagonal en el segundo y cuarto cuadrantes) siendo, por lo tanto, un rayo *e*. Obsérvese cómo las letras *P* y *T* se desplazan hacia abajo de forma *extraordinaria*. El filtro inferior derecho deja pasar un rayo *o* tal que la letra *C* no es desviada. Nótese que la imagen ordinaria está más cerca de la esquina roma.

8.24 (a) y (c) son dos aspectos del problema anterior. (b) muestra una doble refracción porque el eje del polaroide está aproximadamente a 45° de la sección principal del cristal. Por lo tanto, se darán tanto los rayos *e* como *o*.



8.25 Cuando **E** es perpendicular al plano CO_3, la polarización será menor que cuando es paralelo. En el primer caso, el campo de cada átomo de oxígeno polarizado tiende a reducir la polarización de sus vecinos. En otras palabras, el campo inducido, tal y como se muestra en la figura, está abajo mientras que **E** está arriba. Cuando **E** se halla en el plano del carbonato, dos dipolos refuerzan el tercero y viceversa. Una polarizabilidad reducida conduce a una constante dieléctrica inferior, a un índice de refracción inferior así como a una velocidad más elevada. Por lo tanto $v_{\parallel} > v_{\perp}$.



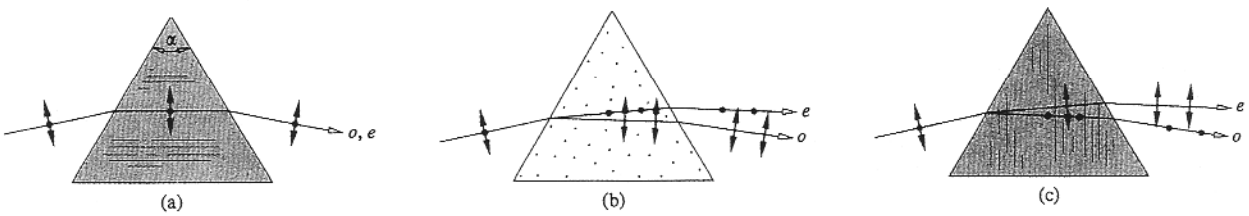
8.33 $n_o = 1{,}658\,4$, $n_e = 1{,}486\,4$. La Ley de Snell:

$$\text{sen}\,\theta_i = n_o \,\text{sen}\,\theta_{to} = 0{,}766$$
$$\text{sen}\,\theta_i = n_e \,\text{sen}\,\theta_{te} = 0{,}766$$
$$\text{sen}\,\theta_{to} \approx 0{,}463, \qquad \theta_{to} \approx 27°35'$$
$$\text{sen}\,\theta_{te} \approx 0{,}516, \qquad \theta_{te} \approx 31°4'$$
$$\Delta\theta \approx 3°29'$$

8.35 En la calcita $n_o > n_e$. Dos espectros serán visibles cuando (b) o (c) se usen en un espectrómetro. Los índices se calculan de la forma usual, recurriendo a

$$n = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}(\alpha + \delta_m)}{\text{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}$$

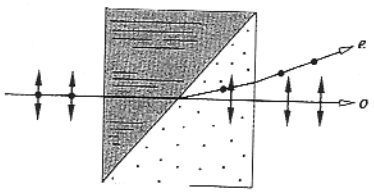
donde δ_m es el ángulo de desviación mínima de cada haz.



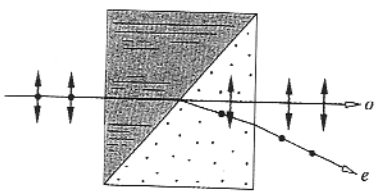
8.36 E_x adelanta a E_y en $\pi/2$. Inicialmente estaban en fase y $E_x > E_y$. Por lo tanto la onda está a izquierdas, es elíptica y horizontal.

8.37 $\text{sen}\,\theta_c = \dfrac{n_{\text{bálsamo}}}{n_0} = \dfrac{1,55}{1,658} = 0,935;\ \theta_c \sim 69°$

8.39



(a) Calcita



(b) Cuarzo

(c) La energía no deseada de uno de los estados $\mathcal{P}$ puede eliminarse sin problemas locales de calentamiento.

(d) El prisma de Rochon transmite un haz sin desviarlo (el rayo *o*), que es, por lo tanto, también acromático.

8.44

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d\,\Delta n$$

pero $\Delta\varphi = (1/4)(2\pi)$ a causa del desplazamiento de franjas. Por lo tanto, $\Delta\varphi = \pi/2$ y

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi\, d\,(0,005)}{589,3 \times 10^{-9}}$$

$$d = \frac{589,3 \times 10^{-9}}{2(10^{-2})} = 2,94 \times 10^{-5}\ \text{m}$$

8.45 El estado $\mathcal{R}$ incidente en la pantalla de vidrio impulsa a los electrones en órbitas circulares y éstos radian de nuevo luz circular reflejada cuyo campo **E** gira en la misma dirección que el haz incidente. Sin embargo, la dirección de propagación ha sido invertida por la reflexión, por consiguiente a pesar de que la luz incidente se halla en un estado $\mathcal{R}$, la luz reflejada está a izquierdas, siendo, por lo tanto, absorbida completamente por el polarizador circular a derechas, tal y como se ilustra en la figura anterior.

8.46 Sí. Si las amplitudes de los estados $\mathcal{P}$, difieren. El haz transmitido, en una pila de placas polarizadoras, especialmente en una pila pequeña.

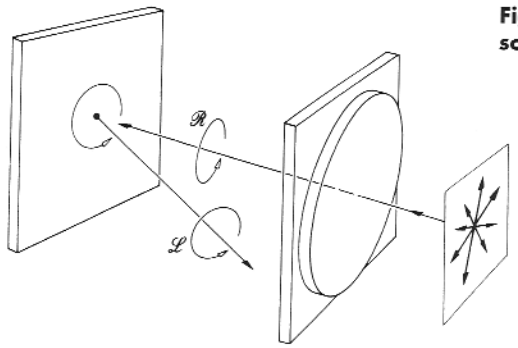


Figura para solución 8.45

8.48 Coloque el material fotoclástico entre polarizadores circulares con ambos retardadores delante del mismo (como en la fig. 8.51). Con iluminación circular, no hay ninguna preferencia acerca de la orientación de los ejes de tensión que serán, por lo tanto, indistinguibles. Únicamente la birrefringencia tendrá efecto y, en consecuencia, las isocromáticas serán visibles. Si los dos polarizadores son diferentes, es decir uno es $\mathcal{R}$, y el otro $\mathcal{L}$, las regiones donde Δn lleva a $\Delta\varphi = \pi$ aparecerá brillante. Si son iguales, tales regiones aparecerán oscuras.

8.50

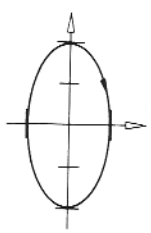
$$V_{\lambda/2} = \lambda_0/2n_0^3 r_{63} \qquad [8.44]$$
$$= 550 \times 10^{-9}/2(1,58)^3 5,5 \times 10^{-12}$$
$$= 10^5/2(3,94) = 12,7\ \text{kV}$$

8.51 $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = 0,\ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} e_{21} \\ e_{22} \end{bmatrix}$

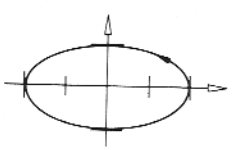
$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* = (1)\,(e_{21})^* + (-2i)(e_{22})^* = 0$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E}_1$ es



$\mathbf{E}_2$ es



8.57

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.59

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

8.60

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

8.62

$$\begin{bmatrix}te^{i\varphi}&0\\0&te^{i\varphi}\end{bmatrix}$$

donde un incremento de fase de φ es introducido en ambas componentes como resultado de cruzar la placa

8.63

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}t^2&0&0&0\\0&t^2&0&0\\0&0&t^2&0\\0&0&0&t^2\end{bmatrix}\qquad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

8.64

$$V=\frac{I_p}{I_p+I_u}=\frac{(\mathcal{S}_1^2+\mathcal{S}_2^2+\mathcal{S}_3^2)^{1/2}}{\mathcal{S}_0}$$

$$I_p=(\mathcal{S}_1^2+\mathcal{S}_2^2+\mathcal{S}_3^2)^{1/2};\qquad I-I_p=I_u$$

$$\mathcal{S}_0-(\mathcal{S}_1^2+\mathcal{S}_2^2+\mathcal{S}_3^2)^{1/2}=I_u$$

$$\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$5-(0+0+1)^{1/2}=I_u$$

Capítulo 9

9.1 $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2=\frac{1}{2}(\mathbf{E}_1e^{\ i\omega t}+\mathbf{E}_1^*e^{i\omega t})\cdot\frac{1}{2}(\mathbf{E}_2e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_2^*e^{i\omega t})$,

donde $\text{Re}\,(z)=\frac{1}{2}(z+z^*)$.

$$\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2=\tfrac{1}{4}[\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2e^{-2i\omega t}+\mathbf{E}_1^*\cdot\mathbf{E}_2^*e^{2i\omega t}+\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*+\mathbf{E}_1^*\cdot\mathbf{E}_2]$$

Los dos últimos términos son independientes del tiempo, mientras que

$$\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2e^{-2i\omega t}\rangle\to0\quad\text{y}\quad\langle\mathbf{E}_1^*\cdot\mathbf{E}_2^*e^{2i\omega t}\rangle\to0$$

a causa del coeficiente $1/T\omega$. Por lo tanto

$$I_{12}=2\langle\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\rangle=\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*+\mathbf{E}_1^*\cdot\mathbf{E}_2)$$

9.2 El valor más grande de (r_1-r_2) es igual a a. Por lo tanto, si $\varepsilon_1=\varepsilon_2$, $\delta=k(r_1-r_2)$ varía de 0 a ka. Si $a>>\lambda$, cos δ y por lo tanto I_{12} tendrán muchos máximos y mínimos siendo, por consiguiente, su promedio cero sobre una amplia región del espacio. En cambio, si $a<<\lambda$, δ varía sólo ligeramente de 0 a $ka<<2\pi$. De ahí que I_{12} no se promedia a cero y de la ecuación (9.17), I se desvía poco de $4I_0$.

Las dos fuentes se comportan efectivamente como una fuente única con el doble de la potencia original.

9.4 Una bombilla en S produciría franjas. Podemos imaginárnoslas hechas de un número muy elevado de fuentes puntuales incoherentes generando, cada una de ellas, una distribución independiente todos ellos superponiéndose. Las bombillas en S_1 y S_2 serían incoherentes y no podrían generar franjas detectables.

9.7

(a) $(r_1 - r_2) = \pm\frac{1}{2}\lambda$, de ahí que a sen $\theta_1 = \pm\frac{1}{2}\lambda$ y $\theta_1 \approx \pm\frac{1}{2}\lambda/a = \pm\frac{1}{2}(632{,}8 \times 10^{-9}\text{ m})/(0{,}200 \times 10^{-3}\text{ m}) = \pm 1{,}58 \times 10^{-3}$ rad, o ya que $y_1 = s\theta_1 = (1{,}00\text{ m})(\pm 1{,}58 \times 10^{-3}\text{ rad}) = \pm 1.58$ mm.

(b) $y_5 = s5\lambda/a = (1{,}00\text{ m})5(632{,}8 \times 10^{-9})/(0{,}200 \times 10^{-3}\text{ m}) = 1{,}582 \times 10^{-2}$ m.

(c) Puesto que las franjas varían como el cuadrado de coseno y la respuesta a (a) es la mitad del ancho de franja, la respuesta a (b) es 10 veces más grande.

9.15 $r_2^2 = a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos\ (90 - \theta)$. La contribución a $\cos \delta/2$ por el tercer término del desarrollo de Maclaurin será despreciable si

$$\frac{k}{2}\left(\frac{a^2}{2r_1}\cos^2\theta\right) << \pi/2$$

por lo tanto $r_1 >> a^2/\lambda$.

9.16 $E = \frac{1}{2}mv^2$; $\quad v = 0{,}42 \times 10^6$ m/s

$\lambda = h/mv = 1{,}73 \times 10^{-9}$; $\quad \Delta y = s\lambda/a = 3{,}46$ mm

9.20 $\Delta y = s\lambda_0/2d\alpha(n - n')$

9.21 $\Delta y = (s/a)\lambda$, $\quad a = 10^{-2}$ cm, $\quad a/2 = 5 \times 10^{-3}$ cm

9.22 $\delta = k(r_1 - r_2) + \pi$ (espejo de Lloyd)

$\delta = k\{a/2 \text{ sen } \alpha - [\text{sen } (90 - 2\alpha)]a/2 \text{ sen } \alpha\} + \pi$

$\delta = ka(1 - \cos 2\alpha)/2 \text{ sen } \alpha + \pi$

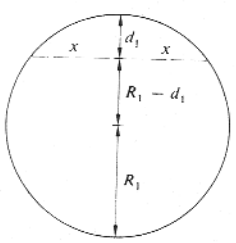
el máximo se da para

$\delta = 2\pi$ cuando sen $\alpha\ (\lambda/a) = (1 - \cos 2\alpha) = 2 \text{ sen}^2 \alpha$

El primer máximo $\alpha = \text{sen}^{-1}\ (\lambda/2a)$.

9.24 Aquí $1{,}00 < 1{,}34 > 1{,}00$, por lo tanto de la ecuación (9.36) con $m = 0$, $d = (0 + \frac{1}{2})\ (633\text{ nm})/2(1{,}34) = 118$ nm.

9.27 Ecuación (9.37) $m = 2n_f d/\lambda_0 = 10\,000$. Un mínimo, por lo tanto, una región central oscura.



9.28 Por lo general, las franjas son una serie de finas bandas con cortes irregulares, fijas con respecto al vidrio.

9.29 $x^2 = d_1[(R_1 - d_1) + R_1] = 2R_1d_1 - d_1^2$

De manera parecida $x^2 = 2R_2d_2 - d_2^2$

$$d = d_1 - d_2 = \frac{x^2}{2}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right], \qquad d = m\frac{\lambda_f}{2}$$

Conforme $R_2 \to \infty$, x_m se aproxima a la ecuación (9.43).

9.31 $\Delta x = \lambda_f/2\alpha$, $\qquad \alpha = \lambda_0/2n_f\Delta x$

$\alpha = 5 \times 10^{-5}$ rad $= 10{,}2$ segundos

9.33 Un movimiento de $\lambda/2$ obliga a un par de franjas individuales a desplazarse, por lo tanto $92\ \lambda/2 = 2{,}53 \times 10^{-5}$ m y $\lambda = 550$ nm.

9.37 $E_t^2 = E_tE_t^* = E_0^2(tt')^2/(1 - r^2e^{-i\delta})(1 - r^2e^{+i\delta})$

$I_t = I_i(tt')^2/(1 - r^2e^{-i\delta} - r^2e^{i\delta} + r^4)$

9.38 (a) $R = 0{,}80 \therefore F = 4R/(1 - R)^2 = 80$

(b) $\gamma = 4 \text{ sen}^{-1}\ 1/\sqrt{F} = 0{,}448$

(c) $\mathcal{F} = 2\pi/0{,}448$

(d) $C = 1 + \text{F}$

9.39 $$\frac{2}{1 + F(\Delta\delta/4)^2} = 0{,}81\left[1 + \frac{1}{1 + F(\Delta\delta/2)^2}\right]$$

$F^2(\Delta\delta)^4 - 15{,}5F(\Delta\delta)^2 - 30 = 0$

9.40 $I = I_{\text{máx}} \cos^2 \delta/2$

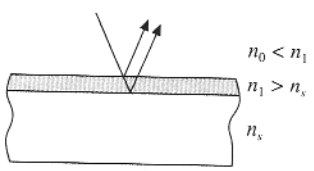
$I = I_{\text{máx}}/2$ cuando $\delta = \pi/2 \quad \therefore \gamma = \pi$

La separación entre máximos es 2π

$$\mathcal{F} = 2\pi/\gamma = 2$$

9.42 Casi a incidencia normal ($\theta_i \approx 0$) la figura 4.23 *e* indica que el desplazamiento relativo de fase entre un haz reflejado interna y externamente es π rad. Esto quiere decir que hay una diferencia relativa de fase total de

$$\frac{2\pi}{\lambda_f}\ [2(\lambda_f/4)] + \pi$$



o de 2π. Las ondas están en fase e interfieren constructivamente.

9.43 $n_0 = 1 \quad n_s = n_v \quad n_1 = \sqrt{n_v}$

$$\sqrt{1{,}54} = 1{,}24$$

$$d = \frac{1}{4}\lambda_f = \frac{1}{4}\frac{\lambda_0}{n_1} = \frac{1}{4}\frac{540}{1{,}24}\text{ nm}$$

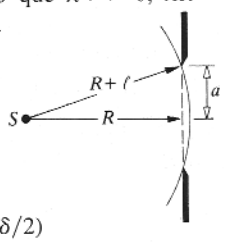
No se produce ningún desfase relativo entre dos ondas.

9.44 La onda refractada atravesará la película dos veces y no se producirá ningún desfase relativo al reflejarse. Por lo tanto

$$d = \lambda_0/4n_f = (550\text{ nm})/4(1{,}38) = 99{,}6\text{ nm}.$$

Capítulo 10

10.1 $(R + \ell)^2 = R^2 + a^2$; por lo tanto $R = (a^2 - \ell^2)/2\ell \approx a^2/2\ell$, $\ell R = a^2/2$, de modo que $\lambda >> \ell$, $\lambda R >> a^2/2$ $\therefore$ $R = (1 \times 10^{-3})^2 10/2\lambda = 10$ m.



10.2 $E_0/2 = R \operatorname{sen}(\delta/2)$

$E = 2R \operatorname{sen}(N\delta/2)$ extensión de la cuerda

$E = [E_0 \operatorname{sen}(N\delta/2)]/\operatorname{sen}(\delta/2)$

$I = E^2$

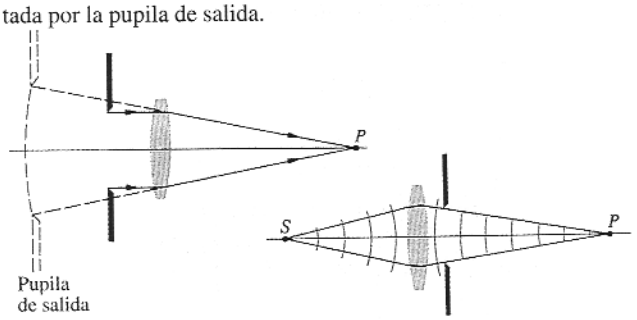
10.4 $d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda$, $\theta = N\delta/2 = \pi$

$7 \operatorname{sen}\theta = (1)(0{,}21)$ $\delta = 2\pi/N = kd \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\theta = 0{,}03$ $\operatorname{sen}\theta = 0{,}0009$

$\theta = 1{,}7°$ $\theta = 3$ mín.

10.5 Una onda esférica convergente en el espacio imagen es difractada por la pupila de salida.



10.6

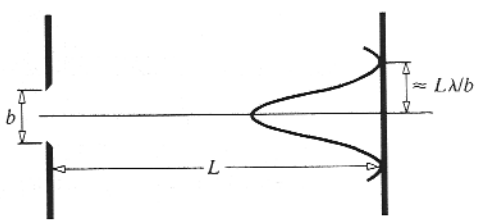
$\beta = \pm\pi$

$\operatorname{sen}\theta = \pm\lambda/b$

$\theta \approx \pm\lambda/b$

$L\theta \approx \pm L\lambda/b$

$L\theta \approx \pm f_2\lambda/b.$



10.9 $\lambda = (20\text{ cm}) \operatorname{sen} 36{,}87° = 12$ cm

10.10 $\alpha = \dfrac{ka}{2} \operatorname{sen}\theta$, $\beta = \dfrac{kb}{2} \operatorname{sen}\theta$

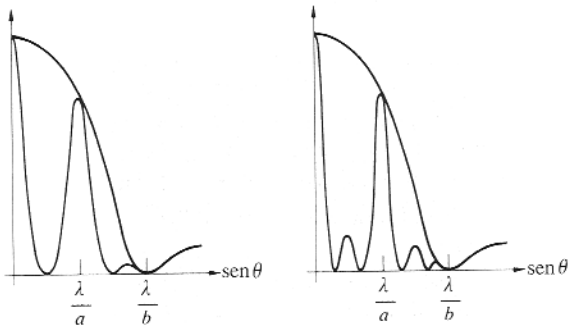
$a = mb$, $\alpha = m\beta$, $\alpha = m2\pi$

N = número de franjas $= a/\pi = m2\pi/\pi = 2m$

10.12 $\alpha = 3\pi/2N = \pi/2$ [10.34]

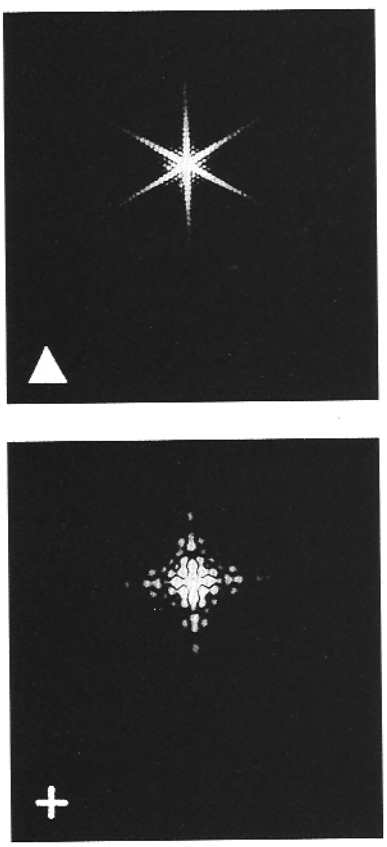
$$I(\theta) = \frac{I(0)}{N^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta}\right)^2$$ de la ecuación (10.35)

y $I/I(0) \approx \frac{1}{9}$.



10.15 Si la abertura es simétrica alrededor de una línea, la figura será simétrica alrededor de una línea paralela a ella. Es más, la figura será simétrica alrededor de otra línea perpendicular al eje de simetría de la abertura. Esto se deduce del hecho de que las distribuciones de Fraunhofer tienen un centro de simetría.

10.16



10.17 Tres rendijas cortas paralelas.

10.18 Dos rendijas cortas paralelas.

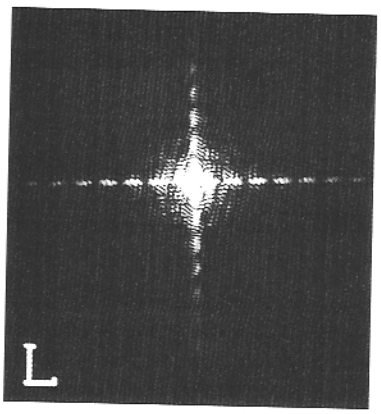
10.19 Un agujero triangular equilátero.

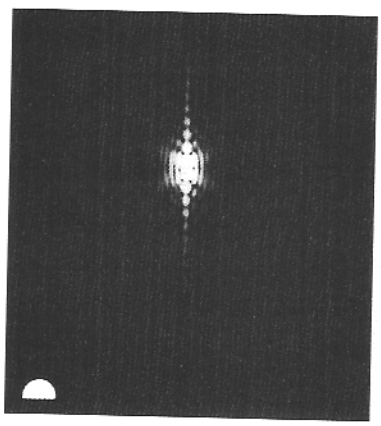
10.20 Un agujero cruciforme.

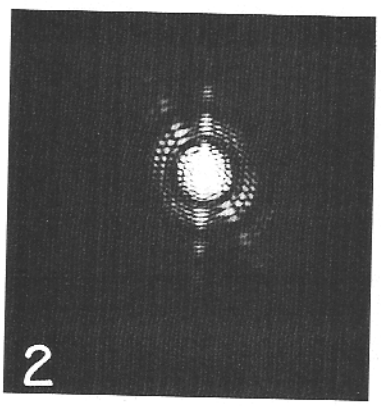
10.21 El campo E de un agujero rectangular.

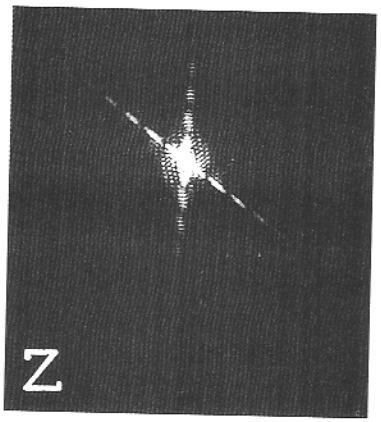
10.23 De la ecuación (10.58), $q_1 \approx 1{,}22(f/\mathrm{D})\lambda \approx \lambda$.

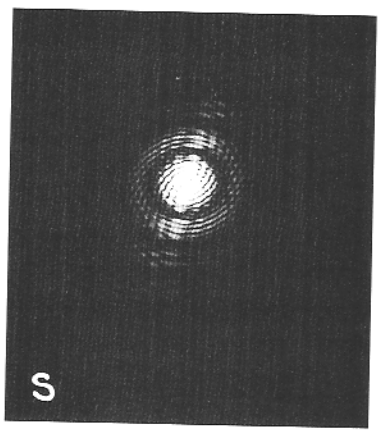
10.24

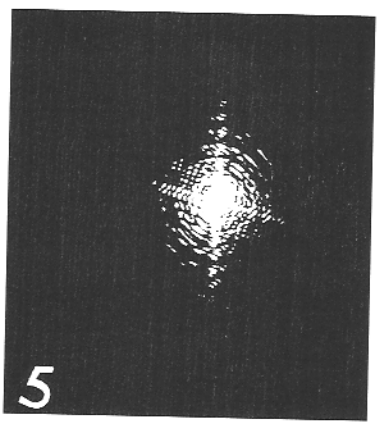












10.27 Una parte en mil. 3 yd $\approx$ 100 pulgadas. (Véase la figura en la pág. 689.)

10.32 De la ecuación (10.32), donde $a = 1/(1.000 \text{ líneas por cm}) = 0{,}001$ cm por línea (de centro a centro), sen $\theta_m = 1(650 \times 10^{-9}\ \mathrm{m})/(0{,}001 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}) = 6{,}5 \times 10^{-2}$ y $\theta_1 = 3{,}73°$.

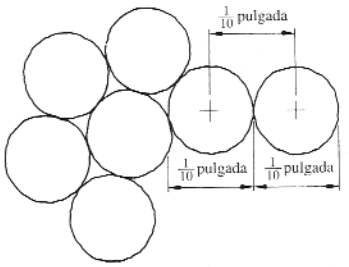


Figura para la solución 10.27

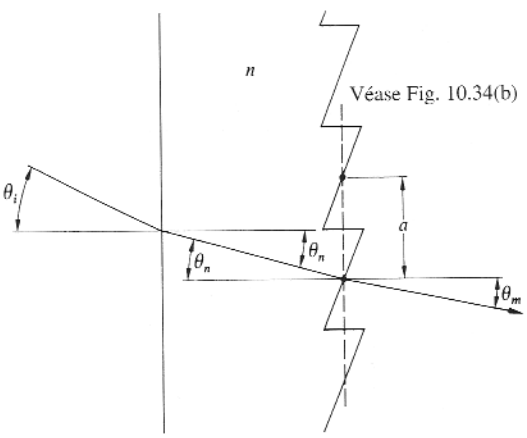
10.35 El valor más elevado de m en la ecuación (10.32) se da cuando la función seno es igual a cero, agrandando todo lo posible el lado izquierdo de la ecuación, luego $m = a/\lambda = (1/10 \times 10^5)/(3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s} \div 4{,}0 \times 10^{14} \text{ Hz}) = 1{,}3$, siendo visible tan sólo el espectro de primer orden.

10.37 $\operatorname{sen} \theta_i = n \operatorname{sen} \theta_n$

Diferencia de longitud de camino óptico $= m\lambda$

$a \operatorname{sen} \theta_m - na \operatorname{sen} \theta_n = m\lambda$

$a(\operatorname{sen} \theta_m - \operatorname{sen} \theta_i) = m\lambda$



10.38 $\mathcal{R} = mN = 10^6$, $N = 78 \times 10^3$

$\therefore m = 10^6/78 \times 10^3$

$\Delta\lambda_{\text{fsr}} = \lambda/m = 500 \text{ nm}/(10^6/78 \times 10^3) = 39 \text{ nm}$

$$\mathcal{R} = \mathcal{F}m = \mathcal{F}\frac{2n_f d}{\lambda} = 10^6 \qquad [9.76]$$

$$\Delta\lambda_{\text{fsr}} = \lambda^2/2n_f d = 0{,}012\,5 \text{ nm} \qquad [9.78]$$

10.39 $\mathcal{R} = \lambda/\Delta\lambda = 5892{,}9/5{,}9 = 999$

$N = \mathcal{R}/m = 333$

10.41 $y = L\lambda/d$

$d = 12 \times 10^{-6}/12 \times 10^{-2} = 10^{-4} \text{ m}$

10.43 $A = 2\pi\rho^2 \int_0^{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi = 2\pi\rho^2(1 - \cos \varphi)$

$$\cos \varphi = [\rho^2 + (\rho + r_0)^2 - r_l^2]/2\rho(\rho + r_0)$$

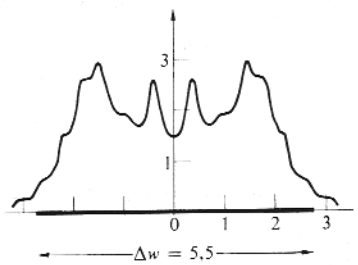
$$r_l = r_0 + l\lambda/2$$

Área de las primeras l zonas

$$A = 2\pi\rho^2 - \pi\rho(2\rho^2 + 2\rho r_0 - l\lambda r_0 - l^2\lambda^2/4)/(\rho + r_0)$$

$$A_l = A - A_{l-1} = \frac{\lambda\pi\rho}{\rho + r_0}\left[r_0 + \frac{(2l-1)\lambda}{4}\right]$$

10.45



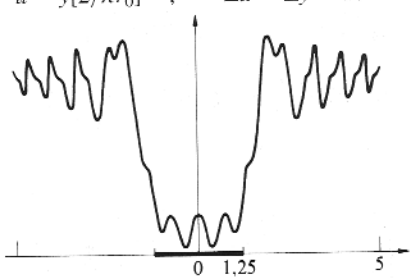
10.46 $I = \frac{I_0}{2}\{[\frac{1}{2} - \mathcal{C}(v_l)]^2 + [\frac{1}{2} - \mathcal{S}(v_l)]^2\}$

$$I = \frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\pi v_1}\right)^2\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi v_1^2}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi v_1^2}{2}\right)\right]$$

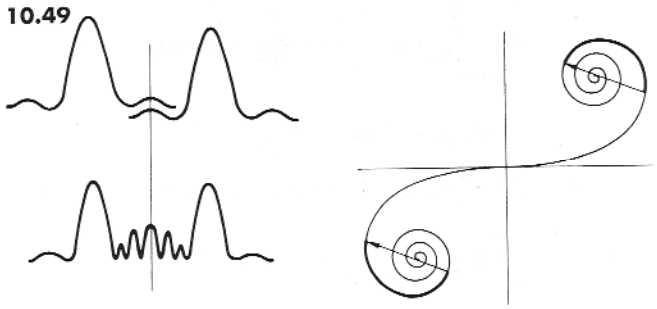
$$I = \frac{I_0}{2}\left(\frac{1}{\pi v_1}\right)^2$$

10.47 Franjas en las regiones clara y de sombra [(Véase M. P. Givens y W. L. Goffe, *Am. J. Phys.* **34**, 248 (1966)].

10.48 $u = y[2/\lambda r_0]^{1/2}$; $\Delta u = \Delta y \times 10^3 = 2{,}5$



10.49



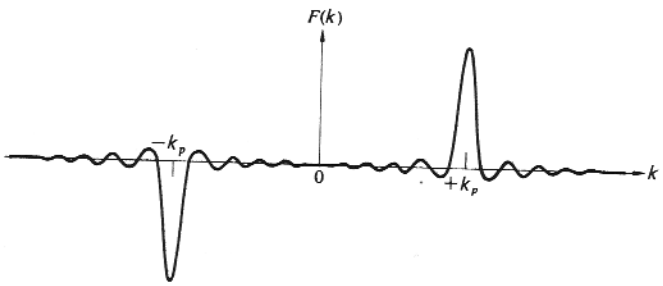
Capítulo 11

11.1 $E_0 \operatorname{sen} k_p x = E_0(e^{ik_p x} - e^{-ik_p x})/2i$

$$F(k) = \frac{E_0}{2i}\left[\int_{-L}^{+L} e^{i(k+k_p)x}\,dx - \int_{-L}^{+L} e^{i(k-k_p)x}\,dx\right]$$

$$F(k) = -\frac{iE_0 \operatorname{sen}(k+k_p)L}{(k+k_p)} + \frac{iE_0 \operatorname{sen}(k-k_p)L}{(k-k_p)}$$

$$F(k) = iE_0 L[\operatorname{sinc}(k-k_p)L - \operatorname{sinc}(k+k_p)L]$$

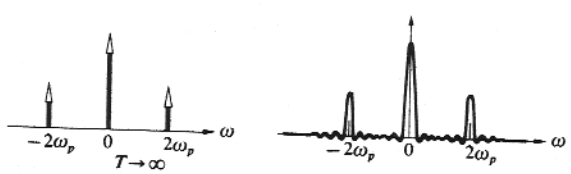


11.3 $\cos^2 \omega_p t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega_p t = \frac{1}{2} + \frac{e^{2i\omega_p t} + e^{-2i\omega_p t}}{4}$

$$F(\omega) = \tfrac{1}{2}\int_{-T}^{+T} e^{i\omega t}\,dt + \tfrac{1}{4}\int e^{i(\omega+2\omega_p)t}\,dt + \tfrac{1}{4}\int e^{i(\omega-2\omega_p)t}\,dt$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega T + \frac{1}{2(\omega+2\omega_p)}\operatorname{sen}(\omega+2\omega_p)T + \frac{1}{2(\omega-2\omega_p)}\operatorname{sen}(\omega-2\omega_p)T$$

$$F(\omega) = T\operatorname{sinc}\omega T + \frac{T}{2}\operatorname{sinc}(\omega+2\omega_p)T + \frac{T}{2}\operatorname{sinc}(\omega-2\omega_p)T$$



11.6 $\mathcal{F}\{af(x) + bh(x)\} = aF(k) + bH(k)$

11.8 $F(k) = L\operatorname{sinc}^2 kL/2$ at $k = 0$, $F(0) = L$, y $F(\pm 2\pi/L) = 0$.

11.15 $\displaystyle\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)h(X-x)\,dx$

$$= -\int_{x'=+\infty}^{x'=-\infty} f(X-x')h(x')\,dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x')f(X-x')\,dx'$$

donde $x' = X - x$, $dx = -dx'$.

$$f \circledast h = h \circledast f$$

o

$$\mathcal{F}\{f \circledast h\} = \mathcal{F}\{f\}\cdot\mathcal{F}\{h\} = \mathcal{F}\{h\}\cdot\mathcal{F}\{f\} = \mathcal{F}\{h \circledast f\}.$$

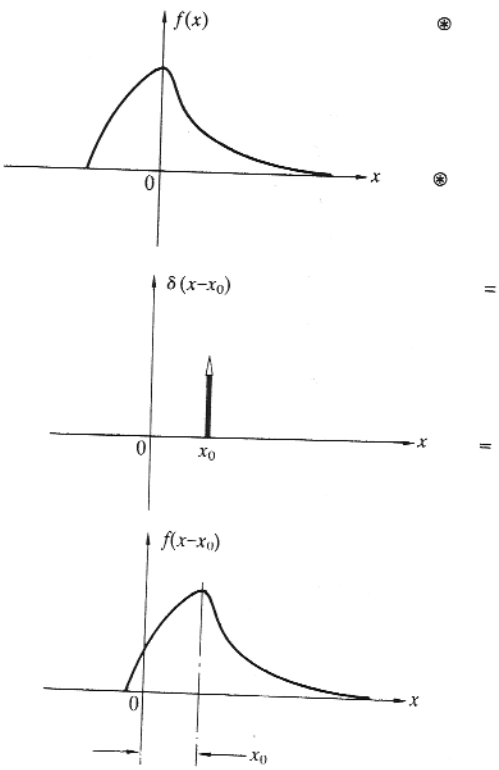
11.17 Un punto sobre el borde de $f(x, y)$, por ejemplo, en $(x = d, y = 0)$, se extiende dentro de un cuadrado con lado 2ℓ y centrado en $X = d$. Por lo tanto, no se extiende más allá de $X = d + \ell$, y por lo tanto, la convolución tiene que ser cero en $X = d + \ell$ y más allá de ese punto.

11.19 $f(x - x_0) \circledast h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0)h(X - x)dx,$

y haciendo $x - x_0 = \alpha$, esto se convierte en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)h(X - \alpha - x_0)\,d\alpha = g(X - x_0)$$

11.21



11.24 Vemos que $f(x)$ es la convolución de una función rectangular con dos funciones δ y del teorema de convolución,

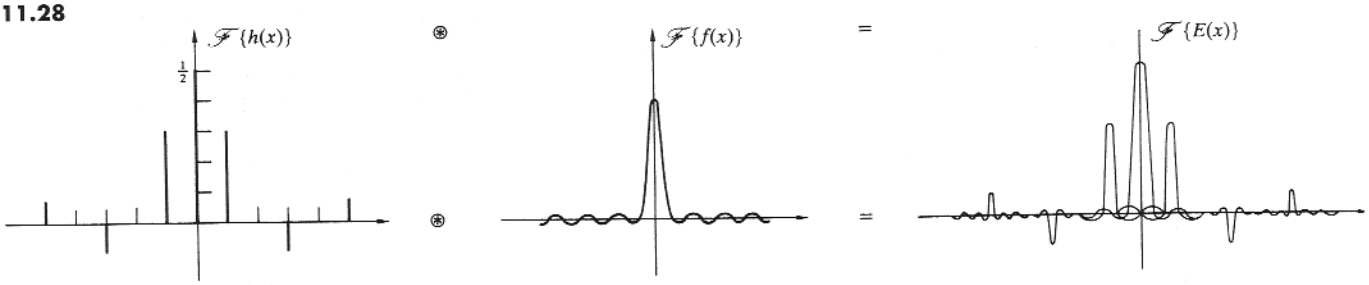
$$F(k) = \mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x) \circledast [\delta(x-a) + \delta(x+a)]\}$$

$$= \mathcal{F}\{\text{rect}\,(x)\} \cdot \mathcal{F}\{[\delta(x-a) + \delta(x+a)]\}$$
$$= a\ \text{sinc}\ \tfrac{1}{2}ka \cdot (e^{ika} + e^{-ika})$$
$$= a\ \text{sinc}\ (\tfrac{1}{2}ka) \cdot 2\cos ka$$

11.25 $f(x) \circledast h(x)$

$$= [\delta(x+3) + \delta(x-2) + \delta(x-5)] \circledast h(x)$$
$$= h(x+3) + h(x-2) + h(x-5)$$

11.28



11.29 $\mathcal{A}(y, z) = \mathcal{A}(-y, -z)$

$$E(Y, Z, t) \propto \iint \mathcal{A}(y, z) e^{i(k_Y y + k_Z z)}\, dy\, dz$$

Remplazando Y por $-Y$, Z por $-Z$, y por $-y$, z por $-z$, entonces k_Y pasa a $-k_Y$ y k_Z a $-k_Z$.

$$E(-Y, -Z) \propto \iint \mathcal{A}(-y, -z) e^{i(k_Y y + k_Z z)} dy\, dz$$

$$\therefore E(-Y, -Z) = E(Y, Z)$$

11.30 De la ecuación (11.63),

$$E(Y, Z) = \iint \mathcal{A}(y, z) e^{ik(Yy + Zz)/R}\, dy\, dz$$

$$E'(Y, Z) = \iint \mathcal{A}(\alpha y, \beta z) e^{ik(Yy + Zz)/R}\, dy\, dz$$

ahora sea $y' = \alpha y$ y $z' = \beta z$:

$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} \iint \mathcal{A}(y', z') e^{ik[(Y/\alpha)y' + (Z/\beta)z']}\, dy'\, dz'$$

o
$$E'(Y, Z) = \frac{1}{\alpha\beta} E(Y/\alpha, Z/\beta)$$

11.31

$$C_{ff} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A\ \text{sen}\ (\omega t + \varepsilon) A\ \text{sen}\ (\omega t - \omega\tau + \varepsilon)\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{A^2}{2T} \int [\tfrac{1}{2}\cos(\omega\tau) - \tfrac{1}{2}\cos(2\omega t - \omega\tau + 2\varepsilon)]\, dt$$

ya que $\cos\alpha - \cos\beta = -2\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\ \text{sen}\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$. Por lo tanto

$$C_{ff} = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)$$

11.32 $E(k_Z) = \int_{-b/2}^{+b/2} \mathcal{A}_0 \cos(\pi z/b) e^{ik_Z z}\, dz$

$$= \mathcal{A}_0 \int \cos\frac{\pi z}{b} \cos k_Z z\, dz + i\mathcal{A}_0 \int \cos\frac{\pi z}{b}\ \text{sen}\ k_Z z\, dz$$

$$E(k_Z) = \mathcal{A}_0 \cos\frac{bk_Z}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{\pi}{b} - k_Z\right)} + \frac{1}{\left(\frac{\pi}{b} + k_Z\right)}\right]$$

Capítulo 12

12.1 A bajas presiones, la intensidad emitida por la lámpara es baja, el ancho de la banda es estrecho y la longitud de coherencia es grande. Las franjas inicialmente exhibirán un alto contraste a pesar de su marcada debilidad. A medida que la presión crece, la longitud de coherencia decrecerá, el contraste disminuirá y las franjas podrían incluso desaparecer del todo.

12.4 Cada función sinusoidal en la señal produce una función de autocorrelación cosenoidal con sus propias longitud de onda y amplitud que están, todas ellas, en fase en el punto de retardo cero correspondiente a $\tau = 0$. Más allá de este origen, los cosenos se desfasan pronto produciendo un estado de confusión donde es probable que aparezca la interferencia destructiva. (Lo mismo acontece cuando un pulso cuadrado se sintetiza partiendo de sinusoides —en cualquier punto más allá del pulso, las contribuciones se anulan.) Al ir aumentando el número de componentes y la señal haciéndose cada vez más compleja —asemejándose al ruido aleatorio— la autocorrelación se estrecha, pasando a ser finalmente un pico δ en $\tau = 0$.

12.6 La irradiancia en Σ_0 procedente de una fuente puntual es

$$4I_0 \cos^2(\delta/2) = 2I_0(1 + \cos\delta)$$

Para un elemento diferencial de la fuente en el punto S' de ancho dy, a y del eje, la DCO hasta P en Y por medio de las dos rendijas es

$$\Lambda = (\overline{S'S_1} + \overline{S_1P}) - (\overline{S'S_2} + \overline{S_2P})$$
$$= (\overline{S'S_1} - \overline{S'S_2}) + (\overline{S_1P} - \overline{S_2P})$$
$$= ay/l + aY/s \quad \text{de la sección 9.3.}$$

La contribución a la irradiancia de dy es entonces

$$dI \propto (1 + \cos k\Lambda)\, dy$$

$$I \propto \int_{-b/2}^{+b/2} (1 + \cos k\Lambda)\, dy$$

$$I \propto b + \frac{d}{ka}\left[\text{sen}\left(\frac{aY}{s} + \frac{ab}{2l}\right) - \text{sen}\left(\frac{aY}{s} - \frac{ab}{2l}\right)\right]$$

$$I \propto b + \frac{d}{ka}[\text{sen}\,(kaY/s)\cos\,(kab/2l) + \cos\,(kaY/s)\,\text{sen}\,(kab/2l) - \text{sen}\,(kaY/s)\cos\,(kab/2l) + \cos\,(kaY/s)\,\text{sen}\,(kab/2l)]$$

$$I \propto b + \frac{l2}{ka}\,\text{sen}\,(kab/2l)\cos\,(kaY/s)$$

12.7

$$\mathscr{V} = \frac{I_{\text{máx}} - I_{\text{mín}}}{I_{\text{máx}} + I_{\text{mín}}}$$

$$I_{\text{máx}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}|\tilde{\gamma}_{12}|$$

$$I_{\text{mín}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}|\tilde{\gamma}_{12}|$$

$$\mathscr{V} = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}|\tilde{\gamma}_{12}|}{2(I_1 + I_2)}$$

12.8 Cuando

$$S''S_1O' - S'S_1O' - \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$$

la irradiancia debida a S' es proporcionada por

$$I' = 4I_0\cos^2(\delta'/2) = 2I_0(1 + \cos\delta')$$

mientras que la irradiancia debida a S'' es

$$I'' = 4I_0\cos^2(\delta''/2) = 4I_0\cos^2(\delta' + \pi)/2 = 2I_0(1 - \cos\delta')$$

Por lo tanto $I' + I'' = 4I_0$.

12.10 $\theta = \frac{1}{2}^\circ = 0{,}008\,7$ rad

$h = 0{,}32\bar{\lambda}_0/\theta$ empleando $\bar{\lambda}_0 = 550$ nm

$h = 0{,}32\,(550\text{ nm})/0{,}008\,7$

$h = 2 \times 10^{-2}$ mm

12.11 $I_1(t) = \Delta I_1(t) + \langle I_1\rangle$

por lo tanto

$$\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle = \langle[\langle I_1\rangle + \Delta I_1(t+\tau)][\langle I_2\rangle + \Delta I_2(t)]\rangle$$

ya que $\langle I_1\rangle$ es independiente del tiempo.

$$\langle I_1(t+\tau)I_2(t)\rangle = \langle I_1\rangle\langle I_2\rangle + \langle\Delta I_1(t+\tau)\,\Delta I_2(t)\rangle$$

si recordamos que $\langle\Delta I_1(t)\rangle + 0$. Eq. (12.34) se deduce por comparación con la ecuación (12.32).

12.13 De la ecuación (12.22), $\mathscr{V} = 2\sqrt{(10I)I}/(10I + I) = 2\sqrt{10}/11 = 0.57$.

12.15 Recurriendo al teorema de van Cittert-Zernike, podemos encontrar $\tilde{\gamma}_{12}(0)$ partiendo la figura de difracción en las aberturas, lo cual llevará a la visibilidad en el plano de la observación $\mathscr{V} = |\tilde{\gamma}_{12}(0)| = |\text{sinc}\,\beta|$. De la Tabla 1, sen $u/u = 0{,}85$ cuando $u = 0{,}97$, por lo tanto $\pi by/l\lambda = 0{,}97$, y si $y = \overline{P_1P_2} = 0{,}50$ mm, entonces $b = 0{,}97\,(l\lambda/\pi y) = 0{,}97(1.5\text{ m})(500 \times 10^{-9}\text{ m})/\pi(0{,}50 \times 10^{-3}\text{ m}) = 0{,}46$ mm.

12.18 Del teorema de van Cittert-Zernike, el nivel de coherencia puede obtenerse de la transformada de Fourier de la función fuente que, a su vez, es una serie de funciones δ correspondiente a una red de difracción con un espaciado a, donde a sen $\theta_m = m\lambda$. La función de coherencia es, por lo tanto, también una serie de funciones δ. De aquí que $\overline{P_1P_2}$, la separación d entre rendijas, debe corresponder a la posición de la franja de difracción de primer orden de la fuente si queremos que $\mathscr{V}$ tenga valor máximo. $a\theta_1 \approx \lambda$, y así $d \approx l\theta_1 \approx \lambda l/a = (500 \times 10^{-9}\text{ m})(2{,}0\text{ m})/(500 \times 10^{-6}\text{ m}) = 2{,}0$ mm.

Capítulo 13

13.2 $P/A = \epsilon\sigma(T^4 - T_e^4) = (0{,}97)(5{,}670\,3 \times 10^{-8}\text{ W/m}^2\cdot\text{K}^4) \times (306^4 - 293^4) = I = 76{,}9\text{ W/m}^2$. $P = 108$ W.

13.3 $I_e = \sigma T^4$

$$(22{,}8\text{ W cm}^2)(10^4\text{ cm}^2/\text{m}^2) = (5{,}7 \times 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4})T^4$$

$$T = \left[\frac{22{,}8 \times 10^4}{5{,}7 \times 10^{-8}}\right]^{1/4} = 1{,}414 \times 10^3 = 1.414\text{ K}$$

13.4 $T_2^4/T_1^4 = P_2/P_1 = 16 \times 10^{12}/16 \times 10^8 = 1{,}0 \times 10^4$

13.12 $\lambda(\text{mín}) = 300$ nm

$$h\nu = hc/\lambda = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})\,(3 \times 10^8\text{ m/s})}{300 \times 10^{-9}\text{ m}}$$

$$\mathscr{E} = 6.63 \times 10^{-19}\text{ J} = 4.14\text{ eV}$$

13.14 $Nh\nu = (1.4 \times 10^3\text{ W/m}^2)\,(1\text{ m}^2)\,(1\text{ s})$

$$N = \frac{1{,}4 \times 10^3(700 \times 10^{-9})}{(6{,}63 \times 10^{-34})(3 \times 10^8)} = \frac{980 \times 10^{20}}{19{,}89}$$

$$N = 49{,}4 \times 10^{20}$$

13.15 Calcule el número de átomos presentes. $pV = nRT$; $n = 4{,}47 \times 10^{-7}$ mol; por consiguiente hay $2{,}69 \times 10^{17}$ átomos y $2{,}67 \times 10^{15}$ se excitan; la velocidad de emisión es $2{,}67 \times 10^{15}/\tau = 1{,}92 \times 10^{23}$ fotones por segundo.

13.18 $h\nu/k_BT = 0{,}774$ y $\dfrac{1}{e^{0.774} - 1} = 0{,}86$; a temperatura elevada la relación es importante y las dos modalidades pueden compararse.

13.23 La velocidad de transición tiene que igualar a $P/h\nu = 3 \times 10^{15}\text{ s}^{-1}$.

13.27 $I = \frac{1}{2} v\epsilon E_0^2 = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0^2$, donde $\mu \approx \mu_0$

$$E_0^2 = 2(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}\, I/n \qquad (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376{,}730\ \Omega$$

$$E_0 = 27{,}4\ (I/n)^{1/2}$$

13.29

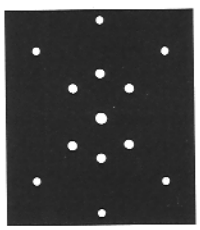


Figura de difracción

13.30

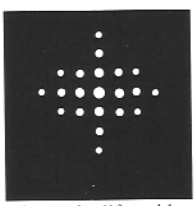
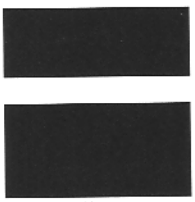


Figura de difracción



Filtro

13.31

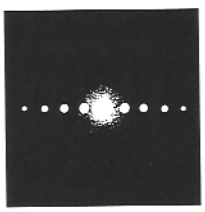
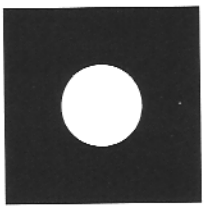
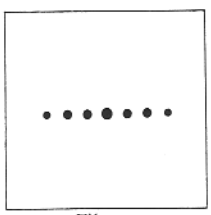


Figura de difracción



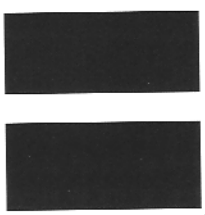
Filtro

o mejor aún



Filtro

13.33



Filtros

13.34 De la geometría, $f_t\theta = f_i\,\Phi$: $k_O = k$ sen θ y $k_I = k$ sen Φ, de aquí que sen $\theta \approx \theta \approx k_O\lambda/2\pi$ y sen $\Phi \approx \Phi \approx k_I\lambda/2\pi$, por lo tanto $\theta/\Phi = k_O/k_I$ y $k_I = k_O(\Phi/\theta) = k_O(f_t/f_i)$. Cuando $f_i > f_t$ la imagen será más grande que el objeto y serán más grandes también los periodos espaciales en la imagen mientras que las frecuencias espaciales en la imagen serán más pequeñas que en el objeto.

13.35 $a = (1/50)$ cm: a sen $\theta = m\lambda$, sen $\theta \approx \theta$, de aquí que $\theta = (5.000\ \text{m})\,\lambda$, y la distancia entre órdenes en el plano de la transformada es $f\theta = 5.000\,\lambda f = 2{,}7$ mm.

13.37 Cada punto en la figura de difracción corresponde a una frecuencia espacial individual y si consideramos que la onda difractada está formada por ondas planas, también corresponde a una dirección de onda plana individual. Dichas ondas no llevan, por sí mismas, ninguna información acerca de la periodicidad del objeto, produciendo una imagen más o menos uniforme. La periodicidad de la fuente aparece en la imagen al interferir las ondas planas constitutivas.

13.39 Las amplitudes relativas de campo son 1,00, 0,60, y 0,60; de aquí que $E \propto 1 + 0{,}60\cos(+ky') + 0{,}60\cos(-ky') = 1 + 1{,}2\cos ky'$. Se trata de un coseno que oscila alrededor de una línea igual a 1,0, variando de + 2,2 a – 0,2. Su cuadrado corresponderá a la irradiancia y se tratará de una serie de picos elevados con una altura relativa de $(2{,}2)^2$, alternados con un pico corto proporcional a $(0{,}2)^2$; colocado entre cada par de los primeros; obsérvese el parecido con la fig. 11.32.

13.40 a sen $\theta = \lambda$, aquí $f\theta = 50\lambda f = 0{,}20$ cm; por lo tanto $\lambda = 0{,}20/50(100) = 400$ nm. El aumento es de 1.0 cuando las distancias focales son iguales, por lo tanto el espaciado es nuevamente de 50 alambres/cm.

13.44 El movimiento inherente del medio provocaría la desaparición del patrón moteado.

BIBLIOGRAFÍA

ANDREWS, C. L., *Optics of the Electromagnetic Spectrum*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1960.

ANTONELLI, CHRISTIAN, FISCHER, GILES, JAMES, and STONER, *Waves and Optics Simulations*, Wiley, New York, 1995.

BAKER, B. B. and E. J. COPSON, *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, Oxford University Press, London, 1969.

BALDWIN, G. C., *An Introduction to Nonlinear Optics*, Plenum Press, New York, 1969.

BARBER, N. F., *Experimental Correlograms and Fourier Transforms*, Pergamon, Oxford, 1961.

BARNOSKI, M., *Fundamentals of Optical Fiber Communications*, Academic Press, New York, 1976.

BARTON, A. W., *A Textbook On Light*, Longmans, Green, London, 1939.

BEARD, D. B. and G. B. BEARD, *Quantum Mechanics With Applications*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

BEESLEY, M., *Lasers and Their Applications*, Taylor and Francis, New York, 1976.

BERAN, M. J. and G. B. PARRENT, JR., *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

BLAKER, J. W. and W. M. ROSENBLUM, *Optics*, Macmillan, New York, 1993.

BLOEMBERGEN, N., *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1991.

BLOOM, A. L., *Gas Lasers*, Wiley, New York, 1968.

BLOSS, D., *An Introduction to the Methods of Optical Crystallography*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1961.

BORN, M. and E. WOLF, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 1970.

BOROWITZ, S., *Fundamentals of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1967.

BRADDICK, H., *Vibrations, Waves, and Diffraction*, McGraw-Hill, New York, 1965.

BROUWER, W., *Matrix Methods in Optical Instrument Design*, Benjamin, New York, 1964.

BROWN, E. B., *Modern Optics*, Reinhold, New York, 1965.

BUTCHER, P. N. and D. COTTER, *The Elements of Nonlinear Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

CAJORI, F., *A History of Physics*, Macmillan, New York, 1899.

CATHEY, W., *Optical Information Processing and Holography*, Wiley, New York, 1974.

CHANG, W. S. C., *Principles of Quantum Electronics, Lasers: Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

COHEN-TANNOUDJI, C., DUPONT-ROC, J. and G. GRYNBERG, *Photons and Atoms*, Wiley, New York, 1989.

COLLIER, R., C. BURCKHARDT, and L. LIN, *Optical Holography*, Academic Press, New York, 1971.

CONRADY, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, New York, 1929.

COULSON, C. A., *Waves*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1949.

CRAWFORD, F. S., JR., *Waves*, McGraw-Hill, New York, 1965.

DAVIS, C. C., *Lasers and Electro-Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

DAVIS, H. F., *Introduction to Vector Analysis*, Allyn and Bacon, Boston, 1961.

DAVIS, S. P., *Diffraction Grating Spectrographs*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

DENISYUK, Y., *Fundamentals of Holography*, Mir Publishers, Moscow, 1984.

DEVELIS, J. B. and G. O. REYNOLDS, *Theory and Applications of Holography*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.

DIRAC, P. A. M., *Quantum Mechanics*, Oxford University Press, London, 1958.

DODD, J. N., *Atoms and Light: Interactions*, Plenum Press, New York, 1991.

DRUDE, P., *The Theory of Optics*, Longmans, Green, London, 1939.

DITCHBURN, R. W., *Light*, Wiley, New York, 1963.

ELMORE, W. and M. HEALD, *The Physics of Waves*, McGraw-Hill, New York, 1969.

FEYNMAN, R. P., *QED*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.

FLÜGGE, J., ed., *Die wissenschafliche und angewandte Photographie; Band 1, Das photographische Objektiv*, Springer-Verlag, Wien, 1955.

Fowles, G., *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

FRANÇON, M., *Modern Applications of Physical Optics*, Interscience, New York, 1963.

FRANÇON, M., *Diffraction Coherence in Optics*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

FRANÇON, M., *Optical Interferometry*, Academic Press, New York, 1966.

FRANÇON, M., N. KRAUZMAN, J. P. MATHIEU, and M. MAY, *Experiments in Physical Optics*, Gordon and Breach, New York, 1970.

FRANÇON, M., *Optical Image Formation and Processing*, Academic Press, New York, 1979.

FRANK, N. H., *Introduction to Electricity and Optics*, McGraw-Hill, New York, 1950.

FRENCH, A. P., *Special Relativity*, Norton, New York, 1968.

FRENCH, A. P., *Vibrations and Waves*, Norton, New York, 1971.

FROOME, K. D. and L. ESSEN, *The Velocity of Light and Radio Waves*, Academic Press, London, 1969.

FRY, G. A., *Geometrical Optics*, Chilton, Philadelphia, 1969.

GARBUNY, M., *Optical Physics*, Academic Press, New York, 1965.

GASKILL, J., *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, Wiley, New York, 1978.

GHATAK, A. K., *An Introduction to Modern Optics*, McGraw-Hill, New York, 1971.

GHATAK, A. and K. THYAGARAJAN, *Contemporary Optics*, Plenum Press, New York, 1978.

GOLDIN, E., *Waves and Photons, An Introduction to Quantum Theory*, Wiley, New York, 1982.

GOLDWASSER, E. L., *Optics, Waves, Atoms, and Nuclei: An Introduction*, Benjamin, New York, 1965.

GOODMAN, J. W., *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

GUENTHER, R. D., *Modern Optics*, Wiley, New York, 1990.

HARDY, A. C. and F. H. PERRIN, *The Principles of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1932.

HARVEY, A. F., *Coherent Light*, Wiley, London, 1970.

HEAVENS, O. S., *Optical Properties of Thin Solid Films*, Dover Publications, New York, 1955.

HECHT, E., *Optics: Schaum's Outline Series*, McGraw-Hill, New York, 1975.

HERMANN, A., *The Genesis of Quantum Theory (1899–1913)*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1971.

HOUSTON, R. A., *A Treatise On Light*, Longmans, Green, London, 1938.

HUNSPERGER, R., *Integrated Optics: Theory and Technology*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

HUYGENS, C., *Treatise on Light*, Dover Publications, New York, 1962 (1690).

IGA, K., *Fundamentals of Laser Optics*, Plenum Press, New York, 1994.

IIZUKA, K., *Engineering Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

INGARD, K. U., *Fundamentals of Waves and Oscillations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962.

JENKINS, F. A. and H. E. WHITE, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, New York, 1957.

JENNISON, R. C., *Fourier Transforms and Convolutions for the Experimentalist*, Pergamon, Oxford, 1961.

JOHNSON, B. K., *Optics and Optical Instruments*, Dover Publications, New York, 1947.

JONES, B., et al., *Images and Information*, The Open University Press, Milton Keynes, Great Britain, 1978.

KARIM, M. A., *Electro-Optical Devises and Systems*, PWS-Kent, Boston, 1990.

KEISER, G., *Optical Fiber Communications*, McGraw-Hill, New York, 1991.

KLAUDER, J. and E. SUDARSHAN, *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York, 1968.

KLEIN, M. V., *Optics*, Wiley, New York, 1970.

KREYSZIG, E., *Advanced Engineering Mathematics*, Wiley, New York, 1967.

LENGYEL, B. A., *Introduction to Laser Physics*, Wiley, New York, 1966.

LENGYEL, B. A., *Lasers, Generation of Light by Stimulated Emission*, Wiley, New York, 1962.

LEVI, L., *Applied Optics*, Wiley, New York, 1968.

LEVINSON, M. D. and S. S. KANO, *Introduction to Nonlinear Laser Spectroscopy*, Academic Press, New York, 1988.

LIPSON, S. G. and LIPSON, H. and D. S. TANNHAUSER, *Optical Physics*, Cambridge University Press, London, (3rd Ed.), 1995.

LONGHURST, R. S., *Geometrical and Physical Optics*, Wiley, New York, 1967.

MACH, E., *The Principles of Physical Optics, An Historical and Philosophical Treatment*, Dover Publications, New York, 1926.

MAGIE, W. F., *A Source Book in Physics*, McGraw-Hill, New York, 1935.

MAIN, I. G., *Vibrations and Waves in Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, (3rd Ed.), 1993.

MALACARA, D., *Optical Shoptesting*, Wiley, New York, 1978.

MANDEL, L. and E. WOLF, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

MARION, J. and M. HEALD, *Classical Electromagnetic Radiation*, Academic Press, New York, 1980.

MARTIN, L. C. and W. T. WELFORD, *Technical Optics*, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., London, 1966.

MATVEEV, A. N., *Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1988.

MEYER, C. F., *The Diffraction of Light, X-rays and Material Particles*, University of Chicago Press, Chicago, 1934.

MEYER-ARENDT, J. R., *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1972.

MEYSTRE, P. and M. SARGENT III, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

MICKELSON, A. R., *Physical Optics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1992.

MIDWINTER, J., *Optical Fibers for Transmission*, Wiley, New York, 1979.

Military Standardization Handbook—Optical Design, MIL-HDBK-141, 5 October 1962.

MILONNI, P. W. amd J. H. EBERLY, *Lasers*, Wiley, New York, 1988.

MINNAERT, M., *The Nature of Light and Colour in the Open Air*, Dover Publications, New York, 1954.

MÖLLER, K. D., *Optics*, Wiley, New York, 1988.

MORGAN, J., *Introduction to Geometrical and Physical Optics*, McGraw-Hill, New York, 1953.

NEWELL, A. C. and J. V. MOLONEY, *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

NEWTON, I., *Optiks*, Dover Publications, New York, 1952 (1704).

NOAKES, G. R., *A Text-Book of Light*, Macmillan, London, 1944.

NUSSBAUM, A., *Geometric Optics: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.

NUSSBAUM, A. and R. PHILLIPS, *Contemporary Optics for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.

OKOSHI, T., *Optical Fibers*, Academic Press, New York, 1982.

O'NEILL, E. L., *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.

O'SHEA, D., W. CALLEN, and W. RHODES, *Introduction to Lasers and Their Applications*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.

O'SHEA, D. C., *Elements of Modern Optical Design*, Wiley, New York, 1985.

PALMER, C. H., *Optics, Experiments and Demonstrations*, John Hopkins Press, Baltimore, Md., 1962.

PAPOULIS, A., *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.

PAPOULIS, A., *Systems and Transforms with Applications in Optics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

PEARSON, J. M., *A Theory of Waves*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

PERSONICK, S. D., *Optical Fiber Transmission Systems*, Plenum Press, New York, 1981.

PLANCK, M. and M. MASIUS, *The Theory of Heat Radiation*, Blakiston, Philadelphia, 1914.

PRESTON, K., *Coherent Optical Computers*, McGraw-Hill, New York, 1972.

ROBERTSON, E. R. and J. M. HARVEY, eds., *The Engineering Uses of Holography*, Cambridge University Press, London, 1970.

ROBERTSON, J. K., *Introduction to Optics Geometrical and Physical*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1957.

RONCHI, V., *The Nature of Light*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1971.

ROSSI, B., *Optics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

RUECHARDT, E., *Light Visible and Invisible*, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1958.

SAFFORD, E. L. JR. and J. A. MCCANN, *Fiberoptics and Lasers*, TAB Books, Blue Ridge Summit, PA, 1988.

SALEH, B. E. A. and M. C. TEICH, *Fundamentals of Photonics*, Wiley, New York, 1991.

SANDBANK, C. P., *Optical Fibre Communication Systems*, Wiley, New York, 1980.

SANDERS, J. H., *The Velocity of Light*, Pergamon, Oxford, 1965.

SARGENT, M., M. SCULLY, and W. LAMB, *Laser Physics,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.

SCHAWLOW, A. L., intr., *Lasers and Light; Readings from Scientific American*, Freeman, San Francisco, 1969.

SCHRÖDINGER, E. C., *Science Theory and Man*, Dover Publications, New York, 1957.

SCHROEDER. D. J., *Astronomical Optics*, Academic Press, New York, 1987.

SEARS, F. W., *Optics,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1949.

SHAMOS, M. H., ed., *Great Experiments in Physics*, Holt, New York, 1959.

SHURCLIFF, W. A., *Polarized Light: Production and Use*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1962.

SHURCLIFF, W. A. and S. S. BALLARD, *Polarized Light*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.

SILVAST, W. T., *Laser Fundamentals*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

SIMMONS, J. and M. GUTTMANN, *States, Waves and Photons: A Modern Introduction to Light*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.

SINCLAIR, D. C. and W. E. BELL, *Gas Laser Technology*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

SLAYTER, E. M., *Optical Methods in Biology*, Wiley, New York, 1970.

SMITH, F. and J. THOMSON, *Optics*, Wiley, New York, 1971.

SMITH, H. M., *Principles of Holography*, Wiley, New York, 1969.

SMITH, W. J., *Modern Optical Engineering*, McGraw-Hill, New York, (2nd Ed.), 1990.

Société Française de Physique, ed., *Polarization, Matter and Radiation. Jubilee Volume in Honor of Alfred Kastler*, Presses Universitaires de France, Paris, 1969.

SOMMERFELD, A., *Optics*, Academic Press, New York, 1964.

SOUTHALL, J. P. C., *Introduction to Physiological Optics*, Dover Publications, New York, 1937.

SOUTHALL, J. P. C., *Mirrors, Prisms and Lenses*, Macmillan, New York, 1933.

STARK, H., *Applications of Optical Fourier Transforms*, Academic Press, New York, 1982.

STEWARD, E., *Fourier Optics: An Introduction*, Wiley, New York, (2nd Ed.), 1987.

STONE, J. M., *Radiation and Optics*, McGraw-Hill, New York, 1963.

STROKE, G. W., *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Academic Press, New York, 1969.

STRONG, J., *Concepts of Classical Optics*, Freeman, San Francisco, 1958.

SVELTO, O., *Principles of Lasers*, Plenum Press, New York, 1977.

SYMON, K. R., *Mechanics,* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960.

TATASOV, L., *Laser Age in Optics*, Mir Publishers, Moscow, 1981.

TOLANSKY, S., *An Introduction to Interferometry*, Longmans, Green, London, 1955.

TOLANSKY, S., *Curiosities of Light Rays and Light Waves*, American Elsevier, New York, 1965.

TOLANSKY, S., *Multiple-Beam Interferometry of Surfaces and Films*, Oxford University Press, London, 1948.
TOLANSKY, S., *Revolution in Optics*, Penguin Books, Baltimore, 1968.
TOWNE, D. H., *Wave Phenomena*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1967.
TROUP, G., *Optical Coherence Theory*, Methuen, London, 1967.
VALASEK, J., *Optics, Theoretical and Experimental*, Wiley, New York, 1949.
VAN HEEL, A. C. S., ed., *Advanced Optical Techniques*, American Elsevier, New York, 1967.
VAN HEEL, A. C. S. and C. H. F. VELZEL, *What Is Light?*, McGraw-Hill, New York, 1968.
VASICEK, A., *Optics of Thin Films*, North-Holland, Amsterdam, 1960.
WAGNER, A. F., *Experimental Optics*, Wiley, New York, 1929.
WALDRON, R., *Waves and Oscillations*, Van Nostrand, Princeton, N.J., 1964.
WEBB, R. H., *Elementary Wave Optics*, Academic Press, New York, 1969.
WILLIAMS, W. E., *Applications of Interferometry*, Methuen, London, 1941.
WILLIAMSON, S. and H. CUMMINS, *Light and Color in Nature and Art*, Wiley, New York, 1983.
WILSON, R. G., *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics*, Wiley, New York, 1995.
WOLF, E., ed., *Progress in Optics*, North-Holland, Amsterdam.
WOLF, H. F., ed., *Handbook of Fiber Optics: Theory and Applications*, Garland STPM Press, 1979.
WOOD, R. W., *Physical Optics*, Dover Publications, New York, 1934.
WRIGHT, D., *The Measurement of Color*, Van Nostrand, New York, 1971.
YARIV, A., *Quantum Electronics*, Wiley, New York, 1967.
YOUNG, H. D., *Fundamentals of Optics and Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
YOUNG, M., *Optics and Lasers*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
ZIMMER, H., *Geometrical Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1970

INDICE DE MATERIAS

Abbe, Ernst, 222, 268, 615
Abbe, números, 276
Abbe, prisma, 194
Abbe, prisma de, 194
  desviación angular, 192
  desviación constante, 194
  desviación mínima, 193
Abbe, teoría de la imagen, 615
Aberración, estelar, 6
Aberraciones, 157, 260
  cromática, 218, 260, 275
    axial, 275
    lateral, 275
  monocromática, 260
    astigmatismo, 260
    coma, 260, 264
    curvatura de campo, 260
    distorsión, 260
    esférica, 233, 260, 261
Abertura, función de, 527, 543
Absorción, 67, 72, 423, 593
  bandas, 72, 337
  coeficiente (α_A), 130, 587
  disipativa, 67
  estimulada, 595
  selectiva (preferencial), 132, 136
Absorptancia, 423
Aceite, objetivo de inmersión en, 218, 263
Acomodación, 210
Acromáticas, lentes, 218, 276
  notas históricas, 4, 277
Afocal, 227
Agua, 68, 73, 134, 368, 370
Airy, disco de, 469, 472, 535, 616
Airy, función de, 420
Airy, Sir George Biddell, 7, 8, 214, 469
Alhazen, 1, 208, 222
Aluminio, 135, 181
AM, radioondas, 62
Amétrope, 211
Amici, Objetivo de, 222
Amonio, dihidrógeno fosfato de (ADP), 371, 650
Ampère, André Marie, 41
Ampère, ley circuital de, 41
Amplificación, 587, 611
Amplitud, 15
Amplitud, coeficientes de, 115, 116, 130, 350
  reflexión (r), 115, 350
  transmisión (t), 115
Amplitud, división de, 385, 399
Amplitud, espectro de, 535
Amplitud, modulación de, 301, 625
Analizador, 331
Anarmónicas, ondas, 304
Anastigmáticos, lentes, 272
Ancho de banda, 313, 358, 360
Angstrom (1 Å = 10^{-10} m), 16
Angular, aumento (MA o P.A.), 216, 220
Angular, campo de visión, 221
Angular, desviación, 192
Angular, dispersión, 478
Angular, frecuencia, 16, 308
Angular, momento, 329
Angular, semiancho, 516
Ángulo crítico, 118, 123, 195, 200
Anómala, dispersión, 72, 304
Anti-Stokes, transición, 610
Antinodos, 296
Antirreflectante, recubrimiento, 428
Apertura: véase Difracción
  diafragma de, 176
  numérica (A.N.), 200, 221
  relativa, 179
Aplanático, reflector, 231
Apocromático, objetivo, 222
Apodización, 545, 564
Apolo, 198
Arago, Dominique François Jean, 5, 350, 361, 494
Área de coherencia, 580
Argand, diagrama de, 23
Argón, láser de, 604
Aristófanes, 1, 165
Aristóteles, 1, 3
Armónicas, funciones, 15
  promedio de, 47
  superposición de, 23
Armónicas, ondas, 15
Armónicos, 308
Armónicos, generación de, 9, 650
Armstrong, E. H., 627
Arseniuro de galio, láser de, 605
Asféricas, lentes, 157
Asféricas, superficies, 152, 158, 183
Astigmática, diferencia, 270
Astigmatismo, 214, 268
Atenuación, coeficiente de (α), 130
Átomos, 63, 65
Aumento angular (MA), 216
  lateral o transversal (MT), 167, 189, 253
  longitudinal (ML), 169
Aumento, potencia de (PA), 216, 221, 227, 228
Autocoherencia, función de, 575
Autocolimación, 478
Autocorrelación, 549
Autoenfoque, 664
Automático, diseño de lentes, 261
Aviogón, lentes de, 224
Azimutal, ángulo (γ), 149

Babinet, compensador, 357
Babinet, principio de, 509
Babuino, nalgas azules de, 87
Bacon, Roger, 2, 211
Banda lateral, ondas de, 638
Barkla, Charles Glover, 347
Barrera, penetración, 129
Barril, distorsión de, 273
Bartholinus, Erasmus, 338
Basov, Nikolai Gennadievich, 387
Bastones, 209
Basura, bolsas de, 93
Batidos, 299
Bennett, William Ralph, Jr, 602
Bessel, funciones de, 468, 472, 571
Beth, Richard A., 330
Biáxico, cristal, 334, 343
Binoculares, 228
Biot, Jean Baptiste, 361, 494
Biotar, lentes, 272
Biprisma (prisma doble de Fresnel), 398
Bird, George R., 333
Birrefringencia, 336

circular, 362
por tensiones, 367
Birrefringentes, cristales, 341
Blanca, luz, 77, 389
Blancas, sustancias, 134
Bohr, Niels Henrik David, 9
Boltzmann, constante de (k_B), 592
Boltzmann Ludwig, 588
Bombardeo iónico, pulido por, 9
Born, Max, 141
Borrosa, mancha, 151
Bose-Einstein
distribución, 51
estadísticas, 52
Bosones, 52
Bradley, James, 6
Bragg, ley de, 484, 645
Bremsstrahlung, 79
Brewster, ángulo de, 603, 348
Brewser, David, 334, 350, 366
Brewser, ventanas de, 603
Brillo, redes con, 477
Brillouin, esparcimiento de, 300, 611, 649
Broglie, Louis Victor, Príncipe de, 9
Bunsen, Robert Wilhelm, 9

C-W, láser de, 602
Cadmio, línea roja del, 313, 410
Calcita, 3, 5, 337, 353
Cámara, 176, 222
lentes, 221
oscura, esteroscopio, 222, 223
reflex de una sola lente, 223
Cámara oscura, 2, 222
Campo, aplanador de, 201, 272
Campo cercano, difracción de: *véase* Fresnel, difracción de
Campo, curvatura de, 271
Campo, diafragma de, 176
Campo, lente de, 218
Campo oscuro, método de, 628
Canadá, bálsamo de, 343
Cangrejo, Nebulosa del, 60, 61
Capilar, óptica, 205
Característica, radiación, 79
Carbono, disulfuro de, 370
Cardinales, puntos, 251
Caroteno, 137
Cartesiano, óvalo, 157
ecuación de la, 255
en superficies esféricas, 256
matriz de ($\mathscr{R}$), 265
Catóprica, 1, 183
Cauchy, ecuación de, 85
Cavidades ópticas, 260
Centrados, sistemas ópticos, 159
Cesio, reloj de, 76
Christiansen, C., 84
Christiansen, W.N., 449
Ciego, punto, 209
Cielo, color azul del, 136, 344
Cilíndrica, lente, 214
Cilíndricas, ondas, 33, 504
Cinabrio, 363
Circular a derechas, luz, 325
Circular a izquierdas, luz, 327
Circular, birrefringencia, 362
Circular, luz, 325, 328
Circulares, polarizadores, 357
Círculo de confusión mínima, 262, 270
Cittert, Peter Hendrik van, 565
Clausius, Rudolf Julius Emanuel, 268
Clorofila, 137
Cobre, 132, 134
Coddington, lupa de, 218
Coeficiente de fineza, (F), 420
Coherencia, 565
área de, 580
funciones de, 572
longitud de (Δl_c), 313, 315, 392, 395
longitudinal, 565
parcial, 565, 576
temporal, 566, 567, 577
temporal (Δt_c), 313, 358, 392, 565
teoría de la, 565
Coherencia, grado complejo de ($\tilde{\gamma}_{12}$), 576
Coherente, mazo de fibras, 201
Coherentes, ondas, 292, 390
Colestéricos, cristales, 364
Colimada, luz, 166
Coloración aditiva, 137
Coloreado, vidrio, 72, 138
Colores, 104, 135
Comático, círculo, 166
Compensadora, lámina, 409, 411
Compensadores, 356
Babinet, 356, 357
Soleil, 357
Compleja, amplitud, 294
Compleja, representación, 22, 294
Complementarios, colores, 135, 361
Compton, A.H., 127
Compton, efecto, 56
Compuestas, lentes, 159, 252, 253
Compuesto, microscopio, 220
Condiciones de contorno de frontera, 112, 296
Conductividad (σ), 130
Confocal, resonador, 600
Conjugados, puntos, 151, 152
Conmutadores de Q, 370, 372
Connes, Pierre, 426
Constructiva, interferencia, 292, 387, 394
Contraste ($\mathscr{V}$), 556, 637
Contraste, factor de (C), 439
Convolución
integral, 537
teorema de, 540
Cooke (o Taylor), triplete de, 225, 272, 280
Cornu, espiral de, 295, 500, 504
Cornu, Marie Alfred, 500
Corpuscular, teoría, 3, 10
Correlación, interferometría de, 581
Correlograma, 553
Corriente de desplazamiento, densidad, 41
COSTAR, 264
Cotton-Mouton, efecto, 369
Criolita, 428
Cromáticas, aberraciones, 260
Cromático, poder de resolución ($\mathscr{R}$), 425
Cruzada, comunicación, 200
Cruzada, correlación, 549
Cuántica de campos, teoría, 80
Cuántica, mecánica, 8
Cuántica, naturaleza de la luz, 8, 37
Cuántico, salto, 65
Cuánticos, campos, 37
Cuarzo, 72, 342, 361, 368, 385
óptica, actividad, 361
Cuasimonocromática, 66, 315, 565
Cubo divisor de haz, 129
Cuerpo negro, radiación del, 50, 587, 590
Cusa, Nicholas, 211

Da Vinci, Leonardo, 2
De Broglie, Longitud de onda de, 36
Delgadas, lentes, 159
Delgadas, películas; *véase* Películas dieléctricas
Delta, función, 528
Denisyuk, Yuri Nikolayevich, 644
Descartes, René, 2, 3, 154, 207
Destructiva, interferencia, 292, 387
Desviación angular, 192
Dextrógira, 361
Diafragmas de apertura y de campo, 176
Dicroicos, cristales, 333
Dicroismo, 332
Dicromóforo, 335
Dieléctrica, constante (K_E), 40, 60
Dieléctricas, películas, 9, 400, 427
haces múltiples, interferencia de, 507
interferencia de dos haces, 400
sistemas multicapas, 426
Difracción, 3, 4, 152, 441, 543

Babinet, Principio de, 509
coherentes, osciladores, 447
comparación entre Fraunhofer y Fresnel, 445
de microondas, 444
Difracción de borde, onda de, 514
Fourier, métodos de, 543
Fraunhofer, 445, 450, 543
abertura circular, 448
condición de, 451
doble rendija, 456, 545
muchas rendijas, 459, 545
rectangular, abertura, 463, 466, 547
rendija única, 450, 544
Fresnel, 443, 485
aberturas circulares, 490
circulares, obstáculos, 494
estrecho, obstáculo, 508
rectangular, abertura, 497, 498
rendija única, 504
semi-infinita pantalla, 507
zonas de, 486
Kirchhoff, teoría de, 510
limitada, 131, 151
opacas, obstrucciones, 445
red penórdica, teorema de la, 547
redes, 474, 614
bi y tridimensionales, 480
redes de líneas, 480
Difracción, limitado por la, 151, 231
Difusión, placa de, 431
Dióptrica, 184
Dióptrica, potencia ($\mathscr{D}$), 211, 214, 218
Dióxido de carbono, láser de, 316, 604
Dipolar, momento, 62, 64, 68, 70
Dipolar, radiación, 62
Dirac, funciones delta de, 528
Dirac, Paul Adrien Maurice, 9, 528
Dispersión, 66, 67, 131, 192
angular ($\mathscr{D}$), 478
anómala, 72, 301
de vidrio, 71
ecuación, 70, 131
intermodal, 204
normal, 72
relación de, 301
rotatoria, 364
Distancia focal posterior, 173, 211, 253
plano focal posterior, 164
Distorsión, 273
Divisor de haz, 129, 408
Doblamiento de lentes, 251
Doble refracción, 338
Dollond, John, 4, 277
Donders, Franciscus Cornelius, 214
Doppler, efecto, 300, 549
Doppler, ensanchamiento, 549
Drude, Paul Karl Ludwig, 131, 298
Dupin, 107

Ecuación diferencial de onda
tridimensional, 29, 44
unidimensional, 15
Efectiva, distancia focal, 171, 224, 251
Einstein, Albert, 7, 593, 594
Einstein, coeficientes de, 593
Eléctrica, permitividad (ϵ), 39
Eléctrico, campo (E), 38, 112, 139, 290
Eléctrico, dipolo, 62
Electro-óptica, 9
Electro-óptica, constante, 371
Electromagnética, teoría, 6, 37, 111
Maxwell, ecuación, 42, 43
momento (p), 46, 55
no conductor, material, 66
polarización, eléctrica (P), 68
radiación, 57
Electromagnéticas, ondas, 43, 111
Electromagnético, espectro de fotones, 73
gamma, rayos, 80
infrarrojo, 76
luz, 77
microondas, 74
radiofrecuencia, 73
rayos X, 79
ultravioleta, 78
Electromotriz, fuerza, 38
Electrón, 8
difracción, 442
Electrones pi, 137
Electrónica, polarización, 68
Elíptica, luz, 329
Emétrope, ojo, 211
Emisión, coeficiente de (ε_λ), 588
Emisión de un átomo, 9, 63
Emisión, teoría de la, 9
Emisividad (ε), 590
Emisores de luz, diodos, 205
En cojín, distorsión, 273
En el vértice, ángulo (α), 192
En tejado, prisma, 196
Enantiomorfos, 361
Enderezamiento, sistema de, 228
Energético, espectro, 317, 548
Energía, densidad de (u), 46
Energía, nivel de, 64, 65, 592
Ensanchamiento de línea, función de, 137, 555
Entóptica, percepción, 208
Entrada, pupila de, 177
Entrada, ventana de, 221
Esférica, aberración, 233
Esféricas, ondas, 30-32, 46, 490
Espacial, coherencia, 389, 566, 577
grado complejo de, 578
Espacial, filtrado, 318, 547, 617
Espacial, filtro, 221
acoplado, 648
Espacial, frecuencia, 303, 318, 523, 544, 612
espectro, 309
Espacial, periodo (λ), 308
Espacio e invariancia, 533
Esparcimiento, 67, 85, 346, 610
coherente, 611
elástica, 86
interferencia y, 88
Especial, Relatividad, 7, 56, 73
Espectral, densidad de flujo, 588
Espectral, exitancia, 588
Espectral, irradiancia, 655
Espectral libre, rango, 425, 479
Espectrales, líneas, 9, 313
Espejismo, 109
Espejo, fórmula del, 187, 188
Espejos, 180
aberraciones, 270
asféricos, 183
aumento, 189
dicroicos, 426
elípticos, 184
esféricos, 184
espejo, fórmula del, 187
fríos, 426
hiperbólicos, 184
historia, 1
imagen finita, 189
parabólicos, 184, 185, 249
planos, 181
recubrimientos, 181
semiplateados, 399
signos, convención de, 190
Espontánea, emisión, 594
Espontáneo, Raman, 610
Espontáneo, Raman efecto, 609
Esquina de cubo, prisma de, 197
Esquina de cubo, reflectores de, 197
Estacionaria, onda, 296
Estacionarias, ondas, 295
Estacionario, 533
Estándar, lente, 224
Estándar, longitud, 77
Estelar, aberración, 6
Estelar, interferometría, 567
Estenoscopio, 222
Estigmático, sistema, 151

Estimulada, emisión, 592, 594
Estimulado, Raman, 611, 649
Etalon, Fabry-Perot, 421
Eter, 3, 5, 6, 7, 8
Euclides, 1, 98, 183
Euler, Leonhard, 4, 111
Evanescente, onda, 125
Ewald-Ossen, teorema de extinción, 96
Excitado, estado, 64
Exfoliación, forma de, 338
Exitancia espectral, 588
Extensos, objetos, imágenes de, 166, 181
Externa, reflexión, 118
Extinción, color de, 335
Extraordinarios, rayos, 339

Fabricante de lentes, fórmula del, 162
Fabry, Charles, 421
Fabry-Perot, espectroscopía, 424
Fabry-Perot, etalon, 422, 431, 597, 653
Fabry-Perot, filtro, 431
Fabry-Perot, interferómetro, 421, 424, 426, 480
Faraday, efecto, 368
Faraday, Michael, 5, 38, 368
Fase, 16
  conjugación, 238
  desplazamientos de, 118
  diferencia (δ), 291, 386
  inicial (ε), 18
  modulación, 625
  retrasos y avances, 95, 328
  suma, 294
  velocidad de cambio con el tiempo, 20
  velocidad de cambio con la distancia, 20
Fase, contraste de, 625
Fase, espectro de, 523
Fase, función de transferencia (FTF), 558
Fase, placa de, 627
Fase, red de, 481
Fase, velocidad de (v), 18, 20, 301
Fasores, 24, 294, 417, 502, 509
Fermat, Pierre de, 107
Fermat, Principio de, 107, 111, 139, 143, 157
Fermiones, 52
Feyman, Richard Phillips, 111
Fibras, óptica de, 9, 198
  apertura numérica (AN), 200
  cruzada, comunicación, 200
  dispersión intermodal, 204
  espectral, dispersión, 205
  graduado, índice, 205
  mazo coherente, 201
  mazo incoherente, 201
  mosaicos, 202
  multimodo, 204
  revestimiento, 200, 201
  salto de índice, índice, 203
  unimodales, fibras, 205
Filtros, 426
Fineza, 424, 440, 480
Finitas, imágenes, 165
Finitos, conjugados, 221
Física, óptica, 37, 151
Fizeau, Armand Hippolyte Louis, 7, 44, 579
Fizeau, franjas de, 403, 410
Flotantes, cuerpos, 208
Flujo, densidad de, 49, 52, 293
Fluorescencia, 609
Fluoruro de cadmio, lentes de, 222
Fluoruro, película de, 402
Focal, distancia (f)
Focal, plano, 163, 166, 189
Focal posterior, distancia (d.f.p.), 173, 211, 250
  de un espejo, 188
  de una lente, 163, 166, 252
  de una placa zonal, 497
  efectiva, 173, 224, 251
  frontal (d.f.f.), 173, 250
  imagen, 158
  objeto, 158
  primera, 158
  segunda, 158
Focal, punto, 158
Focal, razón, 179
Focault, Jean Bernard Leon, 5
Fontana, Francisco, 2
Fosfato dideuterio de potasio (KD*P), 371
Fosfato dihidrógeno de potasio (MOP), 371, 650
Fosforescencia, 609
Fotocrómico, vidrio, 645
Fotoelasticidad, 366
Fotoeléctrico, efecto, 50
Fotón, 8, 37, 50, 609, 611
  armónica, generación de, 650
  espectro, 73
  espín, 630
  flujo de, 49
  flujo, densidad de, 49, 78
  masa del, 37
  momento angular (L), 329
  probabilidad, 140
  recuento de, 53
  reflexión y refracción
  velocidad, 93
  virtual, 38
Fourier
  análisis, 10, 305
  difracción, teoría de, 543
  integrales de, 309, 310
  óptica de, 522, 612, 614
Fourier, Jean Baptiste Joseph, Baron de, 304
Fourier, transformadas de, 304, 310, 316, 525, 614
  bidimensional, 525
  de un paquete de ondas gaussianas, 542
  de una función cilíndrica, 526
  de una gaussiana, 524
  discreta, 316
  irradiancia, espectro de, 317
  por una lente, 527
  potencia, espectro de, 317
Fox Talbot, 84
Franja
  orden, 388, 409
  resolución, 424
Franjas
  de igual espesor, 403
  de igual inclinación, 400, 402, 416
  Fizeau, 403, 410
  Haidinger, 403, 407, 410
  localización, 410, 415
Franken, Peter A., 650
Fraunhofer, difracción de, 320, 446, 450, 613
Fraunhofer, Joseph van, 10, 474
Fraunhofer, líneas de, 277
Frecuencia (ν), 16
  ancho de banda, 313
  angular (ω), 16, 308
  batido, 300
  espectro, 309
  mezcla, 9, 652
  natural (ω_0), 69
  plasma (ω_p), 132
  resonancia (ω_0), 65, 69, 70
Frecuencia, estabilidad, 314
  CO_2, láser de, 316
  He-Ne, láser, 316
Frente de onda, continuidad de l, 145
Frente de onda, división de l, 385, 392
Frente de onda, sensor de, 237
Frentes de onda, 28
Fresnel, Augustin Jean, 5, 348, 362, 442, 485, 494, 515
Fresnel, difracción de, 442, 485
Fresnel, ecuaciones de, 5, 113, 350
  derivación, 113
  interpretación, 116
    amplitud, coeficientes de (r, t), 117
    fase, desplazamientos de, 119
    reflectancia (R), 120, 350

transmitancia (T), 120
Fresnel, espejo doble de, 397
Fresnel, integrales de, 497, 502
Fresnel, placas zonales de, 496, 632
Fresnel, prisma compuesto de, 362
Fresnel, prisma doble de, 398
Fresnel, prisma múltiple de, 363
Fresnel, rombo de, 356
Fresnel, zonas de, 486
Fresnel-Arago, Leyes de, 390, 411
Fresnel-Kirchhoff, difracción de, 513
Fried, parámetro de, 236
Frío, espejo, 426
Frontal, diafragma, 177
Frontal, distancia focal (d.f.f.), 173, 250
Frontera, onda de, 114
Fuchsina, 84
Fuente
  isotropa
  potencia ($\mathscr{A}$, ε_0), 450
Fuerzas gauge, 81

Gabor, Dennis, 630
Gafas, 2, 210
Gafas, lentes para, 210
Gafas nocturnas bioculares, 178
Galileo Galilei, 2, 220, 226, 229
Galileo, Telescopio de, 2, 226, 229
Galio, 133
Gauss, Karl Friedrich, 39, 158
Gauss, ley de
  eléctrica, 39
  magnética, 40
Gaussiana, fórmula de lentes, 162
Gaussiana, función, 13, 314, 524, 536
Gaussiana, luz, 580
Gaussiana, óptica, 158
Gaussiano, grupo de ondas, 542
Gay-Lussac, Joseph Louis, 494
Geométrica, onda, 514
Geométrica, óptica, 37, 151, 250
Germanio, 180
Giroscopio, 300
Glan-Air, 344
Glan-Foncault, polarizador de, 343
Glan-Foucault, 344
Glan-Thompson, 344
  eje de extinción, 332
  eje de transmisión, 331
  lineales, 331
  pila de láminas, 350
Golay, celda de, 76
Gradiente de índice, lente de (GRIN), 208, 280
  gradiente, constante, 282
  GRIN axial, lente, 283
  GRIN radial, varilla, 281
Grado de coherencia ($|\gamma_{12}|$), 315, 572
Grado de polarización (V), 352, 374
Gran angular, lentes de, 224
Gregory, James, 230, 480
Grimaldi, Francesco Maria, 3, 193, 441
Grosseteste, Robert, 1
Gruesa, lente, 250
  combinaciones, 252
  planos principales, 250
  planos unitarios, 252
  puntos cardinales, 251
  puntos nodales, 251
  puntos principales, 250, 251
Grupo, índice de refracción de, 303
Grupo, velocidad de (v_g), 301
Guía de onda, 199

Haces múltiples, interferencia de, 416
Haidinger, franjas de, 403, 407, 410
Haidinger, Wilhelm Karl, 403
Hall, Chester Moor, 4, 277
Hamilton, William Rowan, 111
Hanbury-Brown, 582
Hanbury-Brown y Twiss, experimento de, 582
Harrison, George R., 478
Haz, expansor de, 229
Heisenberg, principio de incertidumbre de, 313
Helio-cadmio, láser de, 602
Helio-neón, láser de, 270, 316, 445
Helmholtz, ecuación de, 512
Hemisférico, resonador, 599
Herapath, William Bird, 334
Herapatita, 334
Héroe de Alejandría, 1, 107
Herriott, Donald Richard, 602
Herschel, Sir John Frederick William, 361
Herschel, William, 76, 230
Hertz, Heinrich Rudolf, 6, 73, 297, 298
Hipermetropía, 213
Hipersteno, 333
Holografía, 9, 630
  acústica, 646
  en línea, 633
  Fourier, de transformada de, 642, 644
  Fresnel, banda lateral de, 634
  generada por ordenador, 648
  hologramas de volumen, 644, 645
  luz blanca, reflexión, 645
  placas zonales, interpretación de, 642, 632
  reflexión, 640
  transmisión, 640
Holográfica, interferometría, 646
Hooke, Robert, 3, 406
Hubble, telescopio espacial (HST), 184, 231, 263
Hughes, David, 73
Hull, Gordon Ferrie, 57
Huygens, Christian, 104, 106, 262, 340
Huygens, Principio de, 104, 106, 340, 485
Huygens-Fresnel, Principio de, 106, 340

Imagen
  derecha, 168
  distancia (s_i), 157
  espacio, 151
  focal, distancia, 158
  invertida, 168
  real, 156, 168
  virtual, 156, 168
Imágenes, 165, 189, 190
Impulso, respuesta a un, 533
Índice de refracción (n)
  absoluto, 66, 85
  complejo, 130
  grupo, 303
  oscilador, modelo de, 63
  relativo, 103
  tabla, 96
  vidrio, 277, 278
Índice graduado, fibras de, 205
Índices, acoplamiento de, 651
Índices dispersivos, 276
Inducción, Ley de, 38, 39
Infinitos, conjugados, 227
Infrarrojo, 9, 76, 426
  espejos, 180
Inhomogéneas, ondas, 128
Intensidad, 49
Interferencia, 4, 22, 291, 382
  colores, 360
  condiciones para, 388
  constructiva, 88, 92, 292, 387
  de dos haces, 400
  de haces múltiples, 416
  destructiva, 88, 92, 292, 387
  filtro, 431
  franjas de, 388, 400, 414
  ley de, 576
  películas delgadas, 3, 426
  términos de, 291, 386
Interferogramas, 411, 648
Interferómetros, 392, 397
  amplitud, división de, 399
    Mach-Zehnder, 411, 416
    Michelson, 408, 411, 415
    Pohl, 413, 415

Sagnac, 411, 412
frente de onda, división del, 392
Fresnel, doble espejo de, 397
Fresnel, doble prisma de, 398
Lloyd, espejo de, 399
Young, experimento de, 392
Intermodal, dispersión, 204
Interna, reflexión, 97, 123
Inversión, 182
Inverso del cuadrado, Ley del, 49, 50, 143
Iónica, polarización, 68
Irradiancia (I), 49
dipolar, radiación, 62
Islandia, espato de (calcita), 3, 338, 339
Isoplanática, región, 236

Jamin, Interferómetro de, 440
Janssen, Zacharias, 2, 220, 224
Javan, Ali, 602
Jeans, James, 591
Jodrell Bank, 474
Jones, matrices de, 376
Jones, Robert Clark, 374
Jones vectores de, 374

KD*P, 371
KDP, 371, 650, 651
Keller, Joseph Bishop, 515
Kepler, Johannes, 2, 55, 153, 207, 222, 226
Kerr, celda, 370, 382
Kerr, constantes, 370
Kerr, efecto, 370, 648
Kerr, John, 370
Kirchhoff, Gustav Robert, 9, 106, 444, 587
Kirchhoff, Ley de radiación de, 588
Kirchhoff, teorema integral de, 512
Kirchhoff, teoría de difracción de, 444, 510
Klingenstjerna, Samuel, 4
Kohlrausch, Rudolph, 44
Kottler, Friedrich, 515
Krypton, 77, 315

Labeyrie, A. E., 645
Lagrange, Joseph Louis, 111
Lámina de cuarto de onda, 353, 354
Land, Edwin Herbert, 334
Laplace, Pierre Simon, Marquis de, 494
Laplaciano, operador, 30, 44
Láser, 9, 596
cavidades, 596, 598
desarrollos, 603
gigante, pulso, 601
helio-neón, 316, 602
modos, 524, 598, 599
operación, 596
primer (de rubí pulsado), 596, 597
Q, conmutación de, 601
Q, degradación de, 601
Láser de anillo, 300, 435
Láser, luz, 587
Láseres
de cavidad acoplada, 606
de estado sólido, 603
de gas, 604
líquidos, 606
químicos, 606
semiconductor, 605
sintonizables, 606
Lateral, color, 275
Laterales, bandas, 321
Laue, Max von, 484
Le Craw. R. C., 369
Le Roux, 84
Lebedev. Pyotr Nikolaievich, 56
Leith, Emmett Norman, 608
Lejano, punto, 211, 214
Lente, 1, 2
aumento, 167
campo, aplanador de, 201, 272
centro óptico, 164
cilíndrica, 214
compuesta, 159
delgada, 159, 160, 162
doblamiento de, 251
ecuación, 162
finitas, imágenes, 165
fluorita, 280
focales, puntos y planos, 163
gruesa, 250
lentes delgadas, combinación de, 170, 173
primer orden, teoría de, 55
simple, 159
telefoto, 224, 225, 274
Tessar, 224, 272
tórica, 214
Lentes, anamórficas, 214
Lentes delgadas, combinaciones, 170
ecuación de, 160
Lento, eje, 353
Levógiro, 361
Lewis, G. N., 9
Ley de reflexión, 1, 99
Ley de refracción, 2, 102
Libre, apertura, 179
Ligados, electrones, 136
color, 132
reflectancia, 134
Límite de resolución, 478
Línea natural, ancho de, 313, 549
Lineal semiancho, 516
Lineales, sistemas, 532
Líneas D de sodio, 66
Lippershey, Hans, 2, 225
Lippmann, Gabriel, 645
Líquidos, cristales, 364
Lister, objetivo de, 221
Litio, niobato de, 645, 653
Littrow, montura de, 479
Lloyd, espejo de, 399
Localización, propiedad de, 528
Longitud de onda (λ), 315
Lorentz, ensanchamiento, 149
Lorentz, Hendrik Antoon, 7, 67, 131
Lorentziano, perfil, 148
Lunar Orbiter, 622
Lupa, 1, 215
Luz, campo de, 298
Luz esparcida, interferencia por, 431
Luz, propagación de, 85
Luz, rayos de, 106
haz de, 106
lápiz, 106
Luz, tubo de, 198, 200

Mach-Zehnder, interferómetro de, 411, 415
Maey, Eugen, 515
Maggi, Gian Antonio, 515
Magnesio, fluoruro de, 181, 428, 429
Magnética, inducción (**B**), 38
Magneto-óptico, efecto, 369
Maiman, Theodore Harold, 587
Malus, Étienne Louis, 5, 107, 332, 347
Malus, Ley de, 331, 332, 369
Malus y Dupin, Teorema de, 107
Maraldi, 494
Maréchal, A., 624
Marginal, rayo, 178, 221
Mariner IV, 133
Máser, 588
Materia, ondas de, 10, 37
Matrices, métodos de
diseño de lentes, 255
películas delgadas, 426
polarización, 372
Matricial, sistema ($\mathscr{M}$), 256
Matriciales, métodos, 255
Maupertuis, Pierre de, 111
Máximo de transmisión, 423
Maxwell, ecuaciones de, 5, 42, 130, 591
Maxwell, James Clerk, 5, 6, 41, 44, 73
Maxwell, relación de, 66
Maxwell-Boltzmann, estadísticas de, 52, 592
Media onda, lámina de, 353, 354

Media onda, voltaje de (VI/2), 371
medida por espejos rotatorios, 5
medida por ruedas dentadas rotatorias, 5, 44
  en el vacío, 44
Menisco, lente de, 160
Mercurio, 315
Meridional, foco, 270
Meridional, plano, 270
Meridional, rayo, 199, 253
Metaestables, estados, 597
Metal, reflexión en, 132
Metales alcalinos, 132
Metales, propiedades ópticas de, 130
Mica, 356
Michelson, Albert Abraham, 6, 7, 303, 410, 568, 580
Michelson, interferómetro estelar de, 580, 581
Michelson-Morley, Experimento de, 7
Micra (1 mm 5 1026 m), 15, 200, 654
Microondas, 74, 130, 300, 330
Microondas, interferómetros, 411
Microscopio compuesto, 2, 220
  apertura numérica, 222
  campo angular, 221
  longitud del tubo, 220
  poder de resolución, 222
Mie, 92
  no resonante, 67
  y polarización, 346
Mie, esparcimiento, 92
Mie, Gustav, 92
  mínimo resoluble, 426
Miopía, 212
Miyamoto, Kenro, 515
Modos, guías de onda, 199
Modulación, 568
Modulación, frecuencia de, 300
Modulación, función de transferencia (FTM), 556
Moduladores, ópticos, 366
Momento (p), 55, 56
Monocromático, 17
Monte Palomar, 180, 229, 233, 474
Monte Wilson, Observatorio de, 580
Mooney, rombo de, 356
Morley, Edward Williams, 7
Moscovita, 355
Moteado, efecto de, 609
Mueller, Hans, 376
Mueller, matrices de, 376
Multicapa, películas, 9, 426
  antirreflectoras, 428
  sistemas periódicos, 429
Mutua coherencia, función de, 572, 575

Nanómetro (1 nm = 10-9 m), 15, 74, 77
Natural, ancho de línea, 313
Natural, frecuencia, 69
Natural, luz, 329, 354
Negativa, lente, 169, 212
Negativo, cristal uniáxico, 342
Neodimio, 603
Nernst, Walther, 298
Neutrino, 9
Newton, anillos de, 406, 407, 416, 497
Newton, Optick's de, 166
Newton, Sir Isaac, 3, 5, 66, 166, 193, 277, 406, 431, 480
Newtoniana, forma de la ecuación de lentes, 166, 251
Ng, Won K., 611
Nicol, 343
Nicol, prisma de, 343
Nicol, William, 343
Nichols, Ernest Fox, 56
Niépce, Joseph Nicéphore, 223
Nitrobenceno, 371
No lineal, óptica, 648
No resonante, esparcimiento o dispersión, 67
Nocturnas, gafas, 178
Nodales, puntos, 251
Nodos, 296
Normal, congruencia, 106, 107
Numérica, abertura (AN), 200, 221
número f (*f/#*), 179, 200, 221, 223, 470

Objetivo, 220, 226
Objeto
  distancia (s_o), 136, 226
    lente compuesta, 159
  distancia focal, 158
    lente compuesta, 158
  espacio, 151
Oblicuidad, factor de, 454, 485
Oblicuos, rayos, 254
Ocular, 218, 220: *véase* Oculares
  Erfle, 219, 228
  Huygens, 218
  Kellner, 219, 228
  ortoscópico, 219
  Ramsden, 219, 286
  simétrico (Plössl), 219
Ocular, lente, 218
Ocular, punto, 218
Ojo, 206
  acomodación, 210
    músculos ciliares, 210
  compuesto, 207
  córnea, 207, 210, 212
  coroide, 208
  cristalino, lente del, 208, 210
  esclerótica, 209
  humano, 207
  humor acuoso, 207
  humor vítreo, 208
  iris, 136, 207
  lejano, punto, 210, 212
  potencias, 211
  próximo, punto, 210, 212
  pupila, 207
  resolución, 473
  retina, 209
    bastones, 209
    ciego, punto, 209
    conos, 209
    fovea centralis, 209
    mácula, 209
Ojos, 206
Onda, 14, 29, 44
  ecuación de, 14, 29, 44
  función de, 13
  grupo de, 312
  láminas de, 352
  número de (κ), 16, 308
  paquete, 310, 312
  perfil de, 13
  superficie de, 28
  velocidad de
    ondulatoria, teoría, 6
Onda portadora, 301
Ondas
  armónicas, 15
  cilíndricas, 33
  circulares, 21
  electromagnéticas, 37, 43
  en un metal, 129
  en una superficie, 112
  esféricas, 30
  evanescentes (superficial o de borde), 125
  inhomogéneas, 28, 128, 599
  linealmente polarizadas, 324
  longitudinales, 5, 12
  polarizadas en un plano, 45, 324
  propagación de, 28
  transversales, 5, 12, 45
  unidimensionales, 11
  vector de, 28
Ondícula, 9
Óptica adaptativa, 234
Óptica, actividad, 361
Óptica, función de transferencia (FTO), 560
Óptica, potencia (P), 49, 52
Óptica, rectificación, 650
Óptico, bombeo, 596
Óptico, campo, 49

Óptico, diferencia de camino, 291, 400, 409
Óptico, eje, 157, 333, 336, 157
Óptico, estereoisómeros, 364
Óptico, longitud de camino, 107, 109, 157
Óptico, ordenador, coherente, 614, 619
Óptico paramétrico, oscilador, 653
Óptico, plano, 403
Óptico, reconocimiento por patrón, 556
Óptico, teorema del seno, 267
Óptico, vidrio, 72, 278
Ópticos, pulsos, 607
Ordinarios, rayos, 339
Orientacional de la polarización, 68
Ortómetro, 272
Ortoscópico, sistema, 274
Oscilador, 447
Oscilador, fuerzas de, 71
Oscilante, radiación dipolar, 62
Ozono, 78

Palomar, Observatorio de, 61, 229, 233, 474
Parabólico, espejo, 184, 449
Paramétrica, amplificación, 653
Paraxial, rayo, 158, 186
Parcialmente polarizada, luz, 329
Parrish, Maxfield, Jr., 333
Parseval, fórmula de, 548
Pasteur, Louis, 364
Pauli, Wolfgang, 8, 10
Peine, función, 531
Películas, 399: *véase* Dieléctricas, películas
Pellin-Broca, 194
Penetración, profundidad de, 130
Penta, 197, 223
Perdido, orden, 459
Perfil, 12, 15
Período
  espacial (λ), 15
  temporal (τ), 16
Permeabilidad (μ), 41
  relativa (K_M), 41, 66
Permitividad (ϵ), 39
  relativa (K_E), 41, 66
Perot, Alfred, 421
Petzval, condición de, 271
Petzval, Josef Max, 224, 271
Petzval, lente de, 225
Petzval, superficie de, 271
Piel, profundidad de, 130
Pila de cuarto de onda, 429, 555
Pila de láminas, polarizador de, 350
Planas, ondas, 26, 46
  vector de onda (k), 26, 28
Planck, constante de, 8, 51, 591
Planck, ley de radiación de, 591
Planck, Max Karl Ernst Ludwig, 8, 591
Plano de incidencia, 119
Plano de vibración, 324
Plasma, frecuencia de (ω_p), 132
Platón, 1
Población, inversión de, 596
Pockels, célula, 371
Pockels, efecto, 371
Pockels, Friedrich Carl Alwin, 371
Poder absorbente (α), 589
Pohl, interferómetro de, 413, 414
Pohl, Robert Wichard, 495
Poincaré, Jules Henri, 7
Poisson, distribución de, 54
Poisson, punto de, 494
Poisson, Siméon Denis, 494
Polares, moléculas, 68
Polarización, 324, 346, 390
  ángulo de (θ_p), 116, 118, 348
  circular, 325
  compensadores, 356
  eléctrica, 68
  electrónica, 68
  elíptica, 327
  fotones de, 329
  grado de (V), 352
  iónica, 68
  láminas de cuarto de onda, 355
  láminas de media onda, 353, 355
  láminas de onda, 352
  lineal, 45, 324
  luz no polarizada, 329, 373
  notas históricas, 5
  orientacional, 68
  plana, 324
  por esparcimiento, 346
  por reflexión, 347
  retardadores, 356
  rombos, 356
Polarización, eléctrica (P), 68, 649
Polarizada, luz del cielo, 347
Polarizadores, 331
  birrefringentes, 336
  circulares, 357
Polaroide, 333
Policromática, luz, 358
Polivinílico, alcohol, 335, 354, 358
Porro, 196, 197
  ángulo recto, 196
  difusa, 100
  especular, 100, 477
  externa, 97, 127
  interna, 97, 129
  Reflexión, 97
  romboide, 197
Porta, Giovanni Battista Dalla, 2, 222
Porter, A. B., 620
Positiva, lente, 160
Positivo uniáxico, cristal, 343
Potencia dispersiva, 276
Poynting, John Henry, 47
Poynting, vector de, 46, 62, 120, 151
Presión de radiación ($\mathcal{P}$), 55
Primarias, aberraciones, 261
Primarios, colores, 135
Primer orden, teoría de, 158
Principal, ángulo de incidencia, 133
Principal, máximo, 461
Principal, rayo, 177, 266
Principal, sección, 339
Principales, planos, 251, 339
Principales, puntos, 251
Principio de acción mínima, 111
Principio de interferencia, 4
Principio de reversibilidad, 111
Principio de superposición, 289, 384
Principio de tiempo mínimo, 108
Prisma, compuesto de Fresnel, 363, 364
Prismas, 191
  dispersivos: *véase* también Prismas reflectores, 195
Probabilidad, amplitud de ($\wp$), 141, 143
Progresiva, onda, 15
Prokhorov, Alexander Mikhailovich, 587
Promedio temporal, 48, 82, 386
Propagación, número de, 28, 299
Propagación, vector de o vector de onda, 28
Pseudotérmica, luz, 583
  Bombeo, 596
  femtosegundos, 607
  Pulsos, 27, 65, 310, 607
  Tolomeo, Claudio, 1
Punto extendido, función de (δ), 534
Pupila de salida, emergencia de, 218
Pupilas, 177, 180, 208
Purkinje, figuras de, 210

Q- (factor de calidad), 600
QED (Electrodinámica cúantica), 37, 81, 142, 175
  delgadas, lentes, 173
  difracción, 443
Quelatos, láseres de, 606

Radiación, 57
  campo de, 59
  característica, 79
  carga acelerada linealmente, 57
  del dipolo eléctrico, 62
  presión de (3), 55

sincrotrón, 59, 60, 61, 77
zona de, 62
Radiante, densidad de flujo, 49
Radiante, flujo, 49
Radiointerferómetro, 449
Raman, Chandrasekhara Vankata, 609
Raman, esparcimiento, 610, 649
Raman, espectroscopía, 610
Rápido, eje, 353
Rayleigh [John William Strutt], 347, 472, 474, 478, 496, 591, 616
Rayleigh, 347, 610, 649
Rayleigh, criterio de, 424, 472, 479
Rayleigh, esparcimiento, 85, 347, 610, 611, 649
Rayleigh, microscopio, teoría de la imagen, 616
Rayleigh-Jeans, fórmula de, 591
Rayos, 99, 106
colimado, 166
convergente, 151
dirección en cristales, 341
divergente, 151
extraordinario, 339
marginal, 178, 221
meridional, 199, 254
oblicuo, 254
ordinario, 339
principal, 177, 266
Rayos, trazado de, 253
Rayos-X, 72, 78, 209
Bragg, Ley de, 484
colimación de, 205
naturaleza transversal, 348
radiación blanca, 484
rango de frecuencia, 78
rasante, incidencia, 118, 204
Rectificación, óptica, 650
Red, ecuaciones de, 476
Red periódica, teorema de la, 547
Reflectancia ($\mathscr{R}$), 120, 350, 423
de metales, 133
Reflectores, prismas, 195
acromáticos, 196
Amici, 196
Dove, 196
esquina de cubo, prisma de, 197
Leman-Springer, 197
Reflexión total interna frustrada (RTIF), 129
Refracción, 93, 100, 101
en superficies asféricas, 152
Refracción, índice de (n), 66, 70, 72
del aire, 66
relativo, 103
Refracción, índices de cristales birrefringentes, tabla, 342
Refractada, onda, 77
Relativa, apertura, 179
Relativo, índice de refracción, 103
Resolución, 424, 471
Resolución, poder de, 222, 473
cromática ($\mathscr{R}$), 425
Resonancia, frecuencia de, 65, 70
Resonancia, perfil de, 548
Resonancia, radiación de, 596
Resonante, cavidad, 260, 596
Resonante, frecuencia, 69, 70
Retardadores, 352
Retardo, 353, 355
Retículo, 219
Retrato, lente para, de Petzval, 224
Reversión, 182
Revestimiento, 200
Ritchey-Chrétien, telescopio, 231
Rittenhouse, David, 474, 483
Ritter, Johann Wilhelm, 78
Rochon, 381
rejilla de alambre, 332
Rombo, 352
Römer, Ole Christensen, 3, 338
Ronchi, rayado, 556
Röntgen, Wilhelm Conrad, 78
Rotatoria, dispersión, 364
Rotatorio, interferómetro de Sagnac, 435
Rotatorio, poder, 363
Rubinowicz, Adalbert, 515

Sagital, coma, 266
Sagital, foco, 270
Sagital, plano, 269
Sagitales, rayos, 269
Sagnac, interferómetro de, 411, 434
Sal, 68, 341, 342
Salida, pupila de, 177, 216, 221
Saturado, color, 136
Scylla IV, 411
Schawlow, Arthur Leonard, 587
Scheiner, Christoph, 207
Schlieren, método, 628
Schmidt, Bernhard Voldemar, 233
Schmidt, cámara de, 233, 273
Schrödinger, ecuación de, 37
Schrödinger, Erwin C., 8, 37, 81, 111
Schwartz, Laurent, 528
Secundario, espectro, 280
Secundario, máximo, 461
Seidel, aberraciones de, 261, 272
Seidel, Ludwig van, 261
Sellmeier, 85
Séneca, 1
Seno, condición del, 268
Seno óptico, teorema del, 267
Señal, velocidad de (v_s), 304
Signos, convención de, 157, 168
Silicio, monóxido de, 181
Sinc, función, 48, 307, 451, 570
Sincrotrón, radiación, 59
Sinusoidales, ondas, 15
Smekal, Adolf, 609
Smith, Robert, 166
Smith, T., 255
Smoluchowski, M., 88
Snell, Ley de, 2, 102, 113, 193, 400
Snell, Willebrard, 2, 102
Sodio, luz de, 66
Solar, constante, 655
Soleil, compensador de, 357
Sommerfeld, Arnold Johannes Wilhelm, 105, 444, 515
Sonnar, lente, 272
Sparrow, C., 474
Sparrow, Criterio de, 474
Stefan, Josef, 588
Stefan-Boltzmann, Ley de, 588
Stokes, análisis de reflexión y refracción de, 139
Stokes, George Gabriel, 139, 372, 609
Stokes, parámetros de, 372
Stokes, transición de, 609
Stroke, George W., 478
Substractiva, coloración, 137
Superficie, ondas de, 125
Superposición, 21-22, 289, 292, 382
Superposición, principio de, 21

Tabla 1, en apéndice
Tangencial, coma, 266
Tangencial, foco, 270
Tangencial, plano, 268
Taylor, H. Dennis, 224, 266
Taylor (o Cooke), triplete de, 224, 272, 280
Teleobjetivo, 224
Telescopio, 224
astronómico, 226, 227
aumento angular, 227
Baker, 234
Bouwers-Maksatov, 334
Cassegrain, 230
enderezamiento, sistema de, 228
Espacial Hubble (TEH), 185, 231
gregoriano, 230
Keck, 231
newtoniano, 230

primario, foco, 229
reflectores, sistemas, 229
refractor sistemas, 226
Schmidt, 233
sistemas catadióptricos, 231
terrestre, 228
TEM, modo, 599
Temporal, coherencia, 389, 565, 577, 607
grado complejo de, 577
Tercer orden, teoría de, 158, 261
Térmica, luz, 58
Térmica, radiación, 77, 587
Termógrafo, 76
Tessar, lente, 225, 257, 258
Toepler, August (Töpler), 629
Tóricas, lentes, 215
Total interna, reflexión, 123, 199, 200
Townes, Charles Hard, 187
Transferencia, ecuación de, 255
funciones, 555
matriz ($\mathscr{T}$), 256
Transición, probabilidad de, 71
Transmisión, eje de, 331
Transmitancia (T), 120, 423
unidad (T_1), 149
Transversales, ondas, 12
electromagnéticas, 45
notas históricas, 5
Tren de onda, 65, 311
Tungsteno, lámpara de, 77
Turmalina, 333
Twiss, R. Q., 581
Twyman-Green, interferómetro de, 434
Tyndall, John, 92

Ulexita, 201
Ultravioleta, 74, 78, 132
espejos, 180
Uniáxico, cristal, 342
Unitarios, planos, 252
Upatnieks, Juris, 634
Urraca de América, plumas de, 87

V, números, 276
Van Cittert-Zernike, teorema de, 571, 578
Vectógrafo, polaroide, 335
Velocidad de la luz, medida por la luna de Júpiter, 3
Velocidad de perfil, 12
Velocidad, lente, 179
Ventana de entrada, 221
de salida, 221
rejilla de alambre, polarizadores de, 332
Verdet, constante de, 368
Verdet, Emile, 565
Vértice (V), 157
Vibración, curva de, 295, 489
Vidrio, 71, 72, 196, 278
Vidrio quemador, 1, 154, 165
Viñeteado, 178
Virtual, imagen, 156, 159
fotones, 38, 81
objeto, 159
Visibilidad ($\mathscr{V}$), 567, 637
Visión
astigmatismo, 214
gafas, 210
hipermetropía, 213
miopía, 212
punto lejano, 210, 213
punto próximo, 210
rango de longitud de, 209
Vista corta, 212
Vitello, 1
Vítreo, humor, 208
Voigt, efecto, 369
Von Laue, Max, 484

Weber, Wilhelm, 44
Wheatstone, Charles, 5
Wien, Ley de desplazamiento de, 590
Wien, Wilhelm Carl Werner Otto Fritz Franz, 590
Wiener, Experimento de, 297
Wiener, Otto, 298
Wiener-Khintchine, Teorema de, 550
Wolf, Emil, 515
Wollaston, 341, 344, 381
Wollaston, Prisma de, 344
Wollaston, William Hyde, 9, 267
Wood, Robert Williams, 477, 497
Woodbury, Eric J., 611

YAG (granate de aluminio e itrio), 603
Yerkes, Observatorio de, 180
YIG (granate de itrio y hierro), 369
Young, Experimento de, 393, 515, 531, 545, 566, 574, 578
Young, Teoría de difracción de, 515
Young, Thomas, 4, 348, 393, 515, 531

Zeeman; Efecto, 300
Zeiss, Carl, 222, 616
Zeiss, lente del ortómetro, 225, 272
Zeiss Sonnar lente, 272
Zernike, Fritz, 565, 625, 628
Zinc, sulfuro de, 429
Zirconio, dióxido de, 429
Zonal, construcción, 486
Zonal, placa, 496, 631, 640